Note Title

矩阵. 向量组. 方程组. 行列式

线性空间 线性变换 $\quad (f, g) = \int_a^b f(x) g(x) dx$.

一. 矩阵的秩.

秩的三种语言
- 矩阵
- 向量组.
- 方程组(空间).

① $r(A) = r(A^T)$

② $A \in M_n(K) \qquad r(A) = n \iff A$ 满秩

$\iff A$ 列向量组线性无关.

$\iff A$ 可逆

$\iff |A| \neq 0$

$\iff A$ 没有零特征值.

③ $r\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = r(A) + r(B)$.

④ $r\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix} \geq r(A) + r(B)$. $\qquad \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix} \to$

⑤. $A_{m\times n} \quad B_{s\times n}$

$r(A), r(B) \leq r\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \leq r(A) + r(B)$.

⑥ $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$.

证明: $r(A+B) \leq r\begin{bmatrix} A+B \\ B \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = r(A) + r(B)$.

⑦ 希尔维斯特不等式: $A \in M_{m\cdot \underline{\underline{n}}}(K)$. $B \in M_{\underline{\underline{n}}\cdot s}(K)$. 则

$r(A) + r(B) - n \leq r(AB) \leq r(A), \ r(B)$

证明: 设 $r(A) = r$. $\exists P \in M_m(K)$. $Q \in M_n(K)$. 可逆

s.t. $PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad$ 相抵.

$r(AB) = r(PAB) = r(PAQ\,Q^{-1}B) = r\left(\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1}B\right)$

将 $Q^{-1}B$ 分块 $Q^{-1}B=\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \to r\text{行} \\ \to (n-r)\text{行} \end{array}$

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1}B = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$r(AB) = r\begin{bmatrix} C_1 \\ 0 \end{bmatrix} = r(C_1) \leqslant r = r(A).$$

$$r(AB) = r((AB)^T) = r(B^T A^T) \leqslant r(B^T) = r(B)$$

另一方面. $Q^{-1}B=\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$ $r(B) = r(Q^{-1}B) = r\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \leqslant r(C_1)+r(C_2)$

$\leqslant r(C_1)+n-r$

$=r(C_1)+n-r(A)$

$r(C_1) \geqslant r(A)+r(B)-n.$

从而 $r(AB)=r(C_1) \geqslant r(A)+r(B)-n.$

$$r(A)+r(B)-n \leqslant r(AB) \leqslant r(A),\ r(B)$$

推论 ①: 若 $AB=0 \Rightarrow r(A)+r(B) \leqslant n$

② 若 $r(A)=n$ 则 $r(AB)=r(B)$.

若 $r(B)=n$ 则 $r(AB)=r(A)$

例1: $AB=AC \not\Rightarrow B=C$

$\left\{\begin{array}{l} AB=AC \\ A\text{列满秩} \end{array}\right. \Rightarrow B=C.$

证: $A(B-C)=0$ 由A列满秩 $\Rightarrow r(\underbrace{A(B-C)}_{=0}) = r(B-C)$

$B=C.$

例: $AX=0$ $A\in M_{m\cdot n}(K)$

$AX=0$ 只有零解 $\Longleftrightarrow r(A)=n$

$AX=0$ 有无穷多解 $\Longleftrightarrow r(A)<n$

例4: $AX=b$ 非齐次方程组解.

$$[A \,\vdots\, b] \xrightarrow{\text{行变换}} \left[\begin{array}{ccccccc|c} c_{11} & \cdots & c_{1i_2} & \cdots & c_{1i_r} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ & & c_{2i_2} & \cdots & c_{2i_r} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & c_{ri_r} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right] \quad r\text{个}$$

增广矩阵

$c_{11} \cdot c_{2i_2} \cdots c_{ri_r} \neq 0$

① $d_{r+1} \neq 0$. 方程组无解　　$r(A) \neq r(A \,\vdots\, b)$

② $d_{r+1} = 0$　　有解　　$r(A) = r(A \,\vdots\, b) = \begin{cases} n & \text{唯一解} \\ \_\_\_ & \text{无穷多解} \end{cases}$

$\underbrace{\boxed{AX=0 \quad r(A)<n \quad n-r\text{个自由变量.}}}$

$\dim N(A) = n-r.$

例1: $\underline{AB=O}$　　$A \in M_{m.n}(K)$.　　$B \in M_{n.s}(K)$

证明: $r(A)+r(B) \leq n$

法1: 希尔维斯特不等式 立得.

