离散数学 2015 试题解析

无 68 何昊天

以下是 2015 级的期末试题（按考试时的顺序排列，原题是英文的），其中前 8 题每题 12 分，第 9 题 4 分，我给出了每道题的一个参考解法。由于我很菜，所以这份试题解析难免有不少疏漏之处，发现谬误的同学欢迎指正，各题目的解法可能也不唯一，同学们可以多加讨论。希望这份解析对同学们有所帮助，祝大家考试顺利！

Problem 1 计算 $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}C(n+k,k)$

Solution: 考虑数学归纳法，当 $n=1$ 时，原式为 $\frac{1}{2^0}C(1,0)+\frac{1}{2^1}C(2,1)=2$，当 $n=2$ 时，原式为 $\frac{1}{2^0}C(2,0)+\frac{1}{2^1}C(3,1)+\frac{1}{2^2}C(4,2)=4$，这启发我们猜测 $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}C(n+k,k)=2^n$

不妨设我们已经证明了 $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}C(n-1+k,k)=2^{n-1}$，进行一些化简：

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}C(n+k,k) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}(C(n+k-1,k)+C(n+k-1,k-1)) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}C(n+k-1,k)+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}C(n+k-1,k-1) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}C(n-1+k,k)+\frac{1}{2^n}C(2n-1,n)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^{k+1}}C(n+k,k) \\
&= 2^{n-1}+\frac{1}{2^n}C(2n-1,n)+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^{k+1}}C(n+k,k)-\frac{1}{2^{n+1}}C(2n,n)
\end{aligned}$$

注意到 $C(2n,n)=C(2n-1,n)+C(2n-1,n-1)=2C(2n-1,n)$，故第二项和第四项可以相消，将第三项移至左边即可得：

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}C(n+k,k)=2^{n-1}$$

所以 $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}C(n+k,k)=2^n$，由数学归纳法，结论得证 •

Problem 2 证明 $k|n$ 是 $F_k|F_n$ 的充分必要条件

Solution: 先证 $k|n\Rightarrow F_k|F_n$，不妨设 $n=tk$，当 $t=1$ 时显然有 $F_k|F_n$，下面对 t 作归纳

假设 $F_k|F_{(t-1)k}$，根据性质 (8)，有 $F_{tk}=F_{(t-1)k+k-1+1}=F_{(t-1)k+1}F_k+F_{(t-1)k}F_{k-1}$，根据假设，$F_k|(F_{(t-1)k}F_{k-1})$，而显然 $F_k|(F_{(t-1)k+1}F_k)$，所以 $F_k|F_n$，根据数学归纳法，原命题得证

再证 $F_k|F_n \Rightarrow k|n$，考虑 $F_n=F_{n-k+k-1+1}=F_{n-k}F_{k-1}+F_{n-k+1}F_k$，其中 $F_k|(F_{n-k+1}F_k)$，所以必有 $F_k|(F_{n-k}F_{k-1})$，但由辗转相除法知 F_k 和 F_{k-1} 是互质的，所以必有 $F_k|F_{n-k}$，同理必有 $F_k|F_{n-2k}$，依次类推，最后会得到 $F_k|F_{n\ mod\ k}$，除非 $n\ mod\ k=0$ 给出 $F_k|F_0=0$，否则该式不可能成立，所以必有 $k|n$

综上所述，原命题得证 •

Problem 3 假设某小朋友有 n 元钱，他每天可以购买一件价值为 1 元的物品 A 或价值为 2 元的物品 B，其中物品 B 有两种，计算小朋友花完所有钱的方案数

Solution: 假设 J_n 表示小朋友花完 n 元钱的方案数，考虑他最后一天购买的物品，一共有三种不同情况，且这些情况之间是互斥的，所以有 $J_n=J_{n-1}+2J_{n-2}$

下一步是构造 a,b 使得 $J_n-aJ_{n-1}=b(J_{n-1}-aJ_{n-2})$，易知 $a+b=1$ 且 $ab=-2$，取一组解 $a=-1,b=2$，则有 $J_n+J_{n-1}=2(J_{n-1}+J_{n-2})$，进行递推得：

$$J_n+J_{n-1}=2(J_{n-1}+J_{n-2})=2^2(J_{n-2}+J_{n-3})=\cdots=2^{n-1}(J_1+J_0)$$

根据题意，$J_1=J_0=1$，所以 $J_n+J_{n-1}=2^n$，接下来进行错位相加：

$$\begin{gathered}
J_n+J_{n-1}=2^n\\
-J_{n-1}-J_{n-2}=-2^{n-1}\\
J_{n-2}+J_{n-3}=2^{n-2}\\
\cdots\\
(-1)^{n-1}(J_1+J_0)=(-1)^{n-1}2^1
\end{gathered}$$

