第5章 Riemann积分

学习材料（8）

1 Riemann积分概念及Riemann积分存在条件

例1 设有非负函数$f(x)$, $x \in [a,b]$. 求以$y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$为边的曲边梯形D 的面积A.

解：画图。
1. 分割区间$[a,b]$. 在区间$[a,b]$中以任意方式插入一组点

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

将区间$[a,b]$分割为若干个子区间$[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 此时直线$x = x_i$ $(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$将曲边梯形D分成n个细条D_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$.

2. 局部近似. 在子区间$[x_{i-1}, x_i]$上任取一点ξ_i，则细条D_i的面积A_i近似等于以$f(\xi_i)$为高、以$x_i - x_{i-1}$为底的矩形面积，即

$$A_i \approx f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

从而曲边梯形D的面积A近似地表示为

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

3. 取极限. 当$\max\limits_{1 \le i \le n} \{x_i - x_{i-1}\}$越来越小时，$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$越来越接近于$A$.

例2 设物体作变速直线运动，其速度v是时间t的函数

$$v = f(t).$$

我们来计算这物体从时刻a到时刻b经过的路程。

解：
1. 分割区间$[a,b]$. 在区间$[a,b]$中以任意方式插入一组点

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b,$$

将区间$[a,b]$分割为若干个子区间$[t_{i-1}, t_i]$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$.

2. 局部近似.在第i段时间中物体通过的路程可以认为近似等于

$$f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}),$$

这里ξ_i是$[t_{i-1}, t_i]$中任意时刻。于是，从时刻a到时刻b物体经过的路程近似等于

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}).$$

3. 取极限. 当$\max\limits_{1\le i\le n}\{t_i-t_{i-1}\}$越来越小时，$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i-t_{i-1})$越来越接近于物体从时刻$a$到时刻$b$经过的路程。

例3

设物体受到一个沿OX轴方向的力F的作用，它沿这轴从a点运动到b点。如果力F随x而改变，即

$$F=f(x).$$

我们来求F对这物体所做的功。

解：

1. 分割区间$[a,b]$. 在区间$[a,b]$中以任意方式插入一组点

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

将区间$[a,b]$分割为若干个子区间$[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$.

2. 局部近似. 设ξ_i是$[x_{i-1},x_i]$上任意一点，在路程$[x_{i-1},x_i]$上把力$F=f(x)$ 近似地看成常力$f(\xi_i)$，则在这段上力F所做的功近似地等于

$$f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}).$$

于是，变力$F=f(x)$在整段路程$[a,b]$所做的功近似地等于

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}).$$

3. 取极限. 当$\max\limits_{1\le i\le n}\{x_i-x_{i-1}\}$越来越小时，$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$越来越接近于变力$F=f(x)$在整段路程$[a,b]$所做的功。

定义1（分割）

若区间$[a,b]$中有限个点集$T=\{x_0,x_1,\cdots,x_{n-1},x_n\}$满足

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

则称T为区间$[a,b]$的一个<u>分割</u>，简记

$$T:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b;$$

每个小区间$[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$称为<u>分割T的子区间</u>；称

$$|T|=:\max_{1\le i\le n}\{x_i-x_{i-1}\}$$

为<u>分割T的最大长度</u>。

定义2（定积分）

设f是定义在区间$[a,b]$上的函数，A是一个实数。若$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当区间$[a,b]$的分割

$$T:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

满足$|T|<\delta$时，对$\forall\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$都有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-A\right|<\varepsilon,$$

则称函数f在区间$[a,b]$上是Riemann可积，记作$f\in R[a,b]$，称A为函数f在区间$[a,b]$上的Riemann积分。

注1

若$f\in R[a,b]$，则其积分值唯一，因而记其积分值为$\int_a^b f(x)dx$，称$f(x)$为被积函数，称x为积分变量，称a与b为积分下限与积分上限. 因积分值仅与函数被积函数$f(x)$ 和积分区间$[a,b]$ 有关，而与积分变量x无关，即

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(u)du.$$

定理1(有界性)

