习题 7.1

2. 可知 $y_1''+a_1(x)y_1'+a_2(x)y_1=f(x)$. $y_2''+a_1(x)y_2'+a_2(x)y_2=g(x)$
故令 $y_3=k_1y_1+k_2y_2$. 则 $y_3''=k_1y_1''+k_2y_2''$ $y_3'=k_1y_1'+k_2y_2'$

$y_3''+a_1(x)y_3'+a_2y_3=k_1y_1''+k_2y_2''+a_1(x)k_1y_1'+a_1(x)k_2y_2'$
$+a_2k_1y_1+a_2k_2y_2=k_1(y_1''+a_1(x)y_1'+a_2(x)y_1)$
$+k_2(y_2''+a_1(x)y_2'+a_2(x)y_2)=k_1f(x)+k_2g(x)$
得证

3.(3)(4)(5)
(3) $\frac{dy}{dx}-2xy=1$ 积分因子为 $\int -2x\,dx=-x^2$ $e^{-x^2}\frac{dy}{dx}-e^{-x^2}2xy=e^{-x^2}$
$\therefore \frac{de^{-x^2}y}{dx}=e^{-x^2}$ 关于x积分有: $e^{-x^2}y=\int e^{-x^2}dx$
$y=e^{x^2}\cdot\int e^{-x^2}dx$ 而 $\int e^{-x^2}dx=\int_0^x e^{-t^2}dt+C$
故 后式为原方程的解

(4) $y'=-C_1\omega\sin\omega x+C_2\omega\cos\omega x-\frac{1}{1+\omega^2}e^{-x}$
$y''=-C_1\omega^2\cos\omega x-C_2\omega^2\sin\omega x+\frac{1}{1+\omega^2}e^{x}$
$\therefore y''+\omega^2y=-C_1\omega^2\cos\omega x+C_1\omega^2\cos\omega x-C_2\omega^2\sin\omega x+C_2\omega^2\sin\omega x$
$+\frac{1}{1+\omega^2}\cdot e^{-x}+\frac{\omega^2}{1+\omega^2}\cdot e^{-x}=e^{-x}$
故后式为方程的解.

(5) 首先 $y(2)=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$. 后者符合题意. $y'=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}$ $1-\frac{y}{x}=1-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{x^2}$
故 $y'=1-\frac{y}{x}$.
后式为原方程的解

4.(2) $y'=ke^{kx}$ $y''=k^2\cdot e^{kx}$ $y''-3y'-4y=(k^2-3k-4)\cdot e^{kx}=0$
$\therefore k_1=4$ $k_2=-1$

5. $y'=3Cx^2$ $3y-x\cdot y'=3\cdot Cx^3-x\cdot 3Cx^2=0$. 故 $y=Cx^3$ 为 $3y-xy'=0$ 的一般解.
过(1,1)则 $C=1$. $y_1=x^3$
过 $(1,-\frac{1}{3})$ 则 $C=-\frac{1}{3}$. $y_2=-\frac{1}{3}x^3$

习题 7.2：

1.(8)(10)

(8) $\frac{dy}{y^2+1}=\frac{x}{x+1}dx \quad \int\frac{dy}{y^2+1}=\int(1-\frac{1}{x+1})dx \quad \arctan y=x-\ln|x+1|+c$

$\therefore \quad y=\tan(x-\ln|x+1|+c) \quad (x-\ln|x+1|+c\neq\frac{\pi}{2}+k\pi)$

(10) $y\cdot dy=\frac{e^x}{e^x+1}dx=\frac{de^x}{e^x+1}$ 两边积分有：$\frac{1}{2}y^2=\ln^{e^x+1}+c$

又 $\because \frac{1}{2}=\ln^{e+1}+c \quad \therefore c=\ln\frac{\sqrt{e}}{e+1}$

$\therefore y^2= 2\ln^{e^x+1}+\ln\frac{e}{(e+1)^2} \quad y=\pm\sqrt{2\ln^{e^x+1}+\ln\frac{e}{(e+1)^2}}$

2.(4)(7)

(4) 积分因子：$e^{\int xdx}=e^{\frac{1}{2}x^2} \quad e^{\frac{1}{2}x^2}\cdot\frac{dy}{dx}+e^{\frac{1}{2}x^2}\cdot x\cdot y=e^{\frac{1}{2}x^2}\cdot x^3$

$\frac{de^{\frac{1}{2}x^2}\cdot y}{dx}=e^{\frac{1}{2}x^2}\cdot x^3 \quad \therefore e^{\frac{1}{2}x^2}\cdot y=\int e^{\frac{1}{2}x^2}\cdot x^3dx$

