第 1 次习题课题目解答

第 1 部分 课堂内容回顾

1. 确界

(1) 非空实数集 A 的最小上界 (若存在) 叫作 A 的上确界, 记作 $\sup A$; 它的最大下界 (若存在) 叫作 A 的下确界, 记作 $\inf A$.

(2) **上确界的刻画:** $\xi = \sup A$ 当且仅当 ξ 为 A 的上界且 $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A$ 使得 $x > \xi - \varepsilon$.
否定形式: $\xi \neq \sup A$ 当且仅当 ξ 不是 A 的上界或 $\exists \varepsilon > 0$ 使得 $\forall x \in A, x \leqslant \xi - \varepsilon$.

(3) **上确界与下确界的关系:** $\sup A = -\inf(-A)$.

(4) **确界定理:** 有上界的非空数集必有上确界; 有下界的非空数集必有下确界.

2. 数列极限的定义

(1) **极限的定义:** 称数列 $\{a_n\}$ 有极限 $A \in \mathbb{R}$, 如果 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, 我们均有 $|a_n - A| < \varepsilon$. 也称该数列收敛于 A, 记作 $a_n \to A\ (n \to \infty)$ 或者 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. 数列有极限也称为收敛, 否则称为发散.

(2) **否定形式:** 数列 $\{a_n\}$ 不收敛到 $A \in \mathbb{R}$ 当且仅当 $\exists \varepsilon_0 > 0$ 使得 $\forall N > 0, \exists n_N > N$ 满足 $|a_{n_N} - A| \geqslant \varepsilon_0$.

3. 数列极限的性质

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ 当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n - A| = 0$.

(2) 从某项开始取常数的数列收敛到该常数, **反之不对**.

(3) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 而数列 $\{b_n\}$ 有界, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

(4) **唯一性:** 若数列收敛, 则其极限唯一.

(5) **有限韧性:** 改变数列的有限项不改变其敛散性.

(6) **均匀性:** 数列收敛当且仅当它的任意子列均收敛到同一个实数. **该结论常用来证明数列不收敛.**

(7) **有界性:** 收敛的数列有界.

(8) **局部保序:** 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$.
   (a) 若 $A > B$, 则 $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, 均有 $a_n > b_n$.
   (b) 若 $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, 均有 $a_n \geqslant b_n$, 则 $A \geqslant B$.

(9) **局部保号:** 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.
   (a) 若 $A > 0$, 则 $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, 均有 $a_n > 0$.
   (b) 若 $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, 均有 $a_n \geqslant 0$, 则 $A \geqslant 0$.
   (c) 若 $A \neq 0$, 则 $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, 均有 $a_n \neq 0$.

(10) **四则运算法则:** 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, 则

(a) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha A + \beta B$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)(\lim\limits_{n\to\infty} b_n) = AB$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{A}{B}$ (若 $B \neq 0$).

(11) **夹逼原理:** 假设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{x_n\}$ 满足下列条件:

(a) $\exists n_0 > 0$ 使得 $\forall n > n_0$, 均有 $a_n \leqslant x_n \leqslant b_n$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$.

则数列 $\{x_n\}$ 收敛且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

(12) 若数列 $\{a_n\}$ 非负且收敛于 A, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{A}$.

4. 典型例题

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ $(0 < |q| < 1)$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ $(a > 0)$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \big(\sum\limits_{k=1}^{m} a_k^n\big)^{\frac{1}{n}} = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant m} a_k$, 其中 $a_k \geqslant 0$;

(5) $e = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$.

5. 典型数列的增长速度比较

(1) **对数函数比常数增长得更快:** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} = 0$;

(2) **幂函数比对数函数增长得更快:** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^\alpha} = 0$ (其中 $\alpha > 0$);

(3) **指数函数比幂函数增长得更快:** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$ (其中 $\alpha \in \mathbb{R},\ a > 1$);

(4) **连乘积比指数函数增长得更快:** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ $(a \in \mathbb{R})$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

(6) **平均性:** 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = A$.

6. 单调有界定理

(1) **单调有界定理:** 单调有界数列收敛; 单调无界数列有极限.

(2) 应用单调有界定理的典型例子:

(a) $e = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$, 并且 $\forall n \geqslant 1$, 我们有

$$\big(1 + \frac{1}{n}\big)^n < e < \big(1 + \frac{1}{n}\big)^{n+1},\ \frac{1}{n+1} < \log\big(1 + \frac{1}{n}\big) < \frac{1}{n}.$$

(b) 数列 $\{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\}$ 收敛.

(c) 常用于计算由递归关系定义的数列的极限:

(i) 设 $c>0$, $a_1=\sqrt{c}$ 且 $\forall n\geqslant 1$, $a_{n+1}=\sqrt{c+a_n}$. 则

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4c}).$$

(ii) 设 $b_1\geqslant a_1\geqslant 0$. $\forall n\geqslant 1$, 归纳定义 $a_{n+1}=\sqrt{a_nb_n},\ b_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+b_n)$. 则数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 收敛到同一个极限.

7. Stolz 定理及其应用

(1) **Stolz 定理:** 设 $A\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$.

(a) 若 $\{b_n\}$ 严格增趋于 $+\infty$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=A$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A$.

(b) 若 $\{b_n\}$ 严格单调趋于 0 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=A$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A$.

(2) **Stolz 定理的典型应用:**

(a) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=A$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=1$.

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2^k+3^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}=\frac{1}{k+1}$ $(k\in\mathbb{N})$.

8. 关于实数系的基本定理

下述定理等价:

(1) **确界定理:** 有上界的非空集合有上确界, 有下界的非空集合有下确界.

(2) **单调有界定理:** 单调有界数列收敛.

(3) **区间套定理:** 区间长度趋于 0 的闭区间套的交为单点集.

(4) **Cauchy 判别准则:** 数列 $\{x_n\}$ 收敛当且仅当它为 Cauchy 数列.