若函数f在$[a,b]$上可积，则f在$[a,b]$有界。

证：设f Riemann 可积，记$A=:\int_a^b f(x)dx$，则$\exists\delta_0>0$，当区间$[a,b]$的分割

$$T:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

满足$|T|<\delta_0$时，对$\forall\xi_i\in[x_{i-1},x_i]\ (i=1,2,\cdots,n)$都有

$$\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-A\right|<1.$$

取$N_0\in Z_+$，使得$\frac{b-a}{N_0}<\delta_0$, 并取区间$[a,b]$的N_0等分分割T_0，

$$T_0:\ a=x_0^*<x_1^*<\cdots<x_{n-1}^*<x_{N_0}^*=b,$$

则对$\forall\xi_i\in[x_{i-1}^*,x_i^*]\ (i=1,2,\cdots,N_0)$都有

$$\left|\sum_{i=1}^{N_0} f(\xi_i)\frac{b-a}{N_0}-A\right|<1.$$

于是对$\forall\xi_i^1,\xi_i^2\in[x_{i-1}^*,x_i^*]\ (i=1,2,\cdots,N_0)$都有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{N_0} f(\xi_i^1)\frac{b-a}{N_0}-\sum_{i=1}^{N_0} f(\xi_i^2)\frac{b-a}{N_0}\right| &\le \left|\sum_{i=1}^{N_0} f(\xi_i^1)\frac{b-a}{N_0}-A\right|+\left|A-\sum_{i=1}^{N_0} f(\xi_i^2)\frac{b-a}{N_0}\right|\\ &< 2,\end{aligned}$$

故

$$\left|f(\xi_k^1)\frac{b-a}{N_0}-f(x_k^*)\frac{b-a}{N_0}\right|<2,\ \ \forall\xi_k^1\in[x_{k-1}^*,x_k^*]\ (k=1,2,\cdots,N_0),$$

因此

$$|f(\xi_k^1)|<|f(x_k^*)|+\frac{2N_0}{b-a},\ \ \forall\xi_k^1\in[x_{k-1}^*,x_k^*]\ (k=1,2,\cdots,N_0),$$

所以$\forall x\in[a,b]$，有

$$|f(x)|<\max_{1\le k\le N_0}|f(x_k^*)|+\frac{2N_0}{b-a}.$$

证毕。

设$f(x)$在$[a,b]$有界，记它在$[a,b]$的上确界为M，下确界为m. 对$[a,b]$的一个分割

$$T:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

任取$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，又分别记M_i与m_i为$f(x)$ 在$[xi-1,x_i]$的上、下确界，$i=1,2,\cdots,n$. 令

$$U(f,T)=\sum_{i=1}^{n}M_i(x_i-x_{i-1});$$

$$L(f,T)=\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i-x_{i-1});$$

$$\sigma(f,T;\xi_i)=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}).$$

分别称$U(f,T),L(f,T)$与$\sigma(f,T;\xi_i)$为函数f（在$[a,b]$）关于分割T的大和、小和与Riemann和。

显然

$$m(b-a)\le L(f,T)\le\sigma(f,T;\xi_i)\le U(f,T)\le M(b-a).$$

命题1

设$f(x)$在$[a,b]$有界，且分别以M，m为上、下确界，T为$[a,b]$任一分割，T_k是在T的分点组中再加入k个新分点所得到的$[a,b]$分割，则

$$0\le U(f,T)-U(f,T_k)\le k|T|(M-m);$$

$$0\le L(f,T_k)-L(f,T)\le k|T|(M-m).$$

证：仅证第一式。对于$k=1$，即T_1的分点组是在T的分点组$\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$ 中加入一个新分点$t:x_{i-1}<t<x_i$，于是

$$\begin{aligned}U(f,T)-U(f,T_1)&=M_i(x_i-x_{i-1})-\sup_{x\in[x_{i-1},t]}f(x)(t-x_{i-1})-\sup_{x\in[t,x_i]}f(x)(x_i-t)\\&=\left(M_i-\sup_{x\in[x_{i-1},t]}f(x)\right)(t-x_{i-1})+\left(M_i-\sup_{x\in[t,x_i]}f(x)\right)(x_i-t)\\&\ge 0;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}U(f,T)-U(f,T_1)&\le M(x_i-x_{i-1})-m(x_i-x_{i-1})=(M-m)(x_i-x_{i-1})\\&\le (M-m)|T|.\end{aligned}$$

对于$k>1$的情形，将T加入一个新分点记为T_1，T_1加入一个新分点记为T_2，$\cdots$，T_{k-1}加入一个新分点

记为T_k. 注意到$|T| \geq |T_1| \geq |T_2| \geq \cdots \geq |T_{k-1}| \geq |T_k|$，由$k=1$的结论即得

$$\begin{aligned} U(f,T)-U(f,T_k) &= [U(f,T)-U(f,T_1)]+[U(f,T_1)-U(f,T_2)]+\cdots+[U(f,T_{k-1})-U(f,T_k)] \\ &\geq 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U(f,T)-U(f,T_k) &= [U(f,T)-U(f,T_1)]+[U(f,T_1)-U(f,T_2)]+\cdots+[U(f,T_{k-1})-U(f,T_k)] \\ &\leq (M-m)|T|+(M-m)|T_1|+\cdots+(M-m)|T_{k-1}| \\ &\leq k(M-m)|T|. \end{aligned}$$

