线性代数期末考前辅导例题

电子系无 68 班 何昊天

2019 年 12 月 22 日

Problem 1 验证下面定义的空间都是内积空间：

(i) 设 V 是 $[a,b]$ 区间上所有连续函数构成的实线性空间，对 $\forall f(x), g(x) \in V$ 定义内积 $< f(x), g(x) >= \int_a^b f(t)g(t)dt$

(ii) 设 V 是所有实系数多项式构成的实线性空间，对 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m$ 定义内积 $< f(x), g(x) >= a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_kb_k, k = \min(n, m)$

(iii) 设 V 是所有 n 阶实矩阵构成的实线性空间，对 $\forall A, B \in V$ 定义内积 $< A, B >= tr(AB^T)$，其中 $tr(A)$ 表示矩阵 A 的迹

Solution: 按照定义验证即可。

Problem 2 设 V 是所有次数小于等于 2 的实系数多项式构成的实线性空间，对 $\forall f(x), g(x) \in V$ 定义内积 $< f(x), g(x) >= \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$，从基 $1, x, x^2$ 出发由 *Gram-Schmidt* 正交化得到一组标准正交基。

Solution: 按照 Gram-Schmidt 正交化流程操作即可，得到的标准正交基为 $L_1(x) = \sqrt{\frac{1}{2}}, L_2(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x, L_3(x) = \sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2 - 1)$。

如果依此类推到所有次数小于等于 n 的实系数多项式构成的实线性空间，得到的多项式称为 Legendre 多项式。

Problem 3 设 *Gram-Schmidt* 正交化将线性无关的向量组 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 变成了正交的向量组 $v_1, v_2, \cdots, v_m$，证明两组向量的 *Gram* 矩阵行列式满足：

$$|G(u_1, u_2, \cdots, u_n)| = |G(v_1, v_2, \cdots, v_n)| = ||v_1||^2||v_2||^2 \cdots ||v_n||^2$$

Solution: 由 Gram-Schmidt 正交化过程可得 $\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} A$，其中 A 是一个主对角线元素为 1 的上三角矩阵。

等式两侧分别和自己的转置相乘得 $G(u_1, u_2, \cdots, u_n) = A^T G(v_1, v_2, \cdots, v_n) A$，所以有行列式 $|G(u_1, u_2, \cdots, u_n)| = |A^T| \cdot |G(v_1, v_2, \cdots, v_n)| \cdot |A| = ||v_1||^2||v_2||^2 \cdots ||v_n||^2$。

Problem 4 已知 $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$，$P$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中将向量投影到 α 所在直线的投影矩阵，求 P 的列空间和零空间。

Solution: 根据投影空间的定义知 P 的列空间就是 α 张成的空间，即列空间为 $\{k \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \mid k \in \mathbb{R}\}$。

为计算 P 的零空间，只需计算 α 张成的空间的正交补，即解方程 $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$，可得基础解系为 $\xi_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \xi_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，所以 P 的零空间为 $\{k_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mid k_1, k_2 \in \mathbb{R}\}$。

Problem 5 设 $f(x) = \begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$，则 $f(x)$ 展开式中 x^3 项的系数是多少？

Solution: 观察得展开式中只有一项为 x^3 项，其系数为 -1。

Problem 6 设 n 阶方阵 $A(n \geq 2)$ 的所有元素都是 ± 1，求证 $|A|$ 为偶数。

Solution: 直接考虑行列式的定义，展开式一共有 $n!$ 项，且每一项均为 ± 1。因为 $n \geq 2$ 时 $n!$ 是个偶数，而偶数个奇数的和必然还是偶数，故 $|A|$ 为偶数。

Problem 7 计算行列式 $|A| = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$。

Solution: 将 $|A|$ 看成关于 x, y 的二元函数，若 $x = 0$ 或 $y = 0$ 显然有 $|A| = 0$，所以 $|A|$ 一定有因子 xy。将 x 换成 $-x$，同时交换前两行和前两列后行列式不改变，所以 A 的 x 因子是偶数次幂的。将 y 换成 $-y$，同时交换后两行和后两列后行列式不改变，所以 A 的 y 因子也是偶数次幂的。

