离散数学考前辅导讲义

无 68 何昊天

2018 年 12 月 30 日

目录

1 集合论

1.1 基本性质

两个集合之间可以有如下关系：

(1) 相等：两个集合是相等的，当且仅当它们有相同的元素，在具体操作上，$A = B$ 等价于 $\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$ 且 $x \in B \Rightarrow x \in A$

(2) 子集：如果 A 的每一个元素都是 B 的元素，则称集合 A 是集合 B 的子集，在具体操作上，$A \subseteq B$ 等价于 $\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$，集合上的包含关系是一个偏序关系

(3) 真子集：如果 A 是 B 的子集且 $A \neq B$，则称集合 A 是集合 B 的真子集，在具体操作上，可以先证明 A 是 B 的子集，再找出 $x \in B$ 使得 $x \notin A$

集合可以进行如下运算：

(1) 交：$A \cap B = \{x|x \in A \wedge x \in B\}$

(2) 并：$A \cup B = \{x|x \in A \vee x \in B\}$

(3) 差集：$A \setminus B = \{x|x \in A \wedge x \notin B\}$

(4) 补集：$A^c = \{x|x \in E \wedge x \notin A\}$，其中 E 为全集

(5) 对称差：$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

集合论的内容在考试中出现不多，这部分题目一般比较简单，只需要掌握好固定的模式，按照定义进行解答即可。

Problem 1.1 证明 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Solution: $\forall x \in (A \cap B) \cap C$，有 $x \in A \cap B$ 且 $x \in C$
由 $x \in A \cap B$，有 $x \in A$ 且 $x \in B$
由 $x \in B$ 且 $x \in C$，有 $x \in B \cap C$
再由 $x \in A$，有 $x \in A \cap (B \cap C)$，所以 $(A \cap B) \cap C \subseteq A \cap (B \cap C)$
$\forall x \in A \cap (B \cap C)$，有 $x \in A$ 且 $x \in B \cap C$
由 $x \in B \cap C$，有 $x \in B$ 且 $x \in C$
由 $x \in A$ 且 $x \in B$，有 $x \in A \cap B$
再由 $x \in C$，有 $x \in (A \cap B) \cap C$，所以 $A \cap (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cap C$
综上所述，$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ •

Problem 1.2 设 $A \subseteq B, C \subseteq D$，证明 $A \cup C \subseteq B \cup D$

Solution: $\forall x \in A \cup C$，有 $x \in A$ 或 $x \in C$
若 $x \in A$，则由 $A \subseteq B$ 得 $x \in B$，故 $x \in B \cup D$
若 $x \in C$，则由 $C \subseteq D$ 得 $x \in D$，故 $x \in B \cup D$
综上所述，有 $A \cup C \subseteq B \cup D$ •

Problem 1.3 证明 $A\Delta B=(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)$

Solution: $\forall x\in A\Delta B$，有 $x\in(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$，即 $x\in A\setminus B$ 或 $x\in B\setminus A$

若 $x\in A\setminus B$，则 $x\in A$ 且 $x\notin B$，故 $x\in A$ 且 $x\in B^c$，即 $x\in A\cup B^c$

若 $x\in B\setminus A$，则 $x\in B$ 且 $x\notin A$，故 $x\in B$ 且 $x\in A^c$，即 $x\in A^c\cup B$

由 $x\in A\cup B^c$ 或 $x\in A^c\cup B$ 得 $x\in(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)$，即 $A\Delta B\subseteq(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)$

$\forall x\in(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)$，有 $x\in A\cap B^c$ 或 $x\in A^c\cap B$

若 $x\in A\cap B^c$，则 $x\in A$ 且 $x\in B^c$，故 $x\in A$ 且 $x\notin B$，即 $x\in A\setminus B$

若 $x\in A^c\cap B$，则 $x\in A^c$ 且 $x\in B$，故 $x\notin A$ 且 $x\in B$，即 $x\in B\setminus A$

由 $x\in A\setminus B$ 或 $x\in B\setminus A$ 得 $x\in A\Delta B$，即 $(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)\subseteq A\Delta B$

综上所述，有 $A\Delta B=(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)$ •

1.2 幂集与计数

幂集：给定集合 A，由 A 的所有子集为元素组成的集合称为 A 的幂集，记作 2^A，以下是在书写过程时容易产生错误的几点：

(1) 2^A 中的元素是 A 的子集，即元素是集合，特别的有 $A\in 2^A$，但不能说 $A\subseteq 2^A$

(2) $\varnothing$ 是 A 的子集，所以有 $\varnothing\in 2^A$，但同时还有 $\varnothing\subseteq 2^A$，注意区分两者的含义

若 $|A|=n$，则有 $|2^A|=2^n$，这可以通过二进制编码的方式来证明，本质上是构造了一个一一映射，而若两个集合之间存在一一映射，则它们是等势的。

几个基本的计数原理如下：

(1) 乘法原理：设事件 A_1 有 k_1 种选择方式，事件 A_2 有 k_2 种选择方式，以此类推，事件 A_n 有 k_n 种选择方式，则事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 依次连接共有 $k_1k_2\cdots k_n$ 种选择方式

(2) 排列：从 n 个不同的元素中取出 k 个，并按次序排列，总方案数为 $P(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!}$

(3) 组合：从 n 个不同的元素中取出 k 个，不考虑排列次序，总方案数为 $C(n,k)=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

这几个原理本身非常简单，在高中时我们就已经接触过，而在离散数学中新的方法是类似于二进制编码那样去构造一个双射来证明两个式子相等，这样的证明是严格成立的，可以在考试中使用。

Problem 1.4 证明 $C(n,k)=C(n,n-k)$

Solution: 假设有 n 个不同的元素，从中选取 k 个，不考虑排列次序，总方案数就是 $C(n,k)$

但选取 k 个元素等价于剩下 $n-k$ 个元素不选，可以看作是从 n 个不同的元素中选取 $n-k$ 个元素不加入刚才的方案，不考虑排列次序，这样的总方案数就是 $C(n,n-k)$

由于两种构造方式显然是一一对应的，所以 $C(n,k)=C(n,n-k)$ •

Problem 1.5 证明 $C(n-1,k-1)+C(n-1,k)=C(n,k)$

Solution: 假设有 n 个不同的元素，从中选取 k 个，不考虑排列次序，总方案数就是 $C(n,k)$

考虑其中某个特定的元素 x，在每种方案中 x 或者选、或者不选，若选取 x，则需要在剩下 $n-1$ 个元素中再选取 $k-1$ 个，总方案数为 $C(n-1,k-1)$，若不选 x，则需要在剩下 $n-1$ 个元素中再选取 k 个，总方案数为 $C(n-1,k)$

由于选或不选 x 是互斥的，故两种构造方式之间显然是一一对应的，所以 $C(n-1,k-1)+C(n-1,k)=C(n,k)$ •

Problem 1.6 证明 $C(n,0)+C(n,1)+\cdots+C(n,n)=2^n$

Solution: 假设有集合 A 满足 $|A|=n$，则 $|2^A|=2^n$，即 A 有 2^n 个子集

考虑 A 的恰有 0 个元素的子集，共有 $C(n,0)$ 个

考虑 A 的恰有 1 个元素的子集，共有 $C(n,1)$ 个

以此类推，考虑 A 的恰有 n 个元素的子集，共有 $C(n,n)$ 个

由于不同元素数量的子集是互斥的，所以 $C(n,0)+C(n,1)+\cdots+C(n,n)=2^n$ •

Problem 1.7 设集合 A 满足 $|A|=n$ 且 $x\in A$，求 A 中含有 x 的子集个数

Solution: 考虑 A 的一个子集 B 且 $x\in B$，存在另一个 A 的子集 $B\setminus\{x\}$ 不包含 x，且 $B\setminus\{x\}$ 是唯一的

考虑 A 的一个子集 C 且 $x\notin C$，存在另一个 A 的子集 $C\cup\{x\}$ 包含 x，且 $C\cup\{x\}$ 是唯一的

由此，我们构造出了 A 的含 x 的子集族和不含 x 的子集族之间的一一映射，故两个子集族的大小是相等的，又因为 A 的子集数量为 2^n，所以 A 中含有 x 的子集个数为 2^{n-1} •

2 组合

2.1 数学归纳法

数学归纳法有很多种不同的形式，都可以在考试中使用：

(1) 第一归纳法：设命题 $P(n)$ 在 $n=k$ 时成立，且任意 $m\geq k$，若命题 $P(n)$ 在 $n=m$ 时成立可以推出在 $n=m+1$ 时成立，则 $P(n)$ 对于所有的 $n\geq k$ 成立

(2) 第二归纳法：设命题 $P(n)$ 在 $n=k$ 时成立，且任意 $m\geq k$，若命题 $P(n)$ 在 $k\leq n\leq m$ 时成立可以推出在 $n=m+1$ 时成立，则 $P(n)$ 对于所有的 $n\geq k$ 成立

(3) 跳跃归纳法：设命题 $P(n)$ 在 $n=k,k+1,\cdots,k+t-1$ 时成立，且任意 $m\geq k$，若命题 $P(n)$ 在 $n=m$ 时成立可以推出在 $n=m+t$ 时成立，则 $P(n)$ 对于所有的 $n\geq k$ 成立，这种归纳法常用于对奇偶需要分别讨论的情况

(4) 倒推归纳法：设命题 $P(n)$ 在 $n=k$ 时成立，且任意 $k_0<m\leq k$，若命题 $P(n)$ 在 $n=m$ 时成立可以推出在 $n=m-1$ 时成立，则 $P(n)$ 对于所有的 $k_0\leq n\leq k$ 成立

(5) 螺旋归纳法：设命题 $P(n)$ 在 $n=k$ 时成立，且任意 $m\geq k$，若命题 $P(n)$ 在 $n=m$ 时成立可以推出 $Q(n)$ 成立，且 $Q(n)$ 在 $n=m$ 时可以推出 $P(n+1)$ 成立，则 $P(n),Q(n)$ 对于所有的 $n\geq k$ 成立

归纳法的题目需要具体问题具体分析，易错点往往在于初始条件验证得不够，这一点需要细心，更不要犯“全班所有同学都一样高”这样的错误。

2.2 容斥原理

容斥原理有几种不同的形式：

(1) 两个集合的容斥原理：设 A, B 为有限集合，则 $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$，这个公式可以用集合论的手段证明