(a) **Cauchy 数列的定义:**

(i) $\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$ 使得 $\forall m,n>N$, 均有 $|x_m-x_n|<\varepsilon$;

(ii) $\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$ 使得 $\forall n>N$ 以及 $\forall p\geqslant 1$, 均有 $|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$;

(b) **Cauchy 数列定义的否定表述:**

(i) $\exists\varepsilon_0>0$ 使得 $\forall N>0$, $\exists m,n>N$ 满足 $|x_m-x_n|\geqslant\varepsilon_0$.

(ii) $\exists\varepsilon_0>0$ 使得 $\forall N>0$, $\exists n>N$ 且 $\exists p>0$ 满足 $|x_{n+p}-x_n|\geqslant\varepsilon_0$.

(5) **Cauchy 判别准则的典型应用:**

(a) 设 $a>0$, $0<q<1$ 且 $\forall n\geqslant 1$, 均有 $|x_{n+1}-x_n|\leqslant aq^n$. 则数列 $\{x_n\}$ 收敛.

(b) 数列 $\Big\{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k^2}\Big\}$ 收敛.

(c) $\forall n\geqslant 1$, 令 $x_n=\prod\limits_{k=1}^{n}\big(1+\frac{1}{2^k}\big)$. 则数列 $\{x_n\}$ 收敛.

(d) 若 $\exists C>0$ 使得 $\forall n\geqslant 1$, $y_n:=\sum\limits_{k=1}^{n}|x_{k+1}-x_k|<C$, 则数列 $\{x_n\}$ 收敛.

(e) 设 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, 且 $\forall n\geqslant 1$, $x_{n+1}\geqslant x_n+\frac{1}{n^\alpha}$. 则数列 $\{x_n\}$ 发散.

第 2 部分 习题课题目解答

1. 求证: 具有收敛子列的单调数列收敛.

证明: 设 $\{a_n\}$ 为单调数列. 不失一般性, 我们可假设该数列递增, 否则我们可考虑 $\{-a_n\}$. 设其子列 $\{a_{k_n}\}$ 收敛到 A. 则 $\forall\varepsilon>0$, $\exists K>0$ 使得 $\forall n>K$, 均有 $|a_{k_n}-A|<\varepsilon$, 也即 $A-\varepsilon<a_{k_n}<A+\varepsilon$. 令 $N=k_{K+1}>K$. 则 $\forall n>N$, 由于 $k_{K+1}\leqslant n\leqslant k_n$, 则由单调递增性可知

$$A-\varepsilon<a_{k_{K+1}}\leqslant a_n\leqslant a_{k_n}<A+\varepsilon,$$

故 $|a_n-A|<\varepsilon$. 因此数列 $\{a_n\}$ 也收敛到 A.

2. 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2n^2+2n-3}-\sqrt{2n^2+n})$,
(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$,
(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+\sqrt{n}}\right)$,
(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n-1}})$ $(|x|<1)$,
(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}$,
(6) $\lim\limits_{m\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty}\big(\cos(2\pi m!\,x)\big)^n$ $(x\in\mathbb{R})$.

解: (1) 由四则运算法则可得

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2n^2+2n-3}-\sqrt{2n^2+n})=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n^2+2n-3)-(2n^2+n)}{\sqrt{2n^2+2n-3}+\sqrt{2n^2+n}}\\ =&\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{3}{n}}{\sqrt{2+\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}}+\sqrt{2+\frac{1}{n}}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{2}$.

(3) $\forall n\geqslant 1$, 我们有

$$\begin{aligned}0&\leqslant\sin^2(\pi\sqrt{n^2+\sqrt{n}})=\sin^2(\pi\sqrt{n^2+\sqrt{n}}-\pi n)\\&=\left(\sin\left(\frac{\pi\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+\sqrt{n}}+n}\right)\right)^2\\&\leqslant\left(\frac{\pi\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+\sqrt{n}}+n}\right)^2\leqslant\frac{\pi^2}{n}.\end{aligned}$$

于是由夹逼原理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+\sqrt{n}})=0$.

(4) 由于 $|x|<1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$, 故

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n-1}})\\ =&\lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1-x^{2^{k+1}}}{1-x^{2^k}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2^n}}{1-x}=\frac{1}{1-x}.\end{aligned}$$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{1+(-\frac{2}{3})^n}{1+(-\frac{2}{3})^{n+1}}=\frac{1}{3}$.

(6) 若 $x\in\mathbb{Q}$, 则 $\exists p,q\in\mathbb{Z}$ $(q\geqslant 1)$ 使得 p,q 互素且 $x=\frac{p}{q}$. 故 $\forall m\geqslant q$, $m!\,x\in\mathbb{Z}$, 从而 $\cos(2\pi m!\,x)=1$, 于是 $\forall m\geqslant q$, 均有 $\lim\limits_{n\to\infty}\big(\cos(2\pi m!\,x)\big)^n=1$, 从而我们有 $\lim\limits_{m\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty}\big(\cos(2\pi m!\,x)\big)^n=1$.

若 $x\notin\mathbb{Q}$, 则 $\forall m\geqslant 1$, $|\cos(2\pi m!\,x)|<1$, 于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\big(\cos(2\pi m!\,x)\big)^n=0$, 进而可得 $\lim\limits_{m\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty}\big(\cos(2\pi m!\,x)\big)^n=0$.

综上所述可知

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\big(\cos(2\pi m!\,x)\big)^n=\begin{cases}1 & \text{若 } x\in\mathbb{Q},\\ 0 & \text{若 } x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$$

3. 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\big(\sum\limits_{k=1}^m a_k^n\big)^{\frac{1}{n}}+\big(\sum\limits_{k=1}^m a_k^{-n}\big)^{\frac{1}{n}}\Big)$, 其中 $a_k>0$ $(1\leqslant k\leqslant m)$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^n\big((n^k+1)^{-\frac{1}{k}}+(n^k-1)^{-\frac{1}{k}}\big)$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2})$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n$.

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{\sqrt[n]{2}})\cos(n^{10}!)$.