显然 A 中最高次项为 4 次，且 x^2y^2 项系数为 1，所以 $|A| = x^2y^2$。

Problem 8 计算行列式 $|A| = \begin{vmatrix} x & y & z & w \\ y & x & w & z \\ z & w & x & y \\ w & z & y & x \end{vmatrix}$。

Solution: 将 $|A|$ 看成关于 x, y, z, w 的四元函数，将所有行加到第 1 行上可以提出因子 $x + y + z + w$，将第 2 行的 1 倍、第 3, 4 行的 -1 倍加到第 1 行上可以提出因子 $x + y - z - w$，将第 3 行的 1 倍、第 2, 4 行的 -1 倍加到第 1 行上可以提出因子 $x - y + z - w$，将第 4 行的 1 倍、第 2, 3 行的 -1 倍加到第 1 行上可以提出因子 $x - y - z + w$。

显然 A 中最高次项为 4 次，且 x^4 项系数为 1，所以 $|A| = (x+y+z+w)(x+y-z-w)(x-y+z-w)(x-y-z+w)$。

Problem 9 设 a,b,c 为互异实数，证明 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = 0$ 的充要条件为 $a+b+c=0$。

Solution: 考虑范德蒙德行列式 $D(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & x^3 \end{vmatrix}$，则题目中的行列式为 $D(x)$ 中 x^2 项的系数，由 $D(x) = (b-a)(c-a)(c-b)(x-a)(x-b)(x-c) = (b-a)(c-a)(c-b)[-(a+b+c)x^2+\lambda]$ 知原行列式等于 $-(b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c)$，故其值为 0 的充要条件为 $a+b+c=0$。

Problem 10 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 个不全为 0 的实数，求证：

$$\begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & 1+a_n^2 \end{vmatrix} > 1$$

Solution:

$$\begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & 1+a_n^2 \end{vmatrix} = \left| I_n + \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2 \end{bmatrix} \right|$$

$$= \left| I_n + \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix} (1)^{-1} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \right| = |I_n| \left| 1 + \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} I_n^{-1} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix} \right|$$

故原行列式的值为 $1 + \sum_{i=1}^n a_i^2 > 1$。

Problem 11 设 A 为 n 阶矩阵，证明 $|A^*| = |A|^{n-1}$。

Solution: 若 A 可逆，在 $AA^* = |A|I_n$ 两侧取行列式得 $|A| \cdot |A^*| = |A|^n$，两边除以 $|A|$ 得 $|A^*| = |A|^{n-1}$。

若 A 不可逆，有 $|A| = 0$，设 A 的秩为 r，存在可逆矩阵 P, Q 使得 $PAQ = B = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$。若 $r \le n-2$，显然 $B^* = 0$，若 $r = n-1$ 有 $B^* = \begin{bmatrix} 0_{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，两种情况下都有 $|B^*| = 0$，根据 $A = P^{-1}BQ^{-1}$ 得 $|A^*| = |(Q^{-1})^* B^* (P^{-1})^*| = |(Q^{-1})^*| \cdot |B^*| \cdot |(P^{-1})^*| = 0$，所以 $|A^*| = |A|^{n-1}$ 仍然成立。

Problem 12 设 A 为 m 阶矩阵，B 为 n 阶矩阵，求矩阵 $C = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ 的伴随矩阵。

Solution: 与上题类似，我们需要分别考虑 A,B 可逆、不可逆的情况，其中最简单的情形是 A,B 都可逆。虽然需要分类讨论，但伴随矩阵相关的结论形式无论矩阵是否可逆往往都是相同的，因此可以利用可逆的情形首先得到结论，再根据结论的形式来证明不可逆的情形仍然成立即可。

当 A,B 都可逆时显然 C 也可逆，有 $C^{-1}=\begin{bmatrix}A^{-1} & 0\\ 0 & B^{-1}\end{bmatrix}$，由 $CC^*=|C|I_{n+m}$ 得 $C^*=|C|C^{-1}$，再由 $|C|=|A|\cdot|B|$ 和 $AA^*=|A|I_m, BB^*=|B|I_n$ 得 $C^*=\begin{bmatrix}|B|A^* & 0\\ 0 & |A|B^*\end{bmatrix}$。

接下来断言对任意情形都有 $C^*=\begin{bmatrix}|B|A^* & 0\\ 0 & |A|B^*\end{bmatrix}$，并根据这个结论证明即可。

