

Spis treści

Zadanie 1. Metody rozwiązywania równań nieliniowych z jedną niewiadomą	2
a) <i>metoda bisekcji</i>	4
b) <i>metoda siecznych</i>	
c) <i>metoda Newtona (stycznych)</i>	
d) <i>porównanie</i>	
Zadanie 2. <i>Metoda Mullera MM1</i>	8
Załącznik 1. <i>Kod źródłowy zadania 1.</i>	15
Załącznik 2. <i>Kod źródłowy zadania 2.</i>	20

## Zadanie 1. Metody rozwiązywania równań nieliniowych z jedną niewiadomą

Celem zadania jest napisanie programu obliczającego wszystkie zera funkcji

$f(x) = 2.3 \cdot \sin(x) + 4 \cdot \ln(x+2) - 11$  w przedziale  $[2, 12]$ .

1. Wybór przedziałów startowych oraz ograniczeń.
2. Implementacja metod (oraz stworzenie warunków, w których minimum jedna z nich zawodzi):
  - a. bisekcji
  - b. siecznych
  - c. stycznych (Newtona)
3. Porównanie zaimplementowanych metod.

### Koncepcja rozwiązania

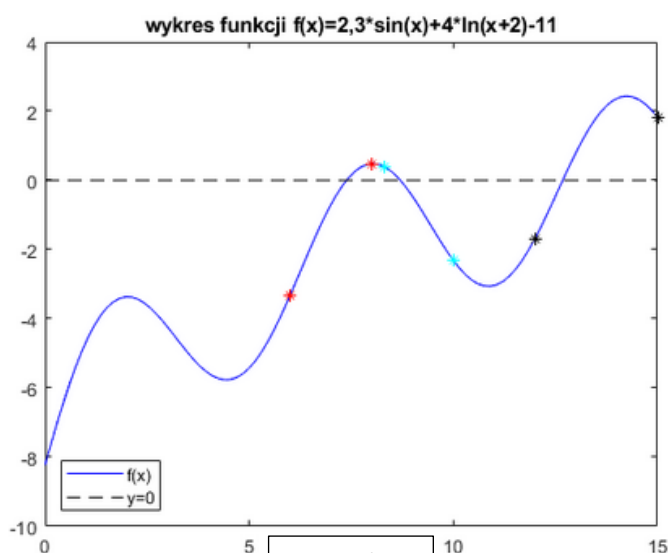
1. Początkowo napisana została metoda wspomagająca rysowanie wykresu funkcji (rysunek 1).

Przedziały zaś zostały dobrane wg. dwóch kryteriów:

- 1) maksymalna wielkość
- 2) możliwość poprawnego wykonania każdej metody dla zadanej funkcji w zadanym przedziale.

Ostateczne przedziały startowe zostały wybrane *metodą inżynierską*

*intuicji oraz prób i błędów* jak przedstawiono na rysunku 1 -  $[6;8]$ ,  $[8.3;10]$ ,  $[12; 15]$ .



### Ograniczenia:

- **Każda z metod** została ograniczona parametrem globalnym **dokladnosc\_zer** określającym maksymalny moduł liczby mogącej być uznawanej w przybliżeniu za równą 0.
- **Metoda bisekcji oraz siecznych** zostały również ograniczone parametrem globalnym **wielkosc\_przedzialu**, aby zapobiegać przypadkom, w którym dla funkcji o małym nachyleniu pierwiastki zostaną wyznaczone niedokładnie.
- **Metoda stycznych (Newtona)** została ograniczona ze względu na maksymalną liczbę iteracji - **ilosc\_iteracji**.
- **Metoda stycznych (Newtona)** zostaje przerywana gdy któryś z kolejno wyznaczonych punktów wychodzi poza początkowy przedział – funkcja

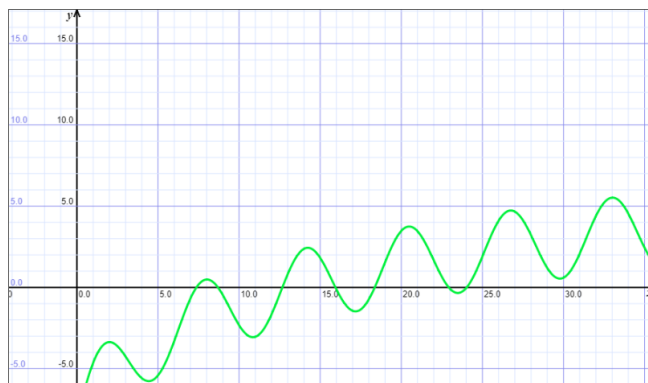
**nowy\_przedzial\_sieczny** chroni przed pochodną o zbyt małym nachyleniu zgłaszając błąd w niedozwolonym przypadku.

## Sprawdzenie

1. Do sprawdzenia poprawności wyznaczonego wykresu użyty został generator wykresów ze strony:

[matemaks.pl/program-do-rysowania-wykresow-funkcji.html](http://matemaks.pl/program-do-rysowania-wykresow-funkcji.html)

Wygenerowany został rysunek 2 pokrywający się z rysunkiem 1.



rysunek 2

## Komentarz

- a. W celu zautomatyzowania wyboru przedziałów startowych dla metody bisekcji oraz siecznych można napisać funkcję **wybierz\_przedziały** działającą wg. listy kroków:
  - 1) Podziel badany przedział na 100 części – małych przedziałów. Przedziały te powinny nachodzić na siebie z dokładnością do epsilon, tak aby nie było przypadku, w którym jeden kończy się na miejscu zerowym, a drugi na nim zaczyna (przypadek nieobsłużony przez metody).
  - 2) Dla każdego małego przedziału przeprowadź test **sprawdzenie\_przedziału** sprawdzający warunek  $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$ .
  - 3) W przypadku spełnienia warunku dopisz go do wektora przedziałów, w których znajduje się pierwiastek funkcji.
  - 4) Na podstawie utworzonego wektora oblicz miejsca zerowe.

W projekcie metoda ta nie została zaimplementowana ze względu na wymóg doboru szerokich przedziałów startowych.

