三角函数积分

一. 底层建筑

① $\sin x$ 与 $\cos x$ 的 n 次幂

①.(1) 奇次幂:

$$\int \sin^{2n+1}x\,dx = -\int \sin^{2n}x\,d\cos x$$
$$= -\int (1-\cos^2 x)^n\,d\cos x.$$

拆开暴力积回去

①.(2) 偶次幂:

$$\int \sin^{2n}x\,dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^n dx$$

拆开化为奇数次积回去

② $\tan x$ 的幂

(1) $\int \tan x\,dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$

(2) $\int \tan^2 x\,dx = \int (\sec^2 x - 1)\,dx$
$= \tan x - x + C$

(3) 高阶形式:

$$\int \tan^6 x\,dx = \int \tan^4 x(\sec^2 x - 1)\,dx$$
$$= \int \tan^4 x\,d\tan x - \int \tan^4 dx$$

通过 $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$ 不断降阶

③ $\sec x$ 的幂

(1) $\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$

(2) $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$

(3) $\int \sec x \cdot \tan x \cdot dx = \sec x + C$

(4) 高阶

$$\int \sec^4 x\,dx = \int \sec^2 x \cdot d\tan x$$
$$= \sec^2 x \cdot \tan x - \int \tan x\,d\sec^2 x$$
$$= \sec^2 x \cdot \tan x - \int \tan^2 x \cdot 2\sec^2 x\,dx$$
$$= \sec^2 x \cdot \tan x - 2\int (\sec^2 x - 1)\sec^2 x\,dx$$
$$= \sec^2 x \cdot \tan x - 2\int \sec^4 x\,dx + 2\int \sec^2 x\,dx$$

通过分部积分,同积复现,华氏恒等式
不断降阶

④ 与之对应

$\cot x = \frac{1}{\tan x}$ $\quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$

$\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$

$(\cot x)' = -\csc^2 x$

$(\csc x)' = -\cot x \cdot \csc x$

$\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + C$

$\int \csc x\,dx = -\ln|\csc x + \cot x| + C$

$\int \cot^2 x\,dx = \int (\csc^2 x - 1)\,dx = -\cot x - x + C$

符号恰好与 $\sec x$, $\tan x$ 一组相反

ex: $\int_0^{\pi} \sqrt{\sin x - \sin^3 x}\,dx = \int_0^{\pi} \sqrt{\sin x} \cdot |\cos x|\,dx$

分类讨论

PS: 本人写的有可能是错的
请一定指正!!!

二. 一些想法

① 1±trig:

$1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$ $\quad 1+\sin x=(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2})^2$

$1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$ $\quad 1-\sin x=(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2})^2$

例: $\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx$

(1) $\int\frac{1}{1+\cos x}dx+\int\frac{-d\cos x}{1+\cos x}$

$=\int\frac{1}{2}\cdot\sec^2\frac{x}{2}dx-\ln(1+\cos x)+C$

拆项+基于1+cosx的降幂升角

$=\tan\frac{x}{2}-\ln(1+\cos x)+C$

(2) $\int\frac{(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx=\int\frac{(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2}{\cos^2\frac{x}{2}}d\frac{x}{2}$

$=\int 1+2\tan t+\tan^2 t\,dt$

$=t-2\ln|\cos t|+\tan t-t+C$

$=\tan t-2\ln|\cos t|+C$

$=\tan\frac{x}{2}-2\ln|\cos\frac{x}{2}|+C$

$\hookrightarrow -\ln\frac{1+\cos x}{2}+C$

② 共轭处理:

$\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx=\int\frac{1-\cos x+\sin x-\sin x\cdot\cos x}{\sin^2 x}dx$

$=\int\csc^2 x\,dx-\int\csc x\cdot\cot x\,dx+\int\csc x\,dx-\int\cot x\,dx$

$=-\cot x+\csc x-\ln|\csc x+\cot x|-\ln|\sin x|+C$

$=\frac{1-\cos x}{\sin x}-\ln|1+\cos x|+C$

↳ 万能公式 $=\tan\frac{x}{2}$

$\int\frac{dx}{\sec x-1}=\int\frac{\sec x+1}{\tan^2 x}dx$

$=\int\frac{\sec x}{\tan^2 x}dx+\int\cot^2 x\,dx$

↳ 实在无想法则

$\int\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx-\cot x-x+C$

$=\int\cot x\cdot\csc x\,dx-\cot x-x+C$

$=-\csc x-\cot x-x+C$

③ 和差化积

$\int\sin(19x)\cdot\cos(3x)\,dx$

$=\frac{1}{2}\int\sin 22x+\sin 16x\,dx$

例 $\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\cdot e^x dx$

不加处理分部积分会去世

$\int\frac{(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2})^2}{2\cos^2\frac{x}{2}}\cdot e^x dx$

