Mo Tu We Th Fr Sa Su

软01 赵晨阳 2020012363 微积分 2.1 Memo No. Date / /

1.(1) 记 $2x_n-y_n=a_n$. $3x_n+4y_n=b_n$. 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$

则 $\begin{cases}x_n=\frac{4}{11}a_n+\frac{1}{11}b_n\\ y_n=-\frac{3}{11}a_n+\frac{2}{11}b_n\end{cases}$ 由极限的四则运算 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{4}{11}A+\frac{1}{11}B$ $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=-\frac{3}{11}A+\frac{2}{11}B$

即命题成立 第(1)题批注. 取 $\varepsilon_1=\frac{11}{8}\varepsilon$. $\varepsilon_2=\frac{11}{2}\varepsilon$. 则 $\exists N_{\varepsilon_1}\in N^*, n>N_{\varepsilon_1}$ 有 $|2x_n-y_n-A|<\varepsilon_1$; $\exists N_2\in N^*, n>N_2$ 时 $|3x_n+4y_n-B|<\varepsilon_2$. 见下一页

3. 取 $\varepsilon=\min\{b-A, A-a\}$. 显然 $\varepsilon>0$. 由收敛定义. $\exists N_\varepsilon\in N$ 使得 $n>N_\varepsilon$ 时, $|a_n-A|<\varepsilon$ 即 $A-\varepsilon<a_n<A+\varepsilon$

而 $a\le A-\varepsilon<A+\varepsilon\le b$. 故 $a_n\in(a,b)$

4.(8) $\frac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\frac{n}{2}$

$=\frac{-n}{2n+4}=\frac{-1}{2+\frac{4}{n}}$

$\lim\limits_{n\to\infty}$ 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-1}{2+\frac{4}{n}}$

$=\frac{-1}{2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n}}=-\frac{1}{2}$

(12) 记原式为 S_n 则: $S_n<\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}}=1$

又 $S_n>\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}}=1$

由夹逼性质: $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1$

并加上夹逼性

6. $x_n\ge(x_n-y_n)+A$. 取lim有 $x_n\ge A$. $x_n\le A$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$. y_n 相似!

6. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$

$\forall\varepsilon>0, \exists N$. $n>N$ 时,

$|x_n-y_n|<\varepsilon$. 即 $y_n-x_n<\varepsilon$

$y_n-A+A-x_n<\varepsilon$

$|y_n-A|+|A-x_n|<\varepsilon$

$\therefore |y_n-A|<\varepsilon$ 且 $|x_n-A|<\varepsilon$

$\therefore y_n$ 与 x_n 均有极限.

设为 M、N. 则 $M=N$.

若 $M>A$. 则 a_n 不恒 $\le A$.

$M<A$, 则 b_n 不恒 $\ge A$

$\therefore M=N=A$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A$

1.4节: 4:(1) 显然 a_n 单调递增

$a_n<1+\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}\le2-\frac{1}{n}<2$

单调有界则收敛

5.(1) $a_2=\sqrt{2\sqrt{2}}>a_1$. 若 $a_{n-1}<a_n$. 则

$a_{n+1}=\sqrt{2a_n}>\sqrt{2a_{n-1}}=a_n$. 又 $a_2>a_1$. $\therefore a_n$ 单调递增. 假设 $a_n<2$. 则 $a_{n+1}=\sqrt{2a_n}<2$

又 $\because a_1<2$ $\therefore a_n<2$. 即 a_n 有界

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在. $a_{n+1}^2=2a_n$. $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}^2=2\lim\limits_{n\to\infty}a_n$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$ 极限显然不为0!

5.(4) 也可直接证 $a_n<\frac{\sqrt5+1}{2}$. 令 $a_k<\frac{\sqrt5+1}{2}$ 则 $a_{k+1}=2-\frac{1}{1+a_n}<2-\frac{1}{1+\frac{\sqrt5+1}{2}}=\frac{\sqrt5+1}{2}$

$\therefore a_n<\frac{\sqrt5+1}{2}$

Mo Tu We Th Fr Sa Su

Memo No.