## Zadanie 1a. Metoda bisekcji

### Koncepcja rozwiązania

Zaimplementowana została klasyczna metoda bisekcji:

1. Z przedziału  $[x_1, x_2]$  wyznacz punkt  $c = (x_1 + x_2)/2$ .
2. Jeśli  $c$  jest miejscem zerowym oraz przedział jest odpowiednio mały zwróć  $c$ .
3. Jeśli nie za pomocą metody `sprawdź_przedział` wybierz  $[x_1, c]$  lub  $[c, x_2]$ , w którym znajduje się miejsce zerowe.
4. Powrót do kroku i.

### Sprawdzenie

Dla parametrów `dokladnosc_zer=0.001` oraz `wielkosc_przedzialu=0.1`.

```
metoda bisekcji przedzial nr 1 ([6;8])
x=7.000000 y=-0.700033
x=7.500000 y=0.162567
x=7.250000 y=-0.208420
x=7.375000 y=-0.006645
x=7.437500 y=0.082156
x=7.406250 y=0.038790
x=7.390625 y=0.016329
x=7.382813 y=0.004906
x=7.378906 y=-0.000853
metoda bisekcji przedzial nr 2 ([8.3;10])
x=9.150000 y=-0.730176
x=8.725000 y=-0.028380
x=8.512500 y=0.229330
x=8.618750 y=0.110034
x=8.671875 y=0.043095
x=8.698438 y=0.007909
x=8.711719 y=-0.010100
x=8.705078 y=-0.001061
x=8.701758 y=0.003432
x=8.703418 y=0.001187
x=8.704248 y=0.000064
metoda bisekcji przedzial nr 3 (12;15)
x=13.500000 y=1.812064
x=12.750000 y=0.184950
x=12.375000 y=-0.775508
x=12.562500 y=-0.295103
x=12.656250 y=-0.054088
x=12.703125 y=0.065796
x=12.679688 y=0.005930
x=12.667969 y=-0.024062
x=12.673828 y=-0.009061
x=12.676758 y=-0.001564
x=12.678223 y=0.002183
x=12.677490 y=0.000310
```

## Komentarz

- a. Metoda bisekcji działa zgodnie z oczekiwaniami – w każdym kroku widać, że o połowę zmniejsza zadany w danej iteracji przedział. Co ciekawe jest to metoda, która

## **Zadanie 2. Aproksymacja funkcji**

Celem zadania jest napisanie programu, który będzie aproksymował wielomianową funkcję na podstawie zadanych punktów dwiema metodami:

1. układu równań normalnych
2. układu równań liniowych wynikającego z rozkładu QR

Ponadto dla każdego układu należy obliczyć błąd rozwiązania jako normę residuum.

## Koncepcja rozwiązania

Dla zestawu  $(x,y)$ :

```
dane = [-5 -5.4606;-4 -3.8804;-3 -1.9699;-2 -1.6666;-1 -0.0764;0 -  
0.3971;1 -1.0303;2 -4.5483;3 -11.528;4 -21.6417;5 -34.4458];
```

wyznaczone zostały aproksymacje na podstawie obu metod. Wykorzystane do tego zostały funkcje, które za parametr przyjmują wektor  $x$ ,  $y$  oraz stopień wielomianu, który ma służyć jako przybliżenie funkcji tworzącej dane.

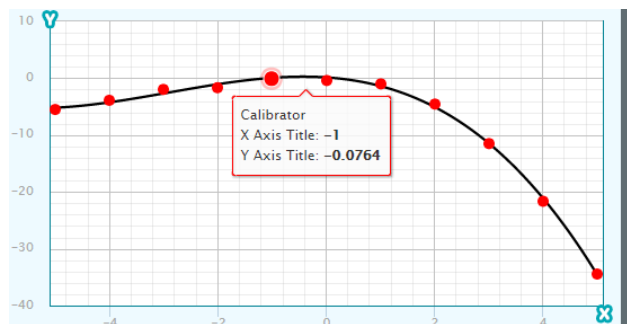
1. Algorytm układu równań normalnych:
  - 1) wyznaczenie macierzy  $(G)$  Grama jako iloczynu przekształceń – w tym przypadku sumowanie potęg  $x$