$\int e^{\frac{1}{2}x^2}\cdot x^3dx=\int x^2\cdot de^{\frac{1}{2}x^2}$ 令 $e^{\frac{1}{2}x^2}$ 为 t，则 $x^2=2\ln^t$

$\int 2\ln^t dt=2\int\ln t dt \quad \int\ln^t dt=\ln t\cdot t-\int t d\ln t$

$=\ln^t\cdot t-\int 1 dt=t(\ln^t-1)+c$

$\therefore \int e^{\frac{1}{2}x^2}\cdot x^3dx=e^{\frac{1}{2}x^2}\cdot(x^2-2)+c$

$\therefore$

$y=x^2-2+\frac{c}{e^{\frac{1}{2}x^2}} \quad y(0)=-2+c=0 \quad \therefore c=2$

$\therefore y=x^2-2+2\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$

(7) $y'-2xy=\frac{e^{x^2}}{(x+1)^2}$，积分因子 $=e^{\int-2xdx}=e^{-x^2}$

$\therefore e^{-x^2}\cdot\frac{dy}{dx}-2x\cdot e^{-x^2}y=\frac{1}{(x+1)^2} \quad \therefore \frac{de^{-x^2}y}{dx}=\frac{1}{(x+1)^2}$

$\therefore e^{-x^2}y=\int\frac{1}{(x+1)^2}dx=-\frac{1}{x+1}+c \quad y(0)\ 1=-1+c$

$\therefore c=6$

$\therefore \quad y=-\frac{e^{x^2}}{x+1}+6\cdot e^{x^2}$

$\int x\ln x\,dx \quad v=\ln x \quad u=\frac{1}{2}x^2$

$dv=\frac{1}{x}dx \quad du=x\,dx$

3.(5)(7)(11)(14)

(5) $\frac{x}{y}y'+1=\ln^{xy}$. 令 $u=xy$，则 $u'=y+xy' \quad \therefore u'=\frac{y}{x}\ln^u \quad \frac{du}{dx}=\frac{u}{x}\cdot\ln^u$

$\frac{du}{u\cdot\ln^u}=\frac{dx}{x} \quad \int\frac{1}{u\cdot\ln^u}du=\int\frac{1}{x}dx \quad \ln|\ln^{|u|}|=\ln|x|+c=\ln^{|cx|}$

$\therefore u=xy=e^{cx} \quad xy=e^{cx} \quad \therefore y=\frac{e^{cx}}{x}$

(7) 令 $u=\frac{y}{x}$ $y'=\frac{1+u^2}{2}$ $y=ux$ ∴ $y'=u'x+u$

$2u'x+2u=1+u^2$ ∴ $2\frac{du}{dx}\cdot x=(u-1)^2$ $2\frac{du}{(u-1)^2}=\frac{1}{x}dx$

两边积分 $-\frac{2}{u-1}=\ln x+C$ ∴ $\frac{2x}{y-x}+\ln x=C$

(11) $\frac{(y+3)-(x+1)}{(y+3)+(x+1)} \xlongequal{令u=\frac{y+3}{x+1}} \frac{u-1}{u+1}$ 而 $y=u(x+1)-3$ $y'=u'(x+1)+u$

∴ $u'(x+1)+u=\frac{u-1}{u+1}$ ∴ $\frac{du}{dx}(x+1)+u=\frac{u-1}{u+1}$ ∴ $\frac{u^2+1}{u+1}=-(x+1)\frac{du}{dx}$

∴ $\frac{u+1}{u^2+1}du=-\frac{1}{x+1}dx$ $\int(\frac{u}{u^2+1}+\frac{1}{u^2+1})du=\frac{1}{2}\ln(u^2+1)+\arctan u+C$

$\int-\frac{dx}{x+1}=-\ln(x+1)$ ∴ $\frac{1}{2}\ln(\frac{(y+1)^2}{(x+1)^2}+1)+\arctan\frac{y+1}{x+1}+\ln(x+1)=C$

(14) $\frac{y'}{y^2}+\frac{2x}{y}=2x^3$ 令 $u=\frac{1}{y}$ $u'-2xu=-2x^3$

积分因子 $=e^{\int-2x\,dx}=e^{-x^2}$ $e^{-x^2}\cdot u'-2x\cdot e^{-x^2}\cdot u=e^{-x^2}\cdot -2x^3$

∴ $\frac{de^{-x^2}u}{dx}=-2x^3\cdot e^{-x^2}$ ∴ $e^{-x^2}u=\int x^2\cdot de^{-x^2}$

$\int x^2\cdot de^{-x^2}$ 令 $t=e^{-x^2}$ 则 $x^2=-\ln t$ $\int-\ln t\,dt=-\int\ln t\,dt$