Date / /

5.(4) $a_2=\frac{3}{2}>a_1$. 假设 $a_n>a_{n-1}$. 则

$a_{n+1}=2-\frac{1}{1+a_n}>2-\frac{1}{1+a_{n-1}}=a_n$

故 a_n 单调递增

且 $a_n<2$ 必成立. 故 a_n 有界. 设极限为 A

$a_{n+1}=2-\frac{1}{1+a_n}$

$a_{n+1}a_n+a_{n+1}-2a_n=1$

取极限有: $A^2-A-1=0$. 且 $A>0$

$\therefore A=\frac{1+\sqrt5}{2}$

12.(3) 取 $a_n=1+\sqrt2+\sqrt3+\cdots+\sqrt n$

$b_n=n\sqrt n$ b_n 严格单增且 $b_n\to\infty$ $(n\to\infty)$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=\frac{\sqrt n}{n\sqrt n-(n-1)\sqrt{n-1}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n-\sqrt n\sqrt{n-1}+\sqrt{\frac{n-1}{n}}}$

$=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}n-\sqrt n\cdot\sqrt{n-1}+\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n-1}{n}}}$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}n-\sqrt n\sqrt{n-1}=\frac{\sqrt n}{\sqrt n+\sqrt{n-1}}=\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac1n}}=\frac12$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}$ 原式 $=\frac23$

由 stolz 可知: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac23$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt n}(1+\sqrt2\cdots+\sqrt n)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt n}+\sqrt{\frac2n}+\cdots+\sqrt{\frac nn}\right)\cdot\frac1n$

$=\int_0^1\sqrt x\,dx=\frac23x^{\frac32}\Big|_0^1=\frac23$

13. 取 $A_n=a_1+2a_2+\cdots+na_n$

$B_n=n^2$. 则 B_n 严格单增且

$B_n\to\infty$ $(n\to\infty)$

$A_n-A_{n-1}=na_n$ $B_n-B_{n-1}=2n-1$

$\frac{A_n-A_{n-1}}{B_n-B_{n-1}}=\frac{a_n}{2-\frac1n}$ 取极限有:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{A_n-A_{n-1}}{B_n-B_{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{2-\frac1n}=\frac{a}{2}$

由 stolz 知

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n}=\frac a2$

12.3: $\frac{\sqrt n}{n\sqrt n-(n-1)\sqrt{n-1}}$

$=\frac{\sqrt n}{(\sqrt n-\sqrt{n-1})(n+\sqrt{(n-1)n}+n-1)}$

$=\frac{\sqrt n+\sqrt{n-1}}{2\sqrt n+\sqrt{n-1}+\frac{1}{\sqrt n}}$

$\lim=\frac23$

(1) 题备注: 对 $|4(2x_n-y_n-A)+(3x_n+4y_n-B)|$

$<4\varepsilon_1+\varepsilon_2$. 故 $\left|x_n-\frac{4A+B}{11}\right|<\frac{4\varepsilon_1+\varepsilon_2}{11}=\varepsilon$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在且为 $\frac{4A+B}{11}$

y_n 同理: $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\frac{2B-3A}{11}$

16. (1)

$\frac{b_{n-1}}{b_n} = T_n$. 则:

$\ln T_n = \ln \frac{(\frac{n}{n-1})^n}{(\frac{n+1}{n})^{n+1}} = n\ln\frac{n}{n-1} - (n+1)\ln\frac{n+1}{n}$

~~记 $f(n) = \ln T_n$ ($n=2,3,4\cdots$)~~

~~$\therefore f(n) = (2n+1)\ln n - (n+1)\ln(n+1) - n\ln(n-1)$~~

~~$f'(n) = 2\ln n - \ln(n^2-1) + \frac{n+1}{n} - \frac{n}{n-1}$~~

另: $\frac{1}{b_{n-1}} = (\frac{n-1}{n})^n = (1-\frac{1}{n})(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{1}{n})\cdot 1$

$\le \left[\frac{(1-\frac{1}{n})+(1-\frac{1}{n})+\cdots+(1-\frac{1}{n})+1}{n+1}\right]^{n+1} = \left(\frac{n-1+1}{n+1}\right)^{n+1}$

$= \frac{1}{b_n}$ "="当且仅当 $1-\frac{1}{n}=1$ 时可取

故 $\frac{b_{n-1}}{b_n} > 1$

欲证 $T_n > 1$. $\therefore \ln T_n > 0$. 即证 $\ln\frac{n}{n-1} - \frac{n+1}{n}\ln\frac{n+1}{n} > 0$

设 $x = \frac{n+1}{n}$ ($x\in(1,2)$且为1,2之间的一些断点). 则 $\ln\frac{n}{n-1} - \frac{n+1}{n}\ln\frac{n+1}{n}$ 可化为

$f(x) = -\ln(2-x) - x\ln x$. 取 $f(t) = -\ln(2-t) - t\ln t$. $t\in[1,2)$ 则:

$f'(t) = \frac{1}{2-t} - \ln t - 1 > 0$ $f'(1) = 0$ ~~$f(t) > 0$~~ $\underset{t\to\infty}{}$ 欲证 $f(t)$ 在 $t\in[1,2)$ 上为正