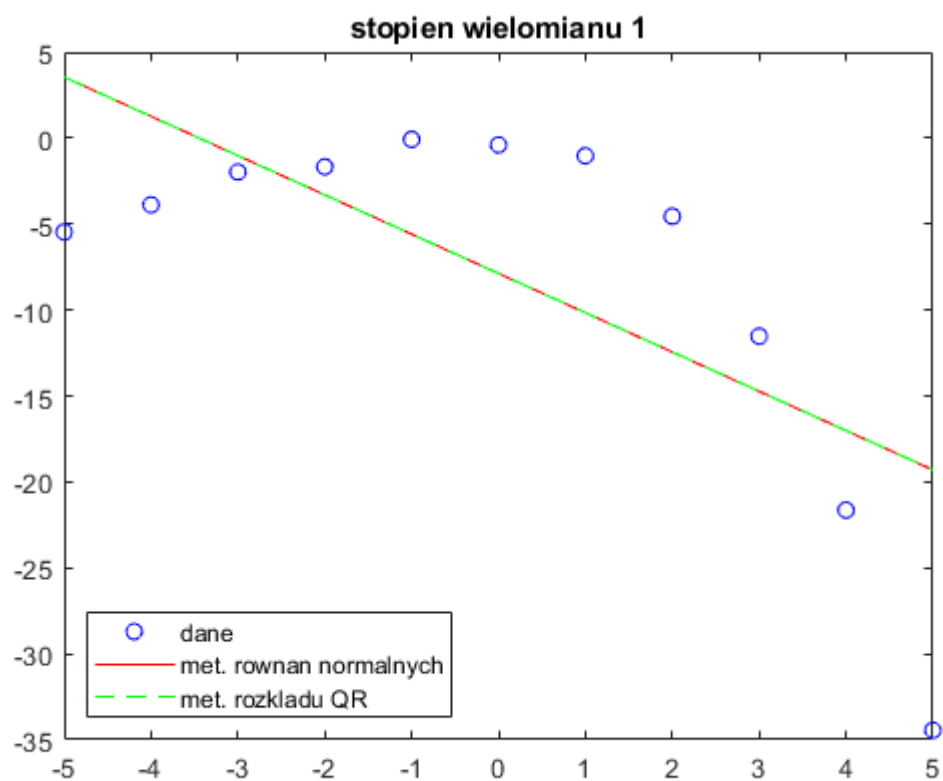
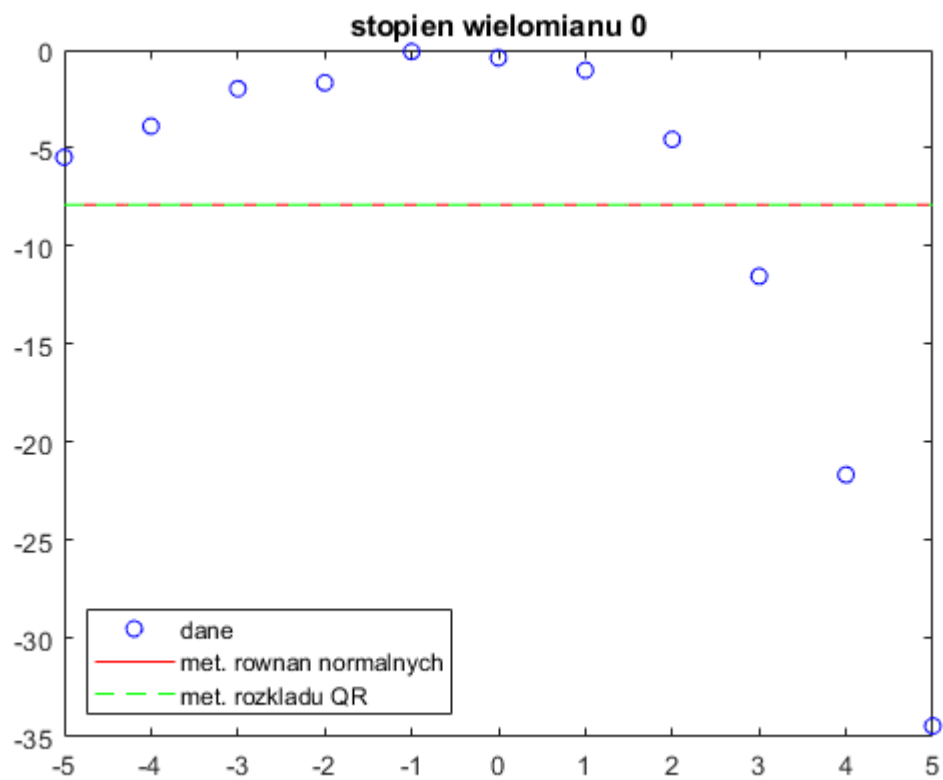
- 2) wyznaczenie macierzy prawej strony ( $P$ ) jako *przekształcenie\*korespondująca wartość wyjściowa ( $y$ )*
  - 3) obliczenie równania  $GX = P$ .  
komentarz: pozwoliłem sobie użyć wbudowanej w Matlaba funkcji `\`, gdyż przy poprzednim zadaniu samodzielnie pisałem funkcję obliczającą równania tego typu.
  - 4) potraktuj wyjście jako zbiór współczynników kolejnych potęg  $x$ .
2. Algorytm oparty na rozkładzie QR różni się jedynie tym, że w kroku 3 nie zostaje wykonane obliczenie równania  $GX = P$  tylko  $Rx=Q^TP$ .  
Komentarz: do dokonania rozkładu QR została wykorzystana napisana przeze mnie metoda rozkładu QR z poprzedniego zadania.