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\Big((\sin n!)(\frac{n-1}{n^2+1})^{10}-\Big(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}\Big)\frac{2n^2+1}{n^2-1}\Big)$.

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$.

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\sin\sin\cdots\sin}_{n}x$ $(x\in\mathbb{R})$.

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^n\frac{k}{n^2+k}$.

(10) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{10}\sqrt[n]{k}$.

解: (1) 令 $a=\min\limits_{1\leqslant k\leqslant m}a_k$, $A=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant m}a_k$, 则 $\forall n\geqslant 1$, 我们有

$$A+\frac{1}{a}\leqslant\Big(\sum_{k=1}^m a_k^n\Big)^{\frac{1}{n}}+\Big(\sum_{k=1}^m a_k^{-n}\Big)^{\frac{1}{n}}\leqslant\Big(A+\frac{1}{a}\Big)\sqrt[n]{m}.$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{m}=1$, 则由夹逼原理得 $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\big(\sum\limits_{k=1}^m a_k^n\big)^{\frac{1}{n}}+\big(\sum\limits_{k=1}^m a_k^{-n}\big)^{\frac{1}{n}}\Big)=A+\frac{1}{a}$.

(2) $\forall n\geqslant 1$, $n^k\leqslant n^k+1\leqslant(n+1)^k$, 故 $\frac{1}{n+1}\leqslant(n^k+1)^{-\frac{1}{k}}\leqslant\frac{1}{n}$, 于是

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\frac{n}{n+1}\leqslant\sum_{k=1}^n(n^k+1)^{-\frac{1}{k}}\leqslant 1,$$

进而由夹逼原理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^n(n^k+1)^{-\frac{1}{k}}=1$.

同样地, $\forall n \geqslant 2$, $(n-1)^k \leqslant n^k - 1 \leqslant n^k$, 故 $\frac{1}{n} \leqslant (n^k-1)^{-\frac{1}{k}} \leqslant \frac{1}{n-1}$, 于是

$$1 \leqslant \sum_{k=1}^{n}(n^k-1)^{-\frac{1}{k}} \leqslant \frac{n}{n-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{n}}$$

从而由夹逼原理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(n^k-1)^{-\frac{1}{k}} = 1$.

最后由四则运算法则可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left((n^k+1)^{-\frac{1}{k}} + (n^k-1)^{-\frac{1}{k}}\right) = 2$.

(3) $\forall n \geqslant 1$, 我们有 $\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2} = 2^{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}} = 2^{1-\frac{1}{2^{n+1}}}$. 注意到

$$\lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{2^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}} = 1,$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2} = 2$.

(4) 由四则运算法则可知

$$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n-1})^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}} = \frac{1}{e}.$$

(5) $\forall n \geqslant 1$, 我们有 $|(1-\frac{1}{\sqrt[n]{2}})\cos(n^{10}!)| \leqslant |1-\frac{1}{\sqrt[n]{2}}|$. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2} = 1$, 于是由夹逼原理可得 $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{\sqrt[n]{2}})\cos(n^{10}!) = 0$.

(6) $\forall n \geqslant 1$, 我们有 $|(\sin n!)(\frac{n-1}{n^2+1})^{10}| \leqslant \frac{1}{n^{10}}$. 于是由夹逼原理可得

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left((\sin n!)\Big(\frac{n-1}{n^2+1}\Big)^{10} - \Big(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}\Big)\frac{2n^2+1}{n^2-1}\right)\\
= &\lim_{n\to\infty} -\Big(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}\Big)\cdot\frac{2+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} -\Big(\sum_{k=1}^{n-1}\Big(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\Big)\Big)\cdot\frac{2+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}}\\
= &\lim_{n\to\infty} -\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\frac{2+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}} = -2.
\end{aligned}$$

(7) $\forall n \geqslant 1$, 我们有 $3 \leqslant (1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}} \leqslant 3\sqrt[n]{3}$. 再注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3} = 1$, 于是由夹逼原理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}} = 3$.

(8) $\forall x \in \mathbb{R}$ 以及 $\forall n \geqslant 1$, 令 $x_n = \underbrace{\sin\sin\cdots\sin}_{n} x$, 则 $x_{n+1} = \sin x_n$.

若 $\sin x \geqslant 0$, 则 $x_2 = \sin\sin x \in [0, \sin 1)$, 从而 $\forall n \geqslant 2$, 均有 $x_n \geqslant 0$, 并且 $x_{n+1} = \sin x_n \leqslant x_n$. 由单调有界定理知数列 $\{x_n\}$ 收敛. 设其极限为 a. 由于 $\forall n \geqslant 1$, 均有 $x_{n+1} = \sin x_n$. 故 $a = \sin a$. 由保序性得 $0 \leqslant a \leqslant 1$, 则 $a = 0$.

若 $\sin x < 0$, 则 $\sin(-x) > 0$, 进而可知

$$\lim_{n\to\infty}\underbrace{\sin\sin\cdots\sin}_{n} x = -\lim_{n\to\infty}\underbrace{\sin\sin\cdots\sin}_{n}(-x) = 0.$$

从而 $\forall x \in \mathbb{R}$, 均有 $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\sin\sin\cdots\sin}_{n} x = 0$.

(9) $\forall n \geqslant 1$, 我们有

$$\frac{1}{2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}=\frac{1}{2n}(n+1)=\frac{1}{2}\cdot(1+\frac{1}{n}),$$

于是由夹逼原理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k}=\frac{1}{2}$.

(10) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{10}\sqrt[n]{k}=\sum\limits_{k=1}^{10}\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{k}=10.$

4. 判断下列数列 $\{x_n\}$ 的收敛性:

(1) $x_n=\frac{(-1)^n n}{n+1}$, (2) $x_n=n^{(-1)^n}$.

解: (1) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{2n+1}=1$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+2}=-1$, 故数列 $\{x_n\}$ 发散.

(2) $\forall n\geqslant 1$, 我们有 $x_{2n}=2n$, 由此可知数列 $\{x_n\}$ 无界, 因此发散.