(2) n 个集合的容斥原理：设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为有限集合，则 $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} |A_i \cap A_j| + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} \sum_{k>j} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$，这个公式可以由两个集合的容斥原理和归纳法来证明，也可以用二项式定理来证明

(3) 补集形式的容斥原理：设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为有限集合，则 $|A_1^c \cup A_2^c \cup \cdots \cup A_n^c| = |E| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} |A_i \cap A_j| - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} \sum_{k>j} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$

容斥原理在使用时，需要先声明涉及的集合是什么，然后直接套用公式即可，使用容斥原理的场合往往是交集或者并集中的一种基数容易计算，但要求计算另一种的情况。

Problem 2.1 计算分母为 $105 = 3 \times 5 \times 7$ 的最简分数数量

Solution: 该问题等价于计算 1 到 105 中与 105 互质的数的数量，可以反过来考虑计算能和 105 约分的数的数量，设 A 表示 1 到 105 中 3 的倍数的集合，B 表示 5 的倍数的集合，C 表示 7 的倍数的集合，则所求个数为 $|A \cup B \cup C|$

易知 $|A| = \lfloor \frac{105}{3} \rfloor = 35$，$|B| = \lfloor \frac{105}{5} \rfloor = 21$，$|C| = \lfloor \frac{105}{7} \rfloor = 15$

由于 $3, 5, 7$ 两两互质，故 $A \cap B$ 表示 15 的倍数的集合，$A \cap C$ 表示 21 的倍数的集合，$B \cap C$ 表示 35 的倍数的集合，所以 $|A \cap B| = \lfloor \frac{105}{15} \rfloor = 7$，$|A \cap C| = \lfloor \frac{105}{21} \rfloor = 5$，$|B \cap C| = \lfloor \frac{105}{35} \rfloor = 3$

同理，$A \cap B \cap C$ 表示 105 的倍数的集合，所以 $|A \cap B \cap C| = 1$

由容斥原理，$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 35 + 21 + 15 - 7 - 5 - 3 + 1 = 57$，故分母为 105 的最简分数的数量为 $105 - 57 = 48$ •

容斥原理还可以用来解决错排问题：n 个有序的元素的全排列数为 $n!$，给定一个排列，使得所有的元素都不在原来的位置上排列叫原排列的错排，记 n 个元素的错排个数为 D_n，可以用容斥原理得到 D_n 的通项公式。

设 A_i 表示第 i 个位置恰好是第 i 个元素的排列的集合，则易知 $|A_i| = (n-1)!$，且任意 $1 \le k \le n$，$|A_{i_1} \cap A_{i-2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = (n-k)!$，而 $D_n = |A_1^c \cup A_2^c \cup \cdots \cup A_n^c|$，用补集形式的容斥原理即得 $D_n = n!(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!})$。

类似的方法可以用来解决有限制的排列和相对禁位排列问题，而错排本身还有一个递推数列的方法可以计算通项公式，之后讨论数列的时候会专门提及。

2.3 鸽巢原理

鸽巢原理常用于证明一些存在性的问题，它有两个版本：

(1) 若有 $n+1$ 只鸽子飞回了 n 个鸽巢，则至少有 2 只鸽子飞回了同一个鸽巢

(2) 若有 $m_1+m_2+\cdots+m_n-n+1$ 只鸽子飞回了 n 个鸽巢，则或者第 1 个鸽巢中至少有 m_1 只鸽子，或者第 2 个鸽巢中至少有 m_2 只鸽子，以此类推，或者第 n 个鸽巢中至少有 m_n 只鸽子

这两个定理的证明用反证法即可，在具体问题上，需要指出“鸽子”和“巢”分别是什么，然后运用此定理给出结果，需要注意的是鸽巢原理往往只能给出存在性的结果，无法给出任何构造性的结论，所以题目本身往往就有一定的暗示性。

Problem 2.2 在一个边长为 1 的正三角形中任取 5 个点，证明必有 2 个点之间的距离不大于 $\frac{1}{2}$

Solution: 取三角形的三条边中点连线，则三角形被划分为 4 个边长均为 $\frac{1}{2}$ 的小正三角形，由鸽巢原理，若在三角形中选取 5 个点，则至少有 2 个点落在同一个小三角形内

考虑落在同一个小三角形内的点，由于小三角形边长为 $\frac{1}{2}$，故这两个点距离不可能大于 $\frac{1}{2}$，故命题得证 •

Problem 2.3 假设任意 2 个人之见的关系要么是相互认识、要么是相互不认识，证明 6 个人中要么有 3 个人两两相互认识，要么有 3 个人两两相互不认识

Solution: 我们设 6 个人分别为 A,B,C,D,E,F，若两个人相互认识，则它们之间的连线为红色，若相互不认识，则连线为蓝色

考虑 AB,AC,AD,AE,AF 共 5 条线段，由鸽巢原理，要么有 3 条线段为红色，要么有 3 条线段为蓝色，不妨设 AB,AC,AD 为红色，其余情况可同理讨论

若 BC 为红色，则 A,B,C 两两相互认识，若 BD 为红色，则 A,B,D 两两相互认识，若 CD 为红色，则 A,C,D 两两相互认识，若 BC,BD,CD 均为蓝色，则 B,C,D 两两相互不认识，故命题得证 •

Problem 2.4 抽屉内共有 6 双黑袜子、5 双白袜子、5 双红袜子、4 双绿袜子，试问至少取出多少只袜子，使得取出的袜子中一定有两只颜色相同？至少取出多少只袜子，使得取出的袜子中一定有两只颜色不同？

Solution: 第一问中，将颜色看成鸽巢，取出的袜子看成鸽子，令所有的 $m_k=2$，得到最少需要的袜子数为 $m_1+m_2+m_3+m_4-n+1=2+2+2+2-4+1=5$

第二问中，最坏情况下我们取出了 12 只黑袜子，第 13 只袜子一定是其它颜色的，所以答案为 13，这一问可以看作是对鸽巢原理的证明的应用 •

Problem 2.5 证明对 $\forall r\in\mathbb{R},n\in\mathbb{N},n>1$，$\exists p,q\in\mathbb{N}$，满足 $0<q<n$，且 $|p-qr|\leq\frac{1}{n}$

Solution: 考虑 $r,2r,\cdots,(n-1)r$ 共 $n-1$ 个数，以及 $[0,\frac{1}{n}),[\frac{1}{n},\frac{2}{n}),\cdots,[\frac{n-1}{n},1)$ 共 n 个集合，显然每个 qr 的小数部分恰好会落到其中一个集合中

若某个 qr 的小数部分落在 $[0,\frac{1}{n})$ 中，令 $p=\lfloor qr\rfloor$，则有 $|p-qr|<\frac{1}{n}$

若某个 qr 的小数部分落在 $[\frac{n-1}{n},1)$ 中，令 $p=\lfloor qr\rfloor+1$，则有 $|p-qr|\leq\frac{1}{n}$

若上述情况都不满足，则 $r,2r,\cdots,(n-1)r$ 这 $n-1$ 个数必落在 $[\frac{1}{n},\frac{2}{n}),[\frac{2}{n},\frac{3}{n}),\cdots,[\frac{n-2}{n},\frac{n-1}{n})$ 共 $n-2$ 个集合中，由鸽巢原理，至少有两个数 q_1r,q_2r 落在同一个区间里，令 $q=|q_1-q_2|$，则 $0<q<n$ 且 qr 的小数部分落在 $[0,\frac{1}{n})$ 中，再令 $p=\lfloor qr\rfloor$，则有 $|p-qr|<\frac{1}{n}$，原命题得证 •

2.4 二项式定理与贾宪三角

二项式定理的结论很简单：

$$(x+y)^n = C(n,0)x^n + C(n,1)x^{n-1}y + \cdots + C(n,n)y^n$$

通过对 x,y 的不同取值，我们可以得到几个简单的推论：

(1) $C(n,0) + C(n,1) + \cdots + C(n,n) = 2^n$

(2) $C(n,0) - C(n,1) + \cdots + (-1)^n C(n,n) = 0$

贾宪三角则是给了理解二项式定理的另一种方式，这部分题目往往有两种策略，一种是继续通过组合意义去给出一个双射，另一种是归纳法，课件上的公式可以直接套用，一般来说多试几次就能知道应该对号入座什么样的公式了。

Problem 2.6 证明 $C(n+m,k) = C(n,0)C(m,k) + C(n,1)C(m,k-1) + \cdots + C(n,k)C(m,0), k \leq \min\{n,m\}$

Solution: 假设一共有 $n+m$ 个不同的元素，从中选取 k 个，不考虑排列次序，总方案数就是 $C(n+m,k)$

现在考虑把这些元素分成两个组，第一组有 n 个不同的元素，第二组有 m 个不同的元素，从这两组中共选择 k 个，可以先从第一组选取 0 个，再从第二组选取 k 个，由乘法原理得方案数为 $C(n,0)C(m,k)$，也可以先从第一组选取 1 个，再从第二组选取 $k-1$ 个，由乘法原理得方案数为 $C(n,1)C(m,k-1)$，依次类推，还可以先从第一组选取 k 个，再从第二组选取 0 个，由乘法原理得方案数为 $C(n,k)C(m,0)$

由于不同的选取方案从第一组选取的元素个数是不同的，所以各个方案之间是互斥的，所以总方案数为 $C(n,0)C(m,k) + C(n,1)C(m,k-1) + \cdots + C(n,k)C(m,0)$

两种构造方式显然是等价的，所以 $C(n+m,k) = C(n,0)C(m,k) + C(n,1)C(m,k-1) + \cdots + C(n,k)C(m,0)$ •

Problem 2.7 证明 $C(m+n,m) = C(m,0)C(n,0) + C(m,1)C(n,1) + \cdots + C(m,m)C(n,m), m \leq n$