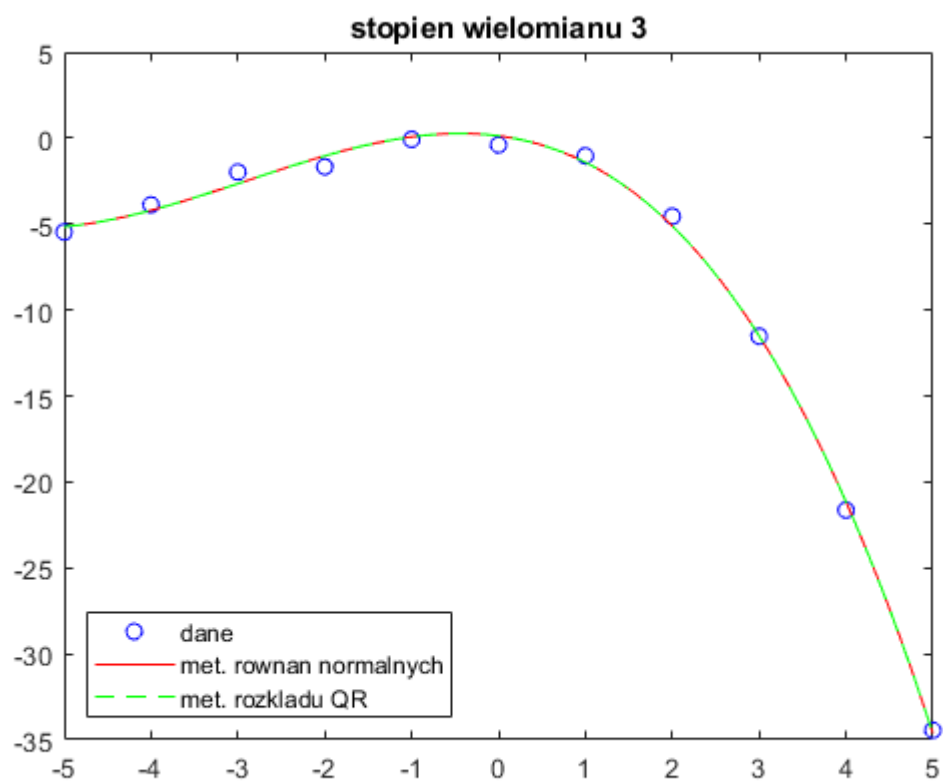
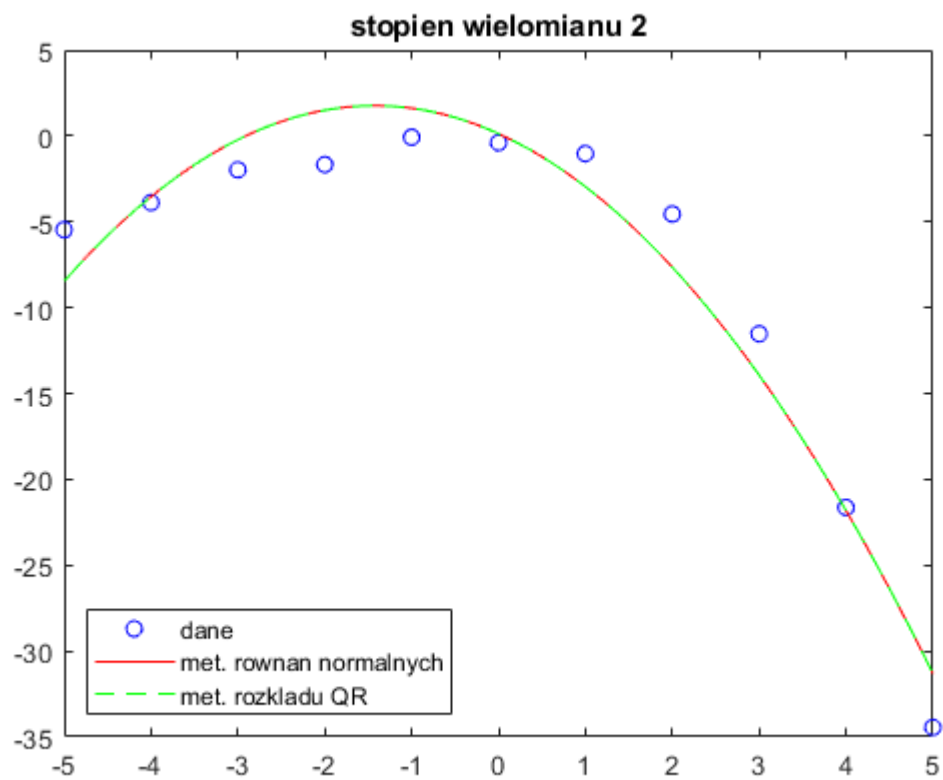
## Sprawdzenie

W celu sprawdzenia poprawności wykreowanych rozwiązań skorzystałem z:

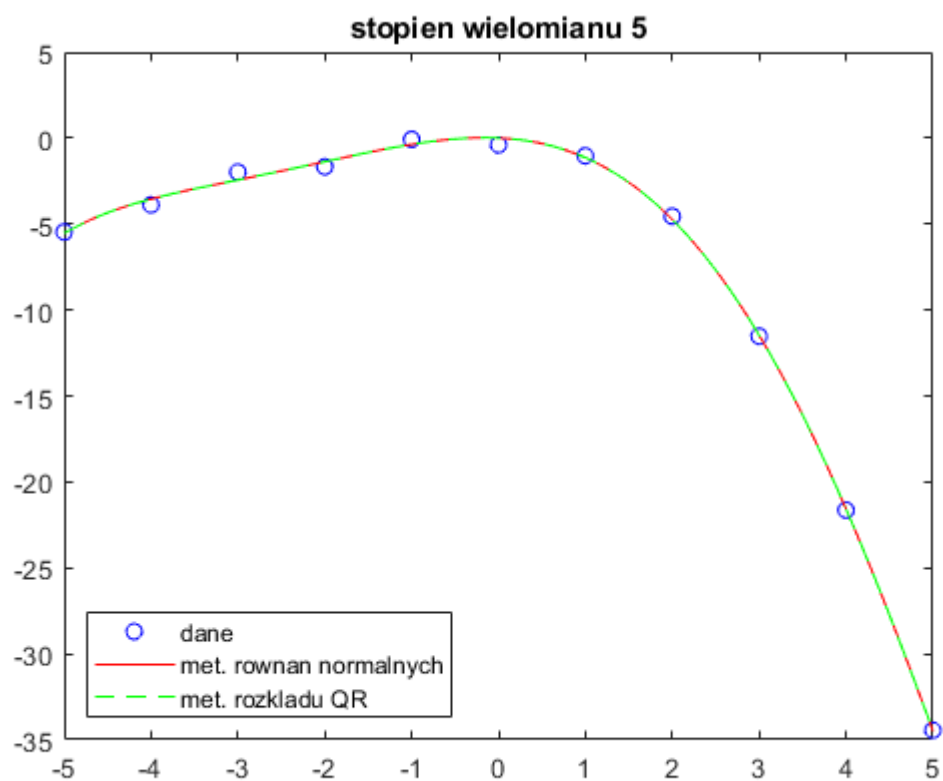
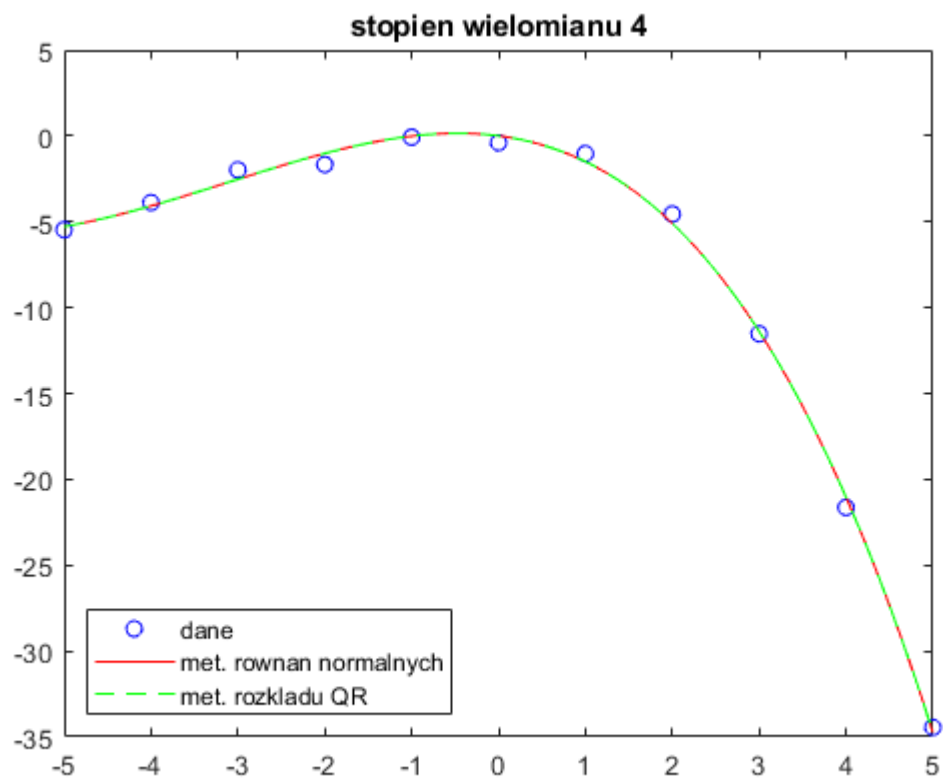
- efekt finalny: obliczania normy residuum
- poprawności rysowanych wykresów: strona, która na podstawie wyjścia generowanego przez mój program tworzyła wykresy, np. [https://www.wolframalpha.com/input/?i=-0.09-0.8\\*x-0.65\\*x%5E2%2B0.13\\*x%5E3](https://www.wolframalpha.com/input/?i=-0.09-0.8*x-0.65*x%5E2%2B0.13*x%5E3)
- dokładność przybliżenia: na podstawie danych weryfikowałem czy wykres jest dość dokładny jak na zadane wejście za pomocą <https://mycurvefit.com/> (przykład generowany przez stronę dla 3 stopnia)

