三角函数积分

一. 底层建筑：

① $\sin x$与$\cos x$的n次幂

①.(1) 奇次幂：

$$\int \sin^{2n+1} x\, dx = -\int \sin^{2n} x\, d\cos x$$
$$= -\int (1-\cos^2 x)^n\, d\cos x$$

拆开暴力积回去

①.(2) 偶次幂：

$$\int \sin^{2n} x\, dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^n dx$$

拆开化为奇数次积回去

② $\tan x$的幂

(1) $\int \tan x\, dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$

(2) $\int \tan^2 x\, dx = \int (\sec^2 x - 1)\, dx$
$= \tan x - x + C$

(3) 高阶形式：

$$\int \tan^6 x\, dx = \int \tan^4 x(\sec^2 x - 1)\, dx$$
$$= \int \tan^4 x\, d\tan x - \int \tan^4 dx$$

通过 $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$ 不断降阶

③ $\sec x$的幂

(1) $\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$

(2) $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$

(3) $\int \sec x \cdot \tan x \cdot dx = \sec x + C$

(4) 高阶

$$\int \sec^4 x\, dx = \int \sec^2 x \cdot d\tan x$$
$$= \sec^2 x \cdot \tan x - \int \tan x\, d\sec^2 x$$
$$= \sec^2 x \cdot \tan x - \int \tan^2 x \cdot 2\sec^2 x\, dx$$
$$= \sec^2 x \cdot \tan x - 2\int (\sec^2 x - 1)\sec^2 x\, dx$$
$$= \sec^2 x \cdot \tan x - 2\int \sec^4 x\, dx + 2\int \sec^2 x\, dx$$

通过分部积分与 $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$
不断降阶

④ 与之对应

$\cot x = \frac{1}{\tan x}$　$\csc x = \frac{1}{\sin x}$

$\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$

$(\cot x)' = -\csc^2 x$

$(\csc x)' = -\cot x \cdot \csc x$

$\int \cot x\, dx = \ln|\sin x| + C$

$\int \csc x\, dx = -\ln|\csc x + \cot x| + C$

$\int \cot^2 x\, dx = \int (\csc^2 x - 1)\, dx = -\cot x - x + C$

符号恰好与$\sec x$、$\tan x$一组相反

ex: $\int_0^{\pi} \sqrt{\sin x - \sin^3 x}\, dx = \int_0^{\pi} \sqrt{\sin x} \cdot |\cos x|\, dx$

分类讨论

PS: 本人写的有可能是错的
请一定指正!!!

二. 一些想法

① $1\pm\text{trig}$:

$1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$　　$1+\sin x=(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2})^2$

$1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$　　$1-\sin x=(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2})^2$

例: $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx$

(1) $\int \frac{1}{1+\cos x}dx + \int \frac{-d\cos x}{1+\cos x}$

$= \int \frac{1}{2}\cdot \sec^2\frac{x}{2}dx - \ln(1+\cos x) + C$

拆项+基于1+cosx的降幂升角

$= \tan\frac{x}{2} - \ln(1+\cos x) + C$

(2) $\int \frac{(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx = \int \frac{(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2}{\cos^2\frac{x}{2}}d\frac{x}{2}$

$= \int 1+2\tan t+\tan^2 t\, dt$

$= t - 2\ln|\cos t| + \tan t - t + C$

$= \tan t - 2\ln|\cos t| + C$

$= \tan\frac{x}{2} - 2\ln|\cos\frac{x}{2}| + C$

$\hookrightarrow -\ln\frac{1+\cos x}{2} + C$

② 共轭处理:

$\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx = \int \frac{1-\cos x+\sin x-\sin x\cdot\cos x}{\sin^2 x}dx$

$= \int \csc^2 x\,dx - \int \csc x\cdot\cot x\,dx + \int \csc x\,dx - \int \cot x\,dx$

$= -\cot x + \csc x - \ln|\csc x+\cot x| - \ln|\sin x| + C$

$= \frac{1-\cos x}{\sin x} - \ln|1+\cos x| + C$

$\hookrightarrow$ 万能公式 $= \tan\frac{x}{2}$

$\int \frac{dx}{\sec x-1} = \int \frac{\sec x+1}{\tan^2 x}dx$

$= \int \frac{\sec x}{\tan^2 x}dx + \int \cot^2 x\,dx$

$\hookrightarrow$ 实在无想法则

$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx - \cot x - x + C$

$= \int \cot x\cdot\csc x\,dx - \cot x - x + C$

$= -\csc x - \cot x - x + C$

③ 和差化积

$\int \sin(19x)\cdot\cos(3x)\,dx$

$= \frac{1}{2}\int \sin 22x + \sin 16x\,dx$

例 $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x dx$

不加处理分部积分会去世

$\int \frac{(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2})^2}{2\cos^2\frac{x}{2}}\cdot e^x dx$