Solution: 假设一共有 $m+n$ 个不同的元素，从中选取 m 个，不考虑排列次序，总方案数就是 $C(m+n,m)$

现在考虑把这些元素分成两个组，第一组有 n 个不同的元素，第二组有 m 个不同的元素，最开始假设第二组全部被选取，但是我们可以从第二组中放弃 0 个元素，同时从第一组中选出 0 个元素补充，由乘法原理得方案数为 $C(m,0)C(n,0)$，也可以从第二组中放弃 1 个元素，同时从第一组中选出 1 个元素补充，由乘法原理得方案数为 $C(m,1)C(n,1)$，依此类推，还可以从第二组中放弃 m 个元素，同时从第一组中选出 m 个元素补充，由乘法原理得方案数为 $C(m,m)C(n,m)$

由于不同的选取方案从第一组选取的元素个数是不同的，所以各个方案之间是互斥的，所以总方案数为 $C(m,0)C(n,0) + C(m,1)C(n,1) + \cdots + C(m,m)C(n,m)$

两种构造方式显然是等价的，所以 $C(m+n,m) = C(m,0)C(n,0) + C(m,1)C(n,1) + \cdots + C(m,m)C(n,m), m \leq n$ •

Problem 2.8 证明 $C(n+k+1,k)=C(n+k,k)+C(n+k-1,k-1)+C(n+k-2,k-2)+\cdots+C(n+1,1)+C(n,0)$

Solution: 假设一共有 $n+k+1$ 个不同的元素，从中选取 k 个，不考虑排列次序，总方案数就是 $C(n+k+1,k)$

现在假设元素之间有顺序，我们放弃最后 1 个元素不选，则需要在前 $n+k$ 个元素中选取 k 个，方案数为 $C(n+k,k)$，也可以要求必须选最后 1 个元素，但放弃倒数第 2 个元素不选，则需要在前 $n+k-1$ 个元素中选取 $k-1$ 个，方案数为 $C(n+k-1,k-1)$，也可以要求必须选最后 2 个元素，但放弃倒数第 3 个元素不选，则需要在前 $n+k-2$ 个元素中选取 $k-2$ 个，方案数为 $C(n+k-2,k-2)$，以此类推，可以要求必须选最后 $k-1$ 个元素，但放弃倒数第 k 个元素不选，则需要在前 $n+1$ 个元素中选取 1 个，方案数为 $C(n+1,1)$，还可以要求必须选最后 k 个元素，但放弃倒数第 $k+1$ 个元素不选，则需要在前 n 个元素中选取 0 个，方案数为 $C(n,0)$

上述的选取方案显然是互斥的，所以总方案数为 $C(n+k,k)+C(n+k-1,k-1)+C(n+k-2,k-2)+\cdots+C(n+1,1)+C(n,0)$

但注意到如果必须选最后 k 个元素，则不需要强调放弃倒数第 $k+1$ 个元素，因为此时已经选够了 k 个元素，结合编码的方式，可以知道两种构造方式显然是等价的，所以 $C(n+k+1,k)=C(n+k,k)+C(n+k-1,k-1)+C(n+k-2,k-2)+\cdots+C(n+1,1)+C(n,0)$ •

Problem 2.9 证明 $C(n,k)C(k,r)=C(n,r)C(n-r,k-r)$

Solution: 假设一共有 n 个不同的元素，从中选取 k 个，不考虑排列次序，方案数是 $C(n,k)$，再从这 k 个元素中选取 r 个，不考虑排列次序，方案数是 $C(k,r)$，由于两次选取是独立的，根据乘法原理知总方案数为 $C(n,k)C(k,r)$

换一个构造方式，我们可以直接从 n 个元素中选出刚才的 r 个元素，方案数为 $C(n,r)$，再从剩下的 $n-r$ 个元素中选出 $k-r$ 个元素来补齐刚才第一次选取时得到的 k 个元素，方案数是 $C(n-r,k-r)$，由于两次选取是独立的，根据乘法原理知总方案数为 $C(n,r)C(n-r,k-r)$

两种构造方式显然是等价的，所以 $C(n,k)C(k,r)=C(n,r)C(n-r,k-r)$ •

Problem 2.10 计算 $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}C(n+k,k)$

Solution: 考虑数学归纳法，当 $n=1$ 时，原式为 $\frac{1}{2^0}C(1,0)+\frac{1}{2^1}C(2,1)=2$，当 $n=2$ 时，原式为 $\frac{1}{2^0}C(2,0)+\frac{1}{2^1}C(3,1)+\frac{1}{2^2}C(4,2)=4$，这启发我们猜测 $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}C(n+k,k)=2^n$

不妨设我们已经证明了 $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}C(n-1+k,k)=2^{n-1}$，进行一些化简：

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}C(n+k,k) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}(C(n+k-1,k)+C(n+k-1,k-1)) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}C(n+k-1,k)+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}C(n+k-1,k-1) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}C(n-1+k,k)+\frac{1}{2^n}C(2n-1,n)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^{k+1}}C(n+k,k) \\
&= 2^{n-1}+\frac{1}{2^n}C(2n-1,n)+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^{k+1}}C(n+k,k)-\frac{1}{2^{n+1}}C(2n,n)
\end{aligned}$$

注意到 $C(2n,n)=C(2n-1,n)+C(2n-1,n-1)=2C(2n-1,n)$，故第二项和第四项可以相消，将第三项移至左边即可得：

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}C(n+k,k)=2^{n-1}$$

所以 $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}C(n+k,k)=2^n$，由数学归纳法，结论得证 •

二项式定理还可以扩展为多项式定理，即分礼物问题：假设第 i 个小朋友要恰好得到 n_i 件礼物，且 $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$，则总方案数为 $\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$，另有推论 $\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k}\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}=k^n$。

与分礼物问题需要区分开的是分钱问题，在分礼物问题中礼物是互不相同的，而分钱问题中硬币是全部相同的，我们有如下结论：

(1) 将 n 枚完全相同的硬币分发给 m 个不同的小朋友，使得每个小朋友至少得到 1 枚硬币，总方案数为 $C(n-1,m-1)$

(2) 将 n 枚完全相同的硬币分发给 m 个不同的小朋友，不要求每个小朋友都必须得到枚硬币，总方案数为 $C(n+m-1,m-1)$

这部分题目只要认清楚了模型就可以直接套公式计算，由于多项式定理本身不做要求所以整体来说比较简单，具体例题可以参考教材。

关于鸟瞰贾宪三角和鹰瞰贾宪三角两节的内容，考试基本不涉及，能够理解想表达的意思并看懂计算的思路即可。

2.5 Fibonacci 数列

Fibonacci 数列的定义：$F_0=0,F_1=1,F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$，有如下几条性质：

(1) $F_1+F_2+\cdots+F_n=F_{n+2}-1$

(2) $F_1+F_3+\cdots+F_{2n-1}=F_{2n}$

(3) $F_0-F_1+F_2-F_3+\cdots-F_{2n-1}+F_{2n}=F_{2n-1}-1$

(4) $F_1^2+F_2^2+\cdots+F_n^2=F_nF_{n+1}$

(5) $F_{n-1}F_{n+1}-F_n^2=(-1)^n$

(6) $F_n^2+F_{n-1}^2=F_{2n-1}$

(7) $F_{n+1}F_n+F_nF_{n-1}=F_{2n}$

(8) $F_{n+1}F_{m+1}+F_nF_m=F_{n+m+1}$

这些性质的证明都是书上和课件上有的，这里不再赘述，推导这些性质的同时也就给出了一些常用的方法如差分法和归纳法等，建议同学们自己尝试默写这些性质的证明，同时就可以熟悉这些方法了。

Fibonacci 数列的通项公式：$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$，注意这个公式的推导方式很重要，需要熟练掌握。

在解决具体问题上，常用的方法一般也就是直接归纳、使用 Fibonacci 数列的性质和构造递推数列，方法比较统一成套，需要花时间熟悉，但熟练以后这些问题就很简单了。

Problem 2.11 证明 $k|n$ 是 $F_k|F_n$ 的充分必要条件

Solution: 先证 $k|n \Rightarrow F_k|F_n$，不妨设 $n = tk$，当 $t = 1$ 时显然有 $F_k|F_n$，下面对 t 作归纳

假设 $F_k|F_{(t-1)k}$，根据性质 (8)，有 $F_{tk} = F_{(t-1)k+k-1+1} = F_{(t-1)k+1}F_k + F_{(t-1)k}F_{k-1}$，根据假设，$F_k|(F_{(t-1)k}F_{k-1})$，而显然 $F_k|(F_{(t-1)k+1}F_k)$，所以 $F_k|F_n$，根据数学归纳法，原命题得证

再证 $F_k|F_n \Rightarrow k|n$，考虑 $F_n = F_{n-k+k-1+1} = F_{n-k}F_{k-1} + F_{n-k+1}F_k$，其中 $F_k|(F_{n-k+1}F_k)$，所以必有 $F_k|(F_{n-k}F_{k-1})$，但由辗转相除法知 F_k 和 F_{k-1} 是互质的，所以必有 $F_k|F_{n-k}$，同理必有 $F_k|F_{n-2k}$，依次类推，最后会得到 $F_k|F_{n\ mod\ k}$，除非 $n\ mod\ k = 0$ 给出 $F_k|F_0 = 0$，否则该式不可能成立，所以必有 $k|n$

综上所述，原命题得证 •

Problem 2.12 证明若 n 是 4 的倍数，则 F_n 是 3 的倍数

Solution: 不妨设 $n = 4k$，当 $k = 1$ 时 $F_4 = 3$ 显然是 3 的倍数，下面对 k 作归纳

假设 $F_{4(k-1)} = F_{4k-4}$ 是 3 的倍数，考虑 F_{4k}，有：

$$\begin{aligned}
F_{4k} &= F_{4k-1} + F_{4k-2} \\
&= F_{4k-2} + F_{4k-3} + F_{4k-3} + F_{4k-4} \\
&= F_{4k-3} + F_{4k-4} + F_{4k-3} + F_{4k-3} + F_{4k-4} \\
&= 3F_{4k-3} + 2F_{4k-4}
\end{aligned}$$

显然 $3F_{4k-3}$ 是 3 的倍数，又因为 F_{4k-4} 是 3 的倍数，所以 F_{4k} 是 3 的倍数，根据数学归纳法，原命题得证 •

Problem 2.13 假设某小朋友有 n 元钱，他每天可以购买一件价值为 1 元的物品 A 或价值为 2 元的物品 B，其中物品 B 有两种，计算小朋友花完所有钱的方案数