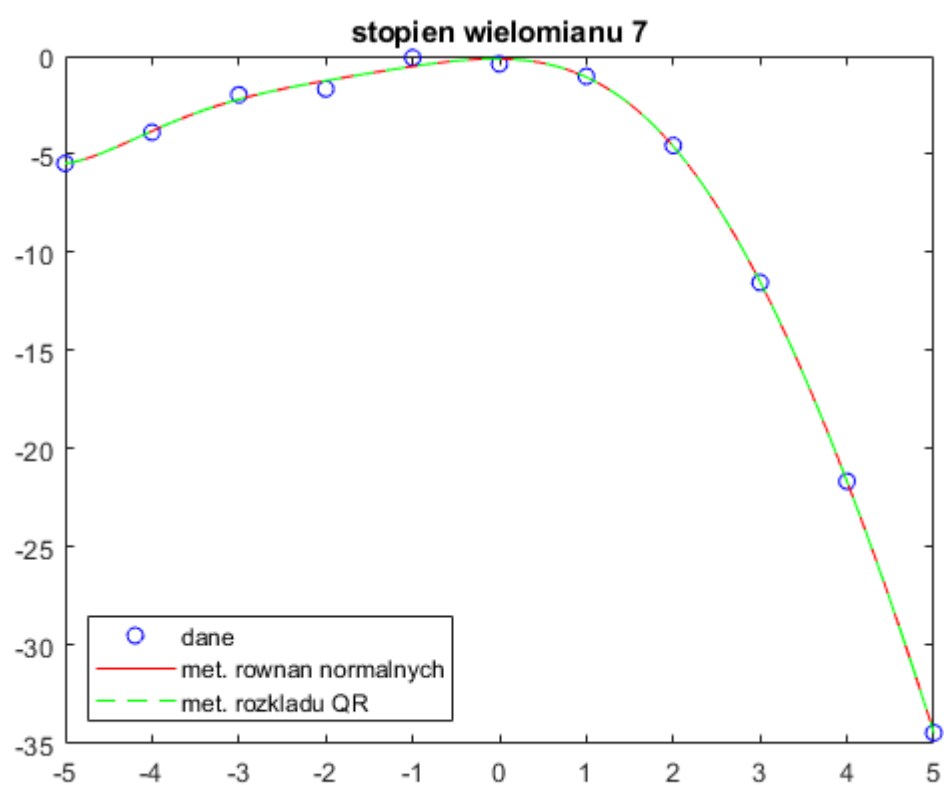
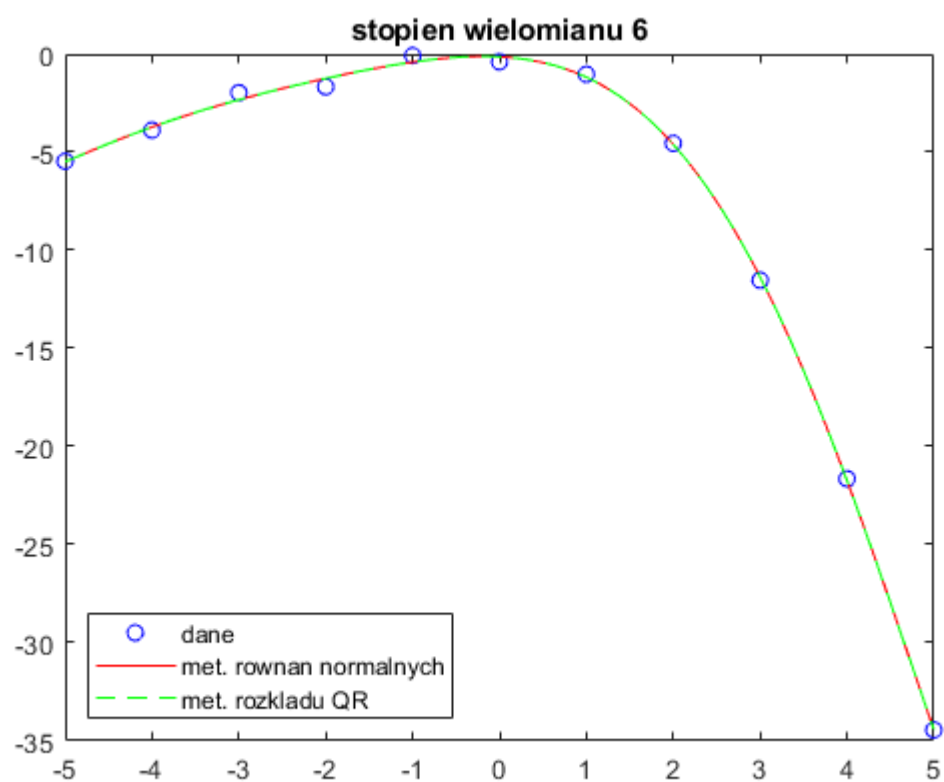