命题2

设$f(x)$在$[a,b]$有界，T_1，T_2为$[a,b]$任意两个分割，则

$$L(f,T_1) \leq U(f,T_2).$$

证：将T于T_2的分点合并得到一个新的分割T，则由命题1，

$$L(f,T_1) \leq L(f,T) \leq U(f,T) \leq U(f,T_2).$$

定义3

设$f(x)$是$[a,b]$上有界函数，分别称

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\{\ U(f,T)\ |\ \ T\text{为}[a,b]\text{的分割}\},$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\{\ L(f,T)\ |\ \ T\text{为}[a,b]\text{的分割}\}$$

为f在$[a,b]$上的<u>上积分</u>与<u>下积分</u>。

由命题2不难证得：对于$[a,b]$的任一分割T，

$$L(f,T) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq U(f,T).$$

定理2.

设f是$[a,b]$上的有界函数，则下陈述等价：

(1). $f \in R[a,b]$;

(2). $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当区间$[a,b]$的分割T 满足$|T| < \delta$时，就有

$$U(f,T)-L(f,T) < \varepsilon;$$

(3)$\forall \varepsilon > 0$，存在$[a,b]$ 的分割T，使得

$$U(f,T)-L(f,T) < \varepsilon;$$

(3).

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

证：$\underline{(1) \Rightarrow (2)}$　设$f \in R[a,b]$，记$I = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$，则由定义知，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当区间$[a,b]$的分割

$$T:\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

满足

$$|T| < \delta$$

时，对$\forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]\ (i = 1, 2, \cdots, n)$都有

$$\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - I\right| < \frac{\varepsilon}{4},$$

特殊地，取ξ_i^1，$\xi_i^2 \in [x_{i-1}, x_i]\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ 满足

$$\sup_{\xi \in [x_{i-1}, x_i]} f(\xi) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} < f(\xi_i^1),\quad f(\xi_i^2) < \inf_{\eta \in [x_{i-1}, x_i]} f(\eta) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)},$$

于是

$$\begin{aligned}
U(f,T) - L(f,T) &= \sum_{i=1}^n \left[\sup_{\xi \in [x_{i-1}, x_i]} f(\xi) - \inf_{\eta \in [x_{i-1}, x_i]} f(\eta)\right](x_i - x_{i-1}) \\
&\le \sum_{i=1}^n \left[f(\xi_i^1) - f(\xi_i^2) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right](x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^n f(\xi_i^1)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n f(\xi_i^2)(x_i - x_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\le \left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i^1)(x_i - x_{i-1}) - I\right| + \left|I - \sum_{i=1}^n f(\xi_i^2)(x_i - x_{i-1})\right| + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

$\underline{(2) \Rightarrow (3)}$　显然。

$\underline{(3) \Rightarrow (4)}$　由(3)，$\forall \varepsilon > 0$,

$$0 \le \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx \le U(f,T) - L(f,T) < \varepsilon.$$

所以（4）成立。

$\underline{(4) \Rightarrow (1)}$ 记$I = \overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$. 由上积分定义，$\forall \varepsilon > 0$，存在$[a,b]$分割

$$T_0 : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b,$$

使得

$$0 \le U(f,T_0) - I < \frac{\varepsilon}{2}.$$

取$\delta_1 = \dfrac{\varepsilon}{2k(M-m)}$，其中$M$与$m$分别为$f$在$[a,b]$上的上确界与下确界。对于$[a,b]$的任一满足$|T| < \delta_1$的分割$T$，将$T$与$T_0$的分点合并而得到的$[a,b]$的分割记为$T'$，由命题1可得

$$U(f,T) - I \le U(f,T') + k|T|(M-m) - I \le U(f,T_0) - I + k|T|(M-m) < \varepsilon.$$

同理，$\exists \delta_2 > 0$，对于$[a,b]$的任一满足$|T| < \delta_2$的分割T，

$$I - L(f,T) < \varepsilon.$$

于是，对于$[a,b]$的任一满足$|T| < \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$的分割$T$，

$$I - \varepsilon < L(f,T) \le \sigma(f,T;\xi_i) \le U(f,T) < I + \varepsilon,$$

故

$$|\sigma(f,T;\xi_i) - I| < \varepsilon,$$

所以$f \in R[a,b]$，且$\displaystyle\int_a^b f(x)dx = I$.