Solution: 这是典型的构造递推数列的题目，假设 J_n 表示小朋友花完 n 元钱的方案数，考虑他最后一天购买的物品，一共有三种不同情况，且这些情况之间是互斥的，所以有 $J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}$

下一步是构造 a, b 使得 $J_n - aJ_{n-1} = b(J_{n-1} - aJ_{n-2})$，易知 $a + b = 1$ 且 $ab = -2$，取一组解 $a = -1, b = 2$，则有 $J_n + J_{n-1} = 2(J_{n-1} + J_{n-2})$，进行递推得：

$$J_n + J_{n-1} = 2(J_{n-1} + J_{n-2}) = 2^2(J_{n-2} + J_{n-3}) = \cdots = 2^{n-1}(J_1 + J_0)$$

根据题意，$J_1 = J_0 = 1$，所以 $J_n + J_{n-1} = 2^n$，接下来进行错位相加：

$$\begin{gathered}
J_n + J_{n-1} = 2^n \\
-J_{n-1} - J_{n-2} = -2^{n-1} \\
J_{n-2} + J_{n-3} = 2^{n-2} \\
\cdots \\
(-1)^{n-1}(J_1 + J_0) = (-1)^{n-1}2^1
\end{gathered}$$

上式全部相加后得 $J_n+(-1)^{n-1}J_0=2^n-2^{n-1}+\cdots+(-1)^{n-1}2$，注意到等号右边是等比数列，其首项为 $(-1)^{n-1}2$，公比为 -2，项数为 n，所以：

$$\begin{aligned}J_n+(-1)^{n-1}J_0&=(-1)^{n-1}2\cdot\frac{(1-(-2)^n)}{1+2}\\&=(-1)^{n-1}\frac{2}{3}-\frac{1}{3}(-1)^{n-1}(-1)^n2^{n+1}\\&=(-1)^{n-1}\frac{2}{3}+\frac{2^{n+1}}{3}\end{aligned}$$

又因为 $J_0=1$，所以 $J_n=\frac{2^{n+1}+(-1)^n}{3}$，注意刚才的推导过程默认了 $n\geq 1$，因此需要对通项公式验证 $n=0$ 的情况，发现仍然满足，所以花完所有钱的方案数就是：

$$J_n=\frac{2^{n+1}+(-1)^n}{3}$$

•

3 数论

3.1 基本性质

数论中最基础的概念就是整除：假设 a,b 都是整数且 $a\neq 0$，则 $a|b$ 等价于存在正整数 q 使得 $b=aq$，关于整除的基本性质也和集合论一样，需要按照定义进行证明。数论中几个常用定理如下：

(1) 算术基本定理：每个大于 1 的正整数都可以分解成有限个素数之积，若不计素因数的次序，则分解是唯一的

(2) 欧几里得定理：素数的个数是无穷的

(3) 费马小定理：若 p 是质数且 a 是任意正整数，则 $p|a^p-a$

这几个定理可以直接使用，关于其证明能理解即可。

Problem 3.1 若 $a|b$ 且 $a|c$，则对任意 $m,n\in\mathbb{N}$，有 $a|bm+cn$

Solution: 由 $a|b$ 得存在 q_1 使得 $b=aq_1$，由 $a|c$ 得存在 q_2 使得 $c=aq_2$

所以 $bm+cn=aq_1m+aq_2n=a(q_1m+q_2n)$，即存在正整数 q_1m+q_2n 使得 $a(q_1m+q_2n)=bm+cn$，这说明 $a|bm+cn$ •

Problem 3.2 假设 n 不是完全平方数，证明 $\sqrt{n}$ 是无理数

Solution: 假设 $\sqrt{n}$ 是有理数，则 $\exists a,b\in\mathbb{N}$，使得 $\sqrt{n}=a/b$，即 $b^2n=a^2$

根据唯一分解定理，不妨令 $n=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_t^{k_t}$，由于 n 不是完全平方数，故存在 k_i 为奇数，否则 $p_1^{k_1/2}p_2^{k_2/2}\cdots p_t^{k_t/2}$ 是正整数，矛盾

因为 $b^2n=a^2$，所以 $n|a^2$，那么 $p_i|a^2$，又因为 p_i 是质数，所以 $p_i|a$，不妨设 p_i 在 a 的分解中出现了 m 次，则 p_i 在 a^2 的分解中出现了 $2m$ 次

假设 p_i 在 b 的分解中出现了 n 次（n 可能为 0），则 p_i 在 b^2 的分解中出现了 $2n$ 次，故 p_i 在 b^2n 的分解中出现了 $2n+k_i$ 次，但 k_i 是奇数，故不可能有 $2n+k_1=2m$，这与算术基本定理矛盾，所以 $\sqrt{n}$ 是无理数 $\bullet$

Problem 3.3 设 p 是质数，$0<k<p$，求证 $p|C(p,k)$

Solution: $C(p,k)=\frac{p!}{k!(p-k)!}$ 为正整数，所以 $k!(p-k)!|p!$，但 $2,3,\cdots,k$ 和 $2,3,\cdots p-k$ 都小于 p，故 $k!(p-k)!$ 与 p 互质，所以必有 $k!(p-k)!|(p-1)!$

所以 $\frac{(p-1)!}{k!(p-k)!}$ 为正整数，而 $C(p,k)=p\cdot\frac{(p-1)!}{k!(p-k)!}$，所以 $p|C(p,k)$ $\bullet$

3.2 欧几里得算法与欧拉函数

假设 a,b 为正整数，$a>b$ 且 $a=bq+r, 0<r<b$，记它们的最大公因数为 $gcd(a,b)$，最小公倍数为 $lcm(a,b)$，则有以下基础性质：

(1) $gcd(a,b)=gcd(b,r)$

(2) 若 $gcd(a,b)=d$，则 $gcd(\frac{a}{d},\frac{b}{d})=1$

(3) 存在正整数 m,n，使得 $am+bn=gcd(m,n)$

(4) $ab=gcd(a,b)\cdot lcm(a,b)$

这些性质的证明比较简单，直接从整除的定义就可以得到，但这些性质非常基础，需要熟练掌握，除了这些性质以外，还需要能够掌握计算最大公因数和线性组合表示的流程，这里不再赘述。

欧拉函数 $\phi(n)$ 表示小于 n 的数中与 n 互质的数的个数，根据补集形式的容斥定理可以知道，若 $n=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_t^{k_t}$，则 $\phi(n)=n(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\cdots(1-\frac{1}{p_t})$。

Problem 3.4 设 $n>2$，计算小于 n 的数中与 n 互质的数的和，用欧拉函数表示

Solution: 假设 a 与 n 互质，则必有 $n-a$ 与 n 互质，否则推出矛盾

但 $a\neq n-a$，否则 $n=2a$，这和 a 与 n 互质矛盾，又注意到 $n-(n-a)=a$，故可以把与 n 互质的数分成两个一组，每组为 a 和 $n-a$ 的形式，可以看出这样的分组是存在且唯一的

由于小于 n 的数中与 n 互质的数共有 $\phi(n)$ 个，所以一共可分成 $\frac{\phi(n)}{2}$ 组，而每组的和为 n，所以小于 n 的数中与 n 互质的数的和为 $\frac{n\phi(n)}{2}$ $\bullet$

3.3 同余与剩余系算术

在模 m 剩余系中，元素只有 $\bar{0},\bar{1},\cdots,m\bar{-}1$，在具体操作上，与普通的运算有以下异同点：

(1) $\bar{a}+\bar{b}$：先计算 $a+b$，再将结果对 m 求余数即可

(2) $\bar{a}\cdot\bar{b}$：先计算 $a\cdot b$，再将结果对 m 求余数即可

(3) $\bar{a}-\bar{b}$：$\bar{a}-\bar{b}=\bar{a}+(-\bar{b})$，其中若 $b\neq 0$ 则 $-\bar{b}=m-b$，若 $b=0$ 则 $-\bar{b}=\bar{0}$，也可以理解成先计算 $a-b$，再加上若干倍 m 使得结果回到 0 到 $m-1$ 之间

(4) $\bar{a}/\bar{b}$：$\bar{a}/\bar{b} = \bar{a} \cdot \frac{1}{b}$，其中 $\frac{1}{b}$ 是方程 $bu + mv = 1$ 中 u 在 0 到 $m-1$ 之间的解，注意这个 u 不一定存在

只要掌握了这些基本运算的规律，解同余方程的步骤完全可以类比解普通方程的步骤，只需要把所有的运算都换到剩余系下的运算即可。

Problem 3.5 求解同余方程组：

$$2x + 3y \equiv 1(mod\ 11)$$
$$x + 4y \equiv 4(mod\ 11)$$

Solution: 将第 (2) 式的 2 倍减去第 (1) 式得 $5y \equiv 7(mod\ 11)$，再运用欧几里得算法求解线性组合表示问题 $5y + 11u = 7$，解得剩余系中的解 $y = 8$

将 $y = 8$ 代入第 (1) 式得 $2x \equiv 10(mod\ 11)$，再运用欧几里得算法求解线性组合表示问题 $2x + 11v = 10$，解得剩余系中的解 $x = 5$

故原方程组的解为 $x = 5, y = 8$ •

Problem 3.6 求解同余方程 $x^2 \equiv 4(mod\ 23)$

Solution: 移项并化简原方程可得 $(x+2)(x-2) \equiv 0(mod\ 23)$，由于 23 是质数，所以必有 $x + 2 \equiv 0(mod\ 23)$ 或 $x - 2 \equiv 0(mod\ 23)$

若 $x + 2 \equiv 0(mod\ 23)$，可解得 $x = 21$

若 $x - 2 \equiv 0(mod\ 23)$，可解得 $x = 2$

故原方程的解为 $x = 2$ 或 $x = 21$ •

4 图论

4.1 基本性质

图是一个全新的抽象概念，因此需要先熟悉图中的术语：

(1) 基本概念：顶点 (Node)、边 (Edge)、度数 (Degree)

(2) 特殊的图：多重图 (Multigraph)、简单图 (Simple Graph)、无边图 (Edgeless Graph)、完全图 (Complete Graph)、正则图 (Regular Graph)、星 (Star)、补图 (Complement)、子图 (Subgraph)

