A. 证：Cauthy 有界.

证：$\varepsilon_0=1$. $\exists N_0\in N_+$, 当 $n,m>N_0$ 时. $|a_n-a_m|<1$

$|a_n|\le|a_n-a_{N_0+1}|+|a_{N_0+1}|$

$<1+|a_{N_0+1}|$, 而前面有有限个数

B. 证 Cauthy 为收敛列

即 Cauthy 收敛准则

分析. Cauthy 有界. 由波尔兹诺. Cauthy 有一收敛子列 记 $\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=A \overset{?}{\Longrightarrow} \lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$

$|a_n-A|=|a_n-a_{n_k}+a_{n_k}-A|$

$\le\underbrace{|a_n-a_{n_k}|}_{\text{Cauthy}}+\underbrace{|a_{n_k}-A|}_{\text{定义}}$

证明如右

由 a_n 为 Cauthy. 则 a_n 有界

又由 Bolzano 有：a_n 有收敛子列 a_{n_k}. 记 $\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=A$

下证 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$.

$\forall\varepsilon>0$. 由 $\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=A$ 有：$\exists K_\varepsilon\in N^*$. 当 $K>K_\varepsilon$ 时, $|a_{n_k}-a_{n_{k_\varepsilon}}|<\frac{\varepsilon}{2}$. 又由 a_n 为 Cauthy.

$\exists N_\varepsilon\in N^*$. $n,m>N_\varepsilon$ 时. $|a_n-a_m|<\frac{\varepsilon}{2}$.

$|a_n-A|=|a_n-a_{n_{k_\varepsilon+N_\varepsilon}}+a_{n_{k_\varepsilon+N_\varepsilon}}-A|\le|a_n-a_{n\dots}|$

$+|a_{n\dots}-A|$. 当 $n>\cdots$

$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

例题:

1. $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin k}{k^2}$

$\forall n,p\in N^*$. $|a_{n+p}-a_n|$

$=\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{\sin k}{k^2}<\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k^2}<\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{(k-1)k}$

$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}$.

故 $\forall \varepsilon>0$ 有. $N_\varepsilon=[\frac{1}{\varepsilon}]+1$, 当

$n>N_\varepsilon$ 时, $\forall p\in N^*$. $|a_{n+p}-a_n|$

$<\frac{1}{n}<\frac{1}{N_\varepsilon}<\varepsilon$. 故 a_n 为Cauchy

函数:极限与连续

一. 函数:

A. 概念

定义域: D 或 $D(f)$

对应规则: f

值域: R 或 $R(f)$

B. $f: D(f)\to R(f)$. 奇函数:

若 $x\in D$. $-x\in D$. 且 $f(x)=-f(-x)$

偶相同

C. 单调函数

① 单调不增: $x_1, x_2\in D$.

$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\geq f(x_2)$

{ 严格递减函数

……

② ……

D. 周期函数

E. 有界函数

f $D\to R$ 无界 :$\Leftrightarrow$ $\forall n\in N^*$,

$\exists x_n\in D$. 使 $|f(x_n)|>n$

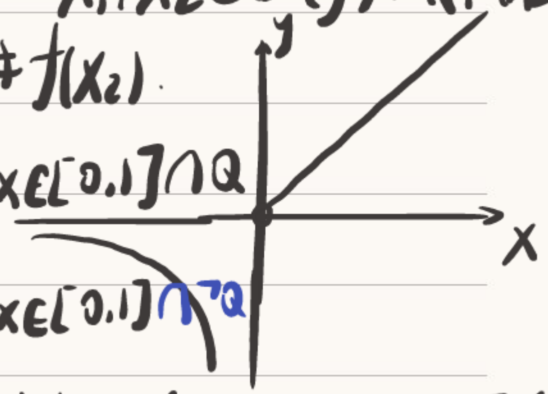
证: $\forall M>0$; $[M]+1\in N^*$,

$\exists x_{[M]+1}\in D$. $|f(x_{[M]+1})|>[M]+1 \geq M$

F. 单射: $x_1, x_2\in D(f)$. $x_1\neq x_2$

则 $f(x_1)\neq f(x_2)$.

$$f(x)=\begin{cases} x & x\in[0,1]\cap Q \\ 1-x & x\in[0,1]\cap \neg Q \end{cases}$$



若 f 为单射. $\forall y\in R(f)$. 必存在唯一 $y=f(x)$. 则 $y\mapsto x$

称此对应为反函数, 记为 f^{-1}.

$f^{-1}: y\mapsto x$ 或 $x=f^{-1}(y)$ 依习惯

$y=f^{-1}(x)$ $x\in R(f)$ $y\in D(f)$

例: $f(x)=\begin{cases} x & (x<1) \\ x^2 & (1\le x\le 4) \\ 2^x & (4<x) \end{cases}$

求 f^{-1}!

