习题2. 对n阶方阵A, 设$\mathrm{Com}(A)=\{n$阶方阵$B:AB=BA\}$. (Com表示*Commutator.*)

1. 证明: 任取$B,C\in\mathrm{Com}(A)$, 都有$I_n,kB+\ell C,BC\in\mathrm{Com}(A)$, 其中$k,\ell\in\mathbb{R}$.

2. 设$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$. 证明: $J_3=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\in\mathrm{Com}(A)$, 而且$\mathrm{Com}(A)=\{k_1I_3+k_2J_3+k_3J_3^2:k_1,k_2,k_3\in\mathbb{R}\}$.

$$J_3^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

1\. Pf: Obviously, $I_n\in\mathrm{Com}(A)$.

Since $B,C\in\mathrm{Com}(A)$, we have that $AB=BA$ and $AC=CA$.

Hence, $(kB+\ell C)A=kBA+\ell CA=kAB+\ell AC=A(kB+\ell C)$ ✓

$(BC)A=B(CA)=B(AC)=(BA)C=A(BC)$. ✓

2\. Pf: $J_3\in\mathrm{Com}(A)$ 略.

$\forall\ B\in\mathrm{Com}(A)$

$BA=AB$

$\Leftrightarrow B(I_3+J_3)=(I_3+J_3)B$

$\Leftrightarrow BJ_3=J_3B$

$$\left(\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&b_{11}&b_{12}\\0&b_{21}&b_{22}\\0&b_{31}&b_{32}\end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow b_{21}=b_{31}=b_{32}=0$

$b_{11}=b_{22}=b_{33}$

$b_{12}=b_{23}$

$\Rightarrow B=\begin{pmatrix}b&c&d\\0&b&c\\0&0&b\end{pmatrix}$. ✓

习题3. 是否存在矩阵A满足：存在矩阵X使得$XA=I$, 但不存在Y使得$AY=I$? 有没有方阵满足上述条件？

Pf: 存在: $A=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $X=(1,0)$

$XA=(1,0)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=(1)$

$AY=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(x,y)=\begin{pmatrix}x&y\\0&0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1&\\&1\end{pmatrix}$

A, I 方阵.

$\exists X$, s.t. $XA=I$

$(XA)x=0$ 只有零解.

$X(Ax)=0$ 只有零解.

$\Rightarrow$ $Ax=0$ 只有零解

$\Rightarrow$ A可逆.

习题4. 定义函数$\mathrm{tr}: M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, A \mapsto \mathrm{tr}(A) := a_{11} + \cdots + a_{nn}$, 为取方阵的对角线元素之和. $\mathrm{tr}(A)$ 称为方阵A 的迹.

1. 证明tr 满足如下三个条件:
   - $\mathrm{tr}(kA + \ell B) = k\mathrm{tr}(A) + \ell\mathrm{tr}(B)$, $k, \ell \in \mathbb{R}$. ✓
   - $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$; ✓
   - $\mathrm{tr}(I_n) = n$. ✓
2. 说明是否存在A, B, 使得$AB - BA = I_n$. ✓
3. (♡) 在$n = 2$时证明满足上述三个条件的函数一定是tr.
4. (♡) 对一般的n证明满足上述三个条件的函数一定是tr.

4. E_{ij} 第(i,j)项等于1，其余项等于0.
P_{ij} 把单位矩阵(i,i), (j,j)项改成零，再把(i,j), (j,i)项改成1.

$$P_{ij}E_{ii}P_{ij}^{-1} = E_{jj}, \quad E_{ij}E_{kl} = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ E_{il} & j = k \end{cases}.$$

由 $\mathrm{tr}(O_n) = 0$.

$$\mathrm{tr}(E_{jj}) = \mathrm{tr}(P_{ij}E_{ii}P_{ij}^{-1}) = \mathrm{tr}(E_{ii}P_{ij}^{-1}P_{ij}) = \mathrm{tr}(E_{ii})$$

$$\mathrm{tr}(I_n) = \mathrm{tr}(E_{11} + \cdots + E_{nn}) = \mathrm{tr}E_{11} + \cdots + \mathrm{tr}E_{nn}.$$
$$\Rightarrow \mathrm{tr}E_{ii} = 1$$

另一方面, $i \neq j$时, $\mathrm{tr}(E_{ij}) = \mathrm{tr}(E_{i1}E_{1j}) = \mathrm{tr}(E_{1j}E_{i1}) = \mathrm{tr}(O_n) = 0$.

于是 $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i,j} a_{ij}\mathrm{tr}(E_{ij}) = a_{11} + \cdots + a_{nn}$.

习题5. 1. 任取$m\times n$矩阵X; 证明: 分块矩阵$\begin{pmatrix} I_m & X \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$可逆, 并求其逆矩阵.

2. 对分块矩阵$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, 计算$\begin{pmatrix} I_m & X \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$. 由此判断矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{n-1} \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{n-1} & a \end{bmatrix}$$

何时可逆, 并在它可逆时计算它的逆.

