离散数学 2017 试题解析

无 68 何昊天

以下是 2017 级的期末试题（按考试时的顺序排列，原题是英文的），其中前 8 题每题 12 分，第 9 题 4 分，我给出了每道题的一个参考解法。由于我很菜，所以这份试题解析难免有不少疏漏之处，发现谬误的同学欢迎指正，各题目的解法可能也不唯一，同学们可以多加讨论。希望这份解析对同学们有所帮助，祝大家考试顺利！

Problem 1 化简下列和式：

(1) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

(2) $\sum_{k=m}^{n} C_n^k C_k^m$

Solution:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

$$\sum_{k=m}^{n} C_n^k C_k^m = \sum_{k=m}^{n} C_n^m C_{n-m}^{k-m} = C_n^m \sum_{k=m}^{n} C_{n-m}^{k-m} = C_n^m \sum_{k=0}^{n-m} C_{n-m}^{k} = C_n^m \cdot 2^{n-m}$$

现在所有求和号都被约去，则和式已化为最简。•

Problem 2 假设某小朋友有 n 元钱，他每天可以购买一件价值为 1 元的物品 A 或价值为 2 元的物品 B，其中物品 B 有两种，计算小朋友花完所有钱的方案数

Solution: 假设 J_n 表示小朋友花完 n 元钱的方案数，考虑他最后一天购买的物品，一共有三种不同情况，且这些情况之间是互斥的，所以有 $J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}$

下一步是构造 a, b 使得 $J_n - aJ_{n-1} = b(J_{n-1} - aJ_{n-2})$，易知 $a + b = 1$ 且 $ab = -2$，取一组解 $a = -1, b = 2$，则有 $J_n + J_{n-1} = 2(J_{n-1} + J_{n-2})$，进行递推得：

$$J_n + J_{n-1} = 2(J_{n-1} + J_{n-2}) = 2^2(J_{n-2} + J_{n-3}) = \cdots = 2^{n-1}(J_1 + J_0)$$

根据题意，$J_1=J_0=1$，所以 $J_n+J_{n-1}=2^n$，接下来进行错位相加：

$$\begin{gathered}J_n+J_{n-1}=2^n\\ -J_{n-1}-J_{n-2}=-2^{n-1}\\ J_{n-2}+J_{n-3}=2^{n-2}\\ \cdots\\ (-1)^{n-1}(J_1+J_0)=(-1)^{n-1}2^1\end{gathered}$$

上式全部相加后得 $J_n+(-1)^{n-1}J_0=2^n-2^{n-1}+\cdots+(-1)^{n-1}2$，注意到等号右边是等比数列，其首项为 $(-1)^{n-1}2$，公比为 -2，项数为 n，所以：

$$\begin{aligned}J_n+(-1)^{n-1}J_0&=(-1)^{n-1}2\cdot\frac{(1-(-2)^n)}{1+2}\\ &=(-1)^{n-1}\frac{2}{3}-\frac{1}{3}(-1)^{n-1}(-1)^n2^{n+1}\\ &=(-1)^{n-1}\frac{2}{3}+\frac{2^{n+1}}{3}\end{aligned}$$

又因为 $J_0=1$，所以 $J_n=\frac{2^{n+1}+(-1)^n}{3}$，注意刚才的推导过程默认了 $n\geq 1$，因此需要对通项公式验证 $n=0$ 的情况，发现仍然满足，所以花完所有钱的方案数就是 $J_n=\frac{2^{n+1}+(-1)^n}{3}$ $\bullet$

Problem 3 求解同余方程 $x^2\equiv 5x(mod\ 6)$

Solution: 移项并化简原方程可得 $x(x-5)\equiv 0(mod\ 6)$，由于 $6\equiv 2\cdot 3\equiv 3\cdot 4(mod\ 6)$，故可能有以下六种情况：

若 $x\equiv 0(mod\ 6)$，可解得 $x=0$

若 $x-5\equiv 0(mod\ 6)$，可解得 $x=5$

若 $x\equiv 2(mod\ 6)$ 且 $x-5\equiv 3(mod\ 6)$，可解得 $x=2$

若 $x\equiv 3(mod\ 6)$ 且 $x-5\equiv 2(mod\ 6)$，此时 x 无解

若 $x\equiv 3(mod\ 6)$ 且 $x-5\equiv 4(mod\ 6)$，可解得 $x=3$

若 $x\equiv 4(mod\ 6)$ 且 $x-5\equiv 3(mod\ 6)$，此时 x 无解

故原方程的解为 $x=0,x=2,x=3$ 或 $x=5$ $\bullet$

Problem 4 试证 *Weinstein* 定理：从 *Fibonacci* 数列的前 $2n$ 项 $F_1,F_2,\cdots,F_{2n}$ 中任选 $n+1$ 个数，则一定包含两个数，使得其中一个数能够被另一个整除

