（科目：微积分 5）数学作业纸

编号：2020012363 班级：软01 姓名：赵晨阳 第 1 页

2.(2) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{|x|}=-\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}=-1$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$

$f(0)=0$ 故 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在，$x=x_0$ 处不连续

2.(5) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\frac{1}{x}\cdot(1-e^{\frac{x}{x-2}})=\lim\limits_{x\to 0}-\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{x-2}=\frac{1}{2}$

$f(0)=\frac{1}{2}$. 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 上连续

$\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\frac{1}{2}$ 故 $f(x)$ 在 $x=2$ 上不连续.

3.(1) $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=a+3$；$f(0)=a+3$

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x^2}{x^2}=1$

$\therefore a=-2$ 时，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$

$f(x)$ 在 0 处连续. 其余时刻，$f(x)$ 为初等函数，必连续.

补理：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\frac{2x}{x\cdot(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=1$

4.(2) $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-2$. $f(0)=b=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$

$\therefore b=-2$. $f(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=a+b=a-2$

$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=2+1=3$ $\therefore a=5$ 而其余各处，$f(x)$ 均连续. 故 $a=5, b=-2$

2.6.(2) 令 $f(x)=x^{2m}+a_1x^{2m-1}+\cdots+a_{2m-1}x+a_{2m}$

记 $M=\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_{2m}|\}$

$\because f(x)=x^{2m}(1+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\cdots+\frac{a_{2m}}{x^{2m}})$

$|\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\cdots+\frac{a_{2m}}{x^{2m}}|\le|\frac{a_1}{x}|+|\frac{a_2}{x^2}|+\cdots+|\frac{a_{2m}}{x^{2m}}|$

$\le M\cdot(\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|x|^2}+\cdots+\frac{1}{|x|^{2m}})=M\cdot\frac{1-\frac{1}{|x|^{2m}}}{|x|-1}$

$\le\frac{M}{|x|-1}$. 当 $|x|\ge 1+M$ 时，$|\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x}+\cdots+\frac{a_{2m}}{x^{2m}}|<1$. 则 $f(x)>0$. 故 $f(M+1)>0$ 而 $f(0)=a_{2m}<0$

$f(-M-1)>0$. $\because f(x)\in C[-M-1,0]$ 且 $f(x)\in C[0,M+1]$

由零值定理有：$\exists x_1\in(-M-1,0)\wedge\exists x_2\in(0,M+1)$

$f(x_1)=f(x_2)=0$ 证毕

2.6(3)

取 $g(t)=f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)-nf(t)$. $\forall t\in[a,b]$ 由 $f(x)\in C[a,b]$

有 $f(x)$ 有界. 设 $A=\sup f(x)$ $(x\in[a,b])$ $B=\inf f(x)$ $(x\in[a,b])$ 则 可知 $f(t)\in[B,A]$

1° 若 $A=B$，则 $f(x)$ 为常数函数. $g(t)=0$ 的根为 $\forall r, r\in[a,b]$. 即 $\forall\xi\in[a,b]$ 均有 $f(\xi)=\frac{\sum_{i=1}^{n}f(x_i)}{n}$

2° $A>B$ 时. $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 介于 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 间，由介值定理. $\exists\eta_1\in[a,b]$. $f(\eta_1)=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$

$\frac{2f(\eta_1)+f(x_3)}{3}$ 介于 $f(\eta_1)$ 与 $f(x_3)$ 之间. 由介质定理 $\exists\eta_2\in[a,b]$，$f(\eta_2)=\frac{2f(\eta_1)+f(x_3)}{3}$. 故

$\exists\eta_i\in[a,b]$. $f(\eta_i)=\frac{if(\eta_{i-1})+f(x_{i+1})}{i+1}$ $(i=1,2\cdots,n-1)$

$\therefore\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}=\frac{2f(\eta_1)+f(x_3)+\cdots+f(x_n)}{n}$

$=\frac{(n-1)f(\eta_{n-2})+f(x_n)}{n}=f(\eta_{n-1})$

$\therefore\exists\xi=\eta_{n-1}\in[a,b]$, s.t. $f(\xi)=\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}$

2.6.(8)

设 $A=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$. $\exists N>a$ s.t. $x>N$, $|f(x)-A|<\varepsilon=1$ 取 $\varepsilon=1$

即 $A-1<f(x)<A+1$. 则 $x>N$ 后，$f(x)$ 有界.

