（科目：微积分 **数 学 作 业 纸**

编号：2020012363 班级：软01 姓名：赵晨阳 第 1 页

7.(8) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\tan x}{x}-\frac{\sin x}{x}}{x^2} = \cancel{\frac{\lim \frac{\tan x}{x}}{\lim\limits_{x\to0} x^2}}$

$= \lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3} = \lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x\cdot\left(\frac{1-\cos x}{\cos x}\right)}{x^3}$

$= \lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x\cdot x^3} = \lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{x}\cdot 2\cdot\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\frac14}{\cos x}$

$= \frac12$

8.(5) $x\to1$时，$\frac{1}{x-1}\to\infty$. 令$t=\frac{1}{x-1}$ ∴ $x=\frac1t+1$

$\lim\limits_{x\to1}(2x-1)^{\frac{1}{x-1}} \xRightarrow{t=\frac{1}{x-1}} \lim\limits_{t\to\infty}\left(\frac2t+1\right)^t = \lim\limits_{t\to\infty}\left(\frac2t+1\right)^{\frac t2\cdot2}$

令$m=\frac t2$. 则$t\to\infty$时, $m\to\infty$

原式 $= \lim\limits_{m\to\infty}\left(\frac1m+1\right)^{m\cdot2} = e^2$

(6) $\lim\limits_{x\to0}\left(1-\left(2\sin^2\frac x2-4\sin\frac x2\cdot\cos\frac x2\right)\right)^{\frac{+1\cdot\left(2\sin^2\frac x2-4\sin\frac x2\cdot\cos\frac x2\right)}{\left(2\sin^2\frac x2-4\sin\frac x2\cdot\cos\frac x2\right)\cdot x}}$

$\lim\limits_{x\to0}\left(1-\left(2\sin^2\frac x2-4\sin\frac x2\cdot\cos\frac x2\right)\right)^{\frac{-1}{\left(2\sin^2\frac x2-4\sin\frac x2\cdot\cos\frac x2\right)}} = e$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{-\left(2\sin^2\frac x2-4\sin\frac x2\cdot\cos\frac x2\right)}{x}$

$= -\lim\limits_{x\to0}\sin\frac x2\cdot\frac{\sin\frac x2}{\frac x2} + 2\lim\limits_{x\to0}\cos\frac x2\cdot\frac{\sin\frac x2}{\frac x2}$

$= -0+2 = +2$

∴ 原式 $= e^{+2}$

9.(1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(1-a^2)x^2-(1+2ab)x+1-b^2}{\sqrt{x^2-x+1}+ax+b}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(1-a^2)x-(1+2ab)+\frac{1-b^2}{x}}{\sqrt{1-\frac1x+\frac1{x^2}}+a+\frac bx}$

下式: $\lim\limits_{x\to-\infty} = 1+a$ 则上式 lim 必存在且为0

∴ $1-a^2=0$ $1+2ab=0$ 此处讨论$a=1$很烦

∴ $\begin{cases}a=1\\ b=-\frac12\end{cases}$ $\begin{cases}a=-1\\ b=\frac12\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x+1}-ax-b \xrightarrow[x=-\frac1t]{t=-\frac1x} \lim\limits_{t\to0^+}\sqrt{\frac{1+t+t^2}{t^2}}+\frac at-b$

$= \lim\limits_{t\to0^+}\frac{\sqrt{t^2+t+1}+a}{t}-b = 0$

由于$t\to0^+$, 故$\sqrt{t^2+t+1}+a\to0$ (!!!!)

∴ $a = -\lim\limits_{t\to0^+}\sqrt{t^2+t+1} = -1$

而 $b = \lim\limits_{t\to0^+}\frac{\sqrt{t^2+t+1}-1}{t}$

$= \lim\limits_{t\to0^+}\frac{t+1}{\left(\sqrt{t^2+t+1}+1\right)} = \frac12$

$= \cancel{\lim\limits_{t\to0^+}\frac{1+\frac1t}{\sqrt{1+\frac1t+\frac1{t^2}}+\frac1t}}$

