

## 一、选择题 (共 13 分, 每空 1 分) 在下列各小题中选择其中的一种答案, 标注在小标题后面的括号中

- ( ) 简而言之, 命题逻辑的公理系统是  
A. 用来建立公理的系统; B. 由公理产生推理规则的系统; C. 用来完善已有公理的系统;  
D. 从精选的几条公理出发, 根据规定的演绎规则, 推导出一系列定理的形式符号系统。
- ( ) 孔子曰: “己所不欲, 勿施于人。” 以下哪一选项不是这句话的逻辑推论?  
A. 只有己所欲, 才能施于人。 B. 除非己所欲, 否则不施于人。  
C. 若己所欲, 则施于人。 D. 凡施于人的都应该是己所欲的。
- ( ) 与连续统假设 (CH) 的主要内容最接近的是: 满足  $\aleph_0 < K < \aleph_1$  成立的基数  $K$   
A. 已完整证明  $K$  肯定不存在; B. 猜想  $K$  不存在; C. 猜想  $K$  存在但数值待定; D.  $K$  已找到
- ( ) 根据量词的定义, 若  $(\exists x)P(x) = F$  成立, 试从下面选择一个最准确清晰的描述:  
A. 对所有的  $x \in D$ , 都有  $P(x) = F$ 。 B. 至少存在一个  $x_0 \in D$ , 使  $P(x_0) = F$ 。 C. 根据  $P(x)$  来定。
- ( ) 下面所有正确的联结词完备集是 A. 1,6; B. 1,2,3,5; C. 1,2,3,5,6; D. 1,2,3,6. 其中  
1.  $\{\neg, \vee, \wedge\}$ ; 2.  $\{\neg, \wedge\}$ ; 3.  $\{\neg, \vee\}$ ; 4.  $\{\vee, \wedge\}$ ; 5.  $\{\neg, \rightarrow\}$ ; 6.  $\{\uparrow\}$ 。
- 非空集合  $A$  上的恒等关系  $I_A$  是 ( ); 全关系  $E_A$  是 ( ); 空关系  $\emptyset$  是 ( )。  
A. 偏序关系但不是等价关系 B. 等价关系但不是偏序关系  
C. 既是等价关系又是偏序关系 D. 既不是等价关系也不是偏序关系
- ( ) 对任意集合  $A$ ,  $B$  和  $C$ , 若  $A \cup B = A \cup C$ , 且  $A \cap B = A \cap C$ , 则  $B = C$ 。 (标出  $\sqrt{}$  或  $\times$ )
- ( ) 不存在这样的关系: 它既不满足自反性, 也不满足非自反性。 (标出  $\sqrt{}$  或  $\times$ )
- ( ) 不存在这样的关系: 它既不满足对称性, 也不满足反对称性。 (标出  $\sqrt{}$  或  $\times$ )
- ( ) 不存在这样的关系: 它既满足对称性, 同时又满足反自反性。 (标出  $\sqrt{}$  或  $\times$ )
- ( ) 若希望所求关系  $R$  的闭包同时具有自反性(r)、对称性(s)和传递性(t)这三种性质, 则可先求  $r(R)$ , 然后求出  $sr(R)$ , 最后再求  $tsr(R)$ 。 (标出  $\sqrt{}$  或  $\times$ )

## 二、填空题 (共 19 分, 每空 1 分) 完成下列计算或填空。

- (2 分) 设  $A = \{\emptyset, b, \{2\}\}$ , 则  $A^+ =$  \_\_\_\_\_  $P(A) =$  \_\_\_\_\_
- (6 分) 对  $n$  个命题变元, 可定义 \_\_\_\_\_ 个  $n$  元命题联接词。  
设  $A = \{1,2,3,4\}$ ,  $B = \{a,b,c\}$ , 从  $A$  到  $B$  不同的二元关系共有 \_\_\_\_\_ 个?  $|A \times B| =$  \_\_\_\_\_  
从  $A$  到  $B$  不同的函数共有 \_\_\_\_\_ 个? 在集合  $A$  上, 可定义 \_\_\_\_\_ 个不同的等价关系?  
在集合  $B$  上, 写出等价类数目最多的那个等价关系  $R$  \_\_\_\_\_
- (4 分) 对有限集合  $A$  和  $B$ ,  $|A| = m$ ,  $|B| = n$ , 试给出下列情形  $m$  和  $n$  应满足的条件:、  
(1) \_\_\_\_\_ 时存在从  $A$  到  $B$  的单射函数; (2) \_\_\_\_\_ 时存在从  $A$  到  $B$  的满射函数;  
(3) \_\_\_\_\_ 时存在从  $A$  到  $B$  的双射函数; 且有 \_\_\_\_\_ 个不同的双射函数。
- (6 分) 按照无穷公理表示的自然数以及连续统假设, 用最简洁的形式写出下列计算结果。  
 $\cup 99 =$  \_\_\_\_\_,  $\cap 100 =$  \_\_\_\_\_,  $\cap \{96,97\} =$  \_\_\_\_\_  
 $|N_N| =$  \_\_\_\_\_  $|R_R| =$  \_\_\_\_\_  $|N^P| =$  \_\_\_\_\_ 注:  $N^P = \{n | n \in N \wedge n \text{ 是素数}\}$
- (1 分) 在希尔伯特提出的 23 个数学问题中连续统假设位列第 ( ), 故又称希尔伯特第 ( ) 问题。

