Mo Tu We Th Fr Sa Su　　软01 赵晨阳　　Memo No.　Date / /

1.(2) $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

证明当$n>1$时，假设第n项成立。即$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$成立

下证第$n+1$项成立

$1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(n+1)^2=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n+n^2+2n+1$

$=\frac{1}{3}n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{13}{6}n+1=\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$

即n项成立，则第$n+1$项也成立

而对于第一项$n=1$时，原式显然成立，故由数学归纳法可知，原式恒成立

2.(3) $\{x\mid x\in R, x^2-2x-3<0\}=A$

$\because x^2-2x-3<0$ $\therefore (x-3)(x+1)<0$ $\therefore x\in(-1,3)$

$\therefore$ ~~$\sup X=3$~~ ~~$\inf X=-1$~~

$\sup A=3$ $\inf A=-1$

3. $A=\{x\mid x\in R, x^2<2\}$ 可知 $x<\sqrt{2}$且$x>-\sqrt{2}$. 下证$\sup A=\sqrt{2}$. 即取实数m.

可知$\sqrt{2}$为A的上界. $\forall m>0$, 令$m<\sqrt{2}$ ($m\geq\sqrt{2}$时, $\sqrt{2}-m\leq 0$, 则$\sqrt{2}-m$一定不是A上界,因为$0\in A$) 取$x_n=(\sqrt{2}-\frac{m}{2})$ 则$x_n^2=(\sqrt{2}-\frac{m}{2})^2<2$ $\therefore x_n\in A$. 而$x_n>\sqrt{2}-m$

$\therefore\sqrt{2}-m$一定不为A上界. 即$\forall k<\sqrt{2}$, k均不为A上界, $\sqrt{2}$为A上界, 故$\sqrt{2}$为A上确界

6. 1° $a>b$时, $\max\{a,b\}=a$. 而$\frac{a+b+|a-b|}{2}=a$. $\min\{a,b\}=b$, 而$\frac{a+b-|a-b|}{2}=\frac{2b}{2}=b$

2° $a=b$时, $\max\{a,b\}=a=b$. $\min\{a,b\}=a=b$ 而$\frac{a+b+|a-b|}{2}=a=b$ $\frac{a+b-|a-b|}{2}=a=b$

3° $a<b$时, $\max\{a,b\}=b$ $\frac{a+b+|a-b|}{2}=\frac{2b}{2}=b$ $\min\{a,b\}=a$, $\frac{a+b-|a-b|}{2}=\frac{2a}{2}=a$

即$a>b$或$a=b$或$a<b$时, 原式均成立

$\therefore\max\{a,b\}=\frac{a+b+|a-b|}{2}$ $\min\{a,b\}=\frac{a+b-|a-b|}{2}$

8.(1)记$\inf A=m$ $\inf B=n$ 不妨令$m\leq n$. 对于$\forall x\in(A\cup B)$都有

$x\in A$, 则$x\geq m$或$x\in B$; 则$x\geq n$ 而$m\leq n$. 故m为$(A\cup B)$的下界

另一方面；$\forall R>0$. 由$\inf A=a$可知 $\exists x_1\in A$, 使 $x_1<a+R$. x_1必$\in A\cup B$

则$a+R$不为$A\cup B$的下界. 综上: a为$A\cup B$下界 即$\inf(A\cup B)=\min(\inf A,\inf B)$

8.(3) 不妨设 $\inf A=a$ $\inf B=b$. 且 $a\le b$. 故 $\max\{\inf A, \inf B\}=b$

对于 $\forall\ x_0\in A\cap B$. 必有 $x_0\in A$ 且 $x_0\in B$. 必有 $x_0\geq b$

即 b 为 $A\cap B$ 的下界. 下确界必大于等于下界

$\therefore \inf(A\cap B)\geq \max(\inf A, \inf B)$

补充题: $|a_n-A|<\min\left\{\frac{\varepsilon}{2|B|+1}, 1\right\}$ $|b_n-B|<\frac{\varepsilon}{2(|A|+1)} \Rightarrow |a_nb_n-AB|<\varepsilon$

$|a_nb_n-AB|<|a_nb_n-a_nB|+|a_nB-AB|=|a_n|\cdot|b_n-B|+|B||a_n-A|$

$<|a_n|\cdot\frac{\varepsilon}{2(|A|+1)}+|B|\cdot\frac{\varepsilon}{2|B|+1}$

又 $\because$ $|a_n-A|<1$ $\therefore |a_n|-|A|<1$ $\therefore a_n<|A|+1$

代回原式: $(|A|+1)\cdot\frac{\varepsilon}{2(|A|+1)}+|B|\cdot\frac{\varepsilon}{2|B|+1}<\varepsilon$. 证毕

Mo Tu We Th Fr Sa Su

Memo No.