5. 假设 $\forall n\geqslant 1$, 均有 $x_n>0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=a$.

证明: $\forall n\geqslant 1$, 我们均有

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}\leqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

若 $a=0$, 则 $0\leqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$. 由 Stolz 定理与夹逼原理可知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=0=a.$$

若 $a\neq 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=\frac{1}{a}$, 从而由 Stolz 定理可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=a,\ \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}{n}=\frac{1}{a},$$

进而由夹逼原理可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=a$.

6. 假设 $\forall n\geqslant 1$, 均有 $x_n>0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=a$. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=a$.

证明: 令 $y_1=x_1$, $y_n=\frac{x_n}{x_{n-1}}$ $(n\geqslant 2)$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$. 由此可得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{y_1y_2\cdots y_n}=\lim_{n\to\infty}y_n=a.$$

7. 求证:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^p}-\frac{n}{p+1}\right)=\frac{1}{2}$ (其中 $p\geqslant 1$ 为整数).

证明: (1) $\forall n\geqslant 1$, 令 $x_n=\frac{n^n}{n!}>0$. 则我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n=e.$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=e$.

(2) $\forall n\geqslant 1$, 令 $x_n=(p+1)(1^p+2^p+\cdots+n^p)-n^{p+1}$, $y_n=(p+1)n^p$, 则

$$\begin{aligned}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}&=\frac{(p+1)(n+1)^p-(n+1)^{p+1}+n^{p+1}}{(p+1)\big((n+1)^p-n^p\big)}\\&=\frac{(p+1)\sum\limits_{k=0}^{p}\binom{p}{k}n^k-\sum\limits_{k=0}^{p}\binom{p+1}{k}n^k}{p(p+1)n^{p-1}+(p+1)\sum\limits_{k=0}^{p-2}\binom{p}{k}n^k}\\&=\frac{\frac12p(p+1)n^{p-1}+\sum\limits_{k=0}^{p-2}\binom{p}{k}n^k-\sum\limits_{k=0}^{p-2}\binom{p+1}{k}n^k}{p(p+1)n^{p-1}+(p+1)\sum\limits_{k=0}^{p-2}\binom{p}{k}n^k}\\&=\frac{\frac12p(p+1)+\sum\limits_{k=0}^{p-2}\binom{p}{k}n^{k-p+1}-\sum\limits_{k=0}^{p-2}\binom{p+1}{k}n^{k-p+1}}{p(p+1)+(p+1)\sum\limits_{k=0}^{p-2}\binom{p}{k}n^{k-p+1}}.\end{aligned}$$

于是由 Stolz 定理以及四则运算法则可得

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^p}-\frac{n}{p+1}\Big)=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\frac12.$$

8. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=1$, $x_{n+1}=\frac{1}{1+x_n}$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

证明: **方法 1.** 由题设立刻可知 $\forall n\geqslant 1$, 均有 $x_n\geqslant 0$.

下证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a:=\frac{\sqrt5-1}{2}$. 注意到 $a=\frac{1}{1+a}$, 则 $\forall n\geqslant 1$, 我们有

$$|x_{n+1}-a|=\left|\frac{1}{1+x_n}-\frac{1}{1+a}\right|=\frac{|x_n-a|}{(1+x_n)(1+a)}\leqslant\frac{1}{1+a}|x_n-a|,$$

于是 $|x_n-a|\leqslant\big(\frac{1}{1+a}\big)^{n-1}|x_1-a|$, 进而由夹逼原理立刻可知所证结论成立.

注: 若所求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在且等于 a, 则由四则运算法则立刻可得 $a=\frac{1}{1+a}$. 再由极限的保号性知 $a\geqslant 0$, 故 $a=\frac{\sqrt5-1}{2}$.

方法 2. $\forall n\geqslant 1$, 定义 $a_n=x_{2n}$, $b_n=x_{2n-1}$. 我们将对 $n\geqslant 1$ 应用数学归纳法证明 $0<a_n\leqslant a_{n+1}\leqslant 1$, $0<b_{n+1}\leqslant b_n$.

当 $n=1$ 时, $b_1=x_1=1$, $a_1=\frac{1}{1+b_1}=\frac12$, $b_2=\frac{1}{1+a_1}=\frac23$, $a_2=\frac{1}{1+b_2}=\frac35$. 故此时所证结论成立.

假设所证结论对 $n\geqslant 1$ 成立, 则我们有

$$0<b_{n+2}=\frac{1}{1+a_{n+1}}\leqslant\frac{1}{1+a_n}=b_{n+1},$$
$$0<a_{n+1}=\frac{1}{1+b_{n+1}}\leqslant\frac{1}{1+b_{n+2}}=a_{n+2}\leqslant 1.$$

于是由数学归纳法知所证结论对任意 $n\geqslant 1$ 均成立. 由单调有界定理知 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 收敛, 设其极限分别为 A,B. 又 $\forall n\geqslant 1$, $a_n=\frac{1}{1+b_n}$, $b_{n+1}=\frac{1}{1+a_n}$, 则由四则运算法则可得 $A=\frac{1}{1+B}$, $B=\frac{1}{1+A}$, 也即 $A+AB=1$, $B+AB=1$, 故 $A=B$. 由保序性可知 $0\leqslant A\leqslant 1$, 则 $A=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 由于 $\{x_n\}$ 的奇数项子列与偶数项子列均收敛到 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

9. 设 $\alpha\geqslant 2$ 为常数. $\forall n\geqslant 1$, 令 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}$. 求证: 数列 $\{x_n\}$ 收敛.

证明: **方法 1.** 由于数列 $\{x_n\}$ 单调递增且 $\forall n\geqslant 1$, 均有

$$\begin{aligned}x_n &\leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\leqslant 1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)}\\ &= 1+\sum_{k=2}^{n}\big(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\big)=2-\frac{1}{n}<2.\end{aligned}$$

于是由单调有界定理可知数列 $\{x_n\}$ 收敛.