(1) $y=x$. $x<1$. 则 $x=y$, $y<1$

(2) $y=x^2$. $1\le x\le 4$. 则 $x=\sqrt{y}$. $1\le y\le 16$

(3) $y=2^x$. $4<x$ 则 $x=\log_2 y$ $16<y$;

故 $f^{-1}(x)=\begin{cases} x & (x<1) \\ \sqrt{x} & (1\le x\le 16) \\ \log_2 x & (16<x) \end{cases}$

例: 设 $f(x)=\begin{cases} e^x & (x<1) \\ x & (1\le x) \end{cases}$

$g(x)=\begin{cases} x+2 & (x<0) \\ x^2-1 & (0\le x) \end{cases}$

解: $\forall x\in R$. $(f\circ g)(x)$

$=f(g(x))=\begin{cases} f(x+2) & (x<0) \\ f(x^2-1) & (x\ge 0) \end{cases}$

$=\begin{cases} \begin{cases} e^{x+2} & \text{当 } x<0 \text{ 且 } x+2<1 \\ x+2 & \text{当 } x<0 \text{ 且 } 1\le x+2 \end{cases} \\ \begin{cases} e^{x^2-1} & \text{当 } 0\le x \text{ 且 } x^2-1<1 \\ x^2-1 & \text{当 } 0\le x \text{ 且 } x^2-1\ge 1 \end{cases} \end{cases}$

$=\begin{cases} e^{x+2} & (x<-1) \\ x+2 & (-1\le x<0) \\ e^{x^2-1} & (0\le x<\sqrt{2}) \\ x^2-1 & (\sqrt{2}\le x) \end{cases}$

二. 函数的基本运算

A. 四则运算:

定义域为 $D(f)\cap D(g)$

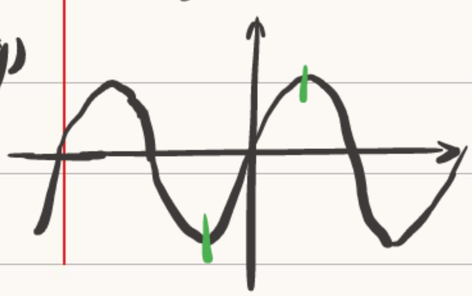
B. 复合运算:

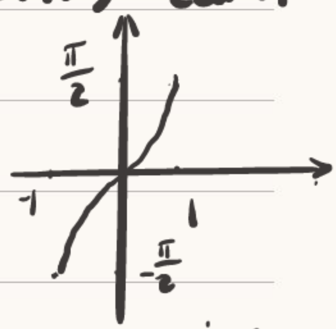
$f\circ g(x)=f(g(x))$, $x\in D(g)$

$g(x)\in D(f)$

三. 初等函数:

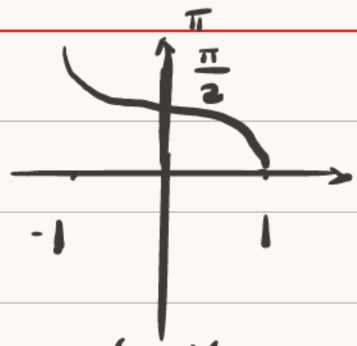
$y=\sin x$; $y=\cos x$; $y=\tan x$



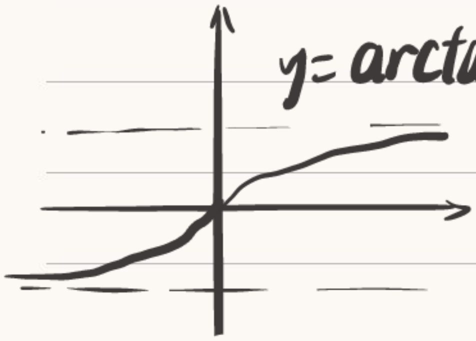


$y=\arcsin x$

$y=\arccos x$



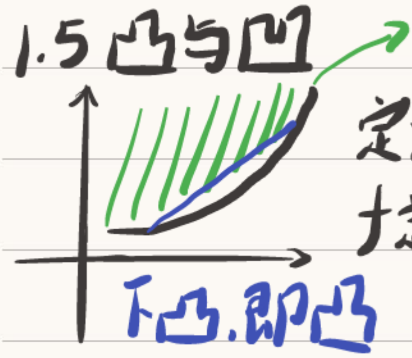
$y=\arctan x$



1.4 极坐标:

$\rho=1+\cos\theta \quad (\theta\in[0,2\pi])$

1.5 凸与凹 凸的

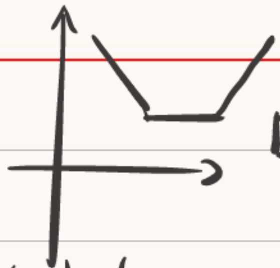


下凸,即凸

定义:I为区间, f定义在I上. $\forall x_1,x_2\in I$. $\forall\lambda\in(0,1)$

$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2) \Leftrightarrow \forall x_1,\xi,x_2\in I,\ x_1<\xi<x_2$

则f在I内为下凸(简称凸) 必有 $f(\xi)\ge\frac{x_2-\xi}{x_2-x_1}f(x_1)+\frac{\xi-x_1}{x_2-x_1}f(x_2)$



凸.

