三角函数积分

一. 底层建筑:

① sinx与cosx的n次幂

①.(1) 奇次幂:

$\int \sin^{2n+1}x\,dx = -\int \sin^{2n}x\,d\cos x$

$= -\int (1-\cos^2x)^n\,d\cos x$.

拆开暴力积回去

①.(2) 偶次幂:

$\int \sin^{2n}x\,dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^n dx$

拆开化为奇数次积回去

② tanx的幂

(1) $\int \tan x\,dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$

(2) $\int \tan^2x\,dx = \int (\sec^2x-1)\,dx$

$= \tan x - x + C$

(3) 高阶形式:

$\int \tan^6x\,dx = \int \tan^4x(\sec^2x-1)\,dx$

$= \int \tan^4x\,d\tan x - \int \tan^4 dx$

通过 $\sec^2x = \tan^2x+1$ 不断降阶

③ secx的幂

(1) $\int \sec x\,dx = \ln|\sec x+\tan x| + C$

(2) $\int \sec^2x\,dx = \tan x + C$

(3) $\int \sec x\cdot\tan x\cdot dx = \sec x + C$

(4) 高阶

$\int \sec^4x\,dx = \int \sec^2x\cdot d\tan x$

$= \sec^2x\cdot\tan x - \int \tan x\,d\sec^2x$

$= \sec^2x\cdot\tan x - \int \tan x\cdot 2\sec^2x\,dx$

$= \sec^2x\cdot\tan x - 2\int (\sec^2x-1)\sec^2x\,dx$

$= \sec^2x\cdot\tan x - 2\int \sec^4x\,dx + 2\int \sec^2x\,dx$

通过分部积分,同积复现,毕氏恒等式
不断降阶

④ 与之对应

$\cot x = \frac{1}{\tan x}$　$\csc x = \frac{1}{\sin x}$

$\cot^2x+1 = \csc^2x$

$(\cot x)' = -\csc^2x$

$(\csc x)' = -\cot x\cdot\csc x$

$\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + C$

$\int \csc x\,dx = -\ln|\csc x+\cot x| + C$

$\int \cot^2x\,dx = \int (\csc^2x-1)\,dx = -\cot x - x + C$

符号恰好与secx, tanx一组相反

ex: $\int_0^{\pi}\sqrt{\sin x-\sin^3x}\,dx = \int_0^{\pi}\sqrt{\sin x}\cdot|\cos x|\,dx$

分类讨论

PS: 本人写的有可能是错的
请一定指正!!!

二.一些想法

① $1\pm trig$:

$1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$　$1+\sin x=(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2})^2$

$1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$　$1-\sin x=(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2})^2$

例: $\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx$

(1) $\int\frac{1}{1+\cos x}dx+\int\frac{-d\cos x}{1+\cos x}$

$=\int\frac{1}{2}\cdot\sec^2\frac{x}{2}dx-\ln(1+\cos x)+C$

拆项+基于$1+\cos x$的降幂升角

$=\tan\frac{x}{2}-\ln(1+\cos x)+C$

(2) $\int\frac{(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx=\int\frac{(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2}{\cos^2\frac{x}{2}}d\frac{x}{2}$

$=\int 1+2\tan t+\tan^2 t\,dt$

$=t-2\ln|\cos t|+\tan t-t+C$

$=\tan t-2\ln|\cos t|+C$

$=\tan\frac{x}{2}-2\ln|\cos\frac{x}{2}|+C$

$\hookrightarrow -\ln\frac{1+\cos x}{2}+C$

② 共轭处理:

$\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx=\int\frac{1-\cos x+\sin x-\sin x\cdot\cos x}{\sin^2 x}dx$

$=\int\csc^2 x\,dx-\int\csc x\cdot\cot x\,dx+\int\csc x\,dx$

$-\int\cot x\,dx$

$=-\cot x+\csc x-\ln|\csc x+\cot x|-\ln|\sin x|+C$

$=\frac{1-\cos x}{\sin x}-\ln|1+\cos x|+C$

$\hookrightarrow$ 万能公式 $=\tan\frac{x}{2}$

$\int\frac{dx}{\sec x-1}=\int\frac{\sec x+1}{\tan^2 x}dx$

$=\int\frac{\sec x}{\tan^2 x}dx+\int\cot^2 x\,dx$

$\hookrightarrow$ 实在无想法则

$\int\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx-\cot x-x+C$

$=\int\cot x\cdot\csc x\,dx-\cot x-x+C$

$=-\csc x-\cot x-x+C$

③ 和差化积

$\int\sin(19x)\cdot\cos(3x)\,dx$

$=\frac{1}{2}\int\sin 22x+\sin 16x\,dx$

例 $\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x dx$

柯处理分部积分会去世

$\int\frac{(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2})^2}{2\cos^2\frac{x}{2}}\cdot e^x dx$