$=-(\ln t-1)t+C=(x^2+1)\cdot e^{-x^2}+C$

∴ $u=x^2+1+C\cdot e^{x^2}$

(4) $y'=3\frac{y}{x}$ ∴ $\frac{1}{y}dy=3\frac{1}{x}dx$ ∴ $\ln|y|=3\ln|x|+C$

代入 $(-1,1)$ 有 $C=0$ ∴ $\ln|y|=3\ln|x|$ ∴ $y=\pm x^3$

又∵曲线过 $(-1,1)$ ∴ $y=-x^3$

习题6.2

6. (1) $\int_a^{+\infty}\frac{f^2(x)+g^2(x)}{2}dx=\frac{1}{2}\int_a^{+\infty}f^2(x)dx+\frac{1}{2}\int_a^{+\infty}g^2(x)dx$，收敛．而 $\frac{f^2(x)+g^2(x)}{2}\geq|f(x)\cdot g(x)|$

故 $\int_a^{+\infty}f(x)\cdot g(x)dx$ 绝对收敛

(2) $\int_a^{+\infty}(f(x)+g(x))^2dx=\int_a^{+\infty}f^2(x)dx+2\int_a^{+\infty}f(x)g(x)dx+\int_a^{+\infty}g^2(x)dx$

而 $\int_a^{+\infty}f^2(x)dx$，$\int_a^{+\infty}f(x)g(x)dx$，$\int_a^{+\infty}g^2(x)dx$ 均收敛

而 $\int_a^{+\infty}(f(x)+g(x))^2dx$ 收敛

7. 由 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty}h(x)dx$ 均收敛；故 $\forall\varepsilon>0$，$\exists M_1>a$，当 $A_2>A_1>M_1$ 时，$\left|\int_{A_1}^{A_2}g(x)dx\right|<\varepsilon$．$\exists M_2>a$，当 $A_4>A_3>M_2$ 时，$\left|\int_{A_3}^{A_4}h(x)dx\right|<\varepsilon$．

取 $M=\max\{M_1,M_2\}$，则 $A_6>A_5>M$ 时，由 $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$

$\int_{A_5}^{A_6}g(x)dx\leq\int_{A_5}^{A_6}f(x)dx\leq\int_{A_5}^{A_6}h(x)dx$ $\therefore -\varepsilon<\int_{A_5}^{A_6}f(x)dx<\varepsilon$

故 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛

8. 反证之．假设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A\neq0$．则 取 $\varepsilon=\frac{A}{2}$．$\exists M>0$，当 $x>M$ 时，

$|f(x)-A|<\varepsilon$ 故 $\frac{A}{2}<f(x)<\frac{3}{2}A$．不妨设 $A>0$，否则取 $-f(x)$ 分析即可

$\forall M>a$，当 $A_2>A_1>M$ 时，$\left|\int_{A_1}^{A_2}f(x)dx\right|>\frac{1}{2}A\cdot(A_2-A_1)$．$A_2\to+\infty$ 时，

$\left|\int_{A_1}^{A_2}f(x)dx\right|\to+\infty$．故 $\forall\varepsilon>0$，不存在 $M>a$ 使得 $\forall A_2>A_1>M$

均有 $\left|\int_{A_1}^{A_2}f(x)dx\right|<\varepsilon$．故 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 不收敛

与题干矛盾．假设不成立．

$\therefore$ 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在时．$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

9. (3) $x\to+\infty$ 时，$\left[x\cdot\left(\arctan\frac{2}{x}-\arctan\frac{1}{x}\right)\right]=x\cdot\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x}+O\left(\frac{1}{x}\right)\right)=1$

$x=+\infty$ 为瑕点，$\int_1^{+\infty}\left|x\cdot\left(\arctan\frac{2}{x}-\arctan\frac{1}{x}\right)\right|dx=\int_1^{+\infty}x\cdot\left(\arctan\frac{2}{x}-\arctan\frac{1}{x}\right)dx$

而 $\int_1^{+\infty}x\cdot\left(\arctan\frac{2}{x}-\arctan\frac{1}{x}\right)$ 与 $\int_1^{+\infty}1\,dx$ 同敛散，后式显然不收敛

故 $\int_1^{+\infty}x\left(\arctan\frac{2}{x}-\arctan\frac{1}{x}\right)dx$ 既不绝对收敛也不条件收敛

发散

题9.(2)见后

9.(4) $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cdot\sin x}{x+1}dx$ 中 $+\infty$ 为瑕点 改正见下

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\frac{\sqrt{x}\cdot\sin x}{x+1}\right|\le\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right|=0$ 故令 $f(x)=\frac{\sqrt{x}\cdot\sin x}{x+1}$

$\int_0^{+\infty}|f(x)|dx$ 与 $\int_0^{+\infty}0\,dx$ 同敛散. 后者显然收敛.