Problem 13 设 A 是 n 阶方阵，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的全部特征值，$f(x)$ 是一个多项式，证明 $f(\lambda_1),f(\lambda_2),\cdots,f(\lambda_n)$ 是 $f(A)$ 的全部特征值。

Solution: 注意到 A 未必相似于对角矩阵，但 A 一定可以相似于一个上三角矩阵，且对角线上元素就是 A 的特征值，即存在可逆矩阵 P 使得：

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & * & \cdots & *\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & *\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix}$$

上三角矩阵的和、数乘与幂次都是上三角矩阵，考虑矩阵多项式 $f(A)$，可计算得：

$$P^{-1}f(A)P=f(P^{-1}AP)=\begin{bmatrix}f(\lambda_1) & * & \cdots & *\\ 0 & f(\lambda_2) & \cdots & *\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_n)\end{bmatrix}$$

因此 $f(\lambda_1),f(\lambda_2),\cdots,f(\lambda_n)$ 是 $f(A)$ 的全部特征值。

Problem 14 设 A 是 n 阶可逆方阵，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的全部特征值，证明 $\lambda_1^{-1},\lambda_2^{-1},\cdots,\lambda_n^{-1}$ 是 A^{-1} 的全部特征值。

Solution: 设 λ 是 A 的特征值，x 是从属于 λ 的特征向量，有 $Ax=\lambda x$，两边同时左乘 A^{-1} 和 λ^{-1} 得 $A^{-1}x=\lambda^{-1}x$，所以 λ^{-1} 是 A^{-1} 的特征值，原命题得证。

Problem 15 设 A 是 n 阶方阵，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的全部特征值，A^* 是 A 的伴随矩阵，证明 $\prod_{i\neq 1}\lambda_i,\prod_{i\neq 2}\lambda_i,\cdots,\prod_{i\neq n}\lambda_i$ 是 A^* 的全部特征值。

Solution: A 一定可以相似于一个上三角矩阵，且对角线上元素就是 A 的特征值，即存在可逆矩阵 P 使得：

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & * & \cdots & *\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & *\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix}$$

上三角矩阵的伴随矩阵仍然是上三角矩阵，可计算得：

$$P^*A^*(P^*)^{-1} = (P^{-1}AP)^* = \begin{bmatrix} \prod_{i\neq 1}\lambda_i & * & \cdots & * \\ 0 & \prod_{i\neq 2}\lambda_i & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \prod_{i\neq n}\lambda_i \end{bmatrix}$$

因此 $\prod_{i\neq 1}\lambda_i, \prod_{i\neq 2}\lambda_i, \cdots, \prod_{i\neq n}\lambda_i$ 是 A^* 的全部特征值。

Problem 16 设 A 是 n 阶整数矩阵，证明方程 $Ax = \frac{1}{2}x$ 没有非零解。

Solution: 若方程有非零解，等价于 $\frac{1}{2}$ 是 A 的特征值，考虑特征多项式 $f(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n$，其中 $a_1, \cdots, a_n$ 都是整数，代入 $\lambda = \frac{1}{2}$ 后可得 $f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^n + a_1(\frac{1}{2})^{n-1} + \cdots + a_n = (\frac{1}{2})^n + (\frac{1}{2})^{n-1}c$，其中 c 是一个整数，则显然 $f(\frac{1}{2})$ 不能为 0，故原方程无解。

Problem 17 设 α, β 是两个正交非零列向量，求矩阵 $A = \alpha\beta^T$ 的特征值，并判断 A 是否可以相似对角化。

Solution: $A^2 = \alpha\beta^T\alpha\beta^T = (\beta^T\alpha)\alpha\beta^T = 0$，所以 A^2 特征值均为 0，推出 A 特征值也均为 0。

若 A 可以相似对角化，则 A 一定相似于零矩阵，这等价于 A 就是零矩阵，与 α, β 非零矛盾，所以 A 不可以相似对角化。

Problem 18 设 n 阶矩阵 A 可对角化，证明矩阵 $\begin{bmatrix} A & A^2 \\ A^2 & A \end{bmatrix}$ 可对角化。

