清華大學 Tsinghua University **数学作业纸**

班级 软01 姓名 赵晨阳 编号 2020012363 科目 微积分第三周·I 第 1 页

习题 1.5 (1) ① $\exists \varepsilon_0>0, \forall N\in N^*$. 均存在 $m,n>N$, 且 $|x_m-x_n|\geqslant\varepsilon_0$

② $\exists \varepsilon_0>0$, $\forall N\in N^*$, $\exists p\in N^*$, $\exists n>N$. 使 $|x_{n+p}-x_n|\geqslant\varepsilon_0$;

~~2.(3) 对 $\forall\varepsilon>0$. 取 $P_0=\left[\frac{M}{\varepsilon}\right]+1$. 其中 M 为 C_k 的一个界.~~

2.(3) 令 M 为 C_k 的一个界; 即 $|C_k|<M$.

取 $|a_{n+p}-a_n|=|C_{n+1}q^{n+1}+\cdots+C_{n+p}q^{n+p}|$

$\leq |M|\cdot(|q|^{n+1}+|q|^{n+2}+\cdots+|q|^{n+p})$

$=|M|\cdot|q|^{n+1}\cdot\frac{|q|^{p}-1}{|q|-1}<|M|\cdot|q|^{n+1}\cdot\frac{1}{1-|q|}$ 对 $\forall\varepsilon>0$

取 $N=\left[\frac{\ln^{\varepsilon}+\ln^{1-|q|}}{\ln^{|q|}}\right]+1$. 则 $n+1>\frac{\ln^{\varepsilon}+\ln^{1-|q|}}{\ln^{|q|}}$

故 $|a_{n+p}-a_n|<|M|\cdot|q|^{n+1}\cdot\frac{1}{1-|q|}<\varepsilon$

即 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N=\left[\frac{\ln^{\varepsilon}+\ln^{1-|q|}}{\ln^{|q|}}\right]+1$, 当 $n>N$ 时 $\forall p\in N^*$. $|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$ 恒成立

$\therefore a_n$ 为 Cauthy. $\therefore a_n$ 收敛

① 取 $N=\left[\frac{\ln\frac{\varepsilon}{M}(1-|q|)}{\ln^{|q|}}\right]$ (N 怎么会与 M 无关?)

② 石角界原理

3.(1) 对于 a_n. $n=3k$ 时, $a_n=\cos 2k\pi=1$;

$n=3k+1$ 时, $a_n=-\frac{1}{2}$. 即 a_n 存在两子列 $\{a_{3k}\}$ 收敛于 1; $\{a_{3k+1}\}$ 收敛于 $-\frac{1}{2}$.

若 a_n 收敛于 A, 则 a_n 所有子列收敛于 A.

故可知 a_n 不收敛.

(a_n 收敛于 A 的必要条件为 a_n 所有子列均收敛于 A) ∧充分

发散数列: 存在发散子列或存在两收敛列

6. 由 Balzano 定理有: 有界无穷数列必有收敛子列; 记为 $\{a_{n_k}\}$

$\because a_n$ 发散. $\therefore A$ 不为 a_n 极限

$\therefore \exists\varepsilon>0$, 使 a_n 中有无穷个在区间 $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ 之外; 这无穷多个 a_n 构成的子列依然有界, 故他们也存在收敛子列 $\{a_{n_j}\}$. 显然 a_{n_j} 不收敛于 A.

即 $\{a_{n_k}\}$ 与 $\{a_{n_j}\}$ 均为收敛子列且极限不同

8. 令 $b_n=|a_n-a_{n-1}|$. 则 $b_n>0$. 且:

$\frac{b_{n+1}}{b_n}<q<1$ $\therefore b_n$ 单调递减. $\therefore b_n$ 有界且单减

故 b_n 有极限

$|a_{n+p}-a_n|\leq|a_{n+p}-a_{n+p-1}|+|a_{n+p-1}-a_{n+p-2}|+\cdots+|a_{n+1}-a_n|\leq b_{n+1}\cdot(1+q+\cdots+q^{p-1})$

$\leq b_2\cdot q^{n-1}\cdot 1\cdot\frac{1-q^{p-1}}{1-q}<b_2\cdot\frac{q^{n-1}}{1-q}$

b_2 为一常量. 取 $N=\max\left\{\left[\frac{\ln^{\varepsilon}+\ln^{1-q}-\ln^{b_2}}{\ln^{q}}\right]+2, 1\right\}$

$n>N$ 时, $b_2\cdot\frac{q^{n-1}}{1-q}<\varepsilon$ 对 $\forall\varepsilon>0$ 恒成立.

故可知 a_n 为 Cauthy.

$\therefore a_n$ 收敛

① p为偶时，最后一项为减，也小于 $\frac{1}{(n+1)^\alpha}$.