故 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 绝对收敛

等价无穷小可同敛散, 没听过等价到0的

六章复习题

4. 由 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛知. $\forall\varepsilon>0,\exists M>a,\forall A_2>A_1>M$. 均有

$\left|\int_{A_1}^{A_2}f(x)dx\right|=|f(A_2)-f(A_1)|<\varepsilon$. 故由柯西收敛定则有:

$f(x)$ 收敛.

结合206页习题6.2结论有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

9.4改正: $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 收敛且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在则必为0, 但反之不成立

令 $f(x)=\frac{\sqrt{x}\sin x}{x+1}$ $\qquad\int_0^{+\infty}|f(x)|dx\ge\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}dx>\lim\limits_{A\to+\infty}\int_1^A\frac{\sin^2x}{x}dx$

$=\lim\limits_{A\to+\infty}\int_1^A\frac{1}{x}\cdot\frac{1-\cos2x}{2}dx=\lim\limits_{A\to+\infty}\int_1^A\frac{1}{2x}dx-\lim\limits_{A\to+\infty}\int_1^A\frac{\cos2x}{2x}dx$ 前者不收敛, 后者收敛

对后者. $\lim\limits_{A\to\infty}\int_1^A\frac{\cos2x}{2x}dx=\lim\limits_{A\to\infty}\int_1^A\frac{d\sin2x}{4x}=\lim\limits_{A\to+\infty}\frac{\sin2x}{4x}\Big|_1^A+\int_1^A\frac{\sin2x}{4}\cdot\frac{1}{x^2}dx$

前式有界, 后式 $<\lim\limits_{A\to+\infty}\int_1^A\frac{dx}{x^2}$, 而收敛

故 $\int_1^{+\infty}|f(x)|dx$ 不收敛

而 $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\sin x}{x+1}dx=\int_0^1\frac{\sqrt{x}\sin x}{x+1}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}dx$

$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}dx$ 而言. $\int_1^{+\infty}\sin x\,dx=\lim\limits_{A\to+\infty}\cos x\Big|_1^A<2$. 有界 $\quad\frac{1}{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}$ ↓且趋于0.

由狄利克雷判别法, $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}$ 收敛

综上: $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\sin x}{x+1}dx$ 条件收敛

9.(2) $\int_0^{+\infty} x\cdot\cos x^3 dx$. 令 $u=x^3$. $du=3x^2dx$ $dx=\frac{du}{3x^2}=\frac{du}{3\cdot u^{\frac{2}{3}}}$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos u}{3\cdot u^{\frac{1}{3}}}du=\lim_{A\to+\infty}\int_0^A\frac{\cos u}{3\cdot u^{\frac{1}{3}}}du=\lim_{A\to+\infty}\frac{\sin u}{3u^{\frac{1}{3}}}\Big|_0^A+\frac{1}{9}\int_0^A\frac{\sin u}{u^{\frac{4}{3}}}du$$

$\left|\frac{\sin u}{u^{\frac{4}{3}}}\right|<u^{-\frac{4}{3}}$. $\int_1^{+\infty}\frac{du}{u^{\frac{4}{3}}}$ 收敛，而对 $\int_0^1\frac{\sin u}{u^{\frac{4}{3}}}dx$ $\lim_{x\to0}\frac{\sin u}{u^{\frac{4}{3}}}=\frac{1}{u^{\frac{1}{3}}}$

$\int_0^1\frac{\sin u}{u^{\frac{4}{3}}}du$ 与 $\int_0^1 u^{-\frac{1}{3}}du$ 同收敛，后者显然收敛. 故 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u^{\frac{4}{3}}}du$ 收敛. 故 $\int_0^{+\infty}x\cdot\cos x^3dx$ 收敛.

而 $\frac{|\cos u|}{3\cdot u^{\frac{1}{3}}}>\frac{\cos^2 u}{3u^{\frac{1}{3}}}=\frac{1+\cos 2u}{6u}$

$$\int_0^{+\infty}\frac{|\cos u|}{3\cdot u^{\frac{1}{3}}}du>\lim_{A\to+\infty}\int_0^A\frac{1+\cos 2u}{6u}du=\lim_{A\to+\infty}\int_0^A\frac{du}{6u}+\lim_{A\to+\infty}\int_0^A\frac{\cos 2u}{6u}du$$

前式发散，后式同上讨论收敛. 故 $\int_1^{+\infty}|x\cdot\cos x^3|dx$ 发散

原式条件收敛