$f\in C[a,N]$. 由定理 2.6.5 可知. $f(x)$ 在 $[a,N]$ 上有界. 记 B 为 $[a,N]$ 上的界

故 $|f(x)|<B+A$. 即 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界

2.6.(12). $\because f$ 在 $[a,b]$ 上单调递增. 且 $x_n=f(x_{n-1})$

故 若 $x_n>x_{n-1}$. 则 $x_{n+1}=f(x_n)>f(x_{n-1})=x_n$.

反之亦然. 故 x_n 单调有界 $\therefore\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. 设为 ξ. 可知 $\xi\in[a,b]$. 故 $x=\xi$ 处 $f(x)$ 连续

$f(\xi)=\lim\limits_{x\to\xi}f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\xi$. 证毕

5.1(8) 1° $L<0$ 时，矛盾 2° $L=0$ 时，$f(x)$ 为常值函数 必定一致连续；3° $L>0$ 时，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\frac{\varepsilon}{L}$ 当 $|x-y|<\delta$ 时，$|f(x)-f(y)|\le L\cdot|x-y|<\varepsilon$

故 $f(x)$ 一致连续

9.(2) 取 $g(x)=x-\ln x$ $(x\geq 2)$. 则 $g'(x)=1-\frac{1}{x}>0$. ∴ $g(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上↑. 不妨令 $x>y>2$, 则 $g(x)>g(y)$ ∴ $x-\ln x>y-\ln y$ ∴ $\ln x-\ln y<x-y$

故 $\forall x,y\in(2,+\infty)$ 且 $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta=\varepsilon>0$, $|x-y|<\delta$ 时, $|\ln x-\ln y|<|x-y|<\delta=\varepsilon$

故 $f(x)$ 一致连续

15.(2) 取 $\varepsilon=\frac{1}{2}$. 对 $\forall\delta>0$. $\exists x\in(0,\frac{\delta e}{e-1})$. 取 $y=\frac{x}{e}$. 则 $|x-y|=|\frac{e-1}{e}x|<\delta$ 且 $|f(x)-f(y)|=1>\varepsilon$

∴ $f(x)$ 不一致连续

16. $\Rightarrow$ $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$. $x_1,x_2\in(a,b)$ 时, $|x_1-x_2|<\delta$ 则 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$. 当 $a<x_1,x_2<a+\delta$ 时, $|x_1-x_2|<\delta$ 故 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$. 由 Cauthy 定理有 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 存在. 同理 $\lim\limits_{x\to b}f(x)$ 存在.

一致连续函数必为 Cauthy.

$\Leftarrow$: $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 存在. $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta_1$, $a<x_{1,2}<a+\delta_1$ 时, $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$. 同理, $\exists\delta_2>0$, $b-\delta_2<x_{1,2}<b$ 时, $|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon$.

$f\in C[a+\delta_1,b-\delta_1]$. 由 Cantor 定理. $f(x)$ 在 $[a+\delta_1,b-\delta_2]$ 上一致连续; 即 $\exists\delta_3>0$, 当 $x_{1,2}\in[a+\delta_1,b-\delta_2]$ 且 $|x_1-x_2|<\delta_3$ 时. $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$. 由 $f\in C(a,b)$ $\lim\limits_{x\to a+\delta_1}f(x)$ 存在. $\exists\delta_4>0$, 当 $|x_1-(a+\delta_1)|<\delta_4$, $|x_2-(a+\delta_1)|<\delta_4$ 时, $x_{1,2}\in(a,b)$ 有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$. 同理 $\exists\delta_5>0$, $|x_1-(b-\delta_2)|<\delta_5$ $|x_2-(b-\delta_2)|<\delta_5$ 时, $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4,\delta_5\}$ 则 $\forall x_{1,2}\in(a,b)$ $|x_1-x_2|<\delta$ 时, $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$. 故 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$ $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\sin x}{x}=\sin 1$. $y\in C(0,1)$