I 单位阵.
E

法2:
$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ E & B \end{bmatrix} \xrightarrow[\triangle]{\text{行}} \begin{bmatrix} 0 & -AB \\ E & B \end{bmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix}\right] \xrightarrow{\text{列}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ E & 0 \end{bmatrix}$$

$$r(A)+r(B) \leq r\begin{bmatrix} A & 0 \\ E & B \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ E & 0 \end{bmatrix} = n$$

法3: $AB=O$　　$A[\beta_1. \beta_2 \cdots \beta_s] = [0.\ 0.\ \cdots 0]$

$A \in M_{m.n}(K)$. $B \in M_{n,s}(K)$

$\underline{\beta_1. \beta_2 \cdots \beta_s}$ 均为 $\underline{AX=0}$ 的解

① 从而 $\beta_1. \beta_2 \cdots \beta_s$ 的极大无关组可被 $AX=0$ 之基础解系表出

$\eta_1, \eta_2 \cdots \eta_{n-r(A)}$

从而 $r(\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_s) \le n - r(A)$

即 $r(A) + r(B) \le n$.

② $\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_s$ 生成子空间 是 $N(A)$ 之子空间.

$$\underbrace{\dim \operatorname{Span}(\beta_1 \cdots \beta_s)}_{= r(B)} \le \underbrace{\dim N(A)}_{= n - r(A)}$$

例2: $AB = 0$ 且 $A \in M_{m \cdot n}(K)$. $B \in M_{n \cdot s}(K)$.

且 $r(B) = n$ 证: $A = 0$

法1: 希尔维斯特不等式 $AB = 0 \Rightarrow r(A) + \underset{n}{\underset{\parallel}{r(B)}} \le n$

$\Rightarrow r(A) \le 0 \Rightarrow A = 0$.

法2: 由 $AB = 0 \Rightarrow B^T A^T = 0$

即 A^T 的每一列 为 方程组 $B^T X = 0$ 之解.

又 $r(B^T) = r(B) = n$ $B^T \in M_{s \cdot n}(K)$.

从而 $B^T X = 0$ 只有零解 故 $A^T = 0$. $A = 0$.

法3: $AB = 0$. $r(B) = n$ 则 B 之行向量组无关.

$AB = 0$
Δ
行分块

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdots 0 \cdots \\ \cdots 0 \cdots \\ \vdots \\ \cdots 0 \cdots \end{bmatrix}$$

$a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \cdots + a_{in}\beta_n = 0$ 行向量.

行向量组无关 $\Rightarrow a_{i1} = a_{i2} = \cdots = a_{in} = 0 \quad \forall i \in \{1, 2 \cdots m\}$.

于是 $A = 0$.

例

1. $A^n = A \cdot A \cdots A = \alpha^T \beta \alpha^T \beta \cdots \alpha^T \beta$

$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} [b_1 \ b_2 \ b_3]$ $\quad A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \ 2 \ 3]$

4. $\beta = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ $\quad \beta\beta^T = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} [x \ y \ z] = \begin{bmatrix} x^2 & xy & xz \\ yx & y^2 & yz \\ zx & zy & z^2 \end{bmatrix}$

$\beta^T\beta = [x \ y \ z] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x^2 + y^2 + z^2$

若 $A\alpha = \lambda\alpha \ (\alpha \neq 0)$ 则 λ 为 A 之特征值，α 为 λ 之特征向量。

$\beta^T\beta$ 数。 $\quad \beta\beta^T$ 3阶矩阵 $\quad \beta\beta^T\beta = (\beta^T\beta)\beta$

5. $A^2 + B^2 - AB - BA = A + B \Rightarrow AB + BA = 0$

$A^2 = A, \ B^2 = B$

$\Downarrow$

$A^2B + ABA = 0$

$AB + ABA = 0$

$ABA + BA^2 = 0$, $A^2 = A$

$A^3 + E = E$

$\underline{(A+E)}\,\underline{(A^2 + E - A)} = E$

$$A(A^{-1}+B^{-1})B = (I + AB^{-1})B = B + A$$

$$A^{-1}+B^{-1} = \underline{A^{-1}(A+B)B^{-1}} = \underline{B^{-1}(A+B)A^{-1}}.$$