例: $f(x)=x^2$. $\forall x_1,x_2\in R$.

$\forall\lambda\in(0,1)$ 则:

$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)-\lambda x_1^2-(1-\lambda)x_2^2$

$=\lambda^2x_1^2+(1-\lambda)^2x_2^2+2\lambda(1-\lambda)x_1x_2$

$-\lambda x_1^2-(1-\lambda)x_2^2$

$=(\lambda^2-\lambda)x_1^2+[(1-\lambda)^2-(1-\lambda)]x_2^2$

$+2\lambda(1-\lambda)x_1x_2$

$=\lambda(\lambda-1)[x_1^2+x_2^2-2x_1x_2]$

$=\lambda(\lambda-1)(x_1-x_2)^2\le0$

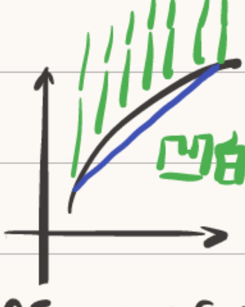
故 $f(x)=x^2$ 为凸的

what?

注:I是区间, $f:I\to R$. 若 $x_1,x_2\in I$. $\forall\lambda\in(0,1)$

$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)$

$\ge\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$



凹的

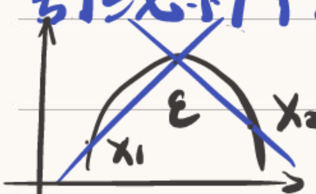
$$\Longleftrightarrow \left(\frac{x_2-\xi}{x_2-x_1}+\frac{\xi-x_1}{x_2-x_1}\right)f(\xi) \geq \cdots\cdots+\cdots$$

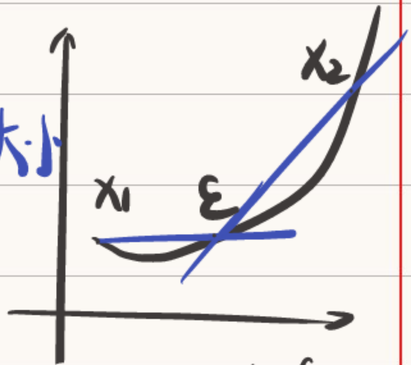
$$\Longleftrightarrow \frac{x_2-\xi}{x_2-x_1}[f(\xi)-f(x_1)]$$

$$\geq \frac{\xi-x_1}{x_2-x_1}[f(x_2)-f(\xi)]$$

几何意义：

割线斜率大小





$$f(\xi) < \frac{x_2-\xi}{x_2-x_1}f(x_1)+\left(1-\frac{x_2-\xi}{x_2-x_1}\right)f(x_2)$$

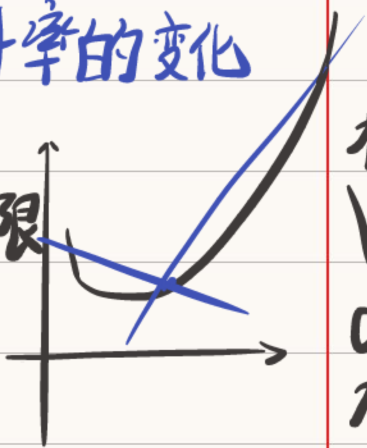
$$\Longleftrightarrow \frac{x_2-\xi}{x_2-x_1}[f(x_2)-f(x_1)] < f(x_2)-f(\xi)$$

$$\Longleftrightarrow \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(\xi)}{x_2-\xi}$$

总之，割线斜率的变化

$\longrightarrow$ 左右导数.

单调有界有极限

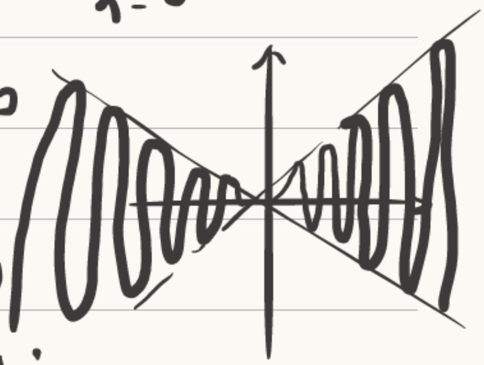


函数极限

一、概念与基本性质：

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$$

$x\to 0$. $f(x)\to 0$



当x与0多接近时，$f(x)$与0误差小于0.1；

$|f(x)-0|<0.1$

$|x\sin\frac{1}{x}|\leq|x|<0.1$ 时，即可.