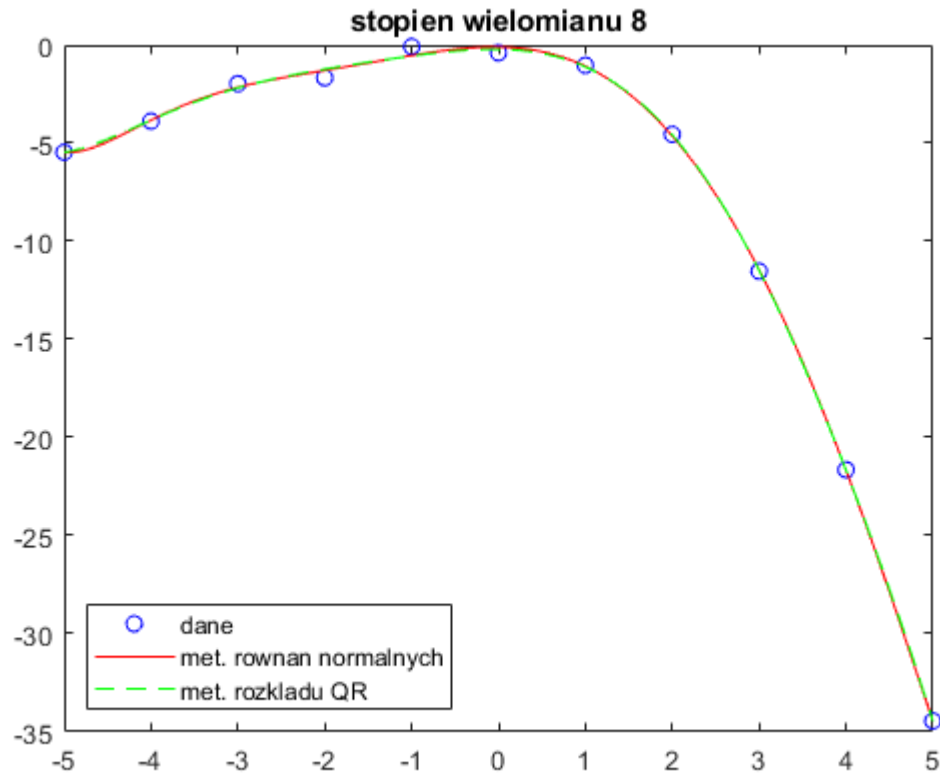












```
norma_res = 9x2
```

met. rown norm	met QR
34.3326	34.3326 - stopień 0
24.5832	24.5832 - stopień 1
7.3647	7.3647 - stopień 2
1.4390	1.4390 - stopień 3
1.3958	1.3958 - stopień 4
0.8501	0.8501 - stopień 5
0.7595	0.7595 - stopień 6
0.7069	0.7069 - stopień 7
0.6997	0.7181 - stopień 8

## Komentarz

Obie metody dobrze dokonują aproksymacji dla zadanego zestawu danych już przy 3 stopniu wielomianu. Do 7. stopnia wielomianu różnice pomiędzy obiema metodami są wręcz niezauważalne – zarówno wykresy jak i norma residuum są takie same. Przy większym stopniu metoda QR traci nieznacznie na rzecz metody równań normalnych. Wynikać to może ze stosowania dodatkowego rozkładu, który przy większych macierzach nieco traci na dokładności – może to dziać się np. na etapie ortogonalizacji Grama-Schmidta gdyż występuje coraz większe pole do popełnienia błędów np. w elemencie sumy.

## Załącznik 1. Kod źródłowy zadania 1.

program

```
clc;
clear;
iteracje_sym_bezprzes = zeros(30);
iteracje_sym_przes = zeros(30);
cond_sym = zeros(30);
cond_niesym = zeros(30);
iteracje_niesym_przes = zeros(30);
for rozmiar = [5 10 20]
    for i = 1:30
        A = macierz_symetryczna(rozmiar);
        [B iteracje_sym_bezprzes(i,rozmiar)] = qr_bezprzesuniec(A);
        [B iteracje_sym_przes(i,rozmiar)] = qr_przesuniecie(A);
        cond_sym(i,rozmiar) = cond(A);
        %eig(A);
        A = macierz_niesymetryczna(rozmiar);
        [B iteracje_niesym_przes(i,rozmiar)] = qr_przesuniecie(A);
        cond_niesym(i,rozmiar) = cond(A);
    end
end
```

statystyki i czyszczenie danych

```

for rozmiar = [5 10 20]
    rozmiar
    sr_sym_bezprzes = iteracje_sym_bezprzes(:,rozmiar)
    sr_sym_przes = iteracje_sym_przes(:,rozmiar)
    sr_niesym_przes = iteracje_niesym_przes(:,rozmiar)
    for i = 1:3
        [wart indx] = max(cond_sym(:,rozmiar));
        iteracje_sym_bezprzes(indx,rozmiar) = 0;
        iteracje_sym_przes(indx,rozmiar) = 0;
        cond_sym(indx,rozmiar) = 0;

        [wart indx] = max(cond_niesym(:,rozmiar));
        iteracje_niesym_przes(indx,rozmiar) = 0;
        cond_niesym(indx,rozmiar) = 0;
    end
end

for rozmiar = [5 10 20]
    rozmiar
    sr_sym_bezprzes = mean(iteracje_sym_bezprzes(:,rozmiar))
    sr_sym_przes = mean(iteracje_sym_przes(:,rozmiar))
    sr_niesym_przes = mean(iteracje_niesym_przes(:,rozmiar))
end

