习题5.3

12.(1)(2)

① $|1-x|=\begin{cases}1-x & (0\le x\le 1)\\ x-1 & (1<x\le 2)\end{cases}$

$\therefore \int_0^1 1-x\,dx+\int_1^2 x-1\,dx$

$=(-\frac{1}{2}x^2+x)\Big|_0^1+(\frac{1}{2}x^2-x)\Big|_1^2$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

② $|x^2-2x-3|=|(x-3)(x+1)|$

$\therefore |x^2-2x-3|=\begin{cases}x^2-2x-3 & (-2\le x\le -1)\\ -x^2+2x+3 & (-1<x\le 3)\end{cases}$

$\int_{-2}^{-1}(x^2-2x-3)\,dx+\int_{-1}^{3}(-x^2+2x+3)\,dx$

$=(\frac{1}{3}x^3-x^2-3x)\Big|_{-2}^{-1}+(-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x)\Big|_{-1}^{3}$

$=(-\frac{1}{3}-1+3+\frac{8}{3}+4-6)+(9+\frac{5}{3})$

$=13$

13.(3)

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n\cdot\sqrt{n}}(\sqrt{1+n}+\sqrt{2+n}+\cdots+\sqrt{n+n})$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot(\sqrt{\frac{1}{n}+1}+\sqrt{\frac{2}{n}+1}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}+1})$

原式可看为函数$f(x)=\sqrt{1+x}$在区间$[0,1]$上关于n等分的一个黎曼和，而$\int_0^1\sqrt{1+x}\,dx$存在.

$\therefore$原式$=\int_0^1\sqrt{1+x}\,dx=\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1$

$=\frac{4}{3}\sqrt{2}-\frac{2}{3}$

习题5.2

5.(1)

$[0,1]$之间. e^{-x}与e^{-x^2}均为正

且 $-x<-x^2$. $\therefore e^{-x}<e^{-x^2}$

恒成立. 由积分的单调性

有 $\int_0^1 e^{-x}dx<\int_0^1 e^{-x^2}dx$

6.(1)

对于 $f(x)=\frac{\sin x}{x}\ (x\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}])$

可知 $f'(x)=\frac{\cos x\cdot x-\sin x}{x^2}$

取 $h(x)=\cos x\cdot x-\sin x$. $h'(x)=\sin x\cdot x+\cos x-\cos x=\sin x\cdot x>0$. 而

$h(0)=0\quad h(\frac{\pi}{4})<0\quad h(\frac{\pi}{2})<0$

$\therefore f'(x)$恒为负

$\therefore f(x)\downarrow$

$\therefore f(\frac{\pi}{2}) \le f(x) \le f(\frac{\pi}{4})$

$\therefore \frac{2}{\pi} \le f(x) \le \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} < 1$

$\therefore \frac{2}{\pi} \le f(x) \le 1$

$\therefore \frac{1}{2} \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx \le \frac{\pi}{4}$

实际上 $\frac{2}{\pi} \le \frac{\sin x}{x} \le 1$ 很实用

6.(3)

记 $S = (a\cos x + b\sin x)^2 = a^2\cos^2 x +$

$2ab\cos x \cdot \sin x + b^2\sin^2 x$

$\therefore a^2 + b^2 - S$

$= a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x + 2ab\cos x \cdot \sin x$

$= (a\sin x + b\cos x)^2 \geqslant 0$

$\therefore (a\cos x + b\sin x)^2 \le (a^2 + b^2)$

$\therefore |a\cos x + b\sin x| \le \sqrt{a^2 + b^2}$

由积分单调性有:

$\int_0^{2\pi} |a\cos x + b\sin x|\,dx \le \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2+b^2}\,dx$

实际上 $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi) \le \sqrt{a^2+b^2}$

9.

$\because f(x) \in C[a,b]$ 且 $f(x) > 0$

$\therefore \sqrt{f(x)} \in C[a,b]$ 且 $\sqrt{f(x)} > 0$

$\sqrt{f(x)}$ 有下确界 m 且 $m > 0$

(m 不为无穷小量)

故 $\frac{1}{\sqrt{f(x)}} > 0$ 且 $\frac{1}{\sqrt{f(x)}} \in C[a,b]$

设 $\sqrt{f(x)} = g(x)$ $\frac{1}{\sqrt{f(x)}} = h(x)$

$\therefore \int_a^b f(x)\,dx \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)}\,dx$

$= \int_a^b g^2(x)\,dx \cdot \int_a^b h^2(x)\,dx \geqslant$

$\left(\int_a^b g(x) \cdot h(x)\,dx\right)^2 = (b-a)^2$

10.