若$f(x)$在x_0的某个空心邻域有定义；即$\exists(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0)\setminus\{x_0\}$；$A\in R$；若$\forall\varepsilon>0$，$\exists d_\varepsilon>0$；当$0<|x-x_0|<d_\varepsilon$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$，称当$x\to x_0$时，$f(x)$极限为$A$，记为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$

证明:

$\lim\limits_{x\to2}(x^3+5x^2-15x-4)=-6$

$|(x-2)(x^2+7x-1)|<\varepsilon$

当 $0<|x-2|<1 \Rightarrow 1<x<3$ 且 $x\neq2$

此时 $|(x-2)(x^2+7x-1)|\le|x-2|\cdot$

$|x^2+7x+1|\le|x-2|(9+21+1|$

$\le 31|x-2|$ $\overset{?}{<}\varepsilon$

$|x-2|<\frac{\varepsilon}{31}$

证明: $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{31}\right\}$

则 $\delta>0$; $|x-2|=M$. $0<M<1$

$M<\frac{\varepsilon}{31}$. 于是:

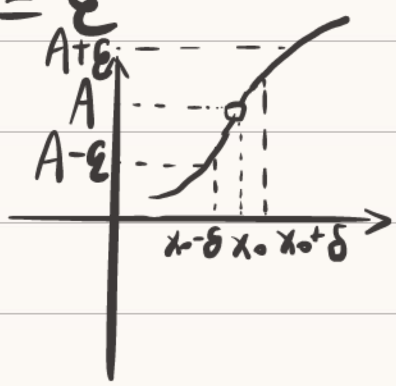
$|x^3+5x^2-15x-4-(-6)|$

$=|(x-2)(x^2+7x-1)|\le$

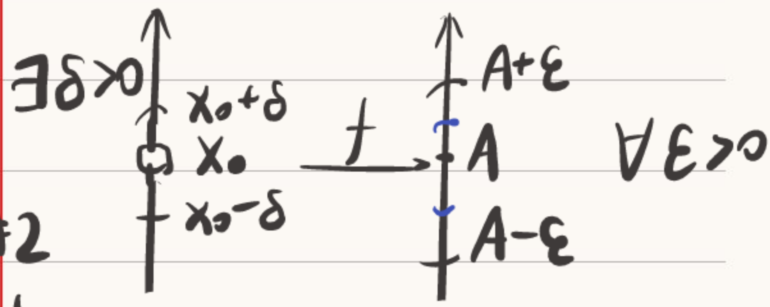
$=|x-2|(9+21+1)=31|x-2|$

$<\frac{\varepsilon}{31}\cdot31=\varepsilon$

几何意义:



$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$

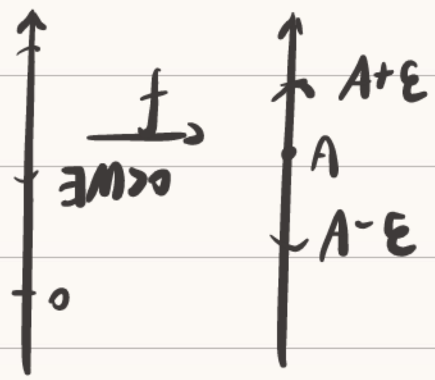


类似可定义:

A. $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$: $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时,有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

B. $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$; $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, $x_0-\delta<x<x_0$ 时,有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$: $\forall\varepsilon>0$, $\exists M>0$ 当 $x>M$ 时, 有 $|f(x)-A|<\varepsilon$



D. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$; $\forall\varepsilon>0$; $\exists M<0$ 当 $x<M$ 时,有 $|f(x)-A|<\varepsilon$

E. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$; $\forall\varepsilon>0, \exists M>0$ 当 $|x|>M$ 时,有 $|f(x)-A|<\varepsilon$

以 $x\to x_0$ 为例,讨论函数极限的性质。

A. 唯一性:若 $f(x)$ 在 x_0 处存在极限,则其极限值唯一

B. 局部有界性:若 f 在 x_0 处存在极限,则 f 在 x_0 附近有界:即 $\exists M_0>0, \exists\delta_0>0$ 当 $0<|x-x_0|<\delta_0$ 时有 $|f(x)|\le M_0$.

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$; 对 $\varepsilon_0=1$; $\exists\delta_0>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta_0$ 时有 $|f(x)-A|<1$

从而 $|f(x_0)|\le|f(x)-A|+|A| < 1+|A|$

C. 局部保号性:

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 若 $A>0$; 则 $\exists\delta_0>0$, 当 $|x-x_0|<\delta_0$ 时, $f(x)>0$