```

wykresy

```

for rozmiar = [5 10 20]
    figure
    plot(cond_sym(:,rozmiar),iteracje_sym_bezprzes(:,rozmiar),'bo',
cond_sym(:,rozmiar), iteracje_sym_przes(:,rozmiar), 'r*');
    title(['Macierz symetryczna o rozmiarze ' num2str(rozmiar)])
    xlabel('wskaznik uwarunkowania')
    ylabel('ilosc potrzebnych iteracji')
    legend({'bez przesuniec','z przesunieciami'},'Location','northeast');
    figure
    plot(cond_niesym(:,rozmiar),iteracje_niesym_przes(:,rozmiar),'go');
    title(['Macierz niesymetryczna o rozmiarze ' num2str(rozmiar)])
    xlabel('wskaznik uwarunkowania')
    ylabel('ilosc potrzebnych iteracji')
    legend({'z przesunieciami'},'Location','northeast');
end

```

## funkcje pomocnicze

rozklad QR

```

function [Q R] = qr_rozklad(A)
    [r_wiersze r_kolumny] = size(A);
    Q = zeros(r_wiersze);
    if r_wiersze > r_kolumny
        R = eye(r_wiersze);
        Q = eye(r_wiersze);
    else
        R = eye(r_kolumny);
    end

```

```

        Q = eye(r_wiersze);
    end
    %Gram-Schmidt
    for i = 1:r_kolumny
        Q(:,i) = A(:,i);
        for j = 1:(i-1)
            R(j,i) = mydot(Q(:,j),A(:,i))/mydot(Q(:,j),Q(:,j));
            Q(:,i) = Q(:,i) - R(j,i)*Q(:,j);
        end
    end
    Q = Q(1:r_wiersze,1:r_kolumny);
    %normalizacja
    N = zeros(r_wiersze);
    for i = 1:r_kolumny
        N(i,i) = norm(Q(:,i));
        Q(:,i) = Q(:,i)/N(i,i);
    end
    R = N*R;

    if r_wiersze > r_kolumny
        R = R(1:r_kolumny,1:r_kolumny);
    else
        R = R(1:r_wiersze,1:r_wiersze);
    end
end

```

algorytm obliczania wartosci wlasnych metoda QR bez przesuniec

```

function [wart_wlasne i] = qr_bezprzesuniec(A)
    i = 0;
    while tolerancja(A) > 0.00001 & i < 200+1
        [Q R] = qr_rozklad(A);
        A = R * Q;
        i = i+1;
    end
    wart_wlasne = wektor(A);
end

```

algorytm obliczania wartosci wlasnych metoda QR z przesunieciami

```

function [wart_wlasne i] = qr_przesuniecia(A)
    rozmiar = size(A,1);
    i = 0;
    wart_wlasne = zeros(rozmiar);
    wart_wlasne = wart_wlasne(:,1);
    for j = rozmiar:-1:2
        while max(abs(A(j,1:j-1))) > 0.00001 & i < 200+1
            mala_macierz = A(j-1:j,j-1:j);
            macierz 2x2,
            [x1 x2] = pierw_f_kwadratowej(mala_macierz);
            przesuniecie = blizsza_liczba(mala_macierz(2,2), x1, x2); % z
            ktorej wyznaczana jest najlepsza wart. wlasna
            A = A - eye(j)*przesuniecie;
            [Q R] = qr_rozklad(A);
            A = R * Q + eye(j)*przesuniecie;
        end
        wart_wlasne(j) = wart_wlasne(j) + przesuniecie;
        i = i+1;
    end
end

```

```

        i = i+1;
    end
    wart_wlasne(j) = A(j,j);
    if j > 2
        A = A(1:j-1,1:j-1);           %deflacja
    else
        wart_wlasne(1) = A(1,1);
    end
end
end
end

```

wyznaczanie pierw f. kwadratowej

```

function [x1 x2] = pierw_f_kwadratowej(mala_macierz)
    a = 1;
    b = -(mala_macierz(1,1)+mala_macierz(2,2));
    c = (mala_macierz(1,1)*mala_macierz(2,2))-
(mala_macierz(2,1)*mala_macierz(1,2));

    x1 = (-b + sqrt(b*b - 4*a*c))/(2*a);
    x2 = (-b - sqrt(b*b - 4*a*c))/(2*a);
    if abs(x2) > abs(x1)
        x1 = x2;
    end
    %drugi pierwiastek ze wzorów Viete'a
    x2 = ((-b)/a) - x1;
end

```

wybor pierwiastka bliższego d(n,n)

```

function x = blizsza_liczba(wlasciwa, x1, x2)
    if abs(wlasciwa-x1) < abs(wlasciwa-x2)
        x = x1;
    else
        x = x2;
    end
end

```

autorska implementacja matlabowej funkcji dot()

```

function md = mydot(A,B)
    rozmiar = size(A);
    md = 0;
    for i = 1:rozmiar
        md = md + A(i)*B(i);
    end
end

```

funkcja wektoryzująca macierz diagonalną

```

function w = wektor(A)
    rozmiar = size(A);
    for i = 1:rozmiar
        w(i,1) = A(i,i);
    end
end

```

sprawdzenie tolerancji

```
function tol = tolerancja(A)
    rozmiar = size(A);
    A = abs(A);
    tol = 0;
    if rozmiar > 2
        for i = 1:rozmiar
            if max(A(i,i+1:end)) > tol
                tol = max(A(i,i+1:end));
            end
            if max(A(i,1:i-1)) > tol
                tol = max(A(i,1:i-1));
            end
        end
    else
        tol = 0;
    end
end
```

tworzenie macierzy symetrycznej o zadanym rozmiarze

```
function mac_sym = macierz_symetryczna(rozmiar)
    mac_sym = randi([0 50],rozmiar,rozmiar);
    mac_sym = mac_sym + mac_sym';
end
```

tworzenie macierzy niesymetrycznej o zadanym rozmiarze

```
function mac_nsym = macierz_niesymetryczna(rozmiar)
    mac_nsym = randi([0 100],rozmiar,rozmiar);
end
```

norma residuum

```
function nr = norma_residuum(wspolczynniki, x, rozw)
    residuum = wspolczynniki*x - rozw;
    nr = norm(residuum);
end
```