Date / /

软01 2020012363 赵晨阳

1. (3) 等价. 取 $K\in[1,+\infty)$. 已知 $\forall\varepsilon\in(0,1)$, $\exists N_1\in N^*$, 使 $n>N_1$时, $|a_n-A|<\varepsilon$ 恒成立

$\because |a_n-A|<\varepsilon<K$ $\therefore$ 对于 $\forall K\in[1,+\infty)$, 亦 $\exists N_2\in N^*$. $n>N_2$时, 则有

$|a_n-A|<K$. 即对 $\forall \alpha\in(0,+\infty)$ $\exists N_3\in N^*$. 使 $n>N_3$时, $|a_n-A|<\alpha$

故: 与 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ 等价

(7) 等价. 对于所有 $\varepsilon>0$. 取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]+1$. 则: 当 $n>N$时, $\frac{1}{n}<\varepsilon$

而 $|a_n-A|<\frac{1}{n}<\varepsilon$. 故与 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=A$ 等价

2. ~~对 $\forall\varepsilon>0$. 均存在 $N\in N^*$, 使 $n>N$时, $|a_n-A|<\varepsilon$ 恒成立~~

~~(4) 不等价, 若 a_n收敛于A, 则也可 $\exists\varepsilon_0>0$, 使 a_n中有无数项满足 $|a_n-A|\geqslant\varepsilon_0$~~

~~(4) 等价~~

改正:

$\exists\varepsilon_0>0$, $\forall N$都有某个 $n>N$ 使 $|a_n-A|\geqslant\varepsilon_0$成立

(3) 描述的为一个不收敛于A的数列$\boxed{\text{不等价}}$但. 还有的数列不收敛于A

但不符合 (3). 如 $(-1)^n$ 不收敛于0

(4) 与 a_n不收敛于A完全等价

3. (3) 对 $\forall\varepsilon>0$. 取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]+1$. 则有. $n>N$时,

$\cancel{\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}}<\frac{1}{n}}<|\frac{\cos n}{n}-0|<\frac{1}{n}<\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}}=\varepsilon$ 即 $|\frac{\cos n}{n}|<\varepsilon$ 在 $n>[\frac{1}{\varepsilon}]+1$ 时恒成立

证毕

补充题: 可知 a_n有界. 令为M. 可知 ~~使~~ $\forall\varepsilon>0$ 均 $\exists N\in N^*$, 使 $n>N$时,

$|a_n-A|<\frac{\varepsilon}{2(1+|B|)}$ $|b_n-B|<\frac{\varepsilon}{2M}$. 则 $n>N$时,

$|a_nb_n-AB|\leqslant|a_nb_n-a_nB|+|a_nB-AB|<M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}+|B|\cdot\frac{\varepsilon}{2(1+|B|)}<\varepsilon$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=AB$

Memo No.
Date / /

6.(4) 对于 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$. $k\in N^*$. 先证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+k}=A$.

由定义: $|a_n-A|<\varepsilon$ 对于 $\forall\varepsilon>0$, 时, $\exists N\in N_1^*$. $n>N_1$ 则成立.

故对 $N=N_1-k$ 而言, $n>\max\{N_1-k,1\}$ 即有 $|a_{n+k}-A|<\varepsilon$ 恒成立.

取 $\varepsilon=\frac{A}{2}$. $\exists N_1$ $N_1\in N^*$ 使 $n>N_1$ 时. $|a_n-A|\le\frac{A}{2}$. 即 $\frac{A}{2}\le a_n$. 又 $\exists N_2\in N$. $n>N_2$ 时, $|a_n-A|<\varepsilon$

① — $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right|=\left|\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}\right|\le\frac{|a_{n+1}-A|+|A-a_n|}{|a_n|}$ 当 $n>\max\{n_1,n_2\}$ 时,

① $\le\frac{4}{A}\varepsilon$. 即 $A\ne0$ 下, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$

7.(2). 取 $b_n=a_n-A$. 即可知 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$

$\forall\varepsilon>0$. $\exists N_1\in N^*$. $n>N_1$ 时, $|b_n|<\varepsilon$. 故

$\left|\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}\right|\le\frac{|a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}|}{n}+\frac{|b_{N_1+1}|+|b_{N_1+2}|+\cdots+|b_n|}{n}$

记为 ①+② . 可知 ② 有: ② $<\frac{(n-N_1)\varepsilon}{n}<\varepsilon$

记 $|b_1+b_2+\cdots+b_{N_1}|=M$. 取 $N_2=[\frac{M}{\varepsilon}]+1$. $n>N_2$ 时,

① $=\frac{M}{n}<\varepsilon$. 故 $n>\max\{N_1,N_2\}$ 时,

①+② $\le2\varepsilon$. 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}=A$

反之不成立. 如 $(-1)^n$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}=0$ 但 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 不存在