Solution: 因为 A 可对角化，所以 A 有 n 个线性无关特征向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，设它们依次对应特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，注意到：

$$\begin{bmatrix} A & A^2 \\ A^2 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \alpha_i \end{bmatrix} = (\lambda_i + \lambda_i^2) \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \alpha_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & A^2 \\ A^2 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_i \\ -\alpha_i \end{bmatrix} = (\lambda_i - \lambda_i^2) \begin{bmatrix} \alpha_i \\ -\alpha_i \end{bmatrix}$$

显然 $\begin{bmatrix} \alpha_i \\ \alpha_i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha_i \\ -\alpha_i \end{bmatrix}$ 是线性无关的，因此 $\begin{bmatrix} A & A^2 \\ A^2 & A \end{bmatrix}$ 有 $2n$ 个线性无关特征向量，故可以对角化。

Problem 19 设 A 是 m 阶矩阵，B 是 n 阶矩阵，C 是 $m \times n$ 矩阵，$M = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$，证明若 M 可对角化，则 A, B 都可对角化。

Solution: 对一个矩阵 A 的特征值 λ，我们记其几何重数为 $GM_A(\lambda)$，代数重数为 $AM_A(\lambda)$。

此前已经证明过 $|\lambda I_{m+n} - M| = |\lambda I_m - A| \cdot |\lambda I_n - B|$，所以任取 M 的特征值 λ_0 有 $AM_M(\lambda_0) = AM_A(\lambda_0) + AM_B(\lambda_0)$。

考虑分块矩阵 $\lambda_0 I_{m+n} - M = \begin{bmatrix} \lambda_0 I_m - A & C \\ 0 & \lambda_0 I_n - B \end{bmatrix}$，有矩阵秩的不等式 $r(\lambda_0 I_{m+n} - M) \geq r(\lambda_0 I_m - A) + r(\lambda_0 I_n - B)$ 成立，则 $GM_M(\lambda_0) = (m+n) - r(\lambda_0 I_{m+n} - M) \leq (m - r(\lambda_0 I_m - A)) + (n - r(\lambda_0 I_n - B)) = GM_A(\lambda_0) + GM_B(\lambda_0)$。

由特征值几何重数不大于代数重数，有不等式 $GM_M(\lambda_0) \leq AM_M(\lambda_0)$、$GM_A(\lambda_0) \leq AM_A(\lambda_0)$、$GM_B(\lambda_0) \leq AM_B(\lambda_0)$，但 M 可对角化，所以 $GM_M(\lambda_0) = AM_M(\lambda_0)$，则 $GM_A(\lambda_0) + GM_B(\lambda_0) = AM_A(\lambda_0) + AM_B(\lambda_0)$，进而有 $GM_A(\lambda_0) = AM_A(\lambda_0), GM_B(\lambda_0) + AM_B(\lambda_0)$ 成立，所以 A, B 都可对角化。

Problem 20 设 A 是可逆的实对称矩阵，B 是实反对称矩阵且 $AB = BA$，证明 $A + B$ 是可逆矩阵。

Solution: 考虑任意非零向量 x，有 $x^T(A+B)^T(A+B)x = x^T(A^TA + A^TB + B^TA + B^TB)x$，而 $A^TB + B^TA = AB - BA = 0$，因此 $x^T(A+B)^T(A+B)x = x^T(A^TA + B^TB)x = x^TA^TAx + x^TB^TBx$，注意到 A^TA 是正定矩阵，B^TB 是半正定矩阵，因此 $x^T(A+B)^T(A+B)x > 0$，即 $(A+B)^T(A+B)$ 是正定矩阵，有 $|A+B|^2 > 0$，所以 $A + B$ 是可逆矩阵。

Problem 21 设 A 是 n 阶正定矩阵，计算函数 $f(x) = x^TAx + 2\beta^Tx + c$ 的最小值。

Solution: 注意到 $f(x) = \begin{bmatrix} x^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \beta \\ \beta^T & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$，由 A 可逆，做变换 $\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -A^{-1}\beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ 1 \end{bmatrix}$ 得 $f(x) = \begin{bmatrix} y^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & c - \beta^TA^{-1}\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ 1 \end{bmatrix} = y^TAy - \beta^TA^{-1}\beta + c$，由于 A 正定，所以当 $x = -A^{-1}\beta$ 时 $f(x)$ 有最小值 $c - \beta^TA^{-1}\beta$。