注2 设$f : D \to R$是有界函数，则

$$\sup_{\xi \in D} f(\xi) - \inf_{\eta \in D} f(\eta) = \sup_{\xi,\eta \in D} |f(\xi) - f(\eta)|,$$

故

$$U(f,T) - L(f,T) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{\xi,\eta \in [x_{i-1},x_i]} |f(\xi) - f(\eta)|(x_i - x_{i-1}).$$

<u>其几何意义？</u>

例4 设

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \bigcap Q, \\ 0, & x \in [0,1] \bigcap (R \setminus Q), \end{cases}$$

则函数f不是Riemann 可积。因为对区间$[0,1]$的任一分割T，则

$$U(f,T) - L(f,T) = 1 - 0 = 1.$$

定理3.

1. 设$f\in C[a,b]$，则$f\in R[a,b]$.

2. 设f是定义在$[a,b]$上的单调函数，则$f\in R[a,b]$.

3. 设f是定义在$[a,b]$上的有界且只存在有限个间断点函数，则$f\in R[a,b]$.

证明：
1. $\forall\varepsilon>0$, 因为函数f在$[a,b]$连续，故f在$[a,b]$一致连续，于是$\exists\delta>0$, 当$u,v\in[a,b]$且$|u-v|<\delta$时，就有

$$|f(u)-f(v)|<\frac{\varepsilon}{b-a+1}.$$

因此，当区间$[a,b]$的分割

$$T:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

满足$|T|<\delta$ 时，便有

$$\begin{aligned}U(f,T)-L(f,T) &= \sum_{i=1}^{n}\sup_{\xi,\eta\in[x_{i-1},x_i]}|f(\xi)-f(\eta)|(x_i-x_{i-1})\\ &\le \sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon}{b-a+1}(x_i-x_{i-1})\\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

由定理2的充分性知$f\in R[a,b]$.

2. 不妨设f在$[a,b]$上单调不减。$\forall\varepsilon>0$, 取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)+1}$, 当区间$[a,b]$的分割

$$T:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

满足$|T|<\delta$时，便有

$$\begin{aligned}U(f,T)-L(f,T) &= \sum_{i=1}^{n}\sup_{\xi,\eta\in[x_{i-1},x_i]}|f(\xi)-f(\eta)|(x_i-x_{i-1})\\ &= \sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(x_{i-1})](x_i-x_{i-1})\\ &\le \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)+1}\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(x_{i-1})]\\ &= \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)+1}[f(b)-f(a)]\\ &< \varepsilon,\end{aligned}$$

由定理2的充分性知$f\in R[a,b]$.

3. 不妨设f在$[a,b]$上只有一个间断点b. 有题设，f在$[a,b]$有界：$|f(x)|\le M$ $(a\le x\le b)$. $\forall\varepsilon>0$, 取$c\in(a,b)$使得$b-c<\dfrac{\varepsilon}{4M+1}$. 而$f\in C[a,c]$，根据定理3第一个结论知$f\in R[a,c]$，因此由定理2 的必要性知，存在区间$[a,c]$的分割

$$T_1:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=c$$

使得

$$U(f,T_1)-L(f,T_1)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

现在考虑区间$[a,b]$的分割

$$T:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=c<b.$$

则

$$\begin{aligned}0\le U(f,T)-L(f,T) &= U(f,T_1)-L(f,T_1)+\sup_{x\in[c,b]}f(x)(b-c)-\inf_{x\in[c,b]}f(x)(b-c)\\ &\le U(f,T_1)-L(f,T_1)+2M(b-c)\\ &< \frac{\varepsilon}{2}+2M\frac{\varepsilon}{4M+1}\\ &< \varepsilon,\end{aligned}$$

由定理2的充分性知$f\in R[a,b]$，证毕。

2 Riemann积分的性质

性质1（线性性） 若$f,g\in R[a,b]$，α,β为常数，则$\alpha f+\beta g\in R[a,b]$，且

$$\int_a^b[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx.$$

证：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_1>0$，当区间$[a,b]$的分割

$$T:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

满足$|T|<\delta_1$时，对$\forall\xi_i\in[x_{i-1},x_i]\ (i=1,2,\cdots,n)$都有

$$\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-\int_a^b f(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2|\alpha|+1};$$

