2018学年秋季学期离散数学期末笔试试题

2019.1.11

(ERIC回忆完整版)

注：本卷题目全为英文（但只有部分英文原题抄下来了），除第9题为4分外，其余每题12分。

1. 已知$n > m > 0$，计算：

(1) $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$

(2) $\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{n}{k}$

2. 小于99的素数有多少个？

3. *Bob*有*n*元钱，他每天可以买一颗价值为1美元的*candy*或一个价值为2美元的*sundae*，其中*candy*有两种，*sundae*有一种，计算*Bob*花完所有钱的方案数。
(Every day Bob buys either a *candy* for \$1 or a *sundae* for \$2. There are two different flavors of *candy*, but only one kind of *sundae*. If he has *n* dollars, in how many ways can he spend the money?)

4. 求解下列同余方程：

(1) $x^2 - x + 1 \equiv 0 \pmod 3$

(2) $x^2 \equiv x \pmod 6$

5. 假设任意2个人之间的关系要么是相互认识，要么是相互不认识。证明：6个人中要么有3个人两两相互认识，要么有3个人两两相互不认识。

6. 证明：具有m条边的简单图中必包含具有不小于$\frac{m}{2}$条边的二部子图。

(Prove that every single graph with m edges contains a bipartite subgraph with at least $\frac{m}{2}$ edges.)

7. 若二分图G被分为A、B两个子集，A和B各有n个顶点，且G的每个顶点的度数都不小于$\frac{n}{2}$，证明图G中一定存在完美匹配。

8. 能否找到一个合适的安排，使得8个女生每天分成两组每组4人去散步，每周任意两人都恰好分到同一组散步过3次？

9. 设图G中每个顶点至多在k个奇圈上，那么至少需要多少种颜色将图G染色以保证任一条边两端点不同色？

2018学年秋季学期离散数学期末笔试试题 - 提示

1. (1) 利用 $\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$。

(2) 同2016年第1题。先列几项猜出答案为 $(-1)^m\binom{n-1}{m}$，再用归纳法证明。

2. 枚举法或者容斥原理。

3. 同2016年第4题。列出递推关系并用特征方程求通解。参考2015、2017解析，注意$1与$2的种类数互换了。

4. 模数较小，可用枚举法。

5. 同2016年第3题。鸽巢原理与图结合。

我们设6个人分别为A、B、C、D、E、F，若两个人相互认识，则他们之间的连线为红色，若相互不认识，则连线为蓝色。

考虑AB、AC、AD、AE、AF共5条线段，由鸽巢原理，要么有3条线段为红色，要么有3条线段为蓝色，不妨设AB、AC、AD为红色，其余情况可同理讨论。下面讨论BC、BD、CD的颜色。

若BC为红色，则A、B、C两两相互认识；若BD为红色，则A、B、D两两相互认识；若CD为红色，则A、C、D两两相互认识；若BC、BD、CD均为蓝色，则B、C、D两两相互不认识，故命题得证。

6. 用反证法证明含于G中边数最多的2-部生成子图即为所求。参考“图论题选2”1.5.8（证明无环图G含2-部生成子图H使得 $\forall v\in V$ 成立 $d_H(v)\geq\frac{1}{2}d_G(v)$）。

7. 使用婚姻定理即可。参考“离散数学考前辅导讲义(解析版)”*Problem* 4.9，注意大于和不小于的区别以及别忘了m改为n。

8. 同2016年第8题。使用*cube space*的模型构造即可。

9. 同2016、2017年第9题。参考2017解析。