Problem Set 3.1　　吴雨幽 匠01班 2020012288

5. (a) $S=\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $(a\in\mathbb{R})$

(b) 它一定包含I 因为 $A+(-1)B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 一定在这个子空间中

(c) $S=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

10. (a) (d) (e) 它们对加法、数乘封闭，且满足8条基本性质

(b) X 因为它对加法不封闭

(c) X 因为对 $(1,0,0)+(0,1,0)+(0,0,1)=(1,1,1)$ 不属于该子空间，矛盾

(f) X 因为对 $(1,2,3)$ 有 $(-1,-2,-3)$ 也属于子空间

但 $-1>-2>-3$ 矛盾

15. (a) 填空：① line ② plane

(b) 填空：① 点 ② line

(c) 证明：设 $x,y\in S\cap T$

$\because$ S, T 均为 $\mathbb{R}^5$ 的子空间

且 $x,y\in S$ $\therefore$ $x+y\in S$

$x,y\in T$ $\therefore$ $x+y\in T$

$\therefore$ $x+y\in S\cap T$

$\because x\in S$ $\therefore$ $cx\in S$

$x\in T$ $\therefore$ $cx\in T$

$\therefore$ $cx\in S\cap T$

$\therefore$ $S\cap T$ 对加法、数乘封闭

$\therefore$ $S\cap T$ 也是 $\mathbb{R}^5$ 的子空间

23. 填空：b是由A中已有的 n 列线性组合而成

例：C(A) gets larger when $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$　$b=\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$

C(A) doesn't gets larger when $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ $b=\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 11 \end{bmatrix}$

C(A)不变，说明 $b\in C(A)$，b是 A中已有列的线性组合，$Ax=b$ 有解

如果 C(A)变大，说明 b 不属于原先A 的 Column space，不是A中 已有列的线性组合，$Ax=b$ 无解

30. (a) 证明: 设 $s_1, s_2 \in S$ $t_1, t_2 \in T$

则 $s_1+s_2 \in S$ $t_1+t_2 \in T$ $cs_1 \in S$ $ct_1 \in T$

$\therefore (s_1+t_1)+(s_2+t_2) \in S+T$

设 $c \in \mathbb{R}$ 则 $c(s_1+t_1) = cs_1 + ct_1 \in S+T$

(b) ∵ S是线 ∴ S是由沿该线的某向量 s_0 的k倍 ($k \in \mathbb{R}$) 构成的集合

同理, T是由沿该线的某向量 t_0 的α倍 ($\alpha \in \mathbb{R}$) 构成的集合

s_0, t_0 不共线

由(a)知 $ks_0 + \alpha t_0 \in S+T$

由 s_0, t_0 线性组合成的向量扫过一个平面, 这个平面就是S+T

∴ S∪T 中的元素生成了 S+T

45 Problem Set 3.2

4. 填空: n

(a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ -2 & 6 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)-2\times(1)} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\times(-1)} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ -2 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

4

$\therefore x_1 = x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{(2)-2\times(1)} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)-\frac{5}{7}\times(2)} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\times(-1)} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

$x = x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

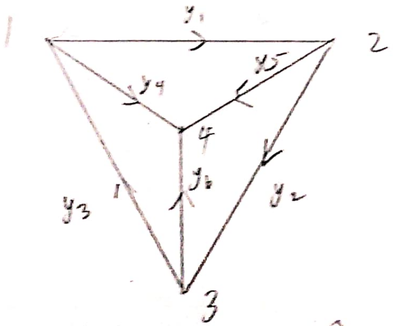
13. $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$x = 12 - 3y - z$

15. A $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -6 & -5 \\ 3 & 1 & -8 & -10 \end{bmatrix}$

验证: $\xrightarrow{(2)-3\times(1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -6 & -5 \\ 0 & -5 & 10 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)+\frac{2}{5}\times(2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & -5 & 10 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)\times(-\frac{1}{5})} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

32.



$$\begin{cases} y_3 = y_1 + y_4 \\ y_1 = y_5 + y_2 \\ y_2 = y_3 + y_6 \\ y_6 = y_4 + y_5 \end{cases}$$

$A^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ① (2)+(1) ② (3)+(2) ③ (4)+(3) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[(2)-(3)]{(1)-(2)}$

$$\begin{array}{cccccc} ✓ & ✓ & × & ✓ & × & × \end{array}$$
$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\times(-1)}$

MIKRON

吴雨函 医01班 2020012288

$$\begin{array}{cccccc} \checkmark & \checkmark & \times & \checkmark & \times & \times \end{array}$$
$$\to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore x = x_3 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \\ x_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ x_4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_6 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ x_4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_6 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

45. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ $P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

$$P^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{主元列}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \longrightarrow S = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

48. 证明：$AB = A\cdot[b_1\ b_2 \cdots b_j]$ （b_i $i\in[1,j]$ 为列向量）

$= Ab_1 + Ab_2 + \cdots + Ab_j$

$\because b_j = [b_1 b_2 \cdots b_{j-1}]\, X$ $\quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{j-1} \end{bmatrix}$

$\therefore Ab_j = A[b_1 b_2 \cdots b_{j-1}]\, X$

$= [Ab_1\ Ab_2 \cdots Ab_{j-1}]\, X$

得证.

50. 证明：$\operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}(I) = n \le \operatorname{rank}(A)$ ①

$\because$ A是 $n\times n$ 矩阵

$\therefore \operatorname{rank}(A) \le n$ ②

$\therefore$ 由①②，$\operatorname{rank} A = n$

56. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow R \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\therefore A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$