$\exists\delta_2>0$，当区间$[a,b]$的分割

$$T:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

满足$|T|<\delta_1$时，对$\forall\xi_i\in[x_{i-1},x_i]\ (i=1,2,\cdots,n)$都有

$$\left|\sum_{i=1}^n g(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-\int_a^b g(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2|\beta|+1}.$$

当区间$[a,b]$的一个分割

$$T:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

满足$|T| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$时，对$\forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]\ (i = 1, 2, \cdots, n)$都有

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{i=1}^{n}[\alpha f(\xi_i) + \beta g(\xi_i)](x_i - x_{i-1}) - \left[\alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx\right]\right| \\
= &\left|\alpha\left[\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(x)dx\right] + \beta\left[\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b g(x)dx\right]\right| \\
\le &|\alpha|\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(x)dx\right| + |\beta|\left|\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b g(x)dx\right| \\
\le &\frac{|\alpha|\varepsilon}{2|\alpha| + 1} + \frac{|\beta|\varepsilon}{2|\beta| + 1} < \varepsilon,
\end{aligned}$$

于是由定义知，$\alpha f + \beta g \in R[a, b]$，且

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx.$$

性质2（区域可加性）

设$c \in (a, b)$，则$f \in R[a, b]$充分必要条件$f \in R[a, c]$，$f \in R[c, b]$，且

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

证：充分性. $\forall \varepsilon > 0$，由$f \in R[a, c]$，$f \in R[c, b]$和定理2的必要性知，存在$[a, c]$ 与$[c, b]$ 的分割T_1与T_2使得

$$U(f, T_1) - L(f, T_1) < \frac{\varepsilon}{2},\ U(f, T_2) - L(f, T_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

令T^*是将T_1与T_2分点合并构成区间$[a, b]$的分割，则

$$U(f, T^*) - L(f, T^*) = U(f, T_1) - L(f, T_1) + U(f, T_2) - L(f, T_2) < \varepsilon,$$

故由定理2的充分性知$f \in R[a, b]$.

必要性. $\forall \varepsilon > 0$，由$f \in R[a, b]$和定理2 的必要性知，$\exists \delta > 0$，当区间$[a, b]$的分割T 满足$|T| < \delta$时，就有

$$U(f, T) - L(f, T) < \varepsilon.$$

若T_1和T_2分别是区间$[a, c]$和区间$[c, b]$的分割满足$|T_1| < \delta$，$|T_2| < \delta$，令T^*是将T_1与T_2分点合并构成区间$[a, b]$的分割，则$|T^*| < \delta$，于是

$$U(f, T^*) - L(f, T^*) < \varepsilon,$$

即

$$U(f, T_1) - L(f, T_1) + U(f, T_2) - L(f, T_2) < \varepsilon,$$

故由定理2的充分性知$f \in R[a, c]$，$f \in R[c, b]$.

利用定积分的定义容易证明

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

性质3（保序性）

若$f,g\in R[a,b]$，且$f(x)\le g(x)\ (\forall x\in[a,b])$，则

$$\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx.$$

特别

1. 若$f\in R[a,b]$，且$f(x)\ge 0\ (\forall x\in[a,b])$，则

$$\int_a^b f(x)dx\ge 0.$$

2. 若$f\in R[a,b]$，且$m\le f(x)\le M\ (\forall x\in[a,b])$，则

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a).$$

3. 若$f\in R[a,b]$，则$|f|\in R[a,b]$且

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b |f(x)|dx.$$

证：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_1>0$，当区间$[a,b]$的分割

$$T:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

满足$|T|<\delta_1$时，对$\forall\xi_i\in[x_{i-1},x_i]\ (i=1,2,\cdots,n)$都有

$$\int_a^b f(x)dx-\varepsilon<\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})<\int_a^b f(x)dx+\varepsilon;$$

$\exists\delta_2>0$，当区间$[a,b]$的分割

$$T:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

满足$|T|<\delta_2$时，对$\forall\xi_i\in[x_{i-1},x_i]\ (i=1,2,\cdots,n)$都有

$$\int_a^b g(x)dx-\varepsilon<\sum_{i=1}^n g(\xi_i)(x_i-x_{i-1})<\int_a^b g(x)dx+\varepsilon.$$

任取区间$[a,b]$的一个分割

$$T:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

满足$|T|<\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 任取$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]\ (i=1,2,\cdots,n)$，则

$$\int_a^b f(x)dx-\varepsilon\quad<\quad\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})\le\sum_{i=1}^n g(\xi_i)(x_i-x_{i-1})<\int_a^b g(x)dx+\varepsilon,$$

