习题3.2

7-(1)

令 $y=f(x)$ $f'(x)=1+\frac{1}{x}$ $(f^{-1}(x))'=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}=\frac{1}{f'(y)}=\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\frac{x}{x+1}$

7-(2)

$f'(x)=1+e^x$ $(f^{-1}(x))'=\frac{1}{f'(y)}=\frac{1}{1+e^x}$

10-(2)

$y'(x)=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}=\frac{2+2t}{e^t(1+t)}=\frac{2}{e^t}$

11.

(1) $d(\ln(-x))=\frac{1}{-x}\cdot(-1)\,dx=\frac{1}{x}dx$

(2) $d\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^3}}\right)=\frac{\sqrt{1-x^3}-x\frac{1}{2\sqrt{1-x^3}}\cdot(-3x^2)}{1-x^3}\cdot dx=\frac{x^3+2}{2(1-x^3)^{3/2}}\cdot dx$

(3) $d\left(\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}\right)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}}d\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}}\cdot\frac{-\cos x(1+\sin x)-(1-\sin x)\cos x}{(1+\sin x)^2}dx=\frac{-\cos x}{|\cos x||1+\sin x|}dx$

(4) $d\left(\arctan\frac{u(x)}{v(x)}\right)=\cos^2\left(\arctan\frac{u(x)}{v(x)}\right)d\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)=\cos^2\left(\arctan\frac{u(x)}{v(x)}\right)\cdot\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}dx$ dx

$=\frac{1}{1+\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)^2}\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{u^2(x)+v^2(x)}dx$

12.

令 $a^n+x=(a+h)^n$ $h<<a$ 则 $a^n+C_n^1a^{n-1}h+C_n^2a^{n-2}h^2+\cdots=a^n+x$

舍去高阶小量：$a^n+C_n^1a^{n-1}h\approx a^n+x$ $h=\frac{x}{C_n^1a^{n-1}}$

$\sqrt[n]{a^n+x}=a+h\approx a+\frac{x}{na^{n-1}}$

(1) $\sqrt[3]{29}=\sqrt[3]{3^3+2}\approx 3+\frac{2}{3\times 3^2}=\frac{83}{27}$

习题3.3

1-(1)

$y'=e^{x^2}\cdot 2x$ $y''=e^{x^2}\cdot 2x\cdot 2x+e^{x^2}\cdot 2=(4x^2+2)e^{x^2}$

3-(6)

令 $f(x)=\frac{1}{x-1}$ $\quad g(x)=\frac{1}{x+2}$

$$\frac{1}{(x-1)^{21}(x+2)^{1}} \qquad q=\frac{x-1}{x+2}$$

$f'(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}$ $\quad f''(x)=\frac{2}{(x-1)^3}$ $\quad \cdots$ $\quad f^{(n)}(x)=(-1)^n\frac{n!}{(x-1)^{n+1}}$

$$\frac{1}{(x-1)^{21}\cdot(x+2)^{1}}\cdot\frac{1-\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{21}}{1-\frac{x-1}{x+2}}$$

同理：$g^{(n)}(x)=(-1)^n\frac{n!}{(x+2)^{n+1}}$

$$y=-\frac{1}{x-1}\cdot\frac{1}{x+2}=-f(x)\cdot g(x) \qquad =\frac{(x+2)^{21}-(x-1)^{21}}{3(x-1)^{21}(x+2)^{21}}=\frac{1}{3(x-1)^{21}}-\frac{1}{3(x+2)^{21}}$$

$$y^{20}=-\left(f(x)g(x)\right)^{20}=-\sum_{k=0}^{20}C_{20}^{k}f^{(20-k)}(x)\,g^{k}(x)=-\sum_{k=0}^{20}C_{20}^{k}(-1)^{20-k}\frac{(20-k)!}{(x-1)^{21-k}}\cdot(-1)^{k}\frac{k!}{(x+2)^{k+1}}=-20!\sum_{k=0}^{20}\frac{1}{(x-1)^{21-k}}\cdot\frac{1}{(x+2)^{k+1}}$$

$$=-20!\left[\frac{\frac{1}{(x-1)^{23}}-\frac{1}{(x+2)^{23}}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}}-\frac{1}{(x-1)^{22}}-\frac{1}{(x+2)^{22}}\right]=\underline{20!\left[\frac{1}{(x+2)^{21}}-\frac{1}{(x+1)^{21}}\right]} \longrightarrow \underline{20!}\left(\frac{1}{(x+2)^{21}}-\frac{1}{(x-1)^{21}}\right)$$

3-(9)

$$y^{(n)}=(x^3\cdot e^x)^{(n)}=(e^x)^{(n)}\cdot x^3+C_n^1e^{x(n-1)}\cdot x^{3'}+C_n^2e^{x(n-2)}\cdot x^{3''}+C_n^3e^{x(n-3)}\cdot x^{3'''}$$

$$=x^3\cdot e^x+3nx^2e^x+3n(n-1)xe^x+n(n-1)(n-2)e^x$$

4-(1).