$= \int (\tan^2 t+2\tan t+1)e^{2t}dt$

$= \int \sec^2 t\, e^{2t}dt + 2\int \tan t\cdot e^{2t}dt$

$= e^{2t}\tan t - \int \tan t\cdot 2\cdot e^{2t}dt + 2\int \cdots$

$= e^{2t}\cdot\tan t + C$　　PS:见3页回处

$= e^{x}\cdot\tan\frac{x}{2} + C$

④ 关于分类讨论

实际上 $x=a\sin t$; $x=a\tan t$:
通过限定 $|t|\le\frac{\pi}{2}$ 均可不分类

但 $x=a\sec t$. $|t|\le\frac{\pi}{2}$ 一定要分类

⑤ $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$

$=\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})$

$\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$; $\int \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$

令 $t=x+\frac{\pi}{4}$, $t=x-\frac{\pi}{4}$.

拆项效果绝佳!

不定积分小记

①及时变更 dx.

如 $J_n=\int\frac{(x+a)}{((x+a)^2+b^2)^n}dx$

不换元你积个寂寞

$dx=d(x+a)$

例：$f(x)=\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt$. 计算 $I=\int_0^1 x f(x)dx$

怎么可能是先积出 $f(x)$ 再代入 I !!!

$\int_0^1 x\cdot f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx^2$

$=\frac{1}{2}f(x)\cdot x^2\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\cdot 2x\cdot e^{-x^4}dx$

↳分部积分后定积分部分为0是基操

② $\left.\begin{aligned}&x\,dx=\frac{1}{2}dx^2\\&\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}\frac{dx^2}{x^2}\end{aligned}\right\}$ 用于换元

③一次根式 $\sqrt{1+x}$ etc.

$\Rightarrow$ 整体换元

高次根式 $\sqrt{1+x^5}$

$\Rightarrow$ 先换 x^5 再换元

$\sqrt{1+\ln x}\Rightarrow$ 整体换元

④善用分部积分破局.

⑤配方后整体换元是个好习惯

$\int\frac{x-2}{\sqrt{2-2x-x^2}}dx=\int\frac{(x+1)-3}{\sqrt{3-(x+1)^2}}d(x+1)$

⑥ e^x 性质

$\int(f(x)+f'(x))e^x dx=e^x\cdot f(x)+C.$

巧处理 $\int(1-\frac{2}{x})^2e^x dx$, $\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\cdot e^x dx$

定积分

一. 构造黎曼和:

核心: ① 构造出 $n \to +\infty$ 时的 $\frac{1}{n}$ 用于 dx

② 找好标志点 即 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$

用于寻找上下界

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}(1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n})$$

$$=\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)=\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{(k+n)^2}$$

$$=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{(\frac{k}{n}+1)^2}=\int_0^1\frac{1}{(x+1)^2}dx$$

二. 变上限积分:

① $\left[\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt\right]'$: 链式法则

② 变上限积分求极限 $\Rightarrow$ L-H

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\int_0^x e^{t^2}dt)^2}{\int_0^x e^{2t^2}dt} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}$$

③ 对混参变上限积分求导

Core: $\int_{u(x)}^{v(x)} f(t,x)dt$ 中, x 是一个参数

既可以提出 $\int$ 也可以写入 dt

$F(x)=\int_a^x (x-t)f(t)dt$ 求 $F''(x)$

$=\int_a^x (xf(t)-tf(t))dt$

$=x\int_a^x f(t)dt-\int_a^x tf(t)dt$

顺次求导即可

$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)dt$ 求 $\varphi'(x)$

$=\frac{1}{x}\int_0^1 f(xt)dxt=\frac{\int_0^x f(y)dy}{x}$

注意积分上下限改变

④ 构造变上限积分处理不等式

—— 综合利用中值泰勒罗尔

例: f 在 $[a,b]$ 上二阶导函数连续

f 上凸 求证

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)\geq\int_a^b f(x)dx\geq\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$$