故 $y=\frac{\sin x}{x}$ 在 $(0,1)$ 上一致连续

一致连续: 闭区间上的连续函数一致连续. 故将开区间化为闭区间, 由于单侧极限存在 可以补充定义端点值. 从而由闭间区 → 开区间

另: 9.(2) 取 $\delta=2e^{\varepsilon}-2>0$. $\ln x-\ln y=\ln(\frac{x-y}{y}+1)<\ln(\frac{2e^{\varepsilon}-2}{2}+1)=\varepsilon$.

$f(x)$ 为单射. $f\in C(I)\Rightarrow f^{-1}: f(I)\to I$ 连续

可知 $f(x)$ 为严格单调函数. 故不妨设为严格单增, 则 f^{-1} 也严格单增; 下证 $\forall y_0\in R(f)$ f^{-1} 在 y_0 处连续;

设 $x_0=f^{-1}(y_0)$. 则 $f(x_0)=y_0$. $\exists\delta_0>0$, 使 $x_0-\delta_0$, $x_0+\delta_0\in I$. $\forall\varepsilon>0$ 有: $x_0-\delta_0\leq x_0-\min\{\varepsilon,\delta_0\}<x_0<x_0+\min(\varepsilon,\delta_0)\leq x_0+\delta_0$

∴ $f(x_0-\delta_0)\leq f(x_0-\min\{\varepsilon,\delta_0\})<f(x_0)<f(x_0+\min\{\varepsilon,\delta_0\})\leq f(x_0+\delta_0)$

取 $\varepsilon_0=\min\{f(x_0)-f(x_0-\min\{\delta_0,\varepsilon\}), f(x_0+\min\{\delta_0,\varepsilon\})-f(x_0)\}$

则 $\varepsilon_0>0$, $|y-y_0|<\varepsilon_0$ 时, $f(x_0-\min\{\varepsilon_0,\varepsilon\})\leq y_0-\delta<y<y_0+\delta\leq f(x_0+\min\{\varepsilon_0,\varepsilon\})$

故由 f^{-1} 单调性有:

$x_0-\min\{\varepsilon_0,\varepsilon\}<f^{-1}(y)<x_0+\min\{\varepsilon_0,\varepsilon\}$

即 $x_0-\varepsilon<f^{-1}(y)<x_0+\varepsilon$

即 $f^{-1}(y_0)-\varepsilon<f^{-1}(y)<f^{-1}(y_0)+\varepsilon$

∴ $|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)|<\varepsilon$

∴ f^{-1} 在 y_0 处连续

令 $F(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to a^+}f(x) & (x=a)\\ f(x) & x\in(a,b)\\ \lim\limits_{x\to b^-}f(x) & (x=b)\end{cases}$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续

则 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续

（科目：微积分） 数 学 作 业 纸

编号：2020012363 班级：软01 姓名：赵晨阳 第 3 页

3.1.