$$y'(x)=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}=\frac{a\sin t}{a-a\cos t}=\frac{\sin t}{1-\cos t}=\frac{1+\cos t}{\sin t}$$

$$y''(x)=\frac{(y'(t))'}{\varphi'(t)}=\frac{\frac{-\sin t\cdot\sin t-(1+\cos t)\cdot\cos t}{\sin^2 t}}{a-a\cos t}=-\frac{1}{a}\frac{(1+\cos t)^2}{\sin^4 t}$$

$$y'''(x)=\frac{(y''(t))'}{\varphi'(t)}=\frac{2(1+\cos t)^4}{a^2\sin^7 t}$$

第三章总复习题

1.

(1) $k>0$时 $\lim\limits_{x\to0}|x|^k\sin\frac{1}{x}=0$，$f(x)$连续 $\qquad\Rightarrow k>0$

$k\le0$时 $\exists\varepsilon=1,\forall\delta>0$，取$x_0=\frac{1}{[\frac{1}{\delta}]\pi+\pi}$，则$|x_0|<\delta$. $\left||x_0|^k\sin\frac{1}{x}-0\right|=|x_0|^k>1=\varepsilon$，即 $f(x)$不收敛于0，即不连续.

(2) $k>1$时 $\lim\limits_{x\to0}\frac{|x|^k\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}|x|^{k-1}\sin\frac{1}{x}=0$，$f(x)$可导. $\qquad\Longrightarrow k>1$

$k\le1$时 同理(1) $|x|^{k-1}\sin\frac{1}{x}$ 不趋于0，$f(x)$不可导

(3) $f'(x)=\begin{cases}k|x|^{k-1}\sin\frac{1}{x}+|x|^k\cos\frac{1}{x}\cdot(-\frac{1}{x^2}) & x\ne0\\ \lim\limits_{x\to0}|x|^{k-1}\sin\frac{1}{x}=0 & x=0.\end{cases}$ $\quad$ 即要求 $\lim\limits_{x\to0}k|x|^{k-1}\sin\frac{1}{x}+|x|^k\cos\frac{1}{x}\cdot(-\frac{1}{x^2})=0\Rightarrow k>2.$

4. $\quad f'(a)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}{\frac{1}{n}}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}{f(a)}+1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{nf(a)}+1=\lim_{n\to\infty}\frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}{\frac{1}{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{nf(a)}+1=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}{f(a)}\right)=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}{f(a)}\right)^{\frac{f(a)}{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}\cdot\frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{f(a)}} = e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$$

5.

$f'(0)=1 \quad f(0)=0 \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\sqrt{f(\frac{2}{n})} = \sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{f(\frac{2}{n})-f(0)}{\frac{2}{n}-0}} = \sqrt{2}\sqrt{f'(0)} = \sqrt{2}.$

习题 4.4.

6-(1) 令 $f(x)=y$

端点 $f(-1)=-1-5-5+1=-10. \quad f(2)=32-80+40+1=-7$

驻点：$f'(x)=5x^4-20x^3+15x^2$ 令 $f'(x)=0$ $x_1=1$ $x_2=3$.(不在区间内). $f(1)=1-5+5+1=2.$

无不可导点， 所以 y 在 $[-1,2]$ 上最大值为 2，最小值为 -10

6-(2) 令 $f(x)=y=|x-1|\cdot|x-2|$

端点：$f(-10)=|100+30+2|=132. \quad f(10)=|100-30+2|=72.$

不可导点：$f(1)=|1-3+2|=0 \quad f(2)=|4-6+2|=0.$

驻点：$f'(x)=\begin{cases}2x-3 & -10\le x<1 \text{ 或 } 2<x\le 10\\ -2x+3 & 1<x<2\end{cases}$ 令 $f'(x)=0$ $x=\frac{3}{2}$ $f(\frac{3}{2})=\frac{1}{4}$

综上，y 在 $[-10,10]$ 的最大值为 132，最小值为 0.

11.

设漏斗高为 h，底面半径为 r. $h^2+r^2=R^2$

$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi(R^2-h^2)h$ 则 $V'(h)=\frac{1}{3}\pi(-3h^2+R^2).$

端点不可取，无不可导点，驻点 $h=\frac{\sqrt{3}}{3}R.$

$V_{max}=V(\frac{\sqrt{3}}{3}R)=\frac{2\sqrt{3}}{27}\pi R^3.$

此时 $r=\frac{\sqrt{6}}{3}R.$ 而 $2\pi r=R\theta \Rightarrow \theta=\frac{2\pi r}{R}=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$