(3) 路径与类似概念：路 (Walk)、回路 (Closed Walk)、迹 (Trail)、通路 (Path)、圈 (Cycle)

(4) 连通性：连通图 (Connected Graph)、连通分支 (Connected Component)

图论中最基本的定理是握手定理：在每个图中，顶点度数的总和等于边数的两倍，这个定理非常重要，在后面会反复被使用。

Problem 4.1 证明 G 和其补图 $\bar{G}$ 中至少有一个是连通图

Solution: 对于这种题设条件，一般思路是假设 G 不连通，然后来证明 $\bar{G}$ 连通

若 G 不连通，则存在连通分支 $G_1, G_2, \cdots, G_t$，且 $t \geq 2$

考虑 $x, y \in V(G)$ 是 G 中任意两个顶点，其中 $x \in V(G_i), y \in V(G_j)$，若 $i \neq j$，说明在 G 中 x, y 之间没有路，那么 x, y 之间一定没有边，这说明 x, y 在 $\bar{G}$ 中有边相连，则 x, y 在 $\bar{G}$ 中有路

若 $i = j$，取 $k \neq i$ 且 $1 \leq k \leq t$，再设 $z \in V(G_k)$，由于 $k \neq i, k \neq j$，根据上面的推理，x, z 和 y, z 在 $\bar{G}$ 中都有边，因此 x, y 在 $\bar{G}$ 中有路 $x \to z \to y$

综上所述，G 不连通时任意两个顶点在 $\bar{G}$ 中都有路，因此 $\bar{G}$ 连通，即 G 和 $\bar{G}$ 中至少有一个是连通图 •

Problem 4.2 设 e 是连通图 G 中的一条边，证明删去 e 后 G 仍连通当且仅当 e 含于图上某个圈中

Solution: 假设删去 e 后 G 任然连通，且 e 的两个顶点为 x, y，则删去 e 后 x, y 在 G 中有路，而这条路加上 e 后就会形成圈，因此 e 含于这个圈中

假设 e 含于某个圈中，还是设 e 的两个顶点为 x, y，则在 e 所在的圈上去掉 e 后得到 x, y 之间的一条路

设 u, v 为 G 中任意两个顶点，由 G 连通知 u, v 之间必有路，假设 e 在这条路上，将 e 替换成刚才得到的 x, y 之间的路，仍然能够得到 u, v 的一条路，且 e 不在这条路上，所以 G 中任意两个顶点有不含 e 的路，因此删去 e 后 G 仍然连通 •

4.2 欧拉图和哈密顿图

欧拉路/图和哈密顿路/图的定义如下：

(1) 欧拉路：设图 G 中没有孤立顶点，如果存在一条路经过 G 的每条边一次且仅一次，则称该路为 G 的欧拉路

(2) 欧拉回路：设图 G 中没有孤立顶点，如果存在一条回路经过 G 的每条边一次且仅一次，则称该回路为 G 的欧拉会路，存在欧拉回路的图称为欧拉图

(3) 哈密顿路：给定一个图 G，如果存在一条路经过 G 的每个顶点一次且仅一次，则称该路为 G 的哈密顿路

(4) 哈密顿回路：给定一个图 G，如果存在一条回路经过 G 的每个顶点一次且仅一次，则称该回路为 G 的哈密顿回路，存在哈密顿回路的图称为哈密顿图

欧拉路和欧拉回路的存在性有充分必要且易操作的定理可以验证：

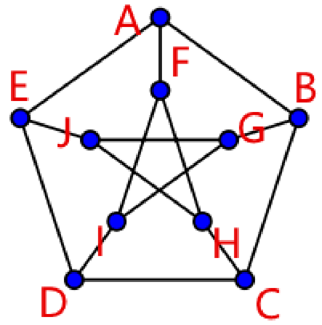
(1) 图 G 存在欧拉路当且仅当 G 连通且只有 0 个或 2 个奇数度数的顶点

(2) 图 G 存在欧拉回路当且仅当 G 连通且所有顶点的度数为偶数

关于这两个定理的证明能理解即可，实际操作时用起来非常简单，而关于哈密顿路和哈密顿回路的存在性则没有统一的判别方法，课件上和书上的一些条件了解即可，遇到问题时还需要具体问题具体分析。

Problem 4.3 证明 *Petersen* 图不是哈密顿图

Solution:



假设 Petersen 图是哈密顿图，则图中有哈密顿回路，不妨设回路的起点是 A，则回路的终点也是 A，观察图中两个五元环 $A \to B \to C \to D \to E$ 和 $F \to H \to J \to G \to I$，因为哈密顿回路从第一个五元环出发，最后又回到第一个五元环，因此一定只经过了偶数条位于两个五元环之间的边，下面我们分情况进行讨论

假设哈密顿回路经过了 $<A, F>$ 和 $<B, G>$，且 $<C, H>, <D, I>, <E, J>$ 不在回路上，注意到去掉这三条边后 H, I, J 都是二度点，但这三个点都在回路上，因此和它们关联的两条边都在回路上，但这使得和 F, G 关联的三条边都在回路上，显然是矛盾的

假设哈密顿回路经过了 $<A, F>$ 和 $<C, H>$，且 $<B, G>, <D, I>, <E, J>$ 不在回路上，注意到去掉这三条边后 G, I, J 都是二度点，但这三个点都在回路上，因此和它们关联的两条边都在回路上，但这使得和 F, H 关联的三条边都在回路上，显然是矛盾的

对于其它经过两条边的情况，由 Petersen 图的对称性知也是不可能的

假设哈密回路经过了 $<A, F>, <B, G>, <C, H>$ 和 $<D, I>$，且 $<E, J>$ 不在回路上，注意到去掉这条边后 J, E 都是二度点，但这两个点都在回路上，因此和它们关联的两条边都在回路上，再考虑点 F，因为 $<C, H>, <H, J>$ 都必然在回路上，因此 $<F, H>$ 不能在回路上，否则和 H 关联的三条边都在回路上，因此只能是 $<F, I>$ 在回路上，同理可以推出 $<B, C>$ 必然在回路上，但注意到此时已经推出的 Petersen 图中必然在哈密顿回路上的边形成了两个五元环，所以导出矛盾

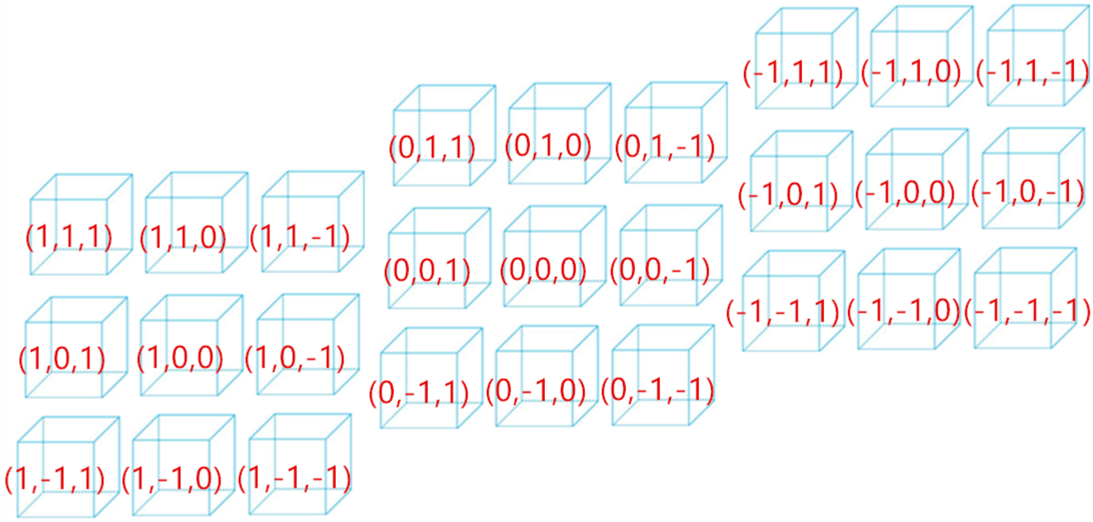
对于其它经过四条边的情况，由 Petersen 图的对称性知也是不可能的

综上所述，Petersen 图不是哈密顿图 •

Problem 4.4 设有 $3 \times 3 \times 3$ 个小立方体构成的大立方体，任意两个面相邻的小立方体连通，求是否能够找到一条从其中一个角上的立方体到正中心立方体的路径

Solution: 将题述模型建成图：每个小立方体看成一个顶点，两个面相邻的小立方体之间连边，则题意等价于问是否存在一条从某个角块对应的顶点到中心块对应的顶点的哈密顿路，因为角块是对称的，因此只需要证明不存在从其中一个角块到中心块的哈密顿路即可

不妨以中心块为原点建立一个坐标系，给每个方块一个坐标如下：



如果存在哈密顿路，不妨设其起点是 $(1,1,1)$，终点是 $(0,0,0)$，观察可以发现，在图中每经过一条边，仅会有一个坐标发生变化，且改变量的绝对值为 1，而哈密顿路上一共有 26 条边，因此三个坐标的总改变次数为 26

另一方面，由于坐标从 $(1,1,1)$ 变成了 $(0,0,0)$，易知每个坐标应该改变了奇数次，但 26 显然无法写成三个奇数之和，这就导出矛盾，因此原命题所问的路径不存在 •

4.3 树

树有以下几种等价定义：

(1) 不含圈的连通图

(2) 连通图，且删去任意一条边后图不再连通

(3) 不含圈的图，且增加任意一条边后图含圈

(4) 连通且顶点数恰好比边数多 1

(5) 不含圈且顶点数恰好比边数多 1

(6) 每对顶点间有且仅有一条路径

由于树的顶点集 V 和边集 E 满足关系 $|E| = |V| - 1$，所以在树上进行点数、边数和度数之间的运算会自然多出一个条件，也就能得到更好的性质。

关于树，还有如下几个定理和算法：

(1) Cayley 定理：n 个顶点的有标号树的数量为 n^{n-2}

(2) Boruvka-Kruskal 算法：求解最优生成树

(3) Jarnik-Prim 算法：求解最优生成树

(4) Tree shortcur 算法：求解 TSP 问题

这些定理和算法的流程与证明理解即可，知道怎么直接使用它们就好，一般不会考到它们的证明甚至变形等。

Problem 4.5 设图 G 有 n 个顶点和 m 条边，证明 G 至少有 $n-m$ 个连通分支

Solution: 设 G 有 k 个连通分支 $G_1, G_2, \cdots, G_k$, 则每个连通分支都满足 $|E(G_i)| \geq |V(G_i)| - 1$, 否则与连通性矛盾