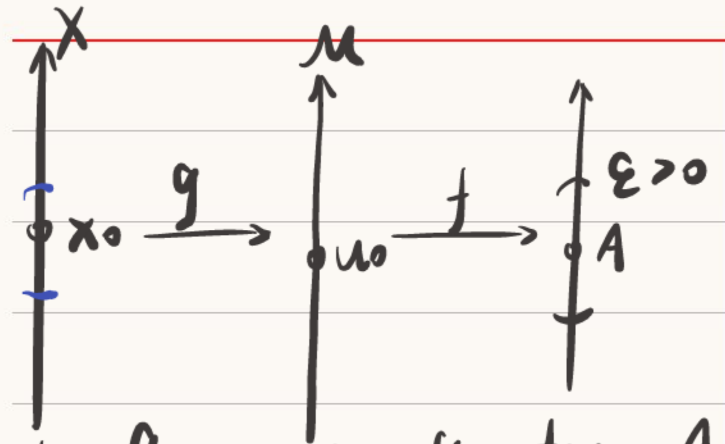
对 $\varepsilon_0=A$; 由 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$

……

D. 夹挤性:f, g, h 在 x_0 的某个去心邻域定义的函数 $A\in\mathbb{R}$; 若 $f(x)\le g(x)\le h(x)$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} h(x)=A$ 则 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$

E. 四则运算:$f(x)\xrightarrow[x\to x_0]{} A$, $g(x)\xrightarrow[x\to x_0]{} B$

$$\lim_{x\to x_0}\begin{cases} f(x)\pm g(x)=A\pm B; \\ f(x)\cdot g(x)=A\cdot B; \\ f(x)/g(x)=A/B; \end{cases}$$



$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$; $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$ 证明:

$\lim\limits_{x\to x_0}(f\circ g)(x)=A$.

(且 $x\neq x_0$, $g(x)\neq u_0$)

F. 复合函数极限:

若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$; 且当 $x\neq x_0$ 时, $g(x)\neq u_0$; $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$. 则 $\lim\limits_{x\to x_0}(f\circ g)(x)=A$;

证: $\forall \varepsilon>0$, $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$

$\exists \delta_1>0$. 当 $0<|u-u_0|<\delta_1$ 时, 有 $|f(u)-A|<\varepsilon$. 再由 $\exists \delta>0$ 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有

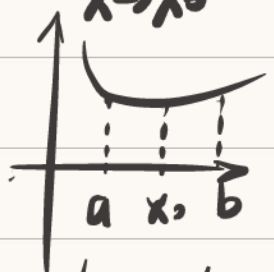
$0<|g(x)-u_0|<\delta_1$

于是当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有:

$|f\circ g(x)-A|=|f(g(x))-A|<\varepsilon$

注: $x\neq x_0$ 时, $g(x)\neq u_0$ 很重要. 否则对接近 x_0 的某些 x. $g(x)=u_0$. 这样 $f\circ g(x)$ 在 x 处无定义;有定义则也与 A 无关

例: $f:[a,b]\to R$ 为凸. $x_0\in(a,b)$ 则 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$



证: $\forall x\in(x_0,b)$; 取 $\delta_0>0$; 使 $a<x_0-\delta_0$, $x_0+\delta_0<b$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le\frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0}$$

且 $$\frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}\le\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

提 $\frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}(x-x_0)+f(x_0)$

$\le f(x) \le f(x_0)+\frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0}(x-x_0)$

左右且 $f(x_0)$

若加上条件:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$ 且 $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=f(u_0)$

则 $\lim\limits_{x\to x_0}(f\circ g)(x)=f(u_0)$

实则避免了 $f(u_0)\ne A$ 而 $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$. 而 $x\ne x_0$ 时. $g(x)\ne x_0$ 也为此目的

例三. $f[a,b]$ 为凸. 则 $\forall$ $x_0\in(a,b)$ 有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