$=\int(\tan^2 t+2\tan t+1)e^{2t}dt$

$=\int\sec^2 t\,e^{2t}dt+2\int\tan t\cdot e^{2t}dt$

$=e^{2t}\tan t-\int\tan t\cdot 2\cdot e^{2t}dt+2\int\cdots$

$=e^{2t}\cdot\tan t+C$　PS:见3页回处

$=e^x\cdot\tan\frac{x}{2}+C$

④ 关于分类讨论

实际上 $x=a\sin t$; $x=a\tan t$:
通过限定 $|t|\le\frac{\pi}{2}$ 均可不分类

但 $x=a\sec t$. $|t|\le\frac{\pi}{2}$ 一定要分类

⑤ $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$

$=\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})$

$\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$; $\int\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$

令 $t=x+\frac{\pi}{4}$, $t=x-\frac{\pi}{4}$.

拆项效果绝佳!

不定积分小记

①及时变更 dx.

如 $J_n=\int\frac{(x+a)}{((x+a)^2+b^2)^n}dx$

不换元你积个寂寞

$dx=d(x+a)$

例: $f(x)=\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt$. 计算 $I=\int_0^1 x f(x)dx$

怎么可能是先积出 $f(x)$ 再代入 I!!!

$\int_0^1 x\cdot f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx^2$

$=\frac{1}{2}f(x)\cdot x^2\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\cdot 2x\cdot e^{-x^4}dx$

↳ 分部积分后定积分部分为0是基操

② $xdx=\frac{1}{2}dx^2$

$\left.\begin{aligned}&xdx=\frac{1}{2}dx^2\\&\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}\frac{dx^2}{x^2}\end{aligned}\right\}$ 用于换元

③ 一次根式 $\sqrt{1+x}$ etc.

⇒ 整体换元

高次根式 $\sqrt{1+x^5}$

⇒ 先换 x^5 再换元

$\sqrt{1+\ln x}$ ⇒ 整体换元

④ 善用分部积分破局. ⟹ Ex: f在$[a,b]$上连续可导, $f(x)$有界 ⟹ $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx=0$

$\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx=\frac{1}{\lambda}\int_a^b f(x)d\sin\lambda x$

$=\frac{1}{\lambda}f(x)\sin\lambda x\Big|_a^b-\frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(x)\sin\lambda x\,dx$

分出的大头决重要 ←

$\left|\frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(x)\sin\lambda x\,dx\right|\le\frac{1}{\lambda}\int_a^b|f'(x)\sin\lambda x|dx$

$\le\frac{1}{\lambda}\int_a^b|f'(x)|dx\le\frac{1}{\lambda}(b-a)\cdot M\to 0$

而前式也 $\to 0$

⑤ 配方后整体换元是个好习惯

$\int\frac{x-2}{\sqrt{2-2x-x^2}}dx=\int\frac{(x+1)-3}{\sqrt{3-(x+1)^2}}d(x+1)$

⑥ e^x 性质

(1) $\int(f'(x)+f(x))e^x dx=e^x\cdot f(x)+C$.

以处理 $\int(1-\frac{2}{x})^2e^xdx$, $\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\cdot e^xdx$

(2) $[e^{-x}\cdot f(x)]'=e^{-x}(f'(x)-f(x))$

如: $f\in C'[0,1]$. $f(0)=0$. $f(1)=1$. ⟹ $\int_0^1|f'(x)-f(x)|dx\ge\frac{1}{e}$

不等号方向与积分绝对值不等号相同

$\ge\int_0^1 e^{-x}|f'(x)-f(x)|dx\ge\int_0^1|e^{-x}(f'(x)-f(x))|dx$

$\ge\left|\int_0^1 e^{-x}(f'(x)-f(x))dx\right|=\left|e^{-x}\cdot f(x)\Big|_0^1\right|=\frac{1}{e}$

定积分

一. 构造黎曼和:

核心: ① 构造出 $n\to+\infty$ 时的 $\frac{1}{n}$ 用于 dx

② 找好标志点 即 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ 用于寻找上下界

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}(1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)=\int_0^1\sqrt{x}\,dx$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{(k+n)^2}$$
$$=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{(\frac{k}{n}+1)^2}=\int_0^1\frac{1}{(x+1)^2}dx$$

二. 变上限积分:

① $\left[\int_{u(x)}^{v(x)}f(t)dt\right]'$: 链式法则

② 变上限积分求极限 ⇒ L-H

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\int_0^x e^{t^2}dt)^2}{\int_0^x e^{2t^2}dt}\qquad\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}$$