将所有的不等式加到一起得 $\sum_{i=1}^{k} |E(G_i)| \geq \sum_{i=1}^{k} |V(G_i)| - k$, 即 $m \geq n-k$, 所以 $k \geq n-m$, G 至少有 $n-m$ 个连通分支 •

Problem 4.6 设 G 是一棵树，且 G 中有一个度数为 d 的顶点，证明 G 至少有 d 个叶子节点

Solution: 不妨设 G 有 n 个节点，假设 G 有 k 个叶子节点，每个叶子节点的度数应为 1，剩下 $n-k$ 个节点不是叶子节点，其中有一个节点度数为 d，其余节点度数至少为 2

再结合握手定理，应有 $k \cdot 1 + (n-k-1) \cdot 2 + 1 \cdot d \geq 2n$，化简即得 $k \geq d$，所以 G 中至少有 d 个叶子节点 •

Problem 4.7 设 G 是点数不小于 2 的连通图，证明 G 中至少有一个顶点 v，使得删去 v 后 G 仍然连通

Solution:

考虑 G 的一棵生成树 G'，G' 一定存在叶子节点 v，删去 v 后 G' 任然连通，将 G 中不与 v 关联的边重新加回 G' 中即得在 G 中删去 v 后的图，但是在连通图中加边不会改变连通性，所以删去 v 后 G 仍然连通

当 G 本身不是通路 (Path) 时，该结论可以加强为至少有三个顶点，使得删去其中任意一个后 G 仍然连通，证明留给大家思考 •

Problem 4.8 给定图 G，且 G 中每条边的价格都不相同，证明 G 中总价值最小的生成树唯一

Solution: 假设 G 有两棵不同的最小生成树 $T = \{e_1, e_2, \cdots, e_{n-1}\}$ 和 $T' = \{e'_1, e'_2, \cdots, e'_{n-1}\}$, 且满足 $cost(e_1) < cost(e_2) < \cdots cost(e_{n-1})$ 和 $cost(e'_1) < cost(e'_2) < \cdots cost(e'_{n-1})$

因为 $T \neq T'$，所以一定存在 k 使得 $e_k \neq e'_k$，不妨设 k 是所有满足条件的下标中最小的一个，同时还应该有 $cost(e_k) \neq cost(e'_k)$，不妨再设 $cost(e_k) < cost(e'_k)$

现在将 e_k 添加到 T' 中，根据树的定义 T' 中一定会含圈，但是 $\{e'_1, e'_2, \cdots, e'_{k-1}, e_k\}$ 一定不会含圈，因为根据 k 的选取应该有 $e_1 = e'_1, e_2 = e'_2, \cdots, e_{k-1} = e'_{k-1}$，如果含圈与 T 是树矛盾

因此一定是 $\{e_k, e'_k, e'_{k+1}, \cdots, e'_{n-1}\}$ 中含圈，但是根据之前的假设，e_k 是该边集中价格最小的边，而去掉圈上任意一条其它边仍会得到一棵树，且这棵树的总价值一定比 T' 小，这与 T' 是最小生成树矛盾

综上所述，G 中总价值最小的生成树唯一 •

4.4 二分图与匹配

二分图有两个等价定义：

(1) 顶点集可以被划分为两个不交的集合的并，使得每个集合内部都没有边，这个定义通常用于直观理解和描述二分图及其相关性质

(2) 不含顶点个数为奇数的圈，这个定义通常用于证明题中

关于二分图的匹配有两个重要定理：

(1) König 定理：对于 $d > 0$，任意 $d-$ 正则二分图一定有完美匹配

(2) Marriage 定理：假设二分图 G 划分出的两个点集为 A 和 B，则 G 存在完美匹配当且仅当 $|A| = |B|$ 且 $\forall S \subseteq A$，有 $|S| \leq |N(S)|$

这两个定理的证明以及求解二分图匹配的算法也是理解即可，但是在题目中它们的结论使用得比较多，尤其是 Marriage 定理，有关完美匹配的存在性问题基本都是由它来解决的。

Problem 4.9 若二分图 G 的每边都有 m 个顶点，且每个顶点的度数都大于 $\frac{m}{2}$，证明 G 一定存在完美匹配

Solution: 假设 G 按二分图定义划分出的两个点集分别为 A, B

$\forall S \subseteq A$，先假设 $|S| \leq \frac{m}{2}$，任意 $x \in V(S)$，根据题设有 $degree(x) > \frac{m}{2}$，再根据二分图的性质有 $|N(\{x\})| > \frac{m}{2}$，但显然 $N(\{x\}) \subseteq N(S)$，因此 $|N(S)| \geq |N(\{x\})| > \frac{m}{2} \geq |S|$

再假设 $|S| \geq \frac{m}{2}$，则 $|A \setminus S| \leq \frac{m}{2}$，任意 $y \in B$，根据题设 $degree(y) > \frac{m}{2}$，再根据二分图的性质有 $|N(\{y\})| > \frac{m}{2}$，假如 $N(\{y\}) \subseteq A \setminus S$，与 $|A \setminus S| \leq \frac{m}{2}$ 矛盾，换句话说 $\forall y \in B, N(\{y\}) \cap S \neq \varnothing$，这意味着 $N(S) = B$，所以必然有 $|S| \leq |N(S)|$

综上所述，根据婚姻定理，G 一定存在完美匹配 •

Problem 4.10 证明任意树的完美匹配如果存在则必定唯一

Solution: 考虑数学归纳法，任选树的某一点为根，并设根的深度为 1，对于每个不是根的顶点 v，若 v 的父亲深度为 d，则定义 v 的深度为 $d + 1$，这样每个节点的深度都是良定的，取深度最大的点的深度为树的深度

对于深度为 1 的树，其必然是单个点，不存在完美匹配，对于深度为 2 的树，其必然是星 (Star)，当且仅当顶点数 $n = 2$ 时存在完美匹配且显然唯一，其它情况下不存在完美匹配

对于一棵深度为 d 的树，考虑其所有叶子节点，如果存在完美匹配，由于叶子节点只与其父亲相邻，所以必然是和其父亲匹配，匹配方式唯一，现在删掉所有叶子节点和其父亲，树的深度变为 $d - 2$，根据数学归纳法，如果新树的完美匹配如果存在就一定唯一，因此原树的完美匹配如果存在就一定唯一

综上所述，任意树的完美匹配如果存在则必定唯一 •

4.5 平面图

平面图可以有以下两种定义方式：

(1) 可以画在一个平面上，使得任意两条边不相交的图就是平面图，这种定义一般用于直观理解和描述平面图及其相关性质

(2) 不含同胚于 K_5 和 $K_{3,3}$ 的图作为子图的图是平面图，这是平面图的充分必要条件，有时候对于抽象地理解平面图有帮助

平面图中最重要的定理是欧拉公式：设 G 是平面图，v 是 G 的顶点数，e 是 G 的边数，f 是 G 的面数，则有 $v-e+f=2$，除此之外，平面图还有如下性质：

(1) 有限平面图中面的度数之和是边数的两倍

(2) 设 G 是简单的连通平面图，其顶点数为 $v \geq 3$，边数为 e，那么 $e \leq 3v-6$，这个性质的证明及其推论非常重要，需要熟练掌握

(3) 平面图的色数为 4，但只需要理解色数为 5 的定理的证明即可

与平面图息息相关的是它的对偶图，只要掌握了平面图的性质和对偶图的构造原理，这类问题就不难解决了。

Problem 4.11 给定二分图 G，若 G 是平面图，且顶点数为 v，边数为 e，证明 $e \leq 2v-4$

Solution: 设 G 的面数为 f，根据欧拉公式有 $v-e+f=2$

因为 G 是二分图，所以 G 中没有奇圈，则 G 中最小圈的大小是 4，也即 G 中面最小度为 4

根绝面的度数之和为边数的两倍，有 $\sum degree(f) = 2e$，则 $4f \leq 2e$，代入欧拉公式中得 $v-e+\frac{e}{2} \geq 2$，化简得 $e \leq 2v-4$ •

Problem 4.12 给定二分图 G，若 G 是平面图，证明 G 的对偶图必有欧拉回路

Solution: 由于 G 是二分图，所以 G 中没有奇圈，则 G 中所有面的度数为偶数

考虑 G 的对偶图 G'，因为 G 中所有面的度数为偶数，所以 G' 中所有点的度数为偶数，则 G' 中必有欧拉回路 •

Problem 4.13 给定平面图 G，若 G 的每个顶点度数都是偶数，证明 G 的面可以 2− 着色

Solution: 考虑 G 的对偶图 G'，若 G' 中有圈，则圈内一定恰好包含着一个 G 中的顶点 v，由于 v 的度数是偶数，因此圈上边的数量也是偶数，即 G' 中没有奇圈，则 G' 是二分图

显然二分图可以对顶点 2− 着色，而 G' 的顶点与 G 的面一一对应，G 中相邻的面对应 G' 中相邻的点，所以 G' 可以点 2− 着色就等价于 G 的面可以 2− 着色 •

5 补充内容

5.1 2015 年期末试题

如果没有大的改变，离散数学期末考试的形式为 9 道大题，其中前 8 题每题 12 分，最后一题 4 分，下面是 2015 年的期末试题（按考试时的顺序排列，原题是英文的），其中前 7 题已经在前面的讲义中出现过，就不再单列解法，每年题目风格比较接近，大家可以据此做一个参考。

Problem 5.1 计算 $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} C(n+k, k)$

Problem 5.2 证明 $k|n$ 是 $F_k|F_n$ 的充分必要条件

Problem 5.3 假设某小朋友有 n 元钱，他每天可以购买一件价值为 1 元的物品 A 或价值为 2 元的物品 B，其中物品 B 有两种，计算小朋友花完所有钱的方案数

Problem 5.4 证明对 $\forall r \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, n > 1$，$\exists p, q \in \mathbb{N}$，满足 $0 < q < n$，且 $|p - qr| \le \frac{1}{n}$