于是得

$$\int_a^b f(x)dx-\varepsilon<\int_a^b g(x)dx+\varepsilon,$$

由$\varepsilon>0$的任意性知，

$$\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx.$$

对区间$[a,b]$的任一分割
$$T:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$
有
$$\begin{aligned}U(|f|,T)-L(|f|,T) &= \textstyle\sum_{i=1}^n \sup_{\xi,\eta\in[x_{i-1},x_i]} \left||f(\xi)|-|f(\eta)|\right|(x_i-x_{i-1})\\ &\le \sup_{\xi,\eta\in[x_{i-1},x_i]} |f(\xi)-f(\eta)|(x_i-x_{i-1})\\ &= U(f,T)-L(f,T),\end{aligned}$$
故由$f\in R[a,b]$及定理2知$|f|\in R[a,b]$.

性质4（积分中值公式） 设$f,g\in R[a,b]$，且

$$m\le f(x)\le M,\ g(x)\ge 0\ (\forall x\in[a,b]),$$
则$\exists\mu\in[m,M]$，使得
$$\int_a^b f(x)g(x)dx=\mu\int_a^b g(x)dx,$$
特别当$f\in C[a,b]$时，则$\exists\xi\in[a,b]$，使得
$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

证：$\forall x\in[a,b]$，则
$$mg(x)\le f(x)g(x)\le Mg(x),$$
故由定积分的保序性得
$$m\int_a^b g(x)dx\le\int_a^b f(x)g(x)dx\le M\int_a^b g(x)dx.$$
若$\displaystyle\int_a^b g(x)dx=0$，则由上式知$\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx=0$，从而对$\forall\mu\in[m,M]$，都有
$$\int_a^b f(x)g(x)dx=\mu\int_a^b g(x)dx;$$
若$\displaystyle\int_a^b g(x)dx>0$，则
$$m\le\frac{\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx}{\displaystyle\int_a^b g(x)dx}\le M,$$
取$\mu:=\dfrac{\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx}{\displaystyle\int_a^b g(x)dx}$，即知$\mu\in[m,M]$，且$\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx=\mu\int_a^b g(x)dx$.

性质5

若$f,g\in R[a,b]$，则$f\cdot g$，$\sqrt{f^2+g^2}\in R[a,b]$; 且当$|g(x)|\ge M>0\ (\forall x\in[a,b])$时，则$\dfrac{1}{g}\in R[a,b]$.

证：
记
$$M^* =: \sup_{\xi\in[a,b]}|f(\xi)| + \sup_{\eta\in[a,b]}|g(\eta)|.$$
对区间$[a,b]$的任一分割
$$T:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$
则
$$\begin{aligned}
U(fg,T)-L(fg,T) &= \sum_{i=1}^n \sup_{\xi,\eta\in[x_{i-1},x_i]}|f(\xi)g(\xi)-f(\eta)g(\eta)|\,(x_i-x_{i-1})\\
&\le \sum_{i=1}^n \sup_{\xi,\eta\in[x_{i-1},x_i]}\left[|f(\xi)|\cdot|g(\xi)-g(\eta)|+|f(\xi)-f(\eta)|\cdot|g(\eta)|\right](x_i-x_{i-1})\\
&\le M^*\sum_{i=1}^n \left[\sup_{\xi,\eta\in[x_{i-1},x_i]}|g(\xi)-g(\eta)|+\sup_{\xi,\eta\in[x_{i-1},x_i]}|f(\xi)-f(\eta)|\right](x_i-x_{i-1})\\
&= M^*\cdot\left[U(g,T)-L(g,T)+U(f,T)-L(f,T)\right],
\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}
U(\sqrt{f^2+g^2},T)-L(\sqrt{f^2+g^2},T) &= \sum_{i=1}^n \sup_{\xi,\eta\in[x_{i-1},x_i]}\left|\sqrt{f^2(\xi)+g^2(\xi)}-\sqrt{f^2(\eta)+g^2(\eta)}\right|(x_i-x_{i-1})\\
&\le \sum_{i=1}^n \sup_{\xi,\eta\in[x_{i-1},x_i]}\sqrt{[f(\xi)-f(\eta)]^2+[g(\xi)-g(\eta)]^2}(x_i-x_{i-1}) \qquad (|\,|\overrightarrow{a}|-|\overrightarrow{b}|\,|\le\\
&\le \sum_{i=1}^n \sup_{\xi,\eta\in[x_{i-1},x_i]}[\,|f(\xi)-f(\eta)|+|g(\xi)-g(\eta)|\,]\,(x_i-x_{i-1})\\
&\le \sum_{i=1}^n \left[\sup_{\xi,\eta\in[x_{i-1},x_i]}|f(\xi)-f(\eta)|+\sup_{\xi,\eta\in[x_{i-1},x_i]}|g(\xi)-g(\eta)|\right](x_i-x_{i-1})\\
&= U(g,T)-L(g,T)+U(f,T)-L(f,T),
\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}
U\left(\frac{1}{g},T\right)-L\left(\frac{1}{g},T\right) &= \textstyle\sum_{i=1}^n \sup_{\xi,\eta\in[x_{i-1},x_i]}\left|\frac{1}{g(\xi)}-\frac{1}{g(\eta)}\right|(x_i-x_{i-1})\\
&= \sum_{i=1}^n \sup_{\xi,\eta\in[x_{i-1},x_i]}\left|\frac{g(\xi)-g(\eta)}{g(\xi)\cdot g(\eta)}\right|(x_i-x_{i-1})\\
&\le \frac{1}{M^2}\sum_{i=1}^n \sup_{\xi,\eta\in[x_{i-1},x_i]}|g(\xi)-g(\eta)|(x_i-x_{i-1})\\
&= \frac{1}{M^2}\cdot[U(g,T),L(g,T)],
\end{aligned}$$
故由定理2的充分性知$f\cdot g$, $\sqrt{f^2+g^2}$, $\dfrac{1}{g}\in R[a,b]$.