方法 2. $\forall\varepsilon>0$, 令 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]+1$, 则 $\forall n>N$ 以及 $\forall p>0$, 我们有

$$\begin{aligned}|x_{n+p}-x_n| &= \sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k^\alpha}\leqslant\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k^2}\leqslant\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k(k-1)}\\ &= \sum_{k=n+1}^{n+p}\big(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\big)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}<\varepsilon,\end{aligned}$$

故 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 数列, 从而收敛.

10. 设$\{a_{n-1}\}$有界且 $\forall n\geqslant 1$, $b_n=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kq^k$ $(|q|<1)$. 求证: 数列 $\{b_n\}$ 收敛.

证明: 由题设可知, $\exists M>0$ 使得 $\forall n\geqslant 0$, 均有 $|a_n|<M$. $\forall\varepsilon>0$, 令

$$N=\Big|\Big[\frac{\log\frac{\varepsilon(1-|q|)}{M}}{\log|q|}\Big]\Big|+1,$$

则 $\forall n>N$ 以及 $\forall p>0$, 我们有

$$\begin{aligned}|b_{n+p}-b_n| &= \big|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_kq^k\big|\leqslant\sum_{k=n+1}^{n+p}|a_k||q|^k\leqslant M\sum_{k=n+1}^{n+p}|q|^k\\ &= M\frac{|q|^{n+1}(1-|q|^p)}{1-|q|}\leqslant M\frac{|q|^{n+1}}{1-|q|}<\varepsilon,\end{aligned}$$

则 $\{b_n\}$ 为 Cauchy 数列, 因此收敛.

11. 若 $\forall n \geqslant 1$, $|a_{n+1}-a_n| \leqslant b_n$, 而 $\big\{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k\big\}$ 收敛, 求证: 数列 $\{a_n\}$ 收敛.

证明: 由于 $\big\{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k\big\}$ 收敛, 故该数列为 Cauchy 数列, 从而 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$ 以及 $\forall p > 0$, 均有 $\sum\limits_{k=n}^{n+p-1} b_k = \Big|\sum\limits_{k=1}^{n+p-1} b_k - \sum\limits_{k=1}^{n-1} b_k\Big| < \varepsilon$, 于是

$$|a_{n+p}-a_n| = \Big|\sum_{k=n}^{n+p-1}(a_{k+1}-a_k)\Big| \leqslant \sum_{k=n}^{n+p-1}|a_{k+1}-a_k| \leqslant \sum_{k=n}^{n+p-1} b_k < \varepsilon.$$

故 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 数列, 从而收敛.

12. 设 $0 < c \leqslant 1$, $x_1 = \frac{c}{2}$ 且 $\forall n \geqslant 1$, $x_{n+1} = \frac{c+x_n^2}{2}$, 求数列 $\{x_n\}$ 的极限.

解: 首先对 $n \geqslant 1$ 用数学归纳法证明 $0 < x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant 1$.

由题设知 $0 < x_1 < 1$, $x_1 = \frac{c}{2} \leqslant \frac{c+x_1^2}{2} = x_2 \leqslant 1$. 故所证对 $n = 1$ 成立.

现假设所证结论对 $n \geqslant 1$ 成立, 则我们有

$$x_{n+2} - x_{n+1} = \tfrac{1}{2}(x_{n+1}^2 - x_n^2) \geqslant 0,$$
$$0 < x_{n+2} = \tfrac{1}{2}(c + x_{n+1}^2) \leqslant \tfrac{1}{2}(c+1) \leqslant 1.$$

也即所证结论对 $n+1$ 也成立.

于是由数学归纳法可知所证结论对任意整数 $n \geqslant 1$ 均成立. 则数列 $\{x_n\}$ 单调递增且有上界. 设其极限为 a. 由保序性知 $a \leqslant 1$, 而由递推关系式以及极限的四则运算法则可得 $a = \frac{1}{2}(c + a^2)$. 故 $a = 1 - \sqrt{1-c}$.

13. $\forall n \geqslant 1$, 令 $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$. 求证: 数列 $\{a_n\}$ 收敛.

证明: **方法 1.** $\forall n \geqslant 1$, 令 $b_n = a_{2n-1}$. 则我们有

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{k=1}^{2n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n-1}\Big(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\Big) + \frac{1}{2n-1} > 0, \\ b_{n+1} - b_n &= -\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} < 0. \end{aligned}$$

因此 $\{b_n\}$ 单调递减且以 0 为下界, 从而收敛, 也即 $\{a_{2n-1}\}$ 收敛. 又 $\forall n \geqslant 1$,

$$a_{2n} - a_{2n-1} = -\frac{1}{2n},$$

则数列 $\{a_{2n}\}$ 与数列 $\{a_{2n-1}\}$ 收敛到同一个极限, 由此可得数列 $\{a_n\}$ 收敛.

方法 2. $\forall\varepsilon>0$, 令 $N=[\frac{3}{\varepsilon}]+1$. 则 $\forall n>N$ 以及 $\forall p>0$, 我们有

$$\begin{aligned}
|a_{n+p}-a_n| &= \Big|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\Big| = \Big|\sum_{k=1}^{p}\frac{(-1)^{n+k-1}}{n+k}\Big| = \Big|\sum_{k=1}^{p}\frac{(-1)^{k-1}}{n+k}\Big| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{[\frac{p}{2}]}\Big(\frac{1}{n+2k-1}-\frac{1}{n+2k}\Big)+\frac{1}{n+p} \\
&\leqslant \frac{1}{n+1}+\sum_{k=1}^{[\frac{p}{2}]-1}\Big(\frac{1}{n+2k+1}-\frac{1}{n+2k}\Big)+\frac{1}{n+2[\frac{p}{2}]}+\frac{1}{n+p} \\
&\leqslant \frac{3}{n}<\varepsilon.
\end{aligned}$$

因此 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 数列, 从而收敛.

14. 设 $b_1>a_1>0$. $\forall n\geqslant 1$, 递归地定义 $a_{n+1}=\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}$, $b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$. 证明: 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 均收敛且有相同极限.