Solution: 先证明 $\forall k,m\geq 1$，如果 $k|m$，则 $F_k|F_m$，不妨设 $m=tk$，对 t 做数学归纳

假设 $F_k|F_{(t-1)k}$，考虑 $F_{tk}=F_{(t-1)k+k-1+1}=F_{(t-1)k}F_{k-1}+F_{(t-1)k+1}F_k$，由 $F_k|F_{(t-1)k}$ 知 $F_k|F_{(t-1)k}F_{k-1}$，但显然 $F_k|F_{(t-1)k+1}F_k$，故 $F_k|F_{tk}$，由归纳假设，命题得证

设选出来的 $n+1$ 个数为 $F_{k_1}, F_{k_2}, \cdots, F_{k_{n+1}}$，根据刚才的结论，只需证 $k_1, k_2, \cdots, k_{n+1}$ 中存在一个数能够被另一个整除即可

对于 $1, 2, 3, \cdots, 2n$，将第 i 个数写成 $a_i \cdot 2^{p_i}$ 的形式，其中 a_i 是奇数，易知 a_i 的可能取值只有 $1, 3, 5, \cdots, 2n-1$ 共 n 种，则根据鸽巢原理，$k_1, k_2, \cdots, k_{n+1}$ 中一定存在两个数 k_i, k_j，使得 $a_i = a_j$，不妨设 $p_i < p_j$，则此时必有 $a_i \cdot 2^{p_i} | a_j \cdot 2^{p_j}$，即 $k_i | k_j$，故 $F_{k_i} | F_{k_j}$，原定理得证 $\bullet$

Problem 5 设图 G 有欧拉回路，证明存在 G 中的圈 $C_1, C_2, \cdots, C_k$，使得 G 的边集 $E(G) = E(C_1) \cup E(C_2) \cup \cdots \cup E(C_k)$，且 $\forall i, j, E(C_i) \cap E(C_j) = \varnothing$

Solution: 设 G 的欧拉回路为 $v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \cdots e_n v_n$，其中所有的边不重复，但顶点可能有重复，若顶点无重复，则 G 本身就是一个圈，命题成立

若欧拉回路中有顶点重复，不妨设 $v_i = v_j$ 且 v_i, v_j 之间无其它重复顶点，则 $v_i e_{i+1} v_{i+1} \cdots e_j v_j$ 构成一个圈，设其为 C_1，将 C_1 从 G 中删除，得到 $G - C_1$ 的欧拉回路 $v_0 e_1 v_1 \cdots e_i v_i e_{j+1} v_{j+1} \cdots e_n v_n$

重复以上操作，由于每次操作后剩余图的欧拉回路严格变短，故至多进行有限次操作，假设依次得到 $C_1, C_2, \cdots, C_{k-1}$ 后，$G - C_1 - C_2 - \cdots - C_{k-1}$ 中无顶点重复，则它构成一个圈，记为 C_k

由于欧拉回路上每条边出现且仅出现过一次，根据刚才的构造规则，易知 $C_1, C_2, \cdots, C_k$ 满足条件，原命题得证 $\bullet$

Problem 6 两名玩家在图 G 上玩一个游戏，每个人轮流每次从图中选出一个节点来，得到节点序列 $v_0, v_1, v_2, \cdots$，要求每次选取的节点必须和之前已经被选出过的节点不同，且 v_{i+1} 必须与 v_i 相邻，如果轮到某位玩家时没有可以选的节点了，则该玩家输掉游戏，证明如果 G 没有完美匹配，则先手玩家有必胜策略

Solution: 任取 G 的一个最大匹配，将 G 中的边分为匹配边和未匹配边两种，由于 G 没有完美匹配，则此时一定存在未匹配点，下面我们来构造一个先手必胜策略

先手玩家任取一个未匹配点作为 v_0，则后手玩家取到的 v_1 一定是匹配点，否则 v_0 和 v_1 可以匹配，与之前取的是最大匹配矛盾

设与 v_1 匹配的点是 v_2，先手玩家选取这个点后，后手玩家取到的下一个点 v_3 也一定是匹配点，否则 $v_0 \to v_1 \to v_2 \to v_3$ 形成增广路，与最大匹配矛盾

以此类推，如果某次后手玩家选择的点 u 是匹配点，则与 u 匹配的点一定没有被取过，因为路径中除了第一个点是未匹配点外，恰好每两个相邻的点相互匹配，因此先手玩家总是可以选择与 u 相配对的点将游戏继续下去

如果某次后手玩家选择的点 u 是未匹配点，则选出来的节点构成的路径是增广路，与最开始取的最大匹配矛盾

综上所述，由于游戏一定在有限步内结束，故只可能出现轮到后手玩家时没有节点可选的情况，即先手玩家依此策略必胜，原命题得证 $\bullet$

Problem 7 设图 G 有 11 个顶点，证明 G 和其补图 $\bar{G}$ 至少有一个不是平面图

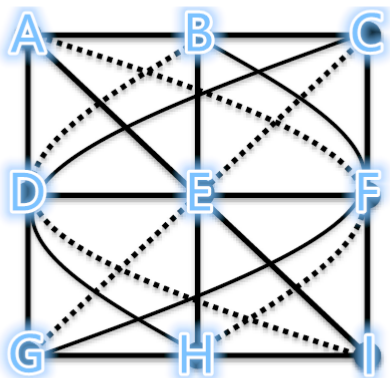
Solution: 易知 G 和 $\bar{G}$ 的边数之和 $|E(G)|+|E(\bar{G})|=\frac{|V(G)|\cdot(|V(G)|-1)}{2}=55$