3. 设$A\in M_m(\mathbb{R})$, $B\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $C\in M_n(\mathbb{R})$, 证明：若A,C可逆, 则分块矩阵$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$也可逆, 并求其逆矩阵.

$$\begin{pmatrix} I_m & X_{m\times n} \\ 0_{n\times m} & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_m & B_{m\times n} \\ C_{n\times m} & D_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+XC_{m} & B+XD_{m\times n} \\ C_{n\times m} & D_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

1. $\begin{pmatrix} I_m & -X \\ & I_n \end{pmatrix}$ $\leftarrow$ $\begin{pmatrix} I_m & -X \\ & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} I_m & X \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+XC & B+XD \\ C & D \end{pmatrix}$

记题中矩阵为 $\begin{pmatrix} I_{n-1} & \alpha \\ \beta^T & a \end{pmatrix}$, 对其做初等变换.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a-\beta^T\alpha} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{n-1} & -\frac{\alpha}{a-\beta^T\alpha} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ -\beta^T & 1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} I_{n-1} & \alpha \\ \beta^T & a \end{pmatrix}^{-1}}\begin{pmatrix} I_{n-1} & \alpha \\ \beta^T & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & a-\beta^T\alpha \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} I_{n-1} & \alpha \\ 0 & a-\beta^T\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{n-1} & -\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. $$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{-1} & D \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & AD+BC^{-1} \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

$$AD+BC^{-1}=0$$

$$AD=-BC^{-1}$$

$$D=-A^{-1}BC^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & \overset{=0}{-BC^{-1}+BC^{-1}} \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

习题6. *1.* 对n阶可逆矩阵A和n维列向量$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$，设$1+\boldsymbol{v}^TA^{-1}\boldsymbol{u}\neq 0$，证明：$A+\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T$可逆，且

$$(A+\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T)^{-1}=A^{-1}-\frac{1}{1+\boldsymbol{v}^TA^{-1}\boldsymbol{u}}A^{-1}\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^TA^{-1}.$$

(这称为Sherman-Morrison-Woodbury公式.)

2. 设$a_i>0(1\leq i\leq n)$，求矩阵：

$$\begin{bmatrix} a_1+1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2+1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a_3+1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a_n+1 \end{bmatrix}$$

的逆矩阵.

形式计算：右乘 $A+uv^T$.

或借助习题5. 令 $\alpha=A^{-1}u$，$\beta=-v$

$\begin{bmatrix} I_n & A^{-1}u \\ -v^T & 1 \end{bmatrix}$ 可逆.

作分块初等行(列)变换.

$$\begin{bmatrix} I_n & A^{-1}u \\ -v^T & 1 \end{bmatrix} \to \begin{pmatrix} A & u \\ -v^T & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A+uv^T & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

以及矩阵 $\begin{pmatrix} I_n & A^{-1}u \\ -v^T & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

令 $A=\mathrm{diag}(a_1,\cdots,a_n)$, $u=v=\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ 可得 2.

习题7. 如果矩阵$A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$满足: 对于任意$i=1,\ldots,n$, 都有$|a_{ii}|>\sum_{j\neq i}|a_{ij}|$, 则称其为(行)对角占优的. 证明: 对角占优矩阵一定可逆.

Pf: 证明 $Ax=0$ 只有零解.

反证: 设 $x\neq 0$ 是它的解, 取 l s.t. $|x_l|=\max_{1\le i\le n}|x_i|>0$

由 $\sum_{j=1}^{n} a_{lj}x_j=0$ 知.

$$|a_{ll}x_l|=\left|\sum_{j\neq l}a_{lj}x_j\right|\le\sum_{j\neq l}|a_{lj}||x_j|\le\sum_{j\neq l}|a_{lj}||x_l|<|a_{ll}||x_l|.$$

矛盾.

#.

习题8. 证明：

1. 任意方阵A 都可以唯一地表为$A=B+C$, 其中B 是对称矩阵, C 是反对称矩阵.

2. (♡) n 阶方阵A 是反对称矩阵当且仅当任取n 维列向量x, 都有$x^TAx=0$.

3. 设A,B 是对称矩阵, 则$A=B$ 当且仅当任取n 维列向量x, 都有$x^TAx=x^TBx$.

Pf: 1. $A=\dfrac{A+A^T}{2}+\dfrac{A-A^T}{2}$.

$\dfrac{A+A^T}{2}+\dfrac{A-A^T}{2}=B_1+B_2$

$\dfrac{A+A^T}{2}-B_1=B_2-\dfrac{A-A^T}{2}=0$

$B_1=B_1^T$

$B_2^T=-B_2$

2. 必要性. 若 A 反对称，则

$(x^TAx)^T=x^TA^Tx=-x^TAx$

充分性. 若$\forall x$，$x^TAx=0$

令$x=e_i+e_j \Rightarrow a_{ij}=-a_{ji}$.

3. 充分性. $\forall x$, $x^T(A-B)x=0$.

由 2. $A-B$ 反对称.

又 $A-B$ 对称.

$\therefore$ $A-B=0$ 即 $A=B$.

必要性 显然.

习题9 (♡). A 为n 阶实方阵. 证明以下结论：

1. 若对于任意的n 维实列向量$\boldsymbol{x}$, 都有$(A\boldsymbol{x})\cdot(A\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}$, 则$A$ 必须是正交矩阵.
2. 若对于任意两个n 维实列向量$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$, 都有$(A\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}\cdot(A\boldsymbol{y})$, 则$A$ 必须是对称矩阵.

1. 令 $x=u+v$

$$(A(u+v))\cdot(A(u+v))=(u+v)\cdot(u+v).$$

$$\Rightarrow\quad (Au)\cdot(Av)=u\cdot v$$

取 $u=e_i$, $v=e_j$

Ae_i A的第i列向量 $\vec{x}_i$,

$\vec{x}_i\cdot\vec{x}_j=\delta_{ij}$ $\quad A^TA=I_n$.

2. 取 $x=e_i$, $y=e_j$ 有 $a_{ji}=(Ae_i)\cdot e_j$

$$=e_i\cdot(Ae_j)=a_{ij}$$