## Załącznik 2. Kod źródłowy zadania 2.

program

```
clc;
clear;

dane = [-5 -5.4606;-4 -3.8804;-3 -1.9699;-2 -1.6666;-1 -0.0764;0 -0.3971;1 -
1.0303;2 -4.5483;3 -11.528;4 -21.6417;5 -34.4458];

x = linspace(-5,5,100);

max_stopien = 8;

norma_res = zeros(max_stopien);

norma_res = norma_res(:,1:2);

for stopien = 0:max_stopien
    figure
    funkcja = ukklad_rownan_normalnych(dane, stopien);
    y = fun(funkcja, x);
    funkcja2 = ukklad_qr(dane, stopien);
    y2 = fun(funkcja2, x);
```

```

plot(dane(:,1),dane(:,2),'bo', x, y, 'r', x, y2, 'g--');
legend({'dane','met. rownan normalnych','met. rozkladu
QR'},'Location','southwest');
title(['stopien wielomianu ' num2str(stopien)]);
norma_res(stopien+1,1) = norm(dane(:,2) - fun(funkcja, dane(:,1)));
norma_res(stopien+1,2) = norm(dane(:,2) - fun(funkcja2, dane(:,1)));
end
norma_res

```

funkcje pomocnicze

uklad rownan normalnych

```

function wspolczynniki = ukklad_rownan_normalnych(dane, st_wielomianu)
% wyznaczanie macierzy Grama - <przekształcenie_i,przekształcenie_j>
[r_wiersze, r_kolumny] = size(dane);
st_wielomianu = st_wielomianu + 1;
macierz_Grama = wyzn_macierz_Grama(dane, st_wielomianu);

% wektor prawej strony
prawa_strona = zeros(st_wielomianu);
prawa_strona = prawa_strona(:,1);
for i = 1:st_wielomianu
    for k = 1:r_wiersze
        prawa_strona(i) = prawa_strona(i) + (dane(k,1))^(i-1)*dane(k,2);
    end
end

wspolczynniki = macierz_Grama\prawa_strona;
end

```

uklad wynikajacy z rozkladu QR

```

function wspolczynniki = ukklad_qr(dane, st_wielomianu)
% wyznaczanie macierzy Grama - <przekształcenie_i,przekształcenie_j>
[r_wiersze, r_kolumny] = size(dane);
st_wielomianu = st_wielomianu + 1;
macierz_Grama = wyzn_macierz_Grama(dane, st_wielomianu);

```

```

% wektor prawej strony
prawa_strona = zeros(st_wielomianu);
prawa_strona = prawa_strona(:,1);
for i = 1:st_wielomianu
    for k = 1:r_wiersze
        prawa_strona(i) = prawa_strona(i) + (dane(k,1))^(i-1)*dane(k,2);
    end
end

[Q R] = qr_rozklad(macierz_Grama);
wspolczynniki = R\Q'*prawa_strona;
end

```

wyznaczenie macierzy Grama

```

function macierz_Grama = wyzn_macierz_Grama(dane, st_wielomianu)
% wyznaczanie macierzy Grama - <przekształcenie_i,przekształcenie_j>
macierz_Grama = zeros(st_wielomianu);
[r_wiersze, r_kolumny] = size(dane);
for i = 1:st_wielomianu
    for j = 1:st_wielomianu
        for k = 1:r_wiersze
            macierz_Grama(i,j) = macierz_Grama(i,j) + (dane(k,1))^(i+j-2);
        end
    end
end
end
end

```

wyznaczenie wyjsc dla podanych x-ow i zadanej funkcji

```

function y = fun(funkcja, x)
[temp rozmiar_x] = size(x);
if rozmiar_x == 1
    x = x';
    rozmiar_x = temp;
end

```

```

    st_wielomianu = size(funkcja);
    y = zeros(rozmiar_x);
    y = y(:,1);
    for i = 1:rozmiar_x
        for j = 1:st_wielomianu
            y(i,1) = y(i,1) + funkcja(j,1)*(x(1,i))^(j-1);
        end
    end
end
end

```

rozkład QR

```

function [Q R] = qr_rozkład(A)
    [r_wiersze r_kolumny] = size(A);
    Q = zeros(r_wiersze);
    if r_wiersze > r_kolumny
        R = eye(r_wiersze);
        Q = eye(r_wiersze);
    else
        R = eye(r_kolumny);
        Q = eye(r_wiersze);
    end
    %Gram-Schmidt
    for i = 1:r_kolumny
        Q(:,i) = A(:,i);
        for j = 1:(i-1)
            R(j,i) = mydot(Q(:,j),A(:,i))/mydot(Q(:,j),Q(:,j));
            Q(:,i) = Q(:,i) - R(j,i)*Q(:,j);
        end
    end
    Q = Q(1:r_wiersze,1:r_kolumny);
    %normalizacja
    N = zeros(r_wiersze);
    for i = 1:r_kolumny
        N(i,i) = norm(Q(:,i));
    end
end

```

```

        Q(:,i) = Q(:,i)/N(i,i);
    end
    R = N*R;

    if r_wiersze > r_kolumny
        R = R(1:r_kolumny,1:r_kolumny);
    else
        R = R(1:r_wiersze,1:r_wiersze);
    end
end

```

autorska implementacja matlabowej funkcji dot()

```

function md = mydot(A,B)
    rozmiar = size(A);
    md = 0;
    for i = 1:rozmiar
        md = md + A(i)*B(i);
    end
end

```

funkcja wektoryzująca macierz diagonalna

```

function w = wektor(A)
    rozmiar = size(A);
    for i = 1:rozmiar
        w(i,1) = A(i,i);
    end
end

```