7.4. 令$\theta=\arctan x$且$\theta\neq\pm\frac\pi2$

则 $x=\tan\theta$

$\lim\limits_{x\to0}\arctan x=0$ 且$x\neq0$时, $\arctan x\neq0$

故 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arctan x}{2x} = \lim\limits_{\theta\to0}\frac{\theta}{2\tan\theta} = \lim\limits_{\theta\to0}\frac{\cos\theta\cdot\theta}{2\sin\theta}$

$= \lim\limits_{\theta\to0}\frac{1}{2\frac{\sin\theta}{\theta}}\cdot\lim\limits_{\theta\to0}\cos\theta = \frac12$

14. $\exists x_0\in R$, 假定$\lim\limits_{x\to x_0}D(x)$存在且为$A$. 故 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, $x\in U(x_0,\delta)$时, $|D(x)-A|<\varepsilon$ 恒成立. 当$U(x_0,\delta)$内, 有无穷个有理数与无理数;

∴ $|0-A|<\varepsilon$ 且 $|1-A|<\varepsilon$ 永远成立

取$\varepsilon=\frac1{10}$, 则 $-\frac1{10}<A<\frac1{10}$

且 $\frac9{10}<A<\frac{11}{10}$

矛盾.

∴ A不存在

∴ $D(x)$无极限

8. $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin x^2}{(x-0)^2}=1$ 故 $\sin x^2$ 为2阶无穷小量

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{2\sqrt{x}+x^3}{(x-0)^{\frac12}}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}\cdot(2+(\sqrt{x})^5)}{\sqrt{x}}=1$

$\therefore$ $2\sqrt{x}+x^3$ 为 $\frac12$ 阶无穷小

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^{x^3}-1}{x^3}=e$ 故 $e^{x^3}-1$ 为3阶无穷小

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin(\tan x)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin(\tan x)}{\tan x}\cdot\frac{\tan x}{x}=1$

$\sin(\tan x)$ 为1阶无穷小

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x^{\frac23})}{x^{\frac23}}=1$ $\therefore$ $\ln(1+x^{\frac23})$ 为 $\frac23$ 阶无穷小

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1-\cos x^2}{x^4}=\frac12$ $\therefore$ $1-\cos x^2$ 为4阶无穷小

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^{\frac14}(x^{\frac14}-1)}{x^{\frac14}}=-1$

$\therefore$ $\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}$ 为 $\frac14$ 阶无穷小量

从高到低：$1-\cos x^2$；$e^{x^3}-1$；$\sin x^2$；$\ln(1+x^{\frac23})$；$2\sqrt{x}+x^3$；$\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2}=1$. n^2 为2阶无穷大量

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{e^n}=0$. e^n 为 n^2 高阶无穷大

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(1+n^2)}{n^2}=0$. n^2 为 $\ln(1+n^2)$ 高阶无穷大

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$. n^n 为 $n!$ 高阶无穷大

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^n}{n!}=0$. $n!$ 为 e^n 高阶无穷大

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{e^n}=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac2e)^n=0$. e^n 为 2^n 高阶无穷大

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n}=0$. 2^n 为 n^2 高阶无穷大

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3+\sqrt{n}}}{n^2}=0$. n^2 为 $\sqrt{n^3+\sqrt{n}}$ 高阶无穷大

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3+\sqrt{n}}}=0$. $\sqrt{n^3+\sqrt{n}}$ 为 $\sqrt{n}$ 高阶无穷大

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(1+n^2)}{\sqrt{n}}=0$. $\sqrt{n}$ 为 $\ln(1+n^2)$ 高阶无穷大

故 阶数从大到小为，

n^n；$n!$；e^n；2^n；n^2；$\sqrt{n^3+\sqrt{n}}$；$\sqrt{n}$；$\ln(1+n^2)$

12.(1)$\Rightarrow$(2). 由定义有：$f(x)$ 定义在 $(a,+\infty)$ 内；$\forall\varepsilon>0$，$\exists M>0$，当 $x>M$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$ 恒成立；故取 $\varepsilon'=\frac12\varepsilon$. $\exists M'$ 使得 $x_2>x_1>M$ 时，$|f(x_2)-f(x_1)|\le|f(x_1)-A|+|f(x_2)-A|<\varepsilon$

即 (1)$\Rightarrow$(2)