② $\left|\frac{1}{(n+1)^\alpha}-\left(\frac{1}{(n+2)^\alpha}-\frac{1}{(n+3)^\alpha}\right)-\left(\frac{1}{(n+4)^\alpha}-\frac{1}{(n+5)^\alpha}\right)\cdots\frac{1}{(n+p)^\alpha}\right|$

$<\max\left\{\frac{1}{(n+1)^\alpha},\ \frac{1}{(n+1)^\alpha}-\frac{1}{(n+p)^\alpha}\right\}\le\frac{1}{(n+1)^\alpha}$

取 $N=[\ ]$

则 $n>N$ 时，对 $p\in N^*$，$|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$ 恒成立

清華大学 Tsinghua University 数 学 作 业 纸

班级 软01 姓名 赵晨阳 编号 2020012363 科目 微积分A·三周五 第 2 页

2.(6) 取 $|a_{n+p}-a_n|$ $(n、p\in N^*)$ 由于绝对值

则取第一项为正 $=\left|\frac{1}{(n+1)^\alpha}-\frac{1}{(n+2)^\alpha}+\frac{1}{(n+3)^\alpha}-\cdots\right|$

若 p 为奇数，则 $|a_{n+p}-a_n|$

$=\left|\frac{1}{(n+1)^\alpha}-\left(\frac{1}{(n+2)^\alpha}-\frac{1}{(n+3)^\alpha}\right)-\left(\frac{1}{(n+4)^\alpha}-\frac{1}{(n+5)^\alpha}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{(n+p-1)^\alpha}-\frac{1}{(n+p)^\alpha}\right)\right|$ 总体为正数

$<\left|\frac{1}{(n+1)^\alpha}\right|$. 则取 $N=\left[\sqrt[\alpha]{\frac{1}{\varepsilon}}\right]+2$.

$n>N$ 时，$|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$ 恒成立

~~若p为偶数，则 $|a_{n+p}-a_n|<\left|\frac{1}{(n+1)^\alpha}+\frac{1}{(n+p)^\alpha}\right|$~~

~~$<\left|\frac{2}{(n+1)^\alpha}\right|$. 取 $N=\left[\sqrt[\alpha]{\frac{2}{\varepsilon}}\right]+2$. 则~~

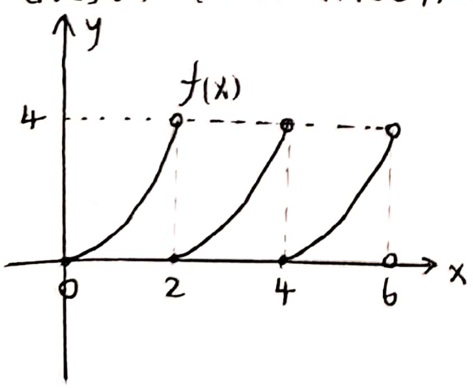
~~$n>N$ 时，$|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$ 恒成立~~ 改正见上

∴ 取 $N=\left[\sqrt[\alpha]{\frac{2}{\varepsilon}}\right]+2$. $n>N$ 时，$|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$ 恒成立

∴ a_n 为 Cauthy. 证毕

14. 令 $x\in[4,6)$. 则 $x-4\in[0,2)$. $f(x-4)=(x-4)^2$

故 $f(x)=(x-4)^2$ $(x\in[4,6))$ 且 $f(x)$ 图像如下:



18.(1) $y=\ln(x-1)+2$. $D(f)=(1,+\infty)$ $R(f)=(-\infty,+\infty)$

$y-2=\ln^{x-1}$ $\quad e^{y-2}=x-1$ $\quad\therefore x=e^{y-2}+1$

即 $f^{-1}(x)$: ~~$y=e^{x-2}+1$~~ $f^{-1}(x)=e^{x-2}+1$ $\quad D(f^{-1})=(-\infty,+\infty)$

(3) $y=1+\cos^3x$ $(x\in[0,\pi])$ $\therefore D(f)=[0,\pi]$

$R(f)=[0,2]$

$\cos x=\sqrt[3]{y-1}$ $\quad x=\arccos\sqrt[3]{y-1}$

$\therefore y=f^{-1}(x)=\arccos\sqrt[3]{x-1}$ $(x\in[0,2])$

$D(f^{-1})=[0,2]$

(5) $x<-1$ 时，$y\in(-\infty,-1)$

$-1\le x\le 2$ 时，$y\in[-1,8]$

$2<x$ 时，$y\in(8,+\infty)$

$y=1-2x^2 \Rightarrow x=-\sqrt{-\frac{y-1}{2}}$ $(y<-1)$

$y=x^3 \Rightarrow x=\sqrt[3]{y}$ $(-1\le y\le 8)$

$y=12x-16 \Rightarrow x=\frac{y+16}{12}$ $(y>8)$

$$y=f^{-1}(x)=\begin{cases}-\sqrt{-\frac{x-1}{2}} & (x<-1)\\ \sqrt[3]{x} & (-1\le x\le 8)\\ \frac{x+16}{12} & (x>8)\end{cases}$$

(1). 从 $(0,1)\to R$.