$f''(t) = \frac{1}{(2-t)^2} - \frac{1}{t} = \frac{-(t-1)(t-4)}{(2-t)^2\cdot t} > 0$, $\therefore f'(t)\uparrow$. 且 $f'(t)$ $t=1$ 时 $=0$. $\therefore f'(t)$ 在 $[1,2)$ 上为正 $\therefore f(t)\uparrow$ 又$\because f(1)=0$ $\therefore f(x)>0$

即证得 $\frac{b_{n-1}}{b_n} > 1$ 对16.(2)而言: $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ 其上确界为e.(见例1.4.1)

$b_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ 下确界为e.(有极限且↓) $(1+\frac{1}{n})^n < e < (1+\frac{1}{n})^{n+1}$

(2) 令 $\frac{n+1}{n} = x$ ($x>1$). 则 $\frac{1}{n+1} = \frac{x-1}{x}$ $\frac{1}{n} = x-1$ $\therefore \frac{1}{n+1} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$

取 $f(x) = x - x\ln x - 1$ $f'(x) = -\ln x < 0$ $f(1) = 0$ $\because f(x)$ 在 $x>1$ 后为负

$\therefore x-1 < x\ln x$ $\therefore \frac{x-1}{x} < \ln x$ 即: $\frac{1}{n+1} < \ln(1+\frac{1}{n})$

取 $g(x) = x - \ln x - 1$ $g'(x) = 1-\frac{1}{x} > 0$ $g(1)=0$ $\therefore g(x)$ 在 $x>1$ 时为正

$\therefore x-1 > \ln x$ $\therefore \frac{1}{n} > \ln(1+\frac{1}{n})$

$\therefore \frac{1}{n+1} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$

习题1.5 (1) $\exists \varepsilon_0 > 0$, 对 $\forall N\in N^*$, 均$\exists$至少一组m,n,满足 m,n均大于N且 $|x_m - x_n| \ge \varepsilon_0$ 或 $\exists\varepsilon_0>0$, $\forall N\in N^*$, 均$\exists n>N$且$p>0$, $p\in N^*$且 $|x_{n+p} - x_n| \ge \varepsilon_0$

Mo Tu We Th Fr Sa Su

Memo No.

Date / /

15. $a=b$时,显然 $a_n=a=b_n=b$.命题成立.

1° $a<b$时, $b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}\geq\sqrt{a_nb_n}=a_{n+1}$ ($a_n.b_n$为R^+)

即 $a_n<b_n$恒成立. $a_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}>\sqrt{a_n^2}=a_n$

∴ a_n单调递增 $b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}<\frac{2b_n}{2}=b_n$ ∴b_n单调递减

又∵ ~~$a_n<a_1<b_1$~~ $b_n>a_n>a$

$a_n<b_n<b$

∴由单调有界定理有:

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$与$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$存在. 故$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)$存在. 记$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$

$b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{(\sqrt{b_n}-\sqrt{a_n})^2}{2}$

两段取极限有: $B-A=\frac{(\sqrt{B}-\sqrt{A})^2}{2}$ 若$B\neq A$.则 $\sqrt{B}+\sqrt{A}=\frac{\sqrt{B}-\sqrt{A}}{2}$

则 $\sqrt{A}\cdot\sqrt{B}<0$. 矛盾 ∴$\sqrt{B}=\sqrt{A}$ ∴$B=A$

2° $a>b$时,可知 $a_2<b_2$. 令 $a_2=m$ $b_2=n$. 则其后与1°完全相同,仅在a_1,a_2,b_1,b_2间有不同,也成立

17. 取 $m_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$ 则 $m_{n+1}-m_n=\frac{1}{n+1}-\ln(1+\frac{1}{n})$. 由16.(2)可知

$m_{n+1}-m_n<0$ ∴m_n单调递减

$m_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdots+\frac{1}{n}-\ln 2-\ln\frac{3}{2}-\ln\frac{4}{3}-\cdots-\ln\frac{n}{n-1}-\ln\frac{n+1}{n}+\ln\frac{n+1}{n})$

由基本不等式有: $x-\ln(x+1)>0$ ∴ $m_n=(1-\ln 2)+(\frac{1}{2}-\ln\frac{3}{2})+\cdots+(\frac{1}{n}-\ln(\frac{1}{n}+1))$

$+\ln(\frac{1}{n}+1)>\ln(\frac{1}{n}+1)>0$ ∴m_n单减且有下界

∴m_n存在极限 r

补充: 令x_n为Cauchy. 取$\varepsilon=1$. $\exists N_\varepsilon\in N^*$ $n>N_\varepsilon$时, $|x_n-x_{N_\varepsilon+1}|<1$ 即 $|x_n|<1+|x_{N_\varepsilon+1}|$

令 $M=|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_{N_\varepsilon+1}|+1$. 可知 $\forall n\in N^*$. $|x_n|<M$

∴ x_n有界