例四: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$

$\wedge \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$

反之. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$

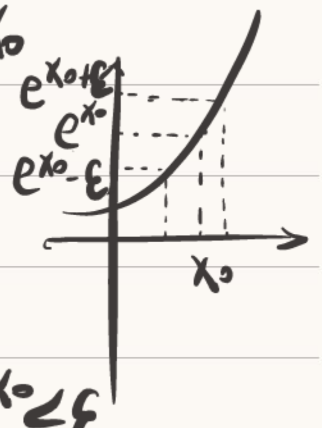
注: $f(x_0+0)$ 记为右极限

$f(x_0-0)$ 记为左极限

例5: (1) $x_0\in R$, 证 $\lim\limits_{x\to x_0} e^x=e^{x_0}$

(2) $x_0>0$, 证

$\lim\limits_{x\to x_0}\ln x=\ln x_0$



证: $\forall\varepsilon>0$,

$|e^x-e^{x_0}|<\varepsilon$

$-\varepsilon<e^x-e^{x_0}<\varepsilon$

$-\frac{\varepsilon}{e^{x_0}}<e^{x-x_0}-1<\frac{\varepsilon}{e^{x_0}}$

$1-\frac{\varepsilon}{e^{x_0}}<e^{x-x_0}<1+\frac{\varepsilon}{e^{x_0}}$

此处取ln需讨论

1° 若 $1-\frac{\varepsilon}{e^{x_0}}>0$, 此时,取

$\delta=\min\{\ln(1+\frac{\varepsilon}{e^{x_0}}), -\ln(1-\varepsilon/e^{x_0})$

当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，即 $-\delta<x-x_0<\delta$

从而 $\ln(1-\varepsilon\cdot e^{-x_0})<x-x_0<\ln(1+\varepsilon/e^{x_0})$

从而 $|e^x-e^{x_0}|<\varepsilon$

2° $1-\varepsilon/e^{x_0}\le 0$ 时

取 $\delta=\ln(1+\varepsilon/e^{x_0})$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，即 $-\delta<x-x_0<\delta$ 有：

$e^{x}-\varepsilon\le 0<e^{x}<e^{x_0+\delta}$

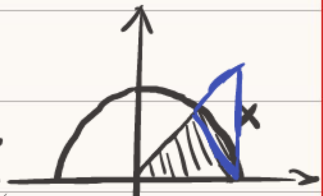
一般性结论：设 $f(x)$ 为初等函数：$x_0\in D(f)$，则：

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

重要函数极限

例一: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时



$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \sin x<\frac{1}{2}\cdot x\cdot 1^2<\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \tan x$

$\sin x<x<\frac{\sin x}{\cos x}$

即 $1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$

即 $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$. 又 $\frac{\sin x}{x}$ 且 $\cos x$ 均为偶

$\therefore x\in(-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,\frac{\pi}{2})$ 时均成立

$\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$ 由极限夹挤性质

例二: $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]})^{[x]}=e$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$

即 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$

证: (1) $\forall\varepsilon>0$, 由 $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$. 故

$\exists N_\varepsilon\in N^*$, $n>N_\varepsilon$ 时

$|(1+\frac{1}{n})^n-e|<\varepsilon$

取 $M_\varepsilon=N_\varepsilon+1$ 当 $x>M_\varepsilon$ 时, 有 $[x]\geqslant[M_\varepsilon]=N_\varepsilon+1>N_\varepsilon$. 从而

$|(1+\frac{1}{[x]})^{[x]}-e|<\varepsilon$

由定义则证之矣.

$\forall x>2$

(2) $(1+\frac{1}{x})^x\leq(1+\frac{1}{[x]})^{[x]+1}$

且 $(1+\frac{1}{1+[x]})^{[x]}\leq(1+\frac{1}{x})^x$

后式 $=(1+\frac{1}{1+[x]})^{[x]+1}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{[x]+1}}$

前式 $=(1+\frac{1}{[x]})^{[x]}\cdot(1+\frac{1}{[x]})$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x\xRightarrow{令x=-u}\lim\limits_{u\to-\infty}(1-\frac{1}{u})^{-u}$

$=(\frac{u}{u-1})^u=(1+\frac{1}{u-1})^{u-1}\cdot(1+\frac{1}{u-1})$

恒等变形 极限相等

例3：$a>0$. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=?$

令 $a^x-1=u$. $\lim\limits_{u\to 0}\frac{u}{\log_a(1+u)}$

$=\lim\limits_{u\to 0}\frac{1}{\log_a(1+u)^{\frac{1}{u}}}$

$=\frac{1}{\log_a e}=\frac{1}{\frac{\ln e}{\ln a}}=\ln a$

例4：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=?$

解：$\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\frac{e^{\mu\ln(1+x)}-1}{x}$

$=\frac{e^{\mu\cdot\ln(1+x)}-1}{\mu\ln(1+x)}\cdot\frac{\mu\cdot\ln(1+x)}{x}$

令 $\mu\ln(1+x)=u$.

$\lim\limits_{u\to 0}\frac{e^u-1}{u}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\mu\cdot\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$=1\cdot\mu=\mu$

无穷小量与阶的比较

记 $x\to\square$ 为某个极限过程

(1) 若 $\lim f(x)=0$. 则称 $x\to\square$ 时. $f(x)$ 为 $x\to\square$ 无穷小量,

记为 $f(x)=o(1)$ $(x\to\square)$

如 $\sin x=o(1)$, $(x\to 0)$

(2) 若 $\lim\limits_{x\to\square}\frac{1}{f(x)}=0$ 即

$\frac{1}{f(x)}=o(1)$ $(x\to\square)$ 则称当 $x\to\square$ 时, $f(x)$ 为无穷大量

$\ln x$ 是无穷大量 $(x\to 0^+)$

相应定义正、负无穷大量

(3) 阶的定义:

