MIKRON

Problem Set 3.4　　医01班 吴雨函 2020012288

37. $AS=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & d & e \\ 0 & g & h \end{bmatrix}$

$SA=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

若 $AS=SA$，则 $\begin{cases} d=g=h=0 \\ a=e=i \\ b=f \end{cases}$　　dim A=3

故 $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$

43. 证明：∵ u's 以及 (u's 和 v's)、(u's 和 w's) 分别是 $V\cap W$、V、W 的一组基向量

∴ u's 内部、v's、w's 内部以及 u's v's、u's w's 之间均线性无关

只需证 v's 和 w's 之间线性无关即可

假设 ∃ v_i、w_k s.t. $c_iv_i+d_kw_k=0$

其中 c_i、d_k 至少有1个不为0

则 v_i、$w_k\in V\cap W$

且上已证 v_i、w_k 与 u's 之间线性无关

故 v_i、w_k 也是 $V\cap W$ 的基向量

矛盾！

∴ 假设错误，u's v's w's 所有向量均线性无关

∴ $\dim(V)=s$　$\dim(W)=t$　$\dim(V\cap W)=r$

$\dim(V+W)=r+s+t$

代入原式得证

44. $\begin{cases} \text{dimension of inputs} = n \\ \text{dimension of nullspace} = 0 \\ \text{dimension of outputs} = \end{cases}$

45 证明：设 V 的一组基向量为 $v_1 v_2 \cdots v_s$

W 的一组基向量为 $w_1 w_2 \cdots w_t$

依题 $s+t>n$

将这2组基向量组成 $n\times(s+t)$ 矩阵：

$[v_1 v_2 \cdots v_s\ w_1 w_2 \cdots w_t]$

记矩阵秩为 r

则 $r\le n<s+t$

∴ 它不是列满秩

∴ 这 $s+t$ 个向量线性相关

显然 v's | w's 内部线性无关

故 ∃ v_i w_j s.t.

$c_jw_j+c_iv_i=0$

(c_j, c_i 中至少1个非0)

则 v_i, $w_j\in V\cap W$

显然 $v_i\ne0$　$w_j\ne0$

∴得证

Problem Set 3.5　　b不可能

4. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$　dim C(A) + dim N(A) = n，而此处 n=3，前者为 2.

(b) $\cancel{\begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -6 & -3 \end{bmatrix}}$

(c) $[1\ 0]$

(d) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

(e) 不可能

因为 $N(A)+C(A^T)=N(A^T)+C(A)$

若 $C(A^T)=C(A)$

则必有 $N(A)=N(A^T)$

11. (a) $\begin{cases} n\le m \\ r\le n \\ r<m \end{cases}$

(b) 由(a)知 $r<m$

故 $N(A^T)=m-r>0$

故 ∃非0向量 $\in N(A^T)$

即 $A^Ty=0$

18. (1) row3 - 2row2 + row1 = 0 row

(2) 继续将 echelon form 消成R:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & -3 & -6 & b_2-4b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{② } (2)\times(-\frac{1}{3})]{\text{① } (1)+(2)\times\frac{2}{3}} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \checkmark & \checkmark & \times & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & b_1+\frac{2}{3}(b_2-4b_1) \\ 0 & 1 & 2 & (b_2-4b_1)/-3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$\therefore \quad x_n = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$N(A) = \{x_n\} \quad x_3 \in \mathbb{R}$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Elimination}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore \quad N(A^T) = \{x_{nT}\}$

$x_{nT} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

即二者相等

24. 当 $d \in C(A^T)$ 时有解

填空: $N(A^T)$

Problem Set 4.1

7. $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_3 = 1 \end{cases}$ 取 $\begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 1 \\ y_3 = -1 \end{cases}$

9. 填空 ① column space

② perpendicular

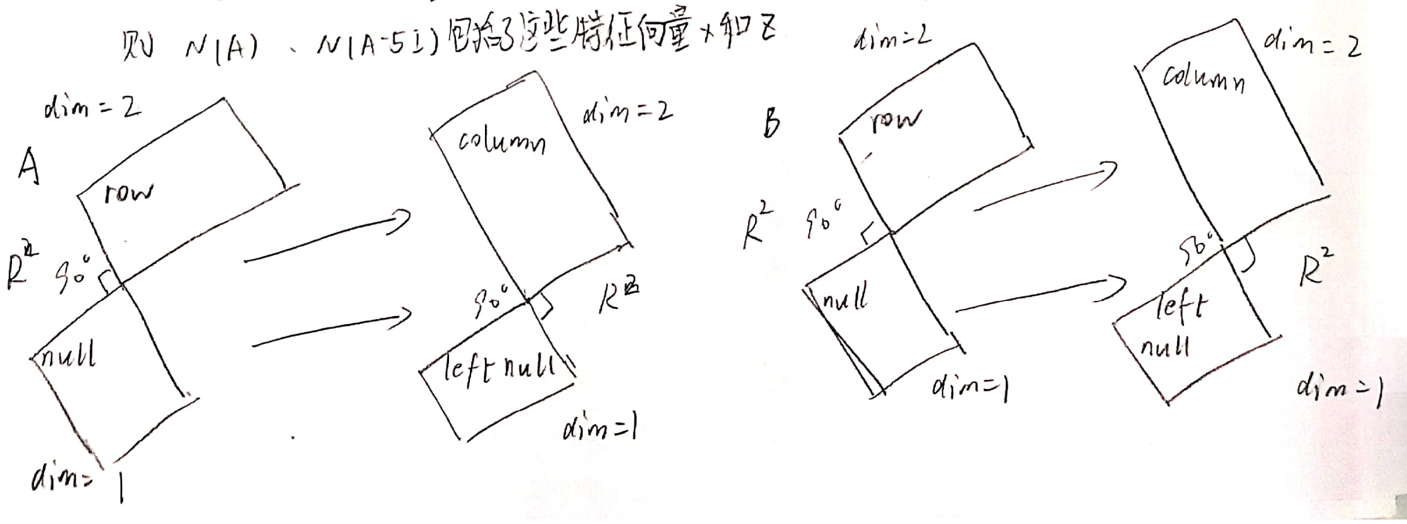
10. (a) 因为 $C(A) = C(A^T) = N(A)^{\perp}$

故列空间与零空间正交

(b) 记 $B = (A - 5I)$

则 $N(A)$、$N(A-5I)$ 包括了这些特征向量 x 和 z

11.



MIKRON

15. $p+q>n$

28. (a) 两平面内的2条直线相互垂直不能推出这2个平面互相垂直 而且3维空间中不存在正交的2个子空间

(b) 因为 记 $(1,1,0,0,0)$、$(0,0,0,1,1)$ 生成的子空间为A

$(1,-1,0,0,0)$ $(2,-2,3,4,-4)$ 生成的子空间为B

A没有包含全部正交于B的向量

例如 $x=(3,-3,3,4,-4)\in B$

但它一定不属于 A $(p,p,0,q,q)$

(c) 因为两个子空间的交集是否是 Z 与它们是否正交无必然联系

例如由 $(1,0,0,0)$ 生成的子空间A $\{x \mid x=(a,0,0,0)\ \ a\in R\}$

和由 $(1,1,1,1)$ 生成的子空间B $\{y \mid y=(d,d,d,d)\ \ d\in R\}$

仅在 $a=d=0$ 时相交

但 A与B 显然不正交

因为 $(1,0,0,0)\cdot(1,1,1,1)=1\neq 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & -3 & -6 & b_2-4b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & b_1+\frac{2}{3}(b_2-4b_1) \\ 0 & 1 & 2 & \frac{b_2-4b_1}{-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$