证明: 由定义立刻可知 $\forall n\geqslant 1$, 我们有 $a_n>0$, $b_n>0$. 又由经典不等式得

$$a_{n+1}=\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}\leqslant\frac{a_n+b_n}{2}=b_{n+1}.$$

于是 $\forall n\geqslant 1$, 均有 $a_{n+1}=\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}\geqslant a_n$, $b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}\leqslant b_n$. 也即数列 $\{a_n\}$ 单调上升, 而数列 $\{b_n\}$ 单调下降. 特别地, $\forall n\geqslant 1$, 均有 $a_1\leqslant a_n\leqslant b_n\leqslant b_1$. 则由单调有界定理可知上述两数列均收敛, 设其极限分别为 a,b. 又 $\forall n\geqslant 1$, 我们有 $b_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+b_n)$. 由此立刻可得 $b=\frac{1}{2}(a+b)$, 故 $a=b$.

15. 设 $x_1>x_2>0$ 且 $\forall n\geqslant 1$, 均有 $x_{n+2}=\sqrt{x_{n+1}x_n}$, 求数列 $\{x_n\}$ 的极限.

解: 方法 1. 由题设可知 $\forall n\geqslant 1$, $x_n>0$, 于是 $\log x_{n+2}=\frac{1}{2}(\log x_{n+1}+\log x_n)$, 由此可得 $\log x_{n+2}-\log x_{n+1}=-\frac{1}{2}(\log x_{n+1}-\log x_n)$, 故

$$\begin{aligned}
\log x_n &= \sum_{k=2}^{n}(\log x_k-x_{k-1})+\log x_1 \\
&= \sum_{k=2}^{n}(-\frac{1}{2})^{k-2}(\log x_2-\log x_1)+\log x_1 \\
&= \frac{2}{3}\cdot\Big(1-(-\frac{1}{2})^{n-1}\Big)(\log x_2-\log x_1)+\log x_1.
\end{aligned}$$

则 $\forall n\geqslant 1$, 均有 $x_{2n}=\sqrt[3]{x_2^2x_1}\cdot\big((\frac{x_2}{x_1})^{\frac{2}{3}}\big)^{\frac{1}{2^{2n-1}}}$, $x_{2n-1}=\sqrt[3]{x_2^2x_1}\cdot\big((\frac{x_1}{x_2})^{\frac{2}{3}}\big)^{\frac{1}{2^{2n-2}}}$. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\big((\frac{x_2}{x_1})^{\frac{2}{3}}\big)^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\big((\frac{x_1}{x_2})^{\frac{2}{3}}\big)^{\frac{1}{n}}=1$, 于是我们有

$$\lim_{n\to\infty}x_{2n}=\lim_{n\to\infty}x_{2n-1}=\sqrt[3]{x_2^2x_1},$$

进而可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt[3]{x_2^2x_1}$.

方法 2. $\forall n \geqslant 1$, 令 $a_n = x_{2n}$, $b_n = x_{2n-1}$.

首先对 $n \geqslant 1$ 应用数学归纳法证明: $a_n \leqslant b_n$, $a_n \leqslant b_{n+1}$.

当 $n = 1$ 时, $a_1 = x_2 < x_1 = b_1$, 则 $b_2 = x_3 = \sqrt{x_1 x_2} > x_1 = a_1$, 得证.

假设所证结论对 $n \geqslant 1$ 成立, 则

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= x_{2n+2} = \sqrt{x_{2n+1}x_{2n}} = \sqrt{b_{n+1}a_n} \leqslant b_{n+1}, \\ b_{n+2} &= x_{2n+3} = \sqrt{x_{2n+2}x_{2n+1}} = \sqrt{a_{n+1}b_{n+1}} \geqslant a_{n+1}, \end{aligned}$$

也即所证结论对 $n+1$ 也成立.

由数学归纳法可知所证结论对所有 $n \geqslant 1$ 成立. 进而可知 $\forall n \geqslant 1$, 均有

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= x_{2n+1} = \sqrt{x_{2n}x_{2n-1}} = \sqrt{a_n b_n} \leqslant b_n, \\ a_{n+1} &= x_{2n+2} = \sqrt{x_{2n+1}x_{2n}} = \sqrt{b_{n+1}a_n} \geqslant a_n, \end{aligned}$$

故数列 $\{a_n\}$ 单调递增且数列 $\{b_n\}$ 单调递减, 但 $\forall n \geqslant 1$, 我们有 $a_n \leqslant b_n$, 则数列 $\{a_n\}$ 单调递增且以 b_1 为上界, 而数列 $\{b_n\}$ 单调递减且以 a_1 为下界, 于是上述两数列均收敛, 设其极限分别为 a, b. 由于 $\forall n \geqslant 1$, 我们有

$$x_{2n+2} = \sqrt{x_{2n+1}x_{2n}},\ x_{2n+1} = \sqrt{x_{2n}x_{2n-1}},$$

也即 $a_{n+1}^2 = b_{n+1}a_n$, $b_{n+1}^2 = a_n b_n$. 由四则运算法则可知 $a^2 = ab$, $b^2 = ab$, 因此 $a = b$, 则数列 $\{x_n\}$ 收敛, 设其极限为 A. 又 $\forall n \geqslant 1$, $x_{n+2}^2 = x_{n+1}x_n$, 故 $x_{n+2}^2 x_{n+1} = x_{n+1}^2 x_n$, 也即 $\{x_{n+1}^2 x_n\}$ 为常值数列, 由四则运算法则可得 $A^3 = x_2^2 x_1$, 故 $A = \sqrt[3]{x_2^2 x_1}$.

补充题:

16. 下述几种说法, 哪一种可以作为数列 $\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件:

(1) $\forall \varepsilon > 0$, $\forall p > 0$, $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, 均有 $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.

(2) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists p, N > 0$ 使得 $\forall n > N$, 均有 $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.

(3) $\forall \varepsilon > 0$, $\forall p > 0$ 以及 $\forall N > 0$ 使得 $\forall n \geqslant N$, 均有 $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.