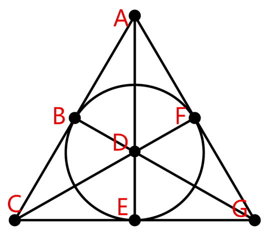
Problem 5.5 给定二分图 G，若 G 是平面图，证明 G 的对偶图必有欧拉回路

Problem 5.6 证明任意树的完美匹配如果存在则必定唯一

Problem 5.7 设有 $3 \times 3 \times 3$ 个小立方体构成的大立方体，任意两个面相邻的小立方体连通，求是否能够找到一条从其中一个角上的立方体到正中心立方体的路径

Problem 5.8 能否找到一个合适的安排，使得 7 个女生每天 3 个人出去散步，7 天后任意两人都曾共同散步过一次且仅一次？

Solution:



这道题的解法来源于 Fano 平面

假设女生的编号依次为 A, B, C, D, E, F, G，可以给出方案如下：

(1) 第 1 天：A, B, C

(2) 第 2 天：A, D, E

(3) 第 3 天：A, F, G

(4) 第 4 天：B, D, G

(5) 第 5 天：B, E, F

(6) 第 6 天：C, D, F

(7) 第 7 天：C, E, G

综上所述，存在可行的安排方案如上 •

Problem 5.9 试问 *Fibonacci* 数列中哪些项的个位数字和其下标的个位数字相同

Solution: 原题等价于求解同余方程 $F_n \equiv n(mod\ 10)$，最简单的做法是考虑 Fibonacci 数列对任意数字取模以后是循环的，模 10 的情况下循环节是 60，我们列出下表：

n	$n\ mod\ 10$	$F_n\ mod\ 10$	n	$n\ mod\ 10$	$F_n\ mod\ 10$	n	$n\ mod\ 10$	$F_n\ mod\ 10$
1	1	1	21	1	6	41	1	1
2	2	1	22	2	1	42	2	6
3	3	2	23	3	7	43	3	7
4	4	3	24	4	8	44	4	3
5	5	5	25	5	5	45	5	0
6	6	8	26	6	3	46	6	3
7	7	3	27	7	8	47	7	3
8	8	1	28	8	1	48	8	6
9	9	4	29	9	9	49	9	9
10	0	5	30	0	0	50	0	5
11	1	9	31	1	9	51	1	4
12	2	4	32	2	9	52	2	9
13	3	3	33	3	8	53	3	3
14	4	7	34	4	7	54	4	2
15	5	0	35	5	5	55	5	5
16	6	7	36	6	2	56	6	7
17	7	7	37	7	7	57	7	2
18	8	4	38	8	9	58	8	9
19	9	1	39	9	6	59	9	1
20	0	5	40	0	5	60	0	0

注意到其中 $n\ mod\ 10 = F_n\ mod\ 10$ 的项为 $1, 5, 13, 17, 25, 29, 30, 35, 37, 49, 53, 55, 60$，之后 $n\ mod\ 10, F_n\ mod\ 10$ 的值每 60 个数是一个与上表相同的循环，因此在 Fibonacci 数列中个位数字和下标的个位数字相同的项为下标对 60 取模后等于 $0, 1, 5, 13, 17, 25, 29, 30, 35, 37, 49, 53, 55$ 的项，这就是充分必要条件

当然这道题是有其它更简洁的解法的，不过我知道的其它解法都超出了考试范围，感兴趣的同学可以私下和我交流 •

5.2 复习和考试建议

根据往年的试题来看，大部分题目都出在了组合和图论上，这也是这学期所花时间最多的两个板块，所以这样的设置不出意外。而集合论和数论的题目考得较少，但也不是没有出现过，所以不能忽略。对于几何和区组设计等内容，一般考得非常简单，直接根据几个有限几何模型就可以作答了，所以这份讲义也没有单独讨论这部分内容。

在复习上，根据我自己的经验，我有如下几点建议：

(1) 重视书上的习题，尤其是作业题，不需要去刷其它参考书上的题目，风格不同的题对准备考试没有太大帮助，这份讲义中的例题基本都是书上的复习题或改编题。

(2) 重视证明的正确性，不要出现伪证的情况，平时作业助教可能不一定完整地阅读了答案，但期末考试是很严格的，因此时常有觉得自己解答得还不错的同学考完试后发现成绩不理想，可能就是一直以来都没有意识到自己的证明由纰漏，这一点上可以多和室友、老师、助教交流自己的解题过程，及时发现有没有漏洞。

(3) 重视课件上的内容，虽然很多理解性的内容或算法相关内容以前没有在考试中出现过，但一定不要放掉，至少做到课件上的东西都能够看懂。

(4) 重视细节和书写规范，有些证明题即使整体的思路正确，也要注意如何进行叙述证明过程，时刻记得所有问题都要回归到定义和定理的原文上来完成证明，也不要漏掉一些基本情况（如 $n = 0, 1$）的验证等，要让整个证明过程清晰、完整。

在考试上，根据我自己的经验，我有如下几点建议：

(1) 冷静下来放平心态去做题，根据以往的经验，至少前 8 道题目在会做的情况下其实一个小时绰绰有余，所以完全不存在题量大导致做不完的问题，大可以沉下心来细致地完成每一道题。

(2) 碰到不会做的题目，可以先直接跳过，因为题目顺序不是按照从易到难排列的，先保证自己会做的题能够拿到所有分数，最后再来解决有困难的题目。

(3) 对各类题目要有针对性的策略，就像讲座中提到的那样，比如证明存在性的题目往往就和鸽巢原理有联系、图论的题目去用等价定义和性质翻译、组合的题目即使想不到组合意义也可以用归纳法等等，即使不能完整地把一道题做出来也可以把自己的思路和已经完成的步骤写下来。

(4) 关于带什么字典，我自己觉得字典的作用是有限的，可能更好的方式是把一些常见专有名词的英文和中文都打印下来，我在附录里写了所有常见英文名词的中文翻译和它们的大致含义，希望对同学们有所帮助，至于答题时，是可以用中文进行解答的。

由于我很菜，所以这份讲义难免有不少疏漏之处，发现谬误的同学欢迎指正。如果想和我交流的话，建议在我在答疑坊的时间来找我（晚上第六大节，地址是六教 6A014），我有空的时候都会过去，也可以提前和我预约。因为我自己的学业也比较重，所以线上找我问问题不一定能及时解答，还请大家谅解。

祝大家期末考试顺利！

5.3 附录：英文名词解释表

A

(1) Adjacency Matrix：邻接矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，用来表示一张图，其中 $a_{ij}=1$ 当且仅当顶点 i,j 之间有边，否则 $a_{ij}=0$

(2) Adjacent Node：相邻顶点，两个顶点之间有边就称为相邻的

(3) Affine Plane：仿射平面，过两个给定的点有且仅有一条直线，且满足平行公理的空间称为仿射平面

(4) Augmenting Path：增广路，二分图上匹配边和未匹配边交替出现的路

(5) Associative Operation：结合运算，指满足 $(a\oplus b)\oplus c=a\oplus(b\oplus c)$ 的运算 $\oplus$

B

(1) Bell Curve：贝尔曲线，就是高斯曲线 $e^{-\frac{t^2}{m}}$，在鹰瞰贾宪三角对组合数估值时使用过

(2) Bijection：双射，即一一映射，两个集合间的一一对应

(3) Binary Representation：二进制表示，即二进制编码，在证明一个有 n 个元素的集合的幂集有 2^n 个元素时使用过

(4) Binomial Coefficients：二项式系数 $C(n,k)$

(5) Binomial Theorem：二项式定理，$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}C(n,k)x^ky^{n-k}$

(6) Bipartite Graph：二分图，不含奇圈的图，顶点集可以被划分为两个不交的集合的并，使得每个集合内部都没有边

(7) Block Design：区组设计

(8) Branch：直译是分支，如果删去一个顶点 v 后得到的连通分支都是树，则这些连通分支称为 v 处的分支

(9) Brooks's Theorem：Brooks 定理，顶点最大度数不超过 d 的图可以被 $d+1-$ 着色

C

(1) Cardinality：基数，对于有限集就是指集合中元素个数

(2) Cayley's Theorem：凯莱定理，本质不同的 n 个节点的有标号数共有 n^{n-2} 种

(3) Ceil：向上取整，即 $\lceil x\rceil$

(4) Chromatic Number：色数，即给一张图染色使得相邻两个节点颜色不同所需最少颜色数

(5) Circuit：Cycle 的同义词，即圈

(6) Clique：团，即完全图，任意两个不同节点之间都有边相连的简单图

(7) Closed Walk：回路，首尾闭合的路，注意与 Cycle 的含义不同，后者是 Closed Walk 的特殊情形

(8) Coloring：着色，即给一张图染色使得相邻两个节点颜色不同

(9) Commutative Operation：交换运算，指满足 $a \oplus b = b \oplus a$ 的运算 $\oplus$

(10) Complement：补，对集合来说指补集，对图来说指补图

(11) Complete Graph：完全图，任意两个不同节点之间都有边相连的简单图

(12) Composite Number：合数，指除了 1 和自身以外还有其它正因数的数

(13) Congruence：同余，即除以某个模数 m 的余数相同

(14) Conjecture：猜想，就是还没有被证明或证伪的命题

(15) Connected Component：连通分支，一张图的极大连通子图称作连通分支

(16) Connected Graph：连通图，任意两个节点之间都有路的图

(17) Convex Polygon：凸多边形

(18) Country：直译是国家，指地图上的一个区域，等价于平面图的一个面

(19) Cube：立方体，有 8 个顶点、12 条边、6 个面

(20) Cube Space：直译是立方体空间，一种有限几何对象

(21) Cut-Edge：割边，指删去后使得原图不连通的边

(22) Cycle：圈，首尾闭合的通路，注意是通路，所以要求顶点不重复

D

(1) Definition by Induction：递归定义，比如 Fibonacci 数列的定义方式和树的生长方式就是递归定义

(2) Degree：度数，即与一个顶点相邻的边的数量

(3) Difference：差，A 对 B 的差就是 $A \setminus B$

(4) Disjoint：不相交

(5) Divisor：因数，有时候也指除数

(6) Dodecahedron：正十二面体，有 20 个顶点、30 条边、12 个面

(7) Double Star：双星，指仅有两个顶点不是叶子节点的树

(8) Dual Graph：对偶图，具体构造方法参考课件

E

(1) Edge：边

(2) Edgeless Graph：无边图，即只有顶点没有边的图

(3) Element：元素

(4) Encoding：编码，指把对象转换成二进制编码的过程

(5) Endpoints：端点，可以指边的端点，也可以指路的端点

(6) Euclidean Algorithm：欧几里得算法，即辗转相除法，用于计算两个正整数的最大公因数和线性组合表示

(7) Euclidean Plane：欧氏平面，就是通常意义下的平面

(8) Euler's Formula：欧拉公式，即 $v - e + f = 2$

(9) Eulerian Walk：欧拉路，经过每条边一次且仅一次的路

(10) Exclusive：互斥的，指两个事件不可能同时发生，互斥事件 A, B 满足 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