$=\int(\tan^2 t+2\tan t+1)e^{2t}dt$

$=\int\sec^2 t\,e^{2t}dt+2\int\tan t\cdot e^{2t}dt$

$=e^{2t}\tan t-\int\tan t\cdot 2\cdot e^{2t}dt+2\int\cdots$

$=e^{2t}\cdot\tan t+C$ PS:见3页⑥处

$=e^{x}\cdot\tan\frac{x}{2}+C$

④ 关于分类讨论

实际上 $x=a\sin t$; $x=a\tan t$:

通过限定 $|t|\le\frac{\pi}{2}$ 均可不分类

但 $x=a\sec t$. $|t|\le\frac{\pi}{2}$ 一定要分类

⑤ $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$

$=\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})$

$\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$; $\int\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$

令 $t=x+\frac{\pi}{4}$, $t=x-\frac{\pi}{4}$.

拆项效果绝佳!

不定积分小记

①及时变更 dx.

如 $J_n=\int\frac{(x+a)}{((x+a)^2+b^2)^n}dx$

不换元你积个寂寞

$dx=d(x+a)$

例：$f(x)=\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt$．计算 $I=\int_0^1 x f(x)dx$

怎么可能是先积出 $f(x)$ 再代入 I !!!

$\int_0^1 x\cdot f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx^2$

$=\frac{1}{2}f(x)\cdot x^2\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\cdot 2x\cdot e^{-x^4}dx$

↳分部积分后定积分部分为0是基操

② $x\,dx=\frac{1}{2}dx^2$，$\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}\frac{dx^2}{x^2}$ } 用于换元

③ 一次根式 $\sqrt{1+x}$ etc.

⇒ 整体换元

高次根式 $\sqrt{1+x^5}$

⇒ 先换 x^5 再换元

$\sqrt{1+\ln x}$ ⇒ 整体换元

④ 善用分部积分破局. ⟹ Ex: f 在 $[a,b]$ 上连续可导，$f(x)$ 有界 ⇒

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx=0$$

$\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx=\frac{1}{\lambda}\int_a^b f(x)\,d\sin\lambda x$

$=\frac{1}{\lambda}f(x)\sin\lambda x\Big|_a^b-\frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(x)\sin\lambda x\,dx$

分出的大头很重要 ←

$\left|\frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(x)\sin\lambda x\,dx\right|\le\frac{1}{\lambda}\int_a^b|f'(x)\sin\lambda x|dx$

$\le\frac{1}{\lambda}\int_a^b|f'(x)|dx\le\frac{1}{\lambda}(b-a)\cdot M\to 0$

而前式也 $\to 0$

⑤ 配方后整体换元是个好习惯

$$\int\frac{x-2}{\sqrt{2-2x-x^2}}dx=\int\frac{(x+1)-3}{\sqrt{3-(x+1)^2}}d(x+1)$$

⑥ e^x 性质

(1) $\int(f'(x)+f(x))e^x dx=e^x\cdot f(x)+C$.

以处理 $\int(1-\frac{2}{x})^2e^x dx$，$\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\cdot e^x dx$

(2) $[e^{-x}\cdot f(x)]'=e^{-x}(f'(x)-f(x))$

如：$f\in C'[0,1]$．$f(0)=0$．$f(1)=1$．⇒ $\int_0^1|f'(x)-f(x)|dx\ge\frac{1}{e}$

不等号方向与积分绝对值不等号相同

$\ge\int_0^1 e^{-x}|f'(x)-f(x)|dx\ge\int_0^1|e^{-x}(f'(x)-f(x))|dx$

$\ge\left|\int_0^1 e^{-x}(f'(x)-f(x))dx\right|=\left|e^{-x}\cdot f(x)\Big|_0^1\right|=\frac{1}{e}$

定积分

一. 构造黎曼和:

核心: ① 构造出 $n\to+\infty$ 时的 $\frac{1}{n}$ 用于 dx

② 找好标志点, 即 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ 用于寻找上下限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}(1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)=\int_0^1\sqrt{x}\,dx$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{(k+n)^2}$$
$$=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{(\frac{k}{n}+1)^2}=\int_0^1\frac{1}{(x+1)^2}dx$$