(1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{1}{x_0+h}-\frac{1}{x_0}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-h}{(x_0+h)x_0 h}=-\dfrac{1}{x_0^2}$

$\therefore f'(-3)=-\dfrac{1}{9}$

(2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2^{-(x_0+h)}-2^{-x_0}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2^{-x_0}(2^{-h}-1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2^{-x_0}\cdot -h\cdot\ln 2}{h}$

$=\cancel{2^{-x_0}\cdot e\ln 2}\quad \cancel{\therefore f'(0)=\ln 2}$ $=-2^{-x}\cdot\ln 2$ $f'(0)=-\ln 2$

2.(4) $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=0\quad f(0)=-1\quad \lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-1$

$f(x)$在$x=0$上不连续，故不可导。

3. $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=f(1)=2$，故 $2=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=a+b$。

且 $f'_-(1)=2$． $f'_+(1)=a$ $\therefore a=\cancel{3}\,2\quad b=\cancel{1}\,0$

5.(2) $\lim\limits_{\frac{2}{n}\to 0}\dfrac{f(x_0+\frac{2}{n})-f(x_0)}{\frac{2}{n}}\cdot 2=\lim\limits_{d\to 0}\dfrac{f(x_0+d)-f(x_0)}{d}\cdot 2$

$=2f'(x_0)$

(4) $\lim\limits_{n\to 0}f(x_0+h)^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to 0}(1+f(x_0+h)-f(x_0))^{\frac{1}{f(x_0+h)-f(x_0)}\cdot\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$

$=e^{f'(x_0)}$

12. 不妨设$f'_+(a)>0$，$f'_-(b)>0$。

$\lim\limits_{h_1\to 0^+}f(a+h_1)=f(a)+h_1 f'_+(a)>f(a)=0$

$\lim\limits_{h_2\to 0^+}f(b-h_2)=f(b)-h_2 f'(b)<f(b)=0$

故 $f(a+h_1)>0$，$f(b-h_2)<0$ 且 f 在 $(a+h_1,b-h_2)$ 上连续

由介值定理：$f(x)=0$ 在 $(a+h_1,b-h_2)$ 间必至少有一个根

2.(1) $y'=3x^2+\dfrac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}+3x^{-4}$

(3) $y'=(2x)(x-1)(3-x^3)+(x^2+1)(1)\cdot(3-x^3)+(x^2+1)(x-1)(-3x^2)=-6x^5+5x^4-4x^3+12x^2-6x+3$

$y'(x)=\dfrac{\frac{x}{\cos^2x}-\tan x}{x^2}=\dfrac{x-\cancel{\sin^2x}\ \sin x\cdot\cos x}{\cos^2x\cdot x^2}$

4.(1) $y'=2\cos 3x\cdot 3=6\cos 3x$

(3) $y'=\dfrac{3}{2}(1-x^3)^{\frac{1}{2}}\cdot(-3x^2)=-\dfrac{9}{2}x^2(1-x^3)^{\frac{1}{2}}$

5.(1) $(f(-x))'=f'(-x)\cdot(-x)'=-f'(-x)$

(2) $(f(\sin^2x)\cdot f(\cos x^2))'=(f(\sin^2x))'\cdot f(\cos x^2)+(f(\cos x^2))'\cdot f(\sin^2x)$

$=f'(\sin^2x)\cdot 2\sin x\cdot\cos x\cdot f(\cos x^2)+f'(\cos x^2)\cdot(-\sin x^2)\cdot 2x\cdot f(\sin^2x)$

6.(3) $y=e^{\frac{1}{x}\ln x}+e^{\ln(1-x)\cdot\ln x}$

$y'=e^{\frac{1}{x}\cdot\ln x}\cdot(-\frac{1}{x^2}\cdot\ln x+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x})+e^{\ln(1-x)\cdot\ln x}\cdot(\frac{-1}{1-x}\cdot\ln x+\frac{1}{x}\cdot\ln(1-x))=\dfrac{1-\ln x}{x^2}\sqrt[x]{x}+\dfrac{x\ln x+(x-1)\ln(1-x)}{x(x-1)}\cdot x^{\ln(1-x)}$

(5) $y=e^{\sin x\ln\ln x}$

$y'=\ln x^{\sin x}(\cos x\cdot\ln\ln x+\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}\cdot\sin x)$ $=(\ln x)^{\sin x}(\cos x\cdot\ln\ln x+\dfrac{\sin x}{x\cdot\ln x})$