③ 对混参变上限积分求导

Core: $\int_{u(x)}^{v(x)}f(t,x)dt$ 中, x 是一个参数

既可以提出 $\int$ 也可以写入 dt

$$F(x)=\int_a^x(x-t)f(t)dt \quad 求 F''(x)$$
$$=\int_a^x(xf(t)-tf(t))dt$$
$$=x\int_a^x f(t)dt-\int_a^x tf(t)dt$$

顺次求导即可

$$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)dt \quad 求 \varphi'(x)$$
$$=\frac{1}{x}\int_0^1 f(xt)dxt=\frac{\int_0^x f(y)dy}{x}$$

注意积分上下限改变

④ 构造变上限积分处理不等式

——综合利用中值泰勒罗尔

例: f 在 $[a,b]$ 上二阶导函数连续 f 上凸 求证

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)\geq\int_a^b f(x)dx\geq\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$$

以右为例 构造

$$G(x)=\int_a^x f(t)dt-\frac{f(a)+f(x)}{2}(x-a)$$

欲证 $G(b)\geq0$

$$G'(x)=f(x)-\frac{f'(x)}{2}(x-a)-\frac{f(a)+f(x)}{2}$$
$$=\frac{1}{2}(f(x)-f(a)-f'(x)(x-a))$$
$$=\frac{1}{2}(f'(\xi)-f'(x))(x-a)\quad(a<\xi<x)$$
$$=\frac{1}{2}(\xi-a)(x-a)f''(\varepsilon)\quad(a<\xi<\varepsilon<x)$$

两次构造中值定理

例: f 在 $[0,1]$ 上可导, $f(1)=4\int_0^{\frac14}e^{1-x^3}f(x)dx$

$\Rightarrow\exists\xi\in(0,1)$ s.t. $f'(\xi)=3\xi^2f(\xi)$

考虑结论回溯: $(e^{1-x^3}\cdot f(x))'$

$$=-3x^2e^{1-x^3}\cdot f(x)+f'(x)\cdot e^{1-x^3}$$

⇒一定以 $e^{1-x^3}f(x)$ 整体作文章

在构造积分第一中值定理时,不应将二者分开

$$4\int_0^{\frac14}e^{1-x^3}f(x)dx\overset{\exists\eta\in[0,1]}{=\!=}e^{1-\eta^3}f(\eta)=f(1)$$

令 $g(x)=e^{1-x^3}\cdot f(x)$ $\therefore g(1)=g(\eta)$

$\therefore\exists\xi$ s.t. $g'(\xi)=0$

Rolle定理与积分第一中值定理

三. 定积分的对称性 ⟹ 变换区间的定积分 ⟹ 专治三角函数定积分与对称区间定积分

(1) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$

(2) $\int_{-x}^{x} f(t)dt = \int_0^x [f(t)+f(-t)]dt$ ⟹ 可联想奇函数求积分

(3) 仅用于偶函数

$$\left.\begin{aligned}&\int_{a-x}^{a+x} f(t)dt = 2\int_{a-x}^{a} f(t)dt = 2\int_a^{a+x} f(t)dt\\&\int_{-x}^{x} f(t)dt = 2\int_0^x f(t)dt = 2\int_{-x}^{0} f(t)dt\end{aligned}\right\}$$ 只有这儿才有系数 2

不要既换上下界又换上下界符号

例 $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)}dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin^2 x}{x(\pi-2x)}dx$

$= \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{x(\pi-2x)}dx = \frac{1}{\pi}\ln 2$

例:证明 $I_n \triangleq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \equiv \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ 并求之. ⟹ 同积复现

$I_n = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}x d\cos x$

$= \underline{-\sin^{n-1}x\cdot\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}} + (n-1)\int \cos^2 x\cdot\sin^{n-2}x dx$

分部出 0

$= (n-1)\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2 x)\sin^{n-2}x dx$

$= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$ ⟹ 同积复现

$\Rightarrow I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$

例:三角函数积分的对称性

证 $\int_0^{2k\pi} \frac{\sin t}{1+t}dt \geq 0$

拆分 ⟹ $\int_0^{2\pi} + \int_{2\pi}^{4\pi} + \cdots + \int_{2(k-1)\pi}^{2k\pi}$

$\int_{(2m-2)\pi}^{2m\pi} \frac{\sin t}{1+t}dt = \int_{(2m-2)\pi}^{(2m-1)\pi} + \int_{(2m-1)\pi}^{2m\pi}$

$= \int_{(2m-2)\pi}^{(2m-1)\pi} \frac{\sin t}{1+t}dt + \int_{(2m-2)\pi}^{(2m-1)\pi} \frac{\sin(t+\pi)}{1+t+\pi}d(t+\pi)$