(4) $\forall p \geqslant 1$, 均有 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+p} - x_n) = 0$.

(5) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$, 只要 $n > N$, 就有 $|x_n - x_N| < \varepsilon$.

(6) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon > 0$ 且 $\exists A_\varepsilon \in \mathbb{R}$, 只要 $n > N_\varepsilon$, 就有 $|x_n - A_\varepsilon| < \varepsilon$.

解: 第 (5), (6) 种说法可作为数列 $\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件, 其余的不行.

(1) 在 Cauchy 准则中, 正整数 N 仅与 ε 有关, 但与正整数 p 无关, 因此表述 (1) 不能作为数列 $\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件.

下面来举例说明. $\forall n \geqslant 1$, 定义 $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. 由 Cauchy 准则知数列 $\{x_n\}$ 发散. 但 $\forall n, p \geqslant 1$, 我们均有 $|x_{n+p} - x_n| \leqslant \frac{p}{n+1}$. 于是 $\forall \varepsilon > 0$ 以及 $\forall p > 0$, 若令 $N = \left[\frac{p}{\varepsilon}\right] + 1$, 则 $\forall n > N$, 均有 $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$, 即 $\{x_n\}$ 满足 (1).

(2) $\forall n \geqslant 1$, 定义 $x_n = (-1)^n$. 则数列 $\{x_n\}$ 发散. 但 $\forall \varepsilon > 0$, 若取 $p = 2$, $N = 1$, 则 $\forall n > N$, 均有 $|x_{n+p} - x_n| = 0 < \varepsilon$.

(3) 仅常数列能满足 (3). 用反证法. 假设 $\exists k, \ell > 0$ 使得 $k > \ell$ 且 $x_k \neq x_\ell$. 令 $\varepsilon = \frac{1}{2}|x_k - x_\ell|$. 取 $p = k - \ell$, $N = 1$, 而 $n = \ell$, 则 $|x_k - x_\ell| < \varepsilon$. 矛盾.

(4) 表述 (4) 实际上就是表述 (1).

下面来证明第 (5), (6) 种说法均与 Cauchy 准则等价.

Cauchy 准则 $\Rightarrow$ (5): 若 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 数列, 那么 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_1 > 0$ 使得 $\forall n, m > N_1$, 均有 $|x_n - x_m| < \varepsilon$. 若令 $N = N_1 + 1$, 那么 $\forall n > N$, 我们均有 $|x_n - x_N| < \varepsilon$, 故 (5) 成立.

(5) $\Rightarrow$ (6): 由 (5) 可知, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$, 只要 $n > N$, 就有 $|x_n - x_N| < \varepsilon$. 于是若令 $N_\varepsilon = N$, $A_\varepsilon = x_N$, 则只要 $n > N_\varepsilon$, 就有 $|x_n - A_\varepsilon| < \varepsilon$.

(6) $\Rightarrow$ Cauchy 准则: 由 (6) 立刻可导出, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_{\frac{\varepsilon}{2}} > 0$ 且 $\exists A_{\frac{\varepsilon}{2}} \in \mathbb{R}$, 只要 $n > N_{\frac{\varepsilon}{2}}$, 就有 $|x_n - A_{\frac{\varepsilon}{2}}| < \frac{\varepsilon}{2}$. 令 $N = N_{\frac{\varepsilon}{2}}$, 则 $\forall n, m > N$, 我们有

$$|x_n - x_m| \leqslant |x_n - A_{\frac{\varepsilon}{2}}| + |x_m - A_{\frac{\varepsilon}{2}}| < \varepsilon.$$

17. 设 $\{b_n\}$ 严格增趋于 $+\infty$. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = A \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, 求证: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A$.

证明: 首先考虑 $A \in \mathbb{R}$ 的情形. 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_1 > 0$ 使得 $\forall n > N_1$, 均有

$$\left| \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} - A \right| < \frac{1}{2}\varepsilon,$$

也即 $(A - \frac{\varepsilon}{2})(b_n - b_{n-1}) < a_n - a_{n-1} < (A - \frac{\varepsilon}{2})(b_n - b_{n-1})$. 由此可得

$$\begin{aligned}
(A - \frac{\varepsilon}{2})(b_n - b_{N_1}) &= (A - \frac{\varepsilon}{2}) \sum_{k=N_1+1}^{n} (b_k - b_{k-1}) \\
&< \sum_{k=N_1+1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_{N_1} \\
&< (A + \frac{\varepsilon}{2}) \sum_{k=N_1+1}^{n} (b_k - b_{k-1}) = (A + \frac{\varepsilon}{2})(b_n - b_{N_1}),
\end{aligned}$$

从而 $\left|\frac{a_n - a_{N_1}}{b_n - b_{N_1}} - A\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. 又 $\frac{a_n}{b_n} - A = \frac{a_{N_1} - A b_{N_1}}{b_n} + \big(1 - \frac{b_{N_1}}{b_n}\big)\big(\frac{a_n - a_{N_1}}{b_n - b_{N_1}} - A\big)$, 故

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - A\right| \leqslant \left|\frac{a_{N_1} - A b_{N_1}}{b_n}\right| + \left|\frac{a_n - a_{N_1}}{b_n - b_{N_1}} - A\right| < \left|\frac{a_{N_1} - A b_{N_1}}{b_n}\right| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

但 $(b_n)_{n\geqslant 0}$ 收敛于$+\infty$, 从而 $\exists N_2 > 0$ 使得 $\forall n > N_2$, 均有 $b_n > \frac{2}{\varepsilon}|a_{N_1} - A b_{N_1}|$. 令$N = \max(N_1, N_2)$, 则 $\forall n > N$, 我们有 $\left|\frac{a_n}{b_n} - A\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. 得证.

下面假设 $A = +\infty$. 至于 $A = -\infty$ 的情形, 可通过考虑数列 $(-a_n)_{n\geqslant 0}$ 将问题转化成 $A = +\infty$ 的情形.