定义1 设I是个区间，f是定义在I上的函数. 若有函数$F:I\to R$使得
$$F'(x)=f(x),\ \forall x\in I,$$

则称在区间I上F是f的一个原函数。

例1 设$f(x)=[x]$，问f有原函数吗？

解：f没有原函数。反证法，若F是f的一个原函数，则

$$F'(x)=f(x)=[x],$$

因此F'有第一类间断点，但这与“导函数既无可去间断点，也无第一类间断点”的结论矛盾。因此f没有原函数。

定理3（Newton-Leibnitz公式、微积分基本公式）

设$f\in R[a,b]$，且存在$[a,b]$上函数F满足$F'(x)=f(x)$（称F是f在$[a,b]$上的一个原函数），则

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

证：对区间$[a,b]$的任一分割

$$T:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

$\forall\xi_i\in[x_{i-1},x_i]\ (i=1,2,\cdots,n)$都有

$$\begin{aligned}
|\sigma(f,T;\xi_i)-[F(b)-F(a)]| &===== \left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-\sum_{i=1}^n[F(x_i)-F(x_{i-1})]\right|\\
&\underset{\exists\xi_i^*(x_{i-1},x_i)}{=====} \left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-\sum_{i=1}^n f(\xi_i^*)(x_i-x_{i-1})\right|\\
&===== \left|\sum_{i=1}^n[f(\xi_i)-f(\xi_i^*)](x_i-x_{i-1})\right|\\
&\leq U(f,T)-L(f,T),
\end{aligned}$$

由$f\in R[a,b]$及定理2知由定义知

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

证毕。

例2 求1.$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$；2. $\int_a^b e^x dx$；3. $\int_0^\pi \sin x dx$.

解：

1. $\frac{1}{1+x^2}$在$[0,1]$连续，且$\frac{1}{1+x^2}$在$[0,1]$有原函数$\arctan x$，所以由Newton-Leibnitz 公式得

$$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

2.

$$\int_a^b e^x dx=e^x|_0^\pi \quad =e^b-e^a.$$

3.

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x|_0^{\pi} \quad = 2.$$

例3 求$I = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left[\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{n}} + \sqrt{1+\cos\frac{2\pi}{n}} + \cdots + \sqrt{1+\cos\frac{n\pi}{n}}\right]$

解：

$$\begin{aligned}
I &== \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\cos\frac{i\pi}{n}}\frac{1}{n} \quad \text{（}[0,1]n\text{等分，}\xi_i\text{取为区间的右端点）}\\
&\Leftarrow= \int_0^1 \sqrt{1+\cos\pi x}dx\\
&== \int_0^1 \sqrt{2}\cos\frac{\pi x}{2}dx\\
&== \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2}\Big|_0^1\\
&== \frac{2\sqrt{2}}{\pi}.
\end{aligned}$$

例4 设$f(x) = \max\{1, x^2\}$，求$\int_0^2 f(x)dx$.