左式: $\inf(f(x)) = f(a)$

$\therefore \int_a^b f(x)\,dx > \inf(f(x))(b-a)$

$\therefore (b-a)f(a) < \int_a^b f(x)\,dx$

而另一方面 $f''(x) > 0$ $\therefore f(x)$ 下凸

取 $g(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$

$= \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x + \frac{b \cdot f(a) - a \cdot f(b)}{b-a}$

$= \frac{f(b)x - f(a)x + b \cdot f(a) - a f(b)}{b-a}$

$T(x) = g(x) - f(x)$. 则 $T'(x) = g'(x) - f'(x)$

$= \frac{f(b)-f(a)}{b-a} - f'(x)$. 由 $f(x) > 0$ 与下凸

函数性质有 $T(a) > 0$. $T(b) < 0$

且 $\exists\ \xi$ 使 $T'(\xi) = 0$ (拉格朗日)

$T''(x) = -f''(x) < 0$. $\therefore T'(x)$ 单调递减. $\therefore T(x)$ 在 (a,ξ) 上 $\uparrow$, $(\xi,b)\downarrow$

而 $T(a)=T(b)=0$ ∴ $T(x)$ 在 (a,b) 上恒正

∴ $f(x)<g(x)$. $(x\in(a,b))$

∴由积分单调性有：

$$\int_a^b f(x)\,dx<\int_a^b g(x)\,dx=\frac{(b-a)(f(a)+f(b))}{2}$$

∴左右得证

习题 5.3

4.

记 $F(x)=\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\,dt=x+\sin x$

∴ 记 $H(x)=F(x^2)=\int_0^x f(t)\,dt$

$=x^2+\sin x^2$

∵ $f\in C[0,+\infty)$，则 $H(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，$H'(x)=f(x)$

∴ $f(x)=H'(x)=2x+\cos x^2\cdot 2x$

5. 何需求出原函数

本来分析拐点与极值点就只用 $F'(x)$ 与 $F''(x)$

$f(x)=x\cdot e^{-x^2}$ 在R上连续

∴ $F'(x)=f(x)=x\cdot e^{-x^2}$. 而 $f(x)$ 无不可导点. ∴ $F''(x)=f'(x)$

$=e^{-x^2}+e^{-x^2}\cdot(-2x)\cdot x$

$=e^{-x^2}\cdot(1-2x^2)$

$f(x)=0$ 则 $x=0$，且 $f(0^+)\cdot f(0^-)<0$. ∴ $x=0$ 为 $F(x)$ 极值点

$f'(x)=0$. 则 $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

注意到：极值点定义有 $f(x)$ 在两侧异号；而 $f'(x)$ 存在时，$f'(x)\neq 0$

但拐点定义直接 $f'(x)=0$ 即可

∴ 极值点：$x=0$

拐点：$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

7.

可知 $f(x)\in C[-1,0)$ 且 $f(x)\in C[0,1]$. $x=0$ 处为第一类间断点:

故 $F(x)$ 在 $[-1,0)$ 上可导且连续

$F(x)$ 在 $(0,1]$ 上可导且连续

$F(0)=\frac{1}{2}$. 可知 $\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to0^-}F(x)=\frac{1}{2}$ $\therefore \lim\limits_{x\to0}F(x)=F(0)$

$\therefore F(x)$ 在 $x=0$ 处连续

但: $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=0$

$\lim\limits_{x\to0^-}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=1$

$\therefore F'(0^+)\neq F'(0^-)$ $\therefore F(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续, 仅在 $x=0$ 处不可导, 其余处可导.

实际上: $F(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2} & [-1,0)\\ \frac{x^2}{2}+\frac{1}{2} & [0,1]\end{cases}$

9. (1)

设 $\int_0^x f(t)\,dt=F(x)$. 则 $\because f(t)$ 连续. 故 $F'(x)=f(x)$

$\therefore F(x)=x+F(2)-F(0)$

$\therefore F(x)=\frac{1}{2}x^2+(F(2)-F(0))x+C$

$\therefore F(0)=C$

$F(2)=2+2F(2)-C$

$\therefore F(2)=C-2$

$\therefore F(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+C$

$\therefore f(x)=F'(x)=x-2$

15.

取 $h(x)=x-\frac{\pi}{2}\cdot\sin x$, $(0\le x\le\frac{\pi}{2})$

$h'(x)=1-\frac{\pi}{2}\cdot\cos x$. $(0\le x\le\frac{\pi}{2})$

$h''(x)=\frac{\pi}{2}\sin x\ge0$ $(0\le x\le\frac{\pi}{2})$

$\therefore h'(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上仅有 $x=\arccos\frac{2}{\pi}$ 一个零点. 且 $h(x)$ 在 $(0,\arccos\frac{2}{\pi})$ 上为负, $(\arccos\frac{2}{\pi},\frac{\pi}{2})$ 上为正

而 $h(0)=h(\frac{\pi}{2})=0$

$\therefore h(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上为负

$\therefore x<\frac{\pi}{2}\sin x$ $(0<x<\frac{\pi}{2})$

$\because \sin x > \frac{2}{\pi}x \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$

故 $R>0$ 时，$0 < e^{-R\sin x} < e^{-R\cdot\frac{2x}{\pi}}$

$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin x}dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\cdot\frac{2x}{\pi}}dx$

$= -\frac{\pi}{2R} e^{-\frac{2R}{\pi}x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= -\frac{\pi}{2R}\cdot(e^{-R}-1)$

$= \frac{\pi}{2R}\cdot(1-e^{-R})$

同理．$R<0$ 时，

$0 < e^{-R\cdot\frac{2}{\pi}x} < e^{-R\sin x}$

$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin x}dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\cdot\frac{2}{\pi}x}dx$

$= -\frac{\pi}{2R}\cdot(e^{-R}-1)$

$= \frac{\pi}{2R}(1-e^{-R})$

$\therefore$ 原式得证