上式全部相加后得 $J_n+(-1)^{n-1}J_0=2^n-2^{n-1}+\cdots+(-1)^{n-1}2$，注意到等号右边是等比数列，其首项为 $(-1)^{n-1}2$，公比为 -2，项数为 n，所以：

$$\begin{aligned}
J_n+(-1)^{n-1}J_0&=(-1)^{n-1}2\cdot\frac{(1-(-2)^n)}{1+2}\\
&=(-1)^{n-1}\frac{2}{3}-\frac{1}{3}(-1)^{n-1}(-1)^n2^{n+1}\\
&=(-1)^{n-1}\frac{2}{3}+\frac{2^{n+1}}{3}
\end{aligned}$$

又因为 $J_0=1$，所以 $J_n=\frac{2^{n+1}+(-1)^n}{3}$，注意刚才的推导过程默认了 $n\geq 1$，因此需要对通项公式验证 $n=0$ 的情况，发现仍然满足，所以花完所有钱的方案数就是：

$$J_n=\frac{2^{n+1}+(-1)^n}{3}$$

•

Problem 4 证明对 $\forall r \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, n > 1$，$\exists p, q \in \mathbb{N}$，满足 $0 < q < n$，且 $|p - qr| \leq \frac{1}{n}$

Solution: 考虑 $r, 2r, \cdots, (n-1)r$ 共 $n-1$ 个数，以及 $[0, \frac{1}{n}), [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}), \cdots, [\frac{n-1}{n}, 1)$ 共 n 个集合，显然每个 qr 的小数部分恰好会落到其中一个集合中

若某个 qr 的小数部分落在 $[0, \frac{1}{n})$ 中，令 $p = \lfloor qr \rfloor$，则有 $|p - qr| < \frac{1}{n}$

若某个 qr 的小数部分落在 $[\frac{n-1}{n}, 1)$ 中，令 $p = \lfloor qr \rfloor + 1$，则有 $|p - qr| \leq \frac{1}{n}$

若上述情况都不满足，则 $r, 2r, \cdots, (n-1)r$ 这 $n-1$ 个数必落在 $[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}), [\frac{2}{n}, \frac{3}{n}), \cdots, [\frac{n-2}{n}, \frac{n-1}{n})$ 共 $n-2$ 个集合中，由鸽巢原理，至少有两个数 $q_1 r, q_2 r$ 落在同一个区间里，令 $q = |q_1 - q_2|$，则 $0 < q < n$ 且 qr 的小数部分落在 $[0, \frac{1}{n})$ 中，再令 $p = \lfloor qr \rfloor$，则有 $|p - qr| < \frac{1}{n}$，原命题得证 $\bullet$

Problem 5 给定二分图 G，若 G 是平面图，证明 G 的对偶图必有欧拉回路

Solution: 由于 G 是二分图，所以 G 中没有奇圈，则 G 中所有面的度数为偶数

考虑 G 的对偶图 G'，因为 G 中所有面的度数为偶数，所以 G' 中所有点的度数为偶数，则 G' 中必有欧拉回路 $\bullet$

Problem 6 证明任意树的完美匹配如果存在则必定唯一

Solution: 考虑数学归纳法，任选树的某一点为根，并设根的深度为 1，对于每个不是根的顶点 v，若 v 的父亲深度为 d，则定义 v 的深度为 $d+1$，这样每个节点的深度都是良定的，取深度最大的点的深度为树的深度

对于深度为 1 的树，其必然是单个点，不存在完美匹配，对于深度为 2 的树，其必然是星 (Star)，当且仅当顶点数 $n = 2$ 时存在完美匹配且显然唯一，其它情况下不存在完美匹配

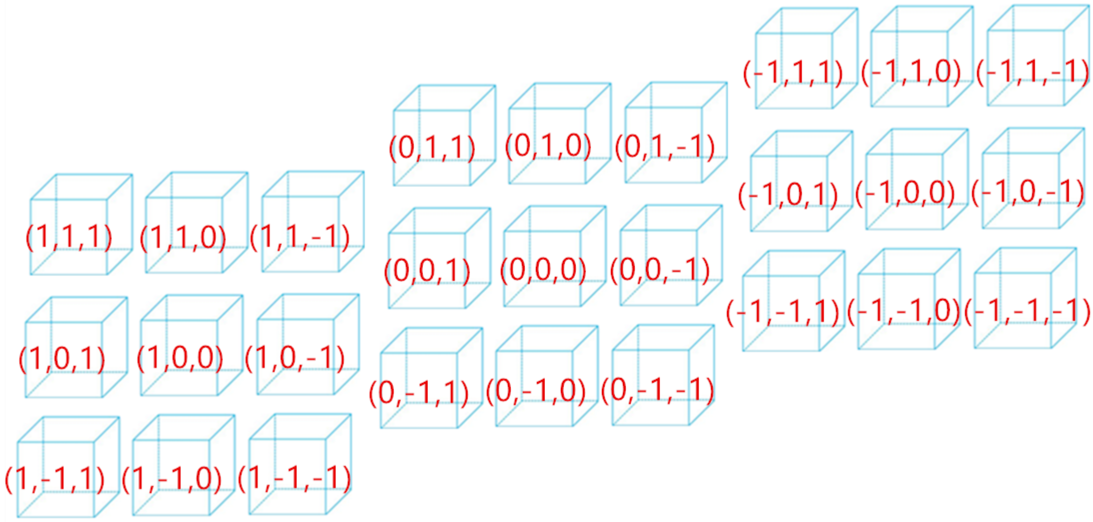
对于一棵深度为 d 的树，考虑其所有叶子节点，如果存在完美匹配，由于叶子节点只与其父亲相邻，所以必然是和其父亲匹配，匹配方式唯一，现在删掉所有叶子节点和其父亲，树的深度变为 $d-2$，根据数学归纳法，如果新树的完美匹配如果存在就一定唯一，因此原树的完美匹配如果存在就一定唯一