F

(1) Face：面，平面图中被边围成的、内部不含顶点和边的区域称为面

(2) Factorization：分解，指把一个数写成其因子的乘积形式，注意不一定是写成质因子的乘积，而是可以泛指任何一种分解，例如 $12 = 3 \times 4$ 和 $12 = 2 \times 3 \times 2$ 都可以叫 Factorization

(3) Fano Plane：Fano 平面，一种有限几何对象

(4) Father：父亲节点，与儿子节点相对

(5) Father Code：储存树的时候一种编码的方式

(6) Fermat's "Little" Theorem：费马小定理，即对于质数 p 和任意正整数 a，有 $p | a^p - a$

(7) Fibonacci Numbers：Fibonacci 数列，$F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2} (n \geq 2)$

(8) Fisher's Inequality：Fisher 不等式，指如果存在 $(v, k, \lambda) - BIBD, 1 < k < v$，则必然有区组总数 $b > v$

(9) Five Color Theorem：五色定理，指任一平图都可以被 $5-$ 着色

(10) Floor：向下取整，即 $\lfloor x \rfloor$

(11) Four Color Theorem：四色定理，指任一平图都可以被 $4-$ 着色

(12) Fundamental Theorem of Arithmetic：算术基本定理，指每个大于 1 的正整数均可被分解为有限个质数之积，且不计质因子的顺序分解是唯一的

G

(1) Gauss Curve：高斯曲线 $e^{-\frac{t^2}{m}}$，在鹰瞰贾宪三角对组合数估值时使用过

(2) General Position：指给出平面上的若干直线，其中任意两条不平行、任意三条不经过同一个点的位置关系

(3) Golden Ratio：黄金分割比 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

(4) Graph：图

(5) Greatest Common Divisor：最大公因数，两个数的最大公因数同时是两个数的因数，且这两个数的其它公因数都是最大公因数的因数

H

(1) Hamiltonian Cycle：哈密顿圈/回路，经过每个顶点一次且仅一次的圈

I

(1) Icosahedron：正二十面体，有 12 个顶点、30 条边、30 个面

(2) Inclusion–Exclusion Formula：容斥原理

(3) Independent Events：独立事件，两个事件 A, B 独立则有 $P(AB) = P(A)P(B)$

(4) Indirect Proof：直译是间接证明，一般指反证法

(5) Induction：数学归纳法

(6) Integer Part：指一个数的整数部分

(7) Intersection：交集，A 和 B 的交集就是 $A \cap B$

(8) Irrational Number：无理数

(9) Isomorphic：同构，如果两个图是同构的，指存在一种给两个图的顶点标号的方法，使得若一个图中标号为 i, j 的顶点之间有边，则另一个图中标号为 i, j 的顶点之间也有边，但同构本身不依赖于标号

K

(1) K-colorable Graph：$k-$ 着色图，指能够用 k 种不同颜色着色的图，注意这里的 k 不一定是色数，不如也可以说二分图是 $3-$ 着色图

(2) Königsberg Bridges：Königsberg 七桥问题

(3) Kruskal's Algorithm：Boruvka-Kruskal 算法，用于求解最优生成树

L

(1) Labeled Tree：有标号树，即每个节点有编号的树

(2) Latin Square：拉丁方，$n \times n$ 的方阵，其中恰有 n 种不同的数，每种数在每行每列恰好出现过 1 次

(3) Leaf：叶子节点，树中度数为 1 的节点称为叶子节点

(4) Least Common Multiple：最小公倍数，两个数的最小公倍数同时是两个数的倍数，且这两个数的其它公倍数都是最小公倍数的倍数

(5) Logarithm：对数

(6) Loop：自环，一个顶点自己到自己的边

(7) Lucas Numbers：Lucas 数列，，$L_1 = 1, L_2 = 3, L_n = L_{n-1} + L_{n-2} (n \geq 3)$

M

(1) Magic Square：幻方，$n \times n$ 的方阵，其中恰有 n^2 种不同的数，且每行每列的和相等，可以从正交拉丁方直接构造一个幻方

(2) Marriage Theorem：婚姻定理，完美匹配存在的充分必要条件

(3) Matching：边集的一个子集，其中不存在两条边的端点是同一个顶点

(4) Modular Arithmetic：模算术，指在模意义下进行加减乘除等运算

(5) Modulus：模数，讨论同余问题时给出的讨论范围

(6) Multigraph：多重图，存在平行边的图

(7) Multiple：倍数

N

(1) Neighbors：直译是邻点，指与一个顶点相邻的顶点 (集)

(2) Node：顶点

O

(1) Odd Cycle：奇圈，指边的数量为奇数的圈，二分图等价于不存在奇圈的图

(2) One-to-one Correspondence：一一映射，即双射，两个集合间的一一对应

(3) Orthogonal Latin Square：正交拉丁方，两个拉丁方是正交的，当且仅当将它们对应位置看成一个二元组后，每种二元组恰好出现过一次

P

(1) Parallel Edge：平行边，如果一张图中两个顶点之间有多条边，就称这些边互为平行边

(2) Pascal's Triangle：Pascal 三角，就是贾宪三角

(3) Path：通路，顶点各不相同的路

(4) Pentagonal Prism：五棱柱，有 10 个顶点、15 条边、7 个面

(5) Pentagonal Pyramid：五棱锥，有 6 个顶点、10 条边、6 个面

(6) Perfect Matching：完美匹配，一个匹配，且每个顶点都是其中某条边的端点

(7) Permutation：排列

(8) Petersen Graph：Petersen 图，不是哈密顿图，但满足哈密顿图必要条件的判定

(9) Pigeonhole Principle：鸽巢原理

(10) Planar Code：树的一种编码，沿着树的外围走，如果当前这步远离了根节点则编码为 1，否则编码为 0

(11) Planar Graph：平面图，可以画在平面上使得边不相交的图，注意只要求可行性，即画出来有边相交的图不一定不是平面图

(12) Polyhedron：多面体

(13) Prime Factorization：质因子分解，指把一个数写成其质因子的乘积形式

(14) Prime Field：质数域，在模质数剩余系下可以进行所有的加减乘除运算，所以称为质数域

(15) Prime Number：质数，指除了 1 和自身以外没有其它正因数的数

(16) Prime Number Theorem：质数定理，指小于 n 的质数 $\pi(n)$ 近似为 $\frac{n}{\ln n}$

(17) Projective Plane：射影平面，过两个给定的点有且仅有一条直线，任意两条直线恰好相交于一个点，且每条直线上至少有三个点的空间称为射影平面

(18) Prüfer Code：储存树的时候一种编码的方式

(19) Pythagorean Triple：毕达哥拉斯三元组，指满足 $a^2 + b^2 = c^2$ 的三元组 (a, b, c)

R

(1) Reflexivity：自反性，例如同余就具有自反性 $a \equiv a(mod\ m)$

(2) Relatively Prime：互质，两个数互质等价于它们的最大公因数为 1

(3) Remainder：余数

(4) Root：根节点

(5) Rooted Tree：有根树

S

(1) Sample Space：样本空间

(2) Set：集合

(3) Sieve Formula：Sieve 公式，就是容斥原理

(4) Simple Graph：简单图，不包含平行边和自环的图

(5) Son：儿子节点，与父亲节点相对

(6) Spanning Tree：生成树，G 的生成树是 G 的一个子图，该子图的点集等于 G 的点集，且是一棵树

(7) Star：星，指仅有一个顶点不是叶子节点的树

(8) Steiner System：Steiner 三元系，即 $(v, 3, 1) - BIBD$

(9) Subgraph：子图

(10) Subset：子集

(11) Symmetric Difference：对称差，A 和 B 的对称差 $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

(12) Symmetry：对称性，例如同余就具有对称性 $a \equiv b(mod\ m) \Leftrightarrow b \equiv a(mod\ m)$

T

(1) Tetrahedron：四面体，有 4 个顶点、6 条边、4 个面

(2) Tictactoe Plane：Tictactoe 平面，一种有限几何对象

(3) Trail：迹，边各不相同的路

(4) Transitivity：传递性，例如同余就具有传递性 $a \equiv b(mod\ m), b \equiv c(mod\ m) \Rightarrow a \equiv c(mod\ m)$

(5) Traveling Salesman Problem：TSP 问题，即旅行商问题

(6) Tree：树

(7) Tree-growing Procedure：递归定义树的方式

(8) Tree Shortcut Algorithm：求解 TSP 问题的一种算法

(9) Triangle Inequality：三角不等式，$d(i, j) \leq d(i, k) + d(k, j)$，其中 $d(i, j)$ 表示 i, j 之间的距离

(10) Triangular Prism：三棱柱，有 6 个顶点、9 条边、5 个面

(11) Twin Paradox：生日悖论

(12) Twin Primes：孪生质数，指差的绝对值为 2 的质数对

U

(1) Uniform Probability Space：等概空间，指所有事件概率都相等的概率空间

(2) Union：并集，A 和 B 的并集就是 $A \cup B$

(3) Unlabeled Tree：无标号树，与有标号树对应

V

(1) Venn diagram：文氏图，即用画圆圈的方式来图解集合之间的关系的图示

(2) Vertex：Node 的同义词，顶点

W

(1) Walk：路，指两个节点之间的一条路径，注意与 Trail 和 Path 的含义不同，两者都是 Walk 的特殊情形