$= \int_{(2m-2)\pi}^{(2m-1)\pi} \sin t\left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t+\pi}\right)dt$ ↳ trig 以 π 为单位的平移

$= \int_{(2m-2)\pi}^{(2m-1)\pi} \frac{\sin t\cdot\pi}{(1+t)(1+\pi+t)}dt \geq 0$ ↳ 区间折半使 trig 定号

⟹ 推论 $\int_0^x \frac{\sin t}{1+t} \geq 0$

以 $(2k\pi, 2k\pi+\pi)(2k\pi+\pi, (2k+2)\pi)$ 来放缩

↳ 更进一步推论

$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{\sin t}{1+t}dt$ 存在

$\max\left(\int_0^{2k\pi}, \int_0^{2k\pi+2\pi}\right) < \int_0^x < \int_0^{2k\pi+\pi}$

考虑两端极限

例: $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x}{1+e^x}dx$ ⟹ 为什么是求特殊区间上的定积分? ⟹ 利用特殊性

(1) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x}{1+e^x}dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(-x)}{1+e^{-x}}dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x\cdot e^x}{1+e^x}dx$

$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos x dx = 0$

(2) $\int_0^{\pi}\left(\frac{\cos x}{1+e^x} + \frac{\cos(-x)}{1+e^{-x}}\right)dx$ 更直接,一步到位

例: $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-3x^2}}dx = \int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-3x^2}} + \frac{\arcsin(-x)}{\sqrt{1-3x^2}}\right)dx = 0$

例: $\int_0^x e^{xt-t^2}dt = e^{x^2/4}\int_0^x e^{-t^2/4}dt$

↳ 一定是手动从∫里提出来的

$e^{\frac{x^2}{4}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{4}+xt-t^2}dt$ 后式 $= \int_0^x e^{-(t-\frac{x}{2})^2}dt = \int_{-\frac{x}{2}}^{+\frac{x}{2}} e^{-m^2}dm$

$= 2\int_0^{\frac{x}{2}} e^{-m^2}dm = \int_0^x e^{-\frac{t^2}{4}}dt$

四.定积分不等式

(1) $f(x)\le g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

(2) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

积分的绝对值≤绝对值的积分

(3) $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx$

积的积分的平方≤平方的积分的积

(4) $f\in C[a,b]$ $g\in R[a,b]$ 且g不变号

$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\cdot\int_a^b g(x)dx$

注意:后式不变号但将前式提出

$\xi\in[a,b]$且ξ可能与别的参数有关

EX: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\sqrt{1+x^n}\,dx = 1.$

$\int_0^1\sqrt{1+x^n}dx \le \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt n}}\sqrt{1+x^n}\,dx + \int_{1-\frac{1}{\sqrt n}}^1\sqrt2\,dx$

$\le \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt n}}\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt n-1}{\sqrt n}\right)^n}\,dx + \frac{\sqrt2}{\sqrt n}$

$\le \sqrt{1+\left(\frac{\sqrt n-1}{\sqrt n}\right)^n} + \frac{\sqrt2}{\sqrt n} \xrightarrow{n\to+\infty} 1$

用中值定理是错的

$\exists\xi\in[0,1]$ $\int_0^1\sqrt{1+x^n}dx = \sqrt{1+\xi^n} \cancel{\xrightarrow{n\to+\infty}} 1$

因为ξ可能与n有关⇐被积函数与n有关

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac1n\right)^n = \frac1e$

EX: $f\in C'[a,b] \Rightarrow f(x)_{max} \le \frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)dx\right| + \int_a^b |f'(x)|dx$

$\frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \le |f(\xi)|$ $(\xi\in[a,b])$

$|f(x)| \le |f(x)-f(\xi)| + |f(\xi)| = |f(\xi)| + \left|\int_\xi^x f'(t)dt\right|$

$\le |f(\xi)| + \int_\xi^x |f'(t)|dt \le |f(\xi)| + \int_a^b |f'(x)|dx$

EX: $f\in C'[0,1]$. $f(0)=0 \Rightarrow \int_0^1 f^2(x)dx \le \int_0^1 f'^2(x)dx$

$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt = \int_0^x f'(t)dt$

$f^2(x) \le \left(\int_0^x f'(t)dt\right)^2 \le \left(\int_0^x 1\cdot f'(t)dt\right)^2$

$\le \int_0^x 1^2dt \cdot \int_0^x f'^2(t)dt = x\cdot\int_0^x f'(t)^2dt \le \int_0^1 f'^2(x)dx$ $\quad x\in[0,1]$

$\therefore \int_0^1 f^2(x)dx \le \int_0^1\left(\int_0^1 f'^2(x)dx\right)dx$

注意到$\int_0^1 f'^2(x)dx$是个常数