以右为例 构造

$G(x)=\int_a^x f(t)dt-\frac{f(a)+f(x)}{2}(x-a)$

欲证 $G(b)\geq 0$

$G'(x)=f(x)-\frac{f'(x)}{2}(x-a)-\frac{f(a)+f(x)}{2}$

$=\frac{1}{2}(f(x)-f(a)-f'(x)(x-a))$

$=\frac{1}{2}(f'(\xi)-f'(x))(x-a)\quad(a<\xi<x)$

$=\frac{1}{2}(\xi-a)(x-a)f''(\varepsilon)\quad(a<\xi<\varepsilon<x)$

两次构造中值定理

例: f 在 $[0,1]$ 上可导, $f(1)=4\int_0^{\frac{1}{4}} e^{1-x^3}f(x)dx$

$\Rightarrow \exists\xi\in(0,1)$ st $f'(\xi)=3\xi^2 f(\xi)$

考虑结论回溯: $(e^{1-x^3}\cdot f(x))'$

$=-3x^2 e^{1-x^3}\cdot f(x)+f'(x)\cdot e^{1-x^3}$

$\Rightarrow$ 一定以 $e^{1-x^3}f(x)$ 整体作文章

在构造积分第一中值定理时, 不应将二者分开

$4\int_0^{\frac{1}{4}} e^{1-x^3}f(x)dx \overset{\exists\eta\in[0,1]}{=\!=\!=} e^{1-\eta^3}f(\eta)=f(1)$

令 $g(x)=e^{1-x^3}\cdot f(x)$ $\therefore g(1)=g(\eta)$

$\therefore \exists\xi$ st $g'(\xi)=0$

Rolle定理与积分第一中值定理

三. 定积分的对称性 $\Longrightarrow$ 变换区间的定积分 $\Longrightarrow$ 专治三角函数定积分与对称区间定积分

(1) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$

(2) $\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = \int_0^x [f(t)+f(-t)]\,dt$ $\Rightarrow$ 可联想奇函数求积分

(3) 仅用于偶函数

$$\left.\begin{aligned}\int_{a-x}^{a+x} f(t)\,dt &= 2\int_{a-x}^{a} f(t)\,dt = 2\int_{a}^{a+x} f(t)\,dt \\ \int_{-x}^{x} f(t)\,dt &= 2\int_0^x f(t)\,dt = 2\int_{-x}^{0} f(t)\,dt\end{aligned}\right\}$$ 只有这儿才有系数 2

不要既换上下界又换上下界符号

例 $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)}\,dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin^2 x}{x(\pi-2x)}\,dx$

$= \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{x(\pi-2x)}\,dx = \frac{1}{\pi}\ln 2$

例:证明 $I_n \triangleq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx \equiv \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$

并求之. $\Rightarrow$ 同积复现

$I_n = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}x\,d\cos x$

$= \underbrace{-\sin^{n-1}x\cdot\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{\text{分部出 }0} + (n-1)\int \cos^2 x\cdot\sin^{n-2}x\,dx$

$= (n-1)\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2 x)\sin^{n-2}x\,dx$

$= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$

$\Rightarrow I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

例: $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x}{1+e^x}\,dx$ $\Rightarrow$ 为什么是求特殊区间上的定积分? $\Rightarrow$ 利用特殊性

(1) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x}{1+e^x}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(-x)}{1+e^{-x}}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x\cdot e^x}{1+e^x}\,dx$

$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\,dx = 0$

(2) $\int_0^{\pi}\left(\frac{\cos x}{1+e^x} + \frac{\cos(-x)}{1+e^{-x}}\right)dx$ 更直接, 一步到位

例: $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-3x^2}}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-3x^2}} + \frac{\arcsin(-x)}{\sqrt{1-3x^2}}\right)dx = 0$

例: $\int_0^x e^{xt-t^2}\,dt = e^{x^2/4}\int_0^x e^{-t^2/4}\,dt$

$\hookrightarrow$ 一定是手动从 $\int$ 里提出来的

$e^{\frac{x^2}{4}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{4}+xt-t^2}\,dt$ 后式 $= \int_0^x e^{-(t-\frac{x}{2})^2}\,dt = \int_{-\frac{x}{2}}^{+\frac{x}{2}} e^{-m^2}\,dm$

$= 2\int_0^{\frac{x}{2}} e^{-m^2}\,dm = \int_0^x e^{-\frac{t^2}{4}}\,dt$