二. 变上限积分:

① $\left[\int_{u(x)}^{v(x)}f(t)dt\right]'$: 链式法则

② 变上限积分求极限 $\Rightarrow$ L-H

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\int_0^x e^{t^2}dt)^2}{\int_0^x e^{2t^2}dt}\qquad \lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}$$

③ 对混参变上限积分求导

Core: $\int_{u(x)}^{v(x)}f(t,x)dt$ 中, x 是一个参数

既可以提出 $\int$ 也可以写入 dt

$F(x)=\int_a^x(x-t)f(t)dt$, 求 $F''(x)$

$=\int_a^x(xf(t)-tf(t))dt$

$=x\int_a^x f(t)dt-\int_a^x tf(t)dt$

顺次求导即可

$\phi(x)=\int_0^1 f(xt)dt$ 求 $\phi'(x)$

$=\frac{1}{x}\int_0^1 f(xt)d\,xt=\frac{\int_0^x f(y)dy}{x}$

注意积分上下限改变

④ 构造变上限积分处理不等式

——综合利用中值泰勒罗尔

例: f 在 $[a,b]$ 上二阶导函数连续

$f''>0$, 求证

$$f(\tfrac{a+b}{2})(b-a)\geqslant\int_a^b f(x)dx\geqslant\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$$

以右为例, 构造

$G(x)=\int_a^x f(t)dt-\frac{f(a)+f(x)}{2}(x-a)$

欲 $G(b)\geqslant0$

$G'(x)=f(x)-\frac{f'(x)}{2}(x-a)-\frac{f(a)+f(x)}{2}$

$=\frac{1}{2}(f(x)-f(a)-f'(x)(x-a))$

$=\frac{1}{2}(f'(\xi)-f'(x))(x-a)\quad(a<\xi<x)$

$=\frac{1}{2}(\xi-a)(x-a)f''(\varepsilon)\quad(a<\xi<\varepsilon<x)$

两次构造中值定理

例: f 在 $[0,1]$ 上可导, $f(1)=4\int_0^{\frac{1}{4}}e^{1-x^3}f(x)dx$

$\Rightarrow\exists\,\xi\in(0,1)$ s.t. $f'(\xi)=3\xi^2f(\xi)$

考虑结论回溯: $(e^{1-x^3}\cdot f(x))'$

$=-3x^2\cdot e^{1-x^3}\cdot f(x)+f'(x)\cdot e^{1-x^3}$

$\Rightarrow$ 一定以 $e^{1-x^3}f(x)$ 整体作文章

在构造积分第一中值定理时, 不应将二者分开

$4\int_0^{\frac{1}{4}}e^{1-x^3}f(x)dx\xlongequal{\exists\eta\in[0,\frac{1}{4}]}e^{1-\eta^3}f(\eta)=f(1)$

令 $g(x)=e^{1-x^3}\cdot f(x)$ $\therefore g(1)=g(\eta)$

$\therefore\exists\,\xi$ s.t. $g'(\xi)=0$

Rolle定理与积分第一中值定理

三.定积分的对称性 ⟹ 变换区间的定积分 ⟹ 专治三角函数定积分与对称区间定积分

(1) $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$

(2) $\int_{-x}^{x} f(t)dt=\int_0^x[f(t)+f(-t)]dt$ ⟹ 联想奇函数求积分

(3) 仅用于偶函数

$\int_{a-x}^{a+x} f(t)dt=2\int_{a-x}^{a} f(t)dt=2\int_a^{a+x} f(t)dt$

$\int_{-x}^{x} f(t)dt=2\int_0^x f(t)dt=2\int_{-x}^0 f(t)dt$

} 只有这儿才有系数 2

不要既换上下界又换上下界符号

例 $\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\cos^2x}{x(\pi-2x)}dx=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\sin^2x}{x(\pi-2x)}dx$

$=\frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{1}{x(\pi-2x)}dx=\frac{1}{\pi}\ln 2$

例:证明 $I_n\triangleq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx\equiv\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$

并求之 ⟹ 同积复现

$I_n=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\,d\cos x$

$=\underline{-\sin^{n-1}x\cdot\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}+(n-1)\int\cos^2x\cdot\sin^{n-2}x\,dx$