$$(A^{-1}+B^{-1})^{-1} = B(A+B)^{-1}A = A(A+B)^{-1}B$$

$$\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{ab}{a+b}$$

$$A^2 - A - 2I = 0$$

$$(A+2I)(A-3I) = A^2 - \cancel{A} - 6I = -4I$$

$$(A+2I)^{-1} = -\frac{A-3I}{4}.$$

$-1,\ 0\ .\ 0\ .$

$-4\ .\ 0\ .\ 0$

$$[A \mid I] \xrightarrow{\text{行}} [I \mid A^{-1}]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -b & & & \\ & 1 & -b & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & -b \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\3\\3\end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \qquad A\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \qquad A\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}}} = \begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

2. $B = AE_1E_2$

$$B^{-1} = E_2^{-1}E_1^{-1}A^{-1} = E_2E_1A^{-1}.$$

$$A\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=C$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}_{P}A\underbrace{\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}_{P^{-1}}=C \qquad PAP^{-1}=C$$

$r(A)+r(B)\leq n$

例：再证：$r(AB)\leq r(A),\ r(B)$ $\qquad A\in M_{m,n}(K)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad B\in M_{n,s}(K)$

法1：矩阵语言. 希多组斯特不到.

法2：记 $C=AB$ 则 C 的每一列可由 A 的列向量组表出.

即 C 之极大无关组可被 A 之极大无关组表出.

即 $r(C)\leq r(A)$

从而 $r(AB)\leq r(A)$.

法3：若 $BX=0\Longrightarrow ABX=0$ $\qquad A_{m,n}\quad B_{n,s}$

即 $BX=0$ 之解 均为 $ABX=0$ 之解

$N(B)$ 为 $N(AB)$ 之子空间.

$\dim N(B)\leq\dim N(AB)$

即 $s-r(B)\leq s-r(AB)$

$\Rightarrow r(AB)\leq r(B)$.

例: $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n \in \mathbb{R}^n$ 则

$\forall \beta \in \mathbb{R}^n$ $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$ 有解 $\Longleftrightarrow$ $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$ 线性无关.

证明: $\Longleftarrow$: 法1: 设 $A = [\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n]$ $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 无关 从而 A 可逆

$AX = \beta \Rightarrow X = A^{-1}\beta$ 有解

$\Longleftarrow$ 法2: $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 无关. $\dim \mathbb{R}^n = n$ 从而

$\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 一组基. $\forall \beta \in \mathbb{R}^n$. β 可由 $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 表出.

于是 $x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$ 有解.

$\Longrightarrow$: 法1: $\forall \beta \in \mathbb{R}^n$ $x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$ 有解

即 $\forall \beta \in \mathbb{R}^n$ β 可由 $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 表出

即 $\mathbb{R}^n$ 为 $\mathrm{Span}(\alpha_1 \cdots \alpha_n)$ 的子空间.

显然 $\mathrm{Span}(\alpha_1 \cdots \alpha_n) \subseteq \mathbb{R}^n$

故 $\mathrm{Span}(\alpha_1 \cdots \alpha_n) = \mathbb{R}^n$. $\dim \mathrm{Span}(\alpha_1 \cdots \alpha_n) = n$.

即 $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 极大无关组 向量个数为 n 个 即 $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 无关.

$\Longrightarrow$ 法2: 反证法: 假设相关. $A = [\alpha_1 \cdots \alpha_n]$ 不可逆.

设 $r(A) = r < n$. $\exists$ 可逆矩阵 P.

$$PA = \begin{bmatrix} c_{11} \cdots & c_{1i_2} \cdots & c_{1i_r} \cdots & c_{1n} \\ 0 \cdots & c_{2i_2} \cdots & c_{2i_r} \cdots & c_{2n} \\ & \ddots & & \\ 0 \quad 0 \cdots & & c_{ri_r} \cdots & c_{rn} \\ \hline 0 \quad 0 \cdots & & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad c_{11}, c_{2i_2} \cdots c_{ri_r} \neq 0.$$

故对 $PAX = P\beta$ 与 $AX = \beta$ 同解

取 $\beta = P^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \to r \\ \to r+1 \\ \\ \end{matrix}$ 于是 $AX = \beta = P^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \to r \\ \to r+1 \\ \\ \end{matrix}$

$$PAx = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \to r+1 \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

无解　矛盾.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \; r+1$$