$y=\tan(x\pi-\frac{1}{2}\pi)$

从 $N^*\to N$

$y=\frac{1}{4}-(-1)^x\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)$

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{x-1}{2}, & x\in 奇\\ \frac{x}{2}, & x\in 偶\end{cases}$$

12.(1) 不为 Cauthy. 如令 $x_n=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$

$|x_{n+p}-x_n|=\left|\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p}\right|<\frac{p}{n+1}<\frac{p}{n}$

但 x_n 不收敛

关于 $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i}\right)$ 不收敛:

A. $\left(1+\frac{1}{2}\right)>\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ $\quad 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)>\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)>\frac{3}{2}$

$\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)>\frac{3}{2}+\frac{1}{8}\times4=2$

$\therefore 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k}>\frac{k+1}{2}$

B. $\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}>\frac{3}{a}$ ($a>1$ 时恒成立)

$S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n}=1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right.$

$\cdots>1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$ 即递归

清華大学 Tsinghua University 数学作业纸

班级 软01 姓名 赵晨阳 编号 2020012363 科目 微积分A · 三周I 第 3 页

12. 2. 成立:

$$|x_{n+p}-x_n| \le |x_{n+p}-x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1}-x_{n+p-2}| + \cdots + |x_{n+1}-x_n| \le \frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)^2}$$

$$\le \frac{1}{(n-1)\cdot n}+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-2)(n+p-1)}$$

$$= \frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+p-1} < \frac{1}{n-1}$$

取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]+2$. 当 $\forall n>N$, 恒有 $|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$

$\therefore \{x_n\}$ 为 Cauthy.

$\forall \varepsilon>0$, 取 $\delta = x_0(e^{\varepsilon}-1)$, 则 $\delta>0$.

$x\in U(x_0,\delta)$ 时, $e^{-\varepsilon}<\frac{x}{x_0}<e^{\varepsilon}$, 即 $|\ln x-\ln x_0|<\varepsilon$

$x > x_0-\delta = x_0\cdot(2-e^{\varepsilon}) > x_0 > e^{-\varepsilon}\cdot x_0$

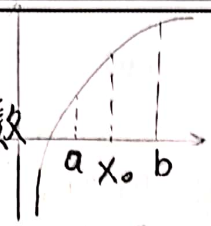
清华大学 Tsinghua University　　数学作业纸

三角不等式: $||a|-|b|| \le |a-b|$

$\therefore ||f(x)|-|A|| \le |f(x)-A|$

班级 软01　姓名 赵晨阳　编号 2020012363　科目 微积分III·2　第 1 页

$\lim\limits_{x\to x_0} \ln x = \ln x_0$; 见上:



已知 $f(x)=\ln x$ 为上凹函数

取 $0<a<x_0<b$.

取 $\delta_0>0$; 使 $a<x_0-\delta_0$, $x_0+\delta_0<b$

对 $\forall x\in(x_0-\delta_0,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta_0)$

由凹函数性质: $\frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0} < \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < \frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}$

1° $x>x_0$ 时, $\frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0}(x-x_0)+f(x_0) < f(x) < \frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}(x-x_0)+f(x_0)$

$x\to x_0^+$ 时, $f(x_0)\le f(x)\le f(x_0)$; 故 $f(x)$ $x\to x_0^+$ 时 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\ln x=\ln x_0$

2° $x<x_0$ 时, $\frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0}(x-x_0)+f(x_0) > f(x) > \frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}(x-x_0)+f(x_0)$

$x\to x_0^-$ 时, $f(x_0)\le f(x)\le f(x_0)$

$\therefore \lim\limits_{x\to x_0^-}\ln x=\ln x_0$

综上: $\lim\limits_{x\to x_0}\ln x=\ln x_0$

改正见下一页:

2.(3) 等价: 取 $\varepsilon \ge 2^{-k}$. 则对 $\forall k\in N^*$, 均 $\exists\ \varepsilon>0$ 且 $\varepsilon\ge 2^{-k}$. $\exists\ \delta_k>0$, $x\in U(x_0,\delta_k)$ 则有 $|f(x)-A|<2^{-k}\le\varepsilon$

即 $\forall\varepsilon$. 取 $k\ge[-\log_2\varepsilon]+1$. 取对应的 δ_k, 则 $x\in U(x_0,\delta_k)$ 则有 $|f(x)-A|<\varepsilon$