分部出 0

$=(n-1)\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2x)\sin^{n-2}x\,dx$

$=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$ ⟹ 同积复现

⟹ $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$

例: $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos x}{1+e^x}dx$ ⟹ 为什么是求特殊区间上的定积分? ⟹ 利用特殊性

(1) $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos x}{1+e^x}dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(-x)}{1+e^{-x}}dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos x\cdot e^x}{1+e^x}dx$

$=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\,dx=0$

(2) $\int_0^{\pi}\left(\frac{\cos x}{1+e^x}+\frac{\cos(-x)}{1+e^{-x}}\right)dx$ 更直接,一步到位

例: $\int_{-\frac12}^{\frac12}\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-3x^2}}dx=\int_0^{\frac12}\left(\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-3x^2}}+\frac{\arcsin(-x)}{\sqrt{1-3x^2}}\right)dx=0$

例: $\int_0^x e^{xt-t^2}dt=e^{x^2/4}\int_0^x e^{-t^2/4}dt$

↳ 一定是手动从∫里提出来的

$e^{\frac{x^2}{4}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{4}+xt-t^2}dt$ 后式 $=\int_0^x e^{-(t-\frac{x}{2})^2}dt=\int_{-\frac{x}{2}}^{+\frac{x}{2}}e^{-m^2}dm$

$=2\int_0^{\frac{x}{2}}e^{-m^2}dm=\int_0^x e^{-\frac{t^2}{4}}dt$

例:三角函数积分的对称性

证 $\int_0^{2k\pi}\frac{\sin t}{1+t}dt\geq 0$

拆分 ⟹ $\int_0^{2\pi}+\int_{2\pi}^{4\pi}+\cdots+\int_{2(k-1)\pi}^{2k\pi}$

$\int_{(2m-2)\pi}^{2m\pi}\frac{\sin t}{1+t}dt=\int_{(2m-2)\pi}^{(2m-1)\pi}+\int_{(2m-1)\pi}^{2m\pi}$

$=\int_{(2m-2)\pi}^{(2m-1)\pi}\frac{\sin t}{1+t}dt+\int_{(2m-2)\pi}^{(2m-1)\pi}\frac{\sin(t+\pi)}{1+t+\pi}d(t+\pi)$

$=\int_{(2m-2)\pi}^{(2m-1)\pi}\sin t\left(\frac{1}{1+t}-\frac{1}{1+t+\pi}\right)dt$ ↳ trig以π为单位的平移

$=\int_{(2m-2)\pi}^{(2m-1)\pi}\frac{\sin t\cdot\pi}{(1+t)(1+\pi+t)}dt\geq 0$ ↳ 区间折半使trig定号

⟹ 推论 $\int_0^x\frac{\sin t}{1+t}\geq 0$

以 $(2k\pi,2k\pi+\pi)(2k\pi+\pi,(2k+2)\pi)$ 来放缩

↳ 更进一步推论

$\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x\frac{\sin t}{1+t}dt$ 存在

$\max\left(\int_0^{2k\pi},\int_0^{2k\pi+2\pi}\right)<\int_0^x<\int_0^{2k\pi+\pi}$

考虑两端极限

四.定积分不等式

(1) $f(x)\le g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

(2) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

积分的绝对值≤绝对值的积分

(3) $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx$

积的积分的平方≤平方的积分的积

(4) $f\in C[a,b]$ $g\in R[a,b]$ 且g不变号

$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\cdot\int_a^b g(x)dx$

注意:后式不变号但将前式提出

$\xi\in[a,b]$ 且 ξ 可能与另外的参数有关

EX: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\sqrt{1+x^n}\,dx = 1.$

$$\int_0^1\sqrt{1+x^n}\,dx \le \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}\sqrt{1+x^n}\,dx + \int_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^1\sqrt{2}\,dx$$

$$\le \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}}\right)^n}\,dx + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$$

$$\le \sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}}\right)^n} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to+\infty} 1$$

用中值定理是错的

$\exists\xi\in[0,1]$ $\int_0^1\sqrt{1+x^n}\,dx = \sqrt{1+\xi^n} \cancel{\xrightarrow{n\to+\infty}} 1$

因为 ξ 可能与n有关 ⟸ 被积函数与n有关

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$

EX: $f\in C^1[a,b] \Rightarrow |f(x)|_{max} \le \frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)dx\right| + \int_a^b |f'(x)|dx$

$\frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \le |f(\xi)|$ $(\xi\in[a,b])$