假设 G 和 $\bar{G}$ 都是平面图，则 $|E(G)|\leq 3|V(G)|-6=27, |E(\bar{G})|\leq 3|V(\bar{G})|-6=27$，两式相加得 $|E(G)|+|E(\bar{G})|\leq 54$，矛盾，故 G 和 $\bar{G}$ 至少有一个不是平面图 •

Problem 8 能否找到一个合适的安排，使得 9 个女生每天分成 3 组、每组 3 人出去散步，4 天后任意两人都曾共同散步过一次且仅一次？

Solution:

这道题的解法来源于 Tictactoe 平面



假设女生的编号依次为 A,B,C,D,E,F,G,H,I，可以给出方案如下：

(1) 第 1 天：$(A,B,C)(D,E,F)(G,H,I)$

(2) 第 2 天：$(A,D,G)(B,E,H)(C,F,I)$

(3) 第 3 天：$(A,E,I)(B,F,G)(C,D,H)$

(4) 第 4 天：$(A,F,H)(B,D,I)(C,E,G)$

综上所述，存在可行的安排方案如上 •

Problem 9 设图 G 中每个顶点至多位于 k 个奇圈上，试求 G 的最大色数

Solution: 我们令 t 是满足 $k\leq C_t^2-1=\frac{t^2-t-2}{2}$ 的最小正整数，即 $t=\lceil\frac{1+\sqrt{8k+9}}{2}\rceil$，我们首先证明 G 的色数 $\chi(G)\leq t$，当 $k=0$ 时 G 是二分图，显然有 $\chi(G)\leq 2$，当 $k\geq 1$ 时，实际上必须有 $t\geq 3$，下面的证明只考虑 $t\geq 3$ 的情形

对 G 的顶点数 n 做归纳，当 $n \le t$ 时，显然有 $\chi(G) \le t$，故初始情况成立，对某个 $n \ge t$，我们假设所有顶点数量不超过 n 且每个顶点至多位于 k 个奇圈上的图 H 都满足 $\chi(H) \le t$，下证对一个顶点数量为 n 且每个顶点至多位于 k 个奇圈上的图 G 满足 $\chi(G) \le t$

考虑图 G 去掉某个顶点 v 后得到的图 $G-v$，由于 $|V(G-v)| = n$ 且 $G-v$ 中每个顶点显然也至多位于 k 个奇圈上，根据归纳假设，$G-v$ 可以被 $t-$ 着色

考虑这 t 种颜色两两组合形成的二元组，共有 C_t^2 种，在考虑 v 所在的所有奇圈，每个奇圈上与 v 相邻的两个顶点构成一个二元组，共有 k 组，由于 $C_t^2 > k$，因此必定存在一种颜色的二元组，使得不存在一个顶点的二元组，使得后者的两个顶点恰好被染成前者的两种颜色，不妨设这个颜色的二元组为红色和蓝色，换句话说，不存在一个红色的顶点 u 和一个蓝色的顶点 w，使得 u, w 都与 v 相邻，且 u, v, w 位于同一个奇圈上

取出 $G-v$ 的所有红色顶点和蓝色顶点，得到 $G-v$ 的一个二分子图 G'，假设 G' 中没有红色顶点与 v 相邻，则 v 可以染成红色，即 G 可以 $t-$ 着色

假设 G' 中有红色顶点 u 与 v 相邻，下面我们证明不存在蓝色顶点 w 与 u 相邻，使得 u, w 处于 G' 的同一个连通块中，如果存在这样的节点 w，则 G' 中存在 $u \to w$ 的路径 P，且由于 G' 是二分图，P 的长度为奇数，而 P 再加上 $< u, v >, < v, w >$ 两条边后得到一个奇圈，这与之前的结论矛盾，所以当前结论成立

现在考虑 G' 中所有与 v 相邻的红色顶点 $u_1, u_2, \cdots, u_m$，将它们所在的 G' 的连通块内的红色顶点改为蓝色、蓝色顶点改为红色，易知修改之后的着色方案仍然是 $G-v$ 的一个 $t-$ 着色，且现在在 G' 中没有红色顶点与 v 相邻，则 v 可以染成红色，即 G 可以 $t-$ 着色

综上所述，$\chi(G) \le t$ 对所有的 $k \ge 0, t = \lceil \frac{1+\sqrt{8k+9}}{2} \rceil$ 成立

事实上，依照上述证明过程，不难构造出每个顶点至多位于 k 个奇圈上的图 G，使得图 G 不能被 $(t-1)-$ 着色，因此 G 的最大色数 $\chi(G) = \lceil \frac{1+\sqrt{8k+9}}{2} \rceil$ •