(注：本页的题目均须写在答题本上)

三、形式化下列语句，论域均为总论域（共 10 分，其中 1-2 小题每题 2 分，第 3-4 小题每题 3 分）

1. 没有最大的素数。
2. 天下乌鸦一般黑（要求写出两种形式，一种仅用全称量词，另一种仅用存在量词）。
3. 斐波那契数列中的每个数有且仅有一个后继。
4. 并非所有人都天赋好，而且天赋不好的人未必就不成功（仅需写出一种形式但全称和存在量词均需出现）

四、写出计算与构造过程和结果（共 15 分，第 1 题 2 分，第 2 题 5 分，第 3,4,5 题每题 4 分）

1. 用空集 $\emptyset$ 构造一个集合序列 $S_0, S_1, \dots, S_{i-1}$ ，满足 $|S_i| = i$ ，且 $S_i \subseteq S_{i+1}$ ，试写出序列的前 4 个集合 $S_0, S_1, S_2, S_3$ 。
2.  $P \downarrow Q = \neg(P \vee Q)$ ，试仅用或非联结词 $\downarrow$ 分别表示出 $\neg P$ ， $P \vee Q$ ， $P \rightarrow Q$ 和 $P \leftrightarrow Q$ （说明：详细运算步骤，要求结果尽量简洁。换句话说，当使用或非门分别实现上述每种运算时，要求所用的或非门最少）。
3. 对以下命题：“集合A上的一个关系R，如果R是对称的和传递的，则R一定是自反的，因为 $xRy$ ， $yRx$ 蕴含 $xRx$ 。”先指出该命题的错误，然后找出反例——在集合 $\{a, b, c\}$ 上构造一个关系，使其是对称的和传递的，但不是自反的。
4. 求下式的主析取范式和主合取范式： $\neg(P \leftrightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow R)$ （写出步骤，最后结果用数字表示的简洁形式）。
5. 求 $[99, 1000]$ 的范围内不能被 5,6,8 中任一个数整除的数的个数。

五、证明题第一部分（共 12 分。第 1 题 3 分，第 2 题 5 分，第 3 题 4 分）

1.  $(\exists x)(P(x) \rightarrow Q(x)) = (\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x)$ 是否正确，如正确试给出证明，如错误需举出反例。
2. 利用推理规则或归结推理法证明下列推理：  
$$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (\forall x)(R(x) \rightarrow \neg Q(x)) \Rightarrow (\forall x)(R(x) \rightarrow \neg P(x))$$
3. 若R和S是A上的关系，且 $S = \{ \langle a, b \rangle \mid (\exists c)(aRc \wedge cRb) \}$ 。若R是等价关系，证明S也是等价关系。

六、设 $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ ， $R = I_A \cup \{ \langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle a, e \rangle, \langle b, c \rangle, \langle b, d \rangle, \langle b, e \rangle, \langle c, e \rangle, \langle d, e \rangle, \langle f, g \rangle \}$ ，试完成以下 4 个步骤：

- 1) 说明R是A上的偏序关系；
- 2) 画出偏序集 $\langle A, R \rangle$ 的哈斯图；
- 3) 写出 $\langle A, R \rangle$ 中所有最长的链和所有最长的反链；
- 4) 对 $\langle A, R \rangle$ 指出其极大元、极小元、最大元和最小元。

七、证明题第二部分（共 12 分）

1. 已知 $A \oplus B = A \oplus C$ ，证明 $B = C$ 。
2. 设A、B和C是任意的集合，证明： $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$
3. 用等势定义证明 $(0, c) \approx \mathbb{R}$ ，其中 $\mathbb{R}$ 为实数域 $(-\infty, +\infty)$ ，c为大于 0 的具体实数。

八、在会议室安装控制同一电灯 L 的 3 个开关 $K_1$ 、 $K_2$ 、 $K_3$ ，使得改变任一开关的状态，即可改变会议室电灯的明暗。试分别完成以下 3 个步骤：

1. 用 $K_1$ 、 $K_2$ 、 $K_3$ 列写出L的真值表；
2. 写出L的逻辑表达式；
3. 用所学的联结词将L的逻辑表达式化为最简形式（指公式长度最短或字符数最少）  
写出必要的过程或解释说明。