Problem 22 设分块实对称矩阵 $M = \begin{bmatrix} A & C \\ C^T & B \end{bmatrix}$，其中 A, B 是可逆对称方阵，证明：

$$p(A) + p(B - C^TA^{-1}C) = p(B) + p(A - CB^{-1}C^T)$$

$$q(A) + q(B - C^TA^{-1}C) = q(B) + q(A - CB^{-1}C^T)$$

Solution: 如果 M 是分块对角矩阵 $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$，根据惯性定律显然有 $p(M) = p(A) + p(B), q(M) = q(A) + q(B)$。

由于 A, B 可逆，分别对 M 做合同变换可得：

$$M \to \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B - C^TA^{-1}C \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B - C^TA^{-1}C \end{bmatrix}$$

$$M \to \begin{bmatrix} A - CB^{-1}C^T & 0 \\ C^T & B \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} A - CB^{-1}C^T & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

由于合同变换不改变正负惯性系数，所以原命题得证。

Problem 23 设 ϕ 是 n 维线性空间 U 上的线性变换，$\alpha \in U$ 满足 $\phi^{m-1}(\alpha) \neq 0$ 而 $\phi^m(\alpha) = 0$，证明 $\alpha, \phi(\alpha), \phi^2(\alpha), \cdots, \phi^{m-1}(\alpha)$ 线性无关。

Solution: 设 $a_0\alpha + a_1\phi(\alpha) + a_2\phi^2(\alpha) + \cdots + a_{m-1}\phi^{m-1}(\alpha) = 0$，在两边同时作用 ϕ^{m-1} 得 $a_0\phi^{m-1}(\alpha) = 0$，由于 $\phi^{m-1}(\alpha) \neq 0$，所以 $a_0 = 0$。

再在等式两边同时作用 ϕ^{m-2} 得 $a_1\phi^{m-1}(\alpha) = 0$，由于 $\phi^{m-1}(\alpha) \neq 0$，所以 $a_1 = 0$，依此类推可得 $a_0 = a_1 = \cdots = a_{m-1} = 0$，所以 $\alpha, \phi(\alpha), \phi^2(\alpha), \cdots, \phi^{m-1}(\alpha)$ 线性无关。

Problem 24 设 A 是 n 阶方阵，证明 $r(A^n) = r(A^{n+1}) = r(A^{n+2}) = \cdots$。

Solution: 将 A 看作是 n 维向量空间上线性变换的表示矩阵，设 ϕ 表示该线性变换，注意到我们有子空间链：

$$\mathrm{Im}\phi^{\mathrm{n+1}} \subseteq \mathrm{Im}\phi^{\mathrm{n}} \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{Im}\phi^2 \subseteq \mathrm{Im}\phi \subseteq \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$$

由于链中 $n+2$ 个子空间的维数都应该在 $[0, n]$ 中，所以必然存在 $m \in [0, n]$ 使得 $\mathrm{Im}\phi^{\mathrm{m}} =\in \phi^{\mathrm{m+1}}$，接下来我们证明对任意 $k \geq m$ 都有 $\mathrm{Im}\phi^{\mathrm{k}} = \mathrm{Im}\phi^{\mathrm{k+1}}$。

一方面显然 $\mathrm{Im}\phi^{\mathrm{k+1}} \subseteq \mathrm{Im}\phi^{\mathrm{k}}$，另一方面 $\forall \alpha \in \mathrm{Im}\phi^{\mathrm{k}}$，都存在 $\beta \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\phi^k(\beta) = \alpha$。由于 $\phi^m(\beta) \in \mathrm{Im}\phi^{\mathrm{m}} = \mathrm{Im}\phi^{\mathrm{m+1}}$，所以 $\exists \gamma \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\phi^m(\beta) = \phi^{m+1}(\gamma)$，从而：

$$\alpha = \phi^k(\beta) = \phi^{k-m}(\phi^m(\beta)) = \phi^{k-m}(\phi^{m+1}(\gamma)) = \phi^{k+1}(\gamma) \in \mathrm{Im}\phi^{\mathrm{k+1}}$$

所以 $\forall k \geq m$ 都有 $\mathrm{Im}\phi^{\mathrm{k}} = \mathrm{Im}\phi^{\mathrm{k+1}}$，对等式两边取维数后原命题得证。