综上所述，任意树的完美匹配如果存在则必定唯一 $\bullet$

Problem 7 设有 $3 \times 3 \times 3$ 个小立方体构成的大立方体，任意两个面相邻的小立方体连通，求是否能够找到一条从其中一个角上的立方体到正中心立方体的路径

Solution: 将题述模型建成图：每个小立方体看成一个顶点，两个面相邻的小立方体之间连边，则题意等价于问是否存在一条从某个角块对应的顶点到中心块对应的顶点的哈密顿路，因为角块是对称的，因此只需要证明不存在从其中一个角块到中心块的哈密顿路即可

不妨以中心块为原点建立一个坐标系，给每个方块一个坐标如下：

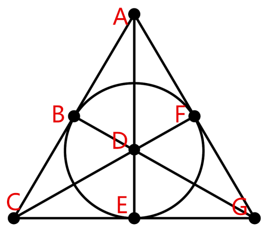


如果存在哈密顿路，不妨设其起点是 $(1,1,1)$，终点是 $(0,0,0)$，观察可以发现，在图中每经过一条边，仅会有一个坐标发生变化，且改变量的绝对值为 1，而哈密顿路上一共有 26 条边，因此三个坐标的总改变次数为 26

另一方面，由于坐标从 $(1,1,1)$ 变成了 $(0,0,0)$，易知每个坐标应该改变了奇数次，但 26 显然无法写成三个奇数之和，这就导出矛盾，因此原命题所问的路径不存在 •

Problem 8 能否找到一个合适的安排，使得 7 个女生每天 3 个人出去散步，7 天后任意两人都曾共同散步过一次且仅一次？

Solution:



这道题的解法来源于 Fano 平面

假设女生的编号依次为 A,B,C,D,E,F,G，可以给出方案如下：

(1) 第 1 天：A,B,C

(2) 第 2 天：A,D,E

(3) 第 3 天：A,F,G

(4) 第 4 天：B,D,G

(5) 第 5 天：B, E, F

(6) 第 6 天：C, D, F

(7) 第 7 天：C, E, G

综上所述，存在可行的安排方案如上 •

Problem 9 试问 *Fibonacci* 数列中哪些项的个位数字和其下标的个位数字相同

Solution: 原题等价于求解同余方程 $F_n \equiv n(mod\ 10)$，最简单的做法是考虑 Fibonacci 数列对任意数字取模以后是循环的，模 10 的情况下循环节是 60，我们列出下表：

n	$n\ mod\ 10$	$F_n\ mod\ 10$	n	$n\ mod\ 10$	$F_n\ mod\ 10$	n	$n\ mod\ 10$	$F_n\ mod\ 10$
1	1	1	21	1	6	41	1	1
2	2	1	22	2	1	42	2	6
3	3	2	23	3	7	43	3	7
4	4	3	24	4	8	44	4	3
5	5	5	25	5	5	45	5	0
6	6	8	26	6	3	46	6	3
7	7	3	27	7	8	47	7	3
8	8	1	28	8	1	48	8	6
9	9	4	29	9	9	49	9	9
10	0	5	30	0	0	50	0	5
11	1	9	31	1	9	51	1	4
12	2	4	32	2	9	52	2	9
13	3	3	33	3	8	53	3	3
14	4	7	34	4	7	54	4	2
15	5	0	35	5	5	55	5	5
16	6	7	36	6	2	56	6	7
17	7	7	37	7	7	57	7	2
18	8	4	38	8	9	58	8	9
19	9	1	39	9	6	59	9	1
20	0	5	40	0	5	60	0	0

注意到其中 $n\ mod\ 10 = F_n\ mod\ 10$ 的项为 $1, 5, 13, 17, 25, 29, 30, 35, 37, 49, 53, 55, 60$，之后 $n\ mod\ 10, F_n\ mod\ 10$ 的值每 60 个数是一个与上表相同的循环，因此在 Fibonacci 数列中个位数字和下标的个位数字相同的项为下标对 60 取模后等于 $0, 1, 5, 13, 17, 25, 29, 30, 35, 37, 49, 53, 55$ 的项，这就是充分必要条件

当然这道题是有其它更简洁的解法的，不过我知道的其它解法都超出了考试范围，感兴趣的同学可以私下和我交流 •