$|f(x)| \le |f(x)-f(\xi)| + |f(\xi)| = |f(\xi)| + \left|\int_\xi^x f'(t)dt\right|$

$\le |f(\xi)| + \int_\xi^x |f'(t)|dt \le |f(\xi)| + \int_a^b |f'(x)|dx$

EX: $f\in C^1[0,1]$. $f(0)=0 \Rightarrow \int_0^1 f^2(x)dx \le \int_0^1 f'^2(x)dx$

$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt = \int_0^x f'(t)dt$

$f^2(x) \le \left(\int_0^x f'(t)dt\right)^2 \le \left(\int_0^x 1\cdot f'(t)dt\right)^2$

$\le \int_0^x 1^2 dt \cdot \int_0^x f'^2(t)dt = x\cdot\int_0^x f'^2(t)dt \le \int_0^1 f'^2(x)dx$

$x\in[0,1]$

$\therefore \int_0^1 f^2(x)dx \le \int_0^1\left(\int_0^1 f'^2(x)dx\right)dx$

注意到 $\int_0^1 f'^2(x)dx$ 是个常数

反常积分

一. 没有瑕点的积分一定是收敛的

$\int_0^{100} \frac{\ln(x+1)}{x^4+x^2+1}dx$ 无需讨论

二. P判别法

$\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ 注意P在分母上

小心 $\int_0^1 x^p dx$

三. 复习常见等价无穷小

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n}{n!} = 1 \Rightarrow$ 应用

$n! = \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$ 斯特林公式

四. 极限判别法

(1) 完全替代 不引入新的瑕点

$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^5+4x^4+1}$ $x\to+\infty$ 时确实 $\to x^5$. 但直接替为 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^5}$ 引入了 $x=0$ 这一新瑕点

拆分 $= \int_0^1 \frac{dx}{x^5+4x^4+1} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^5}$.

(2) 利用泰勒

$\int_9^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4+8x^3-9}-x^2} \Rightarrow x^2\sqrt{1+\frac{8}{x}-\frac{9}{x^4}} - x^2$

$= x^2\cdot(1+\frac{4}{x}+o(\frac{1}{x})) - x^2 = 4x+o(x) \sim 4x$

五. 三角函数与不定积分

① 直观应用: 有界性 (用于各类绝对收敛)

② 取特殊区间 $\Rightarrow$ 证明发散

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$. 证明 $\alpha\le 0$ 时发散.

$\left|\int_{2n\pi}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x^\alpha}dx\right| = \int_{2n\pi}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x^\alpha}dx \ge \int_{2n\pi}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1$

③ $|\cos x| \ge \cos^2 x \Rightarrow$ 讨论一些恶心的条件收敛

$\int_0^{+\infty} x\cdot\cos x^3 dx$ 本身收敛 $\Rightarrow$ 注意 x^3. $\Rightarrow$ 换为 u

$\int_0^{+\infty} |x\cdot\cos x^3|dx = \int_0^{+\infty} \frac{|\cos u|}{3u^{\frac{1}{3}}}du$

$\frac{|\cos u|}{3u^{\frac{1}{3}}} \ge \frac{\cos^2 u}{3u^{\frac{1}{3}}} = \frac{1+\cos 2u}{6u^{\frac{1}{3}}}$ 连用放缩与降幂升角

而 $\int_0^1 \frac{du}{6u^{\frac{1}{3}}}$ 发散 $\Rightarrow$ 条件收敛

六. e^x 的行为:

① $+\infty$ 处: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$

$e^{-x} \le \frac{C}{x^n} \Rightarrow m^{-P(x)} \le \frac{C}{x^n}$

$m>1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) \to +\infty$

即指数比底数长的快

② 0处: 直接等价为1.

$\int_0^1 \frac{e^x}{x\cdot\cos x}dx$ 发散

七. $\ln^x$ 的行为

① $+\infty$ 处: $\frac{\ln x}{x^n} = 0 \Rightarrow \ln^{f(x)} \le C\cdot x^n$

对于 $x>1$ 而言; 且 $x\to+\infty$; $f(x)\to+\infty$

因此 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(f(x))}{x^p}dx$ 与P法则很相似

$p>1$ 时 $\Rightarrow$ 收敛

$p\le 1$ 时 $\Rightarrow$ 发散

以 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln^{1+x^2}}{x^p}dx$ 为例:

A. $p>1$ 时. 记 $q=\frac{p+1}{2}>1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^q\cdot\frac{\ln(1+x^2)}{x^p} = 0$

$q>1$, $\therefore f(x) = o(\frac{1}{x})$ 收敛.