(3)$\Rightarrow$(1) 假设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\ne A$. 则 ~~$\forall\delta>0$. 均~~ $\exists\varepsilon_0>0$ 使得

~~$\exists\varepsilon_0>0$, $\exists x_\delta\in\mathring{U}(x_0,\delta)$. 有 $|f(x_\delta)-A|\ge\varepsilon_0$~~

$\forall M>0$，$\exists x_M>M$ 且 $|f(x_M)-A|\ge\varepsilon_0$

取 $x_n=x_M+n-1$. 则 x_n 趋向 $+\infty$ 且

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x_n)=A$. 与 $|f(x_1)-A|=|f(x_M)-A|\ge\varepsilon_0$

矛盾. 故 (3)$\Rightarrow$(1) 成立

(2)$\Rightarrow$(3). 可知 $\forall\varepsilon>0$，$\exists M>0$. $x_2>x_1>M$ 时 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$. 取 x_n 为任意一个趋于 $+\infty$ 的点列，$\exists M>0$ 对应 $\exists N>0$，当 $m,n>N$ 时，$x_m>x_n>M$. 有 $|f(x_m)-f(x_n)|<\varepsilon$. 从而 $\{f(x_n)\}$ 为Cauthy. 设其收敛于B

~~又点列 $\{y_n\}$ 趋于 $+\infty$. $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A$. 下证 $A=B$.~~

~~取 $\{z_n\}$. $z_{2n-1}=x_n$. $z_{2n}=y_n$ 且 z_n 趋于 $+\infty$~~

~~则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(z_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}f(z_{2n-1})=\lim\limits_{n\to\infty}f(z_{2n})$~~

~~$\therefore A=B$~~

$\therefore$ (1)$\Rightarrow$(2)$\Rightarrow$(3)$\Rightarrow$(1)

得证 这题logic有毒，应加上所有数列均收敛，称此极限为A.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\tan x)}{\tan(\sin x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\tan x)}{\tan x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{\frac{\tan(\sin x)\cdot\sin x}{\sin x}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^{\sin x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^{\sin x}-1}{\sin x\cdot\ln a}\cdot\frac{\sin x\cdot\ln a}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\ln a}{x}=\ln a$

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+x\sin x-\cos^2 x}{x^2(\sqrt{1+x\cdot\sin x}+\cos x)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x(x+\sin x)}{x\cdot x(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x)}$

$=1$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin^2\frac{x}{2}}{2\cdot(\frac{x}{2})^2}=1$

故 $1-\cos x$ 与 $\frac{1}{2}x^2$ 为等价无穷小

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+2x)^\beta}{2\beta x+1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+C_\beta^1\cdot 1^{\beta-1}\cdot 2x+\cdots}{2\beta x+1}$

$=1$ 故 $(1+2x^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\frac{2}{3}x^2$ 为等价无穷小

$\therefore\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\quad\therefore 2=\frac{3}{2}$

12. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^p(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}})$ $x^p(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}})=x^p a^{\frac{1}{x+1}}(a^{\frac{1}{x(x+1)}}-1)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}x^{p-1}\cdot(\frac{a^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}-\frac{a^{\frac{1}{x+1}}}{\frac{1}{x+1}}\cdot\frac{x}{x+1})$ $\sim x^p\cdot 1\cdot\frac{\ln a}{x(x+1)}\ (x\to+\infty)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}x^{p-1}(\underline{\ln a-\ln a\cdot\frac{x}{x+1}})$ $\longrightarrow$ 此处有问题

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{p-1}}{x+1}\ln a\quad\therefore p\le 2$

13. $\forall\varepsilon>0,\exists M>0$. 当 $U>M$ 时，$|f(u)-A|<\varepsilon$ 恒成立

而对每个 M，均 $\exists\delta>0$，$x\in U(x_0,\delta)$ 时，$|g(x)|>M$.

故 $\forall\varepsilon>0,\exists M>0,\exists\delta>0$，使 $x\in U(x_0,\delta)$ 时，

$|g(x)|>M$ 且 $|f(g(x))-A|<\varepsilon$. 即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(g(x))=A$.

将 ∞ 换为 $+\infty$ 或 $-\infty$，结论仍成立