设 $f(x)=o(1)$ $g(x)=o(1)$ 均为 $x\to\square$；若 $\exists c\in R$, $c\neq 0$ 使得 $\lim\limits_{x\to\square}\frac{f(x)}{g(x)}=c$

则称当 $x\to\square$ 时, $f(x)$ 与 $g(x)$ 为同阶无穷小量, 特别的 $c=1$ 时, 则称 $x\to\square$ 时, $f(x)$ 与 $g(x)$ 为等价无穷小量, 记为 $f(x)\sim g(x)$ $(x\to\square)$

(4) $\lim\limits_{x\to\square}\frac{f(x)}{g(x)}=0$. 称 $x\to\square$ 时, f 为 g 的高阶无穷小量, 记作:

$f(x)=o(g(x))\ (x\to\square)$

$a^x-1\sim x\ln a\ (x\to 0)(0<a, a\neq 1)$

$(1+x)^{\mu}-1\sim\mu x\ (x\to 0)(\mu\neq 0)$

但 $x\cdot\sin\frac{1}{x}=o(1)\ (x\to 0)$

$x=o(1)\ (x\to 0)$

不是所有无穷小量都能"比较阶"

(5) n 阶无穷小:

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{(x-x_0)^n}=c\neq 0$, 则称 $f(x)$ 为 n 阶无穷小量

对无穷大量也有这些定义

例: 计算

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^4}-\sqrt[3]{1-2x^4}}{\tan x\cdot\sin x\cdot(1-\cos x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

$$(2)=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2\cdot 4}=\frac{1}{2}$$

$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2\ (x\to 0)$

$1-\cos x=o(x)\ (x\to 0)$

$(1+x)^{\mu}-1\sim\mu x\ (x\to 0)(\mu\neq 0)$

$\sin x\sim x\ (x\to 0)$ $\tan x\sim x\ (x\to 0)$

$\sqrt{1+x^4}-1\sim\frac{1}{2}x^4\ (x\to 0)$

$\sqrt[3]{1-2x^4}-1\sim\frac{1}{3}\cdot(-2x^4)\ (x\to 0)$

$$\frac{1-\cos x}{x}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}\cdot 2}$$

分别求 lim

原式 $=\dfrac{(1+x^4)^{\frac{1}{2}}-1}{\sin^2x\cdot(1-\cos x)}\cdot\cos x$

$=\dfrac{(1-2x^4)^{\frac{1}{3}}-1}{\sin^2x(1-\cos x)}\cdot\cos x$

恒等变形

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x^4)^{\frac{1}{2}}-1}{\frac{1}{2}x^4}\cdot\frac{\frac{1}{2}x^4\cdot\cos x}{\sin^2x\cdot(1-\cos x)}$$

不能代换(同阶代换)

只能一步出极限

求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sqrt{1+x^3}-1}$

$=\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x((1+x^3)^{\frac{1}{2}}-1)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{\sin x}{x}\cdot x\cdot\frac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2}\cdot\frac{1}{2}x^2}{\cos x\cdot\frac{\sqrt{1+x^3}-1}{\frac{1}{2}x^3}\cdot\frac{1}{2}x^3}$

$=\dfrac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{\cos x\cdot\frac{1}{2}x^3}=1$

乘除法可以代换,加减不可以代换

$\sin x\sim x\ (x\to0)$ $\tan x\to x(x\to0)$

$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2(x\to0)$

$(1+x)^{\mu}-1\sim\mu x\ (x\to0)(\mu\neq0)$

$\sin x=x+(\sin x-x)$

$\quad=x+o(x)$ (余量)

$\tan x=x+(\tan x-x)$

$\quad=x+o(x)$ (余量)

特别 $(1+x^3)^{\mu}-1\sim\mu x^3(x\to0)$
$(\mu\neq0)$

设f在x_0的某空心邻域$N^*(x_0,\delta_0)$定义的函数 则极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在.

$\Longleftrightarrow$ 若$x_n\in U(x_0,\delta_0)$

且$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x_0$时, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x_n)$必存在.

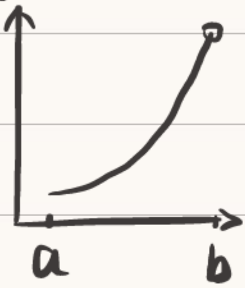
下接18页

函数极限存在判别

设f在(a,b)上单调不减
若f有上界，则极限
$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$存在；

若f有下界，则极限
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$存在；

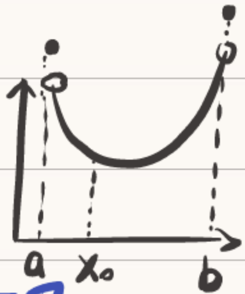
例：f在(a,b)上单调不减
$x_0\in(a,b)$
则 $\lim\limits_{x\to x_0^-}$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}$ 均存在