或 $p>1$ 时, $f(x) < \frac{C}{x^{p-\alpha}}$

$p-\alpha$ 必可 >1, 故收敛

B. $p<1$ 时, $f(x) \ge \frac{\ln 2}{x^p}$ 发散

C. $p=1$ 时, 分区间讨论

$\Rightarrow$ 发散

例: $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx$.

利用 $\ln x < C\cdot x^{\alpha}$ 一定无用.

考虑到 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{\ln x}d\ln x = \ln(\ln x)$

$\Rightarrow$ 发散

例: $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^{0.9}\ln x}dx$

$\ln x < C\cdot x^{\alpha} \Rightarrow \frac{1}{\ln x} > \frac{1}{C\cdot x^{\alpha}}$

$\therefore \int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^{0.9}\ln x} > \int_2^{+\infty}\frac{dx}{C\cdot x^{0.9+\alpha}}$ 发散

例: $\int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^5}dx$. $\frac{1}{x}\to+\infty$. 而

$(\frac{1}{x})^n\cdot e^{-\frac{1}{x}}\le C$ $\therefore e^{-\frac{1}{x}}\le C\cdot x^n$

$\Rightarrow \int_0^1\frac{C\cdot x^5}{x^5}dx$ 必收敛

② $\ln x$在 $x\to0$处行为.

$\ln x$的核心就是慢

$\ln x \le C\cdot x^n$ $(x\to+\infty)$ $(1,+\infty)$

$|\ln x| \le \frac{C}{x^n}$ $(x\to0)$ $(0,1)$

EX. $\int_0^1\frac{\ln x}{x^{0.9}}dx = -\int_0^1\frac{|\ln x|}{x^{0.9}}dx$

↳ 绝对值收敛则收敛

但绝对值发散不一定发散

$\int_0^1\frac{|\ln x|}{x^{0.9}}dx \le \int_0^1 \frac{C}{x^{0.9+\alpha}}dx$ 收敛

EX. $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x^2\ln x}dx = -\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x^2|\ln x|}dx$

$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x^2|\ln x|}dx$ $\Rightarrow$ 推测 $x\cdot\ln x\to0$ 该式应发散

$|\ln x|\cdot x^n\le C$

$|\ln x|\le\frac{C}{x^n}$ $\therefore |\ln x|\ge\frac{x^n}{C}$

$\therefore \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x^2|\ln x|}dx \ge \cdots$ 发散

EX. $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x^{0.9}\ln x}dx \Rightarrow$ 先分析胜过蛮力 $\frac{1}{x^{0.9}}$ 收敛, $\ln x$使之变小 更收敛

$\le\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x^{0.9}\cdot\ln 2}dx$

总之: $\ln x$在0与$+\infty$处对原式的影响 都不明显 近于p法则

七. 多项式的行为

在$+\infty$处与在0处差别显著

$+\infty$处取决于最高次

0处取决于最低次

EX $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+\sqrt{x}}dx$

$=\int_0^1\frac{1}{x^2+\sqrt{x}}dx+\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}+x^2}dx$

由极限判别法 $\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}+x^2}{\sqrt{x}}=1$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+\sqrt{x}}{x^2}=1$; 故 $\int_0^1\frac{1}{x^2+\sqrt{x}}dx$与$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx$

同收敛; $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2+\sqrt{x}}dx$与$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$

同收敛

故原式收敛

$\int_0^1\frac{x+3}{x+x^5}dx \xrightarrow[\text{最低}]{\text{何为}} \int_0^1\frac{3}{x}dx$ 发散

$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{1+x^2}dx\le\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$ 一眼望穿

八. 瑕点换元 $\int_a^b f(x)dx$

① a为瑕点则 令 $t=x-a$.

$\int_0^{b-a}f(t)dt$

② b为瑕点则 令 $t=b-x$.