$\forall M>0$, 由题设条件知, $\exists N_1>0$ 使得 $\forall n>N_1$, 均有$\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}>2M$, 即

$$a_n-a_{n-1}>2M(b_n-b_{n-1}),$$

由此立刻可得 $a_n-a_{N_1}>2M(b_n-b_{N_1})$, 进而我们有

$$\frac{a_n}{b_n}>2M+\frac{a_{N_1}-2Mb_{N_1}}{b_n}.$$

但 $(b_n)_{n\geqslant 0}$ 趋近于 $+\infty$, 因此 $\exists N_2>0$ 使得 $\forall n>N_2$, 我们有

$$b_n>\frac{1}{M}|a_{N_1}-2Mb_{N_1}|.$$

再令$N=\max(N_1,N_2)$, 那么 $\forall n>N$, 我们有 $\frac{a_n}{b_n}>2M-M=M$. 得证.

18. 设 $\{b_n\}$ 严格单调趋于 0. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=A\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A$.

证明: 不失一般性, 我们可假设 $\{b_n\}$ 严格递减, 否则用 $\{-b_n\}$ 来替代 $\{b_n\}$. 由于 $\{b_n\}$ 严格单调递减趋于 0, 则 $\forall n>0$, 均有 $b_n>0$.

首先假设 $A\in\mathbb{R}$. 则 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$ 使得 $\forall n>N$, 均有

$$\left|\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}-A\right|<\frac{1}{2}\varepsilon,$$

也即我们有 $(A-\frac{\varepsilon}{2})(b_n-b_{n-1})<a_n-a_{n-1}<(A-\frac{\varepsilon}{2})(b_n-b_{n-1})$. 由此可知, $\forall m>n>N$, 我们均有

$$\begin{aligned}(A-\frac{\varepsilon}{2})(b_n-b_m) &= (A-\frac{\varepsilon}{2})\sum_{k=n+1}^{m}(b_{k-1}-b_k)\\ &< \sum_{k=n+1}^{m}(a_{k-1}-a_k)=a_n-a_m\\ &< (A+\frac{\varepsilon}{2})\sum_{k=n+1}^{m}(b_{k-1}-b_k)=(A+\frac{\varepsilon}{2})(b_n-b_m).\end{aligned}$$

在上式中令 $m\to\infty$ 并利用数列 $\{a_m\}$, $\{b_m\}$ 均趋于 0 可得

$$(A-\frac{\varepsilon}{2})b_n\leqslant a_n\leqslant(A+\frac{\varepsilon}{2})b_n,$$

也即 $|\frac{a_n}{b_n}-A|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$. 由此可知所证结论此时成立.

下面假设 $A=+\infty$. 至于 $A=-\infty$ 的情形, 可通过考虑数列 $(-a_n)_{n\geqslant 0}$ 将问题转化成 $A=+\infty$ 的情形.

$\forall M>0$, 由题设条件知, $\exists N>0$ 使得 $\forall n>N$, 均有$\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}>2M$, 即

$$a_{n-1}-a_n>2M(b_{n-1}-b_n).$$

则 $\forall m>n>N$, 均有 $a_n-a_m>2M(b_n-b_m)$. 在上式中令 $m\to\infty$ 并利用数列 $\{a_m\}$, $\{b_m\}$ 均收敛于 0 得 $a_n\geqslant 2Mb_n$, 进而知 $\frac{a_n}{b_n}\geqslant 2M>M$. 故所证结论此时也成立.

19. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=a\in\mathbb{R}$, 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k=0$.

证明: $\forall n\geqslant 1$, 令 $b_n=\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k$, $c_n=\sum\limits_{k=1}^{n-1}a_k$. 则 $a_n=c_{n+1}-c_n$ 且 $c_1=0$, 故

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{k=1}^{n}k(c_{k+1}-c_k)=\sum_{k=1}^{n}kc_{k+1}-\sum_{k=1}^{n}kc_k \\ &= \sum_{k=1}^{n+1}(k-1)c_k-\sum_{k=1}^{n}kc_k=nc_{n+1}-\sum_{k=1}^{n}c_k. \end{aligned}$$

因 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=a$, 而由 Stolz 定理可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}c_k=a$, 则由四则运算法则知

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\big(nc_{n+1}-\sum_{k=1}^{n}c_k\big) \\ &= \lim_{n\to\infty}c_{n+1}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}c_k=0. \end{aligned}$$

20. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\sum\limits_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a_k=a$.

证明: $\forall\varepsilon>0$, 由极限的定义可知 $\exists N_1>0$ 使得 $\forall n>N$, 均有 $|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{3}$. 注意到 $\forall k\in\mathbb{N}$ $(1\leqslant k\leqslant N_1)$, 我们均有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}|a_k-a|=0,$$

则 $\exists N_2>0$ 使得 $\forall n>N_2$, 均有 $\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}|a_k-a|<\frac{\varepsilon}{3N_1}$. 由此令

$$N=\max\Big(N_1,N_2,\big[\log_2\frac{3|a|+1}{\varepsilon}\big]\Big).$$

那么 $\forall n>N$, 我们有

$$\begin{aligned} &\Big|\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a_k-a\Big|=\frac{1}{2^n}\Big|\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a_k-2^na\Big| \\ =\;& \frac{1}{2^n}\Big|\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(a_k-a)-a\Big|\leqslant\frac{|a|}{2^n}+\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}|a_k-a| \\ \leqslant\;& \frac{\varepsilon}{3}+\sum_{k=1}^{N_1}\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}|a_k-a|+\frac{1}{2^n}\sum_{k=N_1+1}^{n}\binom{n}{k}|a_k-a| \\ <\;& \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3N_1}\cdot N_1+\frac{\varepsilon}{3}\cdot\frac{1}{2^n}\sum_{k=N_1+1}^{n}\binom{n}{k} \\ \leqslant\;& \frac{2}{3}\varepsilon+\frac{\varepsilon}{3}\cdot\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\varepsilon. \end{aligned}$$

故所证结论成立.

注: 该题没法借助 Stolz 定理.