证明定理一：
记 $A=\sup\{f(x)|x\in(a,b)\}$
则A-ε不为f(x)上界，则∃
$x_\varepsilon\in(a,b)$且$f(x_\varepsilon)>A-\varepsilon$
当$x_\varepsilon<x<b$时有：
$A-\varepsilon<f(x_\varepsilon)\le f(x)\le A<A+\varepsilon$
则 $|f(x)-A|<\varepsilon$

由定义知：$\lim\limits_{x\to b} f(x)=A$

例：设f:[a,b]→为凸；$x_0\in$
(a,b)



则：$\lim\limits_{x\to x_0^+}\underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{g(x)}$

g(x)单调不减有下界
g(x)有右极限；
$\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$存在：单调不减
有上界
且 $\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Cauthy准则：
设f(x)在x_0的某个空心邻
域$(x_0-\delta_0,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$
$=N^*(x_0,\delta_0)$定义的函数
则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在 ⟺ ∀ε>0,
∃δ∈(0,δ₀)当x_1,x_2满足
$0<|x_1-x_0|<\delta$；$0<|x_2-x_0|<\delta$
有$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

必要性:

证:记 $A=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

$\forall \varepsilon>0$.则 $\exists \delta\in(0,\delta_0)$ 当

$0<|x-x_0|<\delta$ 时,有

$|f(x)-A|<\varepsilon$

当 $0<|x_1-x_0|<\delta$, $0<|x_2-x_0|<\delta$

有: $|f(x_1)-f(x_2)|\le|f(x_1)-A|+|f(x_2)-A|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}$

充分性:

令 $x_n=x_0+\frac{\delta_0}{n}(n=1,2\cdots)$

则 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=x_0$ 且 $x_n\ne x_0$

下证:

$\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$ 存在 只需证 $f(x_n)$ 为 哥西列.

由已知 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta\in(0,\delta_0)$

当 ε_1, ε_2 满足 $0<|\varepsilon_1-x_0|<\delta$

$0<|\varepsilon_2-x_0|<\delta$ 时,

有 $|f(\varepsilon_1)-f(\varepsilon_2)|<\varepsilon$. 又

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$

又由 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=x_0$, $\exists N_\varepsilon\in N_+$.

当 $n,m>N$ 时,有

$0<|x_n-x_0|<\delta$, $0<|x_m-x_0|<\delta$

于是 $|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon$ 所以

$\{f(x_n)\}_{n=1}^{+\infty}$ 为Cauthy

由数列Cauthy准则,知

$\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$ 存在.记为A.

下分析 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ 当 $0<|x-x_0|<\delta$

时. $|f(x)-A|$

$=|f(x)-f(x_n)+f(x_n)-A|$

$\le|f(x)-f(x_n)|+|f(x_n)-A|$

记 $A=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$. $\forall\varepsilon>0$,
由 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, $\exists\delta>0$, 则 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,
有 $|f(x)-A|<\varepsilon$. 再由 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x_0$
$\exists N_\delta\in N_+$. 当 $n>N_\delta$ 时,
有 $|x_n-x_0|<\delta$. 而
$x_n\in N^*(x_0,\delta_0)$ 故而
$0<|x_n-x_0|<\delta$
从而 $|f(x_n)-A|<\varepsilon$
由定义有: $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=A$

② 反证之:
若 $\lim\limits_{x\to x_0}$ 不存在, 由定理2知
$\exists\varepsilon_0>0$, $\forall\delta>0$, $\exists x_{\delta_1}, x_{\delta_2}$
满足 $0<|x_{\delta_1}-x_0|<\delta$,
$0<|x_{\delta_2}-x_0|<\delta$;

特别: $\forall n\in N_+$, $\exists u_n, v_n$
满足 $0<|u_n-x_0|<\frac{1}{n}$
$0<|v_n-x_0|<\frac{1}{n}$ 但:
$|f(u_n)-f(v_n)|>\varepsilon_0$
作数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$
$u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3\cdots$
则 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}\subset N^*(x_0,\delta_0)$
且 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x_0$
于是 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)$ 存在.
记 $A=\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)$ 则 $\lim\limits_{k\to+\infty}f(x_{2k})=A$
$\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_{2k+1})=A$ $\lim\limits_{k\to+\infty}f(u_k)=A$
故 $\lim\limits_{k\to+\infty}|f(u_k)-f(v_k)|=0$
与假定矛盾

极限不存在的Heine判据，

存在$\{x_n\} \subset N^*(x_0, \delta_0)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$，但$f(x_n)$不收敛

如：

$\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$不存在．取$x_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+n\pi}$

$n=1,2,3\cdots\cdots$

则$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$；$x_n \neq 0$ $(n=1,2\cdots)$

但$\sin\frac{1}{x_n} = \sin(\frac{\pi}{2}+n\pi) = (-1)^n$

故$\sin\frac{1}{x_n}$不收敛