解：

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1,\\ x^2, & x \ge 1. \end{cases}$$

故$f \in C[0,2]$，从而由定理3知$f \in R[0,2]$，于是

$$\begin{aligned}
\int_0^2 f(x)dx &===== \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx \quad \text{（积分的区域可加性）}\\
&===== \int_0^1 dx + \int_1^2 x^2 dx\\
&===== x|_0^1 + \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{10}{3} \quad \text{（Newton-Leibnitz公式）}.
\end{aligned}$$

例5 设$f \in C[a,b]$，且$f(x) \ge 0\ (\forall x \in [a,b])$，$\int_a^b f(x)dx = 0$，则$f(x) \equiv 0$.

解：反证法。若$\exists x_0 \in (a,b)$，使得$f(x_0) > 0$，则由连续函数的局部保号性，$\exists \delta_0 > 0$，使得

$$f(x) > \frac{f(x_0)}{2} \quad (\forall x \in [x_0-\delta_0, x_0+\delta_0]),$$

于是

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx \quad &=\!=\!=\!=\!= \quad \int_a^{x_0-\delta_0} f(x)dx+\int_{x_0-\delta_0}^{x_0+\delta_0} f(x)dx+\int_{x_0+\delta_0}^{b} f(x)dx \quad \text{（积分的区域可加性）} \\
&\geq \quad \int_{x_0-\delta_0}^{x_0+\delta_0} \frac{f(x_0)}{2}dx \quad \text{（积分的保序性）} = f(x_0)\delta_0>0,
\end{aligned}
$$

但这与$\int_a^b f(x)dx=0$矛盾。所以$f(x)\equiv 0$.

例6 求证

$$\lim_{p\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x dx=0.$$

证：$\forall \varepsilon\in(0,\pi)$，当$p>\dfrac{\ln\left[\frac{\varepsilon}{\pi-\varepsilon}\right]}{\ln\cos\frac{\varepsilon}{2}}$时，

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x dx \quad &= \quad \underline{\underline{\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}} \sin^p x dx}}+\underline{\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x dx} \quad \text{（积分的区域可加性）} \\
&\leq \quad \underline{\underline{\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right]^p\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)}}+\underline{\frac{\varepsilon}{2}} \quad \text{（积分的保序性）} \\
&= \quad \frac{\pi-\varepsilon}{2}\cos^p\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)+\frac{\varepsilon}{2} \\
&< \quad \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,
\end{aligned}
$$

故

$$\lim_{p\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x dx=0.$$

例7 设$f\in R[0,1]$，且f在0处连续，求证

$$\lim_{h\to0^+}\int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2}f(x)dx=\frac{\pi}{2}f(0).$$

证：因

$$\lim_{h\to0^+}\int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2}f(0)dx=\lim_{h\to0^+} f(0)\arctan\frac{x}{h}\Big|_{x=0}^{x=1}=\lim_{h\to0^+} f(0)\arctan\frac{1}{h}=\frac{\pi}{2}f(0),$$

故只需证

$$\lim_{h\to0^+}\int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2}[f(x)-f(0)]dx=0.$$

$\forall\varepsilon>0$，由f在0处连续知，$\exists\delta>0$，使得

$$|f(x)-f(0)|<\frac{\varepsilon}{\pi}\quad (\forall x\in[0,\delta]).$$

于是当$0<h<\dfrac{\varepsilon\delta^2}{2\displaystyle\int_0^1|f(x)-f(0)|\,dx+1}$时，则

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1\frac{h}{h^2+x^2}[f(x)-f(0)]dx\right| &\le \int_0^1\frac{h}{h^2+x^2}|f(x)-f(0)|\,dx,\\
&= \int_0^\delta\frac{h}{h^2+x^2}|f(x)-f(0)|\,dx+\int_\delta^1\frac{h}{h^2+x^2}|f(x)-f(0)|\,dx,\\
&\le \int_0^\delta\frac{h}{h^2+x^2}\frac{\varepsilon}{\pi}dx+\int_\delta^1\frac{h}{\delta^2}|f(x)-f(0)|\,dx,\\
&= \frac{\varepsilon}{\pi}\arctan\frac{\delta}{h}+\frac{h}{\delta^2}\int_\delta^1|f(x)-f(0)|\,dx,\\
&< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,
\end{aligned}$$

故

$$\lim_{h\to0^+}\int_0^1\frac{h}{h^2+x^2}[f(x)-f(0)]dx=0.$$