$\int_0^{b-a}f(b-t)dt$

EX. $\int_0^3\frac{dt}{x(x-1)(x+1)(x-2)}$

拆出一个 $\int_2^3\frac{dx}{x(x-1)(x+1)(x-2)}$

$=\int_0^1\frac{dt}{(t+2)(t+1)(t+3)t}$

在0处取决于$\frac{1}{6t}$. 发散

拆出一个 $\int_1^2\frac{dx}{x(x-1)(x+1)(x-2)}$

令 $x=2-t$. 则 $\int_1^0\frac{-dt}{(2-t)(1-t)(3-t)(-t)}$

$=\int_0^1\frac{dt}{t(t-3)(t-2)(t-1)}\to\int_0^1\frac{dt}{-6t}$ 发散

反常积分题集

一、反常积分与定积分的关系

(1) $\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}dx \ (n\in Z^+)$

分部出0

$-x^{n-1}\cdot e^{-x}\Big|_0^{+\infty}+(n-1)\int_0^{+\infty}e^{-x}\cdot x^{n-2}dx$

$=(n-1)(n-2)\cdots=(n-1)!\cdot\int_0^{+\infty}e^{-x}dx$

$=(n-1)!$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)dx=-\frac{\pi}{2}\ln 2$

求：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cdot\cot x\,dx$. $\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

$\int_0^1\frac{\ln(x+1)}{1+x^2}dx$

①见到 $\cot x$ 与 $\ln^{\sin x}$ 一眼望穿

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cdot d\ln^{\sin x}$ ⇒ 关键地方检验一下

$=x\cdot\ln^{\sin x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln^{\sin x}dx$

而前式：$\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot\ln\sin x)=x\cdot\ln x=0$

② $\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin t}{\cos t}d\sin t$

③ 令 $x=\tan t$. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)dt$

如果原函数能轻松算出，何必定积分

$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan(\frac{\pi}{4}-t))dt$ 与分部积分越发复杂

$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln^{(\sin x+\cos x)}dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln^{\cos x}dx$ → 看看有戏

→ $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln^{\sin(x+\frac{\pi}{4})}dx+\frac{\pi}{8}\cdot\ln 2$

→ $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln^{\cos(\frac{\pi}{4}-x)}dx$

两式抵去

二、反常积分的推导逻辑很重要

三、过程写法：人为猜测等价的式子

① 高阶无穷小写法：

A. $\int_1^{+\infty}\frac{x^2}{e^{x+x}}dx$

分析 ⇒ $\le\int\frac{x^2}{Cx^n}dx$. 取n为2

过程 ⇒ $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cdot\frac{x^2}{e^{x+x}}=0$

$\therefore\int_1^{+\infty}\frac{x^2}{e^{x+x}}\le\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ 收敛

B. $\int_1^{+\infty}\frac{\ln^x dx}{\sqrt{x^3+2x+1}}$

分析 ⇒ $\le\frac{C}{x^{\frac{3}{2}-n}}$ 令 $n=0.1$

过程 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^x}{\sqrt{x^3+2x+1}}\cdot x^{1.4}=0$

② 等价写法：

$\int_2^{+\infty}\frac{\ln^x dx}{x\cdot(\ln^x+9)}\Rightarrow\frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{\ln^x}{x\cdot(\ln^x+9)}}{\frac{1}{x}}=1$

EX. $\int_0^1\sqrt{\cot x}\,dx\sim\sqrt{\frac{1}{\tan x}}\sim\sqrt{\frac{1}{x}}\sim\frac{1}{\sqrt{x}}$

EX. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^p x\cdot\cos^q x}dx$

0与 $\frac{\pi}{2}$ 各有瑕点，把趋于常数的部分提出来

$x\to 0$，$f(x)\to x^p$

$x\to\frac{\pi}{2}$. $\cos x=\sin(\frac{\pi}{2}-x)\to\frac{\pi}{2}-x$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(\frac{\pi}{2}-x)^q}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{t^q}dt$

EX. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x^p} dx$.

① $\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^p} dx$ 读本上分析的是 $\ln x$ 在 $(0, \to -\infty)$ 与 $(+\infty, \to +\infty)$ 的行为

这个 $\ln(x+1)$ 在 $x \to 0$ 直接 $\to x$ 等价无穷小带走啊!

$\sim \int_0^1 \frac{1}{x^{p-1}} dx$

而 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x^p} dx \le \int_1^{+\infty} \frac{c \cdot x^n}{x^p} dx = \int_1^{+\infty} \frac{c}{x^{p-n}} dx \Rightarrow \begin{cases} p>1, \text{收} \\ p=1, \text{发} \\ p<1, \text{发} \end{cases}$ ⇐ 这俩是 $\frac{\ln(x+1)}{x^p} > \frac{1}{x^p}$