(4) ~~等价~~: $\forall\varepsilon>0$, 取 $n\ge[\frac{1}{\varepsilon}]+1$, 则每个 n 对应一个 $\delta_n=\frac{1}{n}$. 有 $0<|x-x_0|<\delta_n$; $|f(x)-A|<\frac{1}{n}<\varepsilon$

$\therefore \forall\varepsilon>0$, 均存在 $\delta_n>0$, $0<|x-x_0|<\delta_n$ 时, $|f(x)-A|<\varepsilon$

4. 已知 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, $x\in U(x_0,\delta)$ 时, $|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\therefore -\varepsilon<f(x)-A<\varepsilon$

$\therefore A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$

$\therefore$ 一方面 $|f(x)|<\{|A+\varepsilon|,|A-\varepsilon|\}_{max}\le|A|+\varepsilon$

另一方面 1° $|A|-\varepsilon<0$ 时, $|f(x)|>0>|A|-\varepsilon$

2° $|A|-\varepsilon>0$ 时,

2.1° A 为正时: $f(x)>A-\varepsilon=|A|-\varepsilon$

2.2° A 为负时, $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon<0$

$\therefore |A-\varepsilon|>|f(x)|>|A+\varepsilon|=|A|-\varepsilon$

$\therefore$ 恒有 $|A|-\varepsilon<|f(x)|<|A|+\varepsilon$

$\therefore -\varepsilon<|f(x)|-|A|<\varepsilon$

$\therefore ||f(x)|-|A||<\varepsilon$

即 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, $x\in U(x_0,\delta)$ 时, $||f(x)|-|A||<\varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|A|$

6.(1) 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上确界为 M. 则 $\forall\varepsilon>0$, 均 $\exists\ x_0\in(a,b)$ 且 $f(x_0)\ge M-\varepsilon$

取 $\delta_0=b-x_0$, $\delta_0>0$.

则 $\forall x\in(b-\delta_0,b)$. $|f(x)-M|$ $=M-f(x)<M-f(b-\delta_0)\le\varepsilon$

即 $\forall\varepsilon>0$, 均 $\exists\ \delta_0>0$, 当 $x\in(b-\delta_0,b)$ 时, $|f(x)-M|<\varepsilon$. $\therefore \lim\limits_{x\to b}f(x)=M$. (存在)

(4)
$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{|x-1|}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1-x}{x-1}=-1$$

(11) $\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x-1}=\frac{\lim_{x\to 1} m x^{m-1}}{\lim_{x\to 1} 1}=m$（洛必达法则）$\longrightarrow \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x^0)}{(x-1)}=m$

(17) $x\to 0$时，$\frac{1}{x}-1<[\frac{1}{x}]\le\frac{1}{x}$，可知$x\to 0$时，

$x(\frac{1}{x}-1)<x\cdot[\frac{1}{x}]<x\cdot\frac{1}{x}$.

$\lim_{x\to 0}x(\frac{1}{x}-1)=1$ $\lim_{x\to 0}x\cdot\frac{1}{x}=1$ 由夹逼定理

$\therefore \lim_{x\to 0}x\cdot[\frac{1}{x}]=1$

改正：

等价=充分且必要

1. 充分性：$\forall k\in N^*$，$\exists\delta_k>0$，当$x\in U(x_0,\delta_k)$时，$|f(x)-A|<2^{-k}$. 故对$\forall\varepsilon>0$，取$k>-\log_2\varepsilon$

即$\exists\delta_k'>0$，当$x\in U(x_0,\delta_k)$时，$|f(x)-A|<2^{-k}<\varepsilon$

必要性：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_\varepsilon>0$，$x\in U(x_0,\delta_\varepsilon)$时，$|f(x)-A|<\varepsilon$. $\forall k\in N^*$，取$\varepsilon=2^{-k}$，则$|f(x)-A|<2^{-k}$ 也$\exists\delta_k>0$。必要性成立；

(4) 不等价：

(4)为$\lim_{x\to x_0}f(x)=A$的充分不必要条件

$\forall n\in N^*$，$\forall x\in U(x_0,\frac{1}{n})$，$|f(x)-A|<\frac{1}{n}$

对$\forall\varepsilon>0$，取$n>\frac{1}{\varepsilon}$. 则$\exists\delta_n<\varepsilon$且$\delta_n=\frac{1}{n}$

$x\in U(x_0,\delta_n)$时，$|f(x)-A|<\frac{1}{n}<\varepsilon$.

充分性成立

必要性不成立；$f(x)=\begin{cases}2^{-x}-1, & (x\ne\frac{1}{2})\\ 2, & (x=\frac{1}{2})\end{cases}$

可知$\lim_{x\to 0}f(x)=0$. 但$n=1$时，$x\in U(0,1)$时，

取$x=\frac{1}{2}$. $|f(\frac{1}{2})-0|=2>1=\frac{1}{n}$矛盾

即取一个断点即可