微积分期末小班辅导讲义

小班辅导讲师 何昊天

2020 年秋季学期

目录

1 不定积分

1.1 积分的概念

简单来说，定积分是积分和的极限：

$$\lim_{|T|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})=I$$

可积性是一个比连续性弱一些的概念，有界函数在闭区间上可积的充分必要条件是间断点集是零测集，有关积分的定义、可积性的概念这一部分理解即可，不需要掌握得很深.

Problem 1.1 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{2^{\frac{n-1}{n}}}{n+\frac{1}{n-1}}+\frac{2}{n+\frac{1}{n}})$.

Solution: 放缩得 $\frac{1}{n+1}(2^{\frac{1}{n}}+2^{\frac{2}{n}}+\cdots+2^{\frac{n-1}{n}}+2)\le\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{2^{\frac{n-1}{n}}}{n+\frac{1}{n-1}}+\frac{2}{n+\frac{1}{n}}\le\frac{1}{n}(2^{\frac{1}{n}}+2^{\frac{2}{n}}+\cdots+2^{\frac{n-1}{n}}+2)$，根据定积分的定义有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(2^{\frac{1}{n}}+2^{\frac{2}{n}}+\cdots+2^{\frac{n-1}{n}}+2)=\int_0^1 2^x\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln 2}$，由夹逼定理，原极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{2^{\frac{n-1}{n}}}{n+\frac{1}{n-1}}+\frac{2}{n+\frac{1}{n}})=\frac{1}{\ln 2}$.

1.2 基本计算方法

由于有微积分基本定理，所以定积分的计算大多都可以转化为不定积分的计算，而不定积分的计算有以下几个基本转化方法：

(i) 积分的线性性：若 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C,\int g(x)\mathrm{d}x=G(x)+C$，则 $\int(af(x)+bg(x))\mathrm{d}x=aF(x)+bG(x)+C$.

(ii) 第一换元法：设 $u=\varphi(x)$ 连续可微，则 $\int f(x)\mathrm{d}x=\int g(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x=\int g(u)\mathrm{d}u$，若还有 $\int g(x)\mathrm{d}x=G(x)+C$，则 $\int f(x)\mathrm{d}x=G(\varphi(x))+C$.

(iii) 第二换元法:设 $x=\varphi(t)$ 连续可微,则 $\int f(x)\mathrm{d}x=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$,若还有 $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t=F(t)+C$ 且 $x=\varphi(t)$ 有反函数，则 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(\varphi^{-1}(x))+C$.

(iv) 分部积分法：由微分得计算公式 $d(f(x)g(x))=f(x)d(g(x))+g(x)d(f(x))$ 知 $\int f(x)d(g(x))=f(x)g(x)-\int g(x)d(f(x))$.

注意分部积分要有目的性，经验是按照对数函数、反三角函数、幂函数、三角函数、指数函数的顺序从前到后选择留下的函数，从后到前选择凑微分的函数.

基本转化方法配合基本积分表，是解决大部分问题的基础，此外还有一些复杂积分表，上面的积分比较常用，但都可以用基本转化方法和基本积分表配合推导出来，有时记住它们的结果（或者至少记住推导方式）会更方便：

(i) $\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C(a\neq 0)$

(ii) $\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln|\frac{a+x}{a-x}|+C(a\neq 0)$

(iii) $\int \frac{x\mathrm{d}x}{a^2 \pm x^2} = \pm\frac{1}{2}\ln|a^2 \pm x^2| + C$

(iv) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C(a > 0)$

(v) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C(a > 0)$

(vi) $\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm\sqrt{a^2 \pm x^2} + C(a > 0)$

(vii) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C(a > 0)$

(viii) $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C(a > 0)$

(ix) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \frac{1}{2}\ln|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}| + C$

(x) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \frac{1}{2}\ln|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}| + C$

积分里用到的三角函数换元我们都是熟知的，但双曲函数的性质可能大家比较陌生，这里进行总结如下：

(i) $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

(ii) $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$

(iii) $(\sinh x)' = \cosh x, (\cosh x)' = \sinh x$

(iv) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

(v) $1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$

(vi) $\coth^2 x - 1 = \frac{1}{\sinh^2 x}$

(vii) $\sinh 2x = 2\sinh x\cosh x$

(viii) $\cosh 2x = 2\cosh^2 x - 1 = 2\sinh^2 x + 1 = \cosh^2 x + \sinh^2 x$

(ix) $\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

(x) $\cosh^{-1} x = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$

(xi) $\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$

(xii) $\coth^{-1} x = \frac{1}{2}\ln(\frac{x+1}{x-1})$

Problem 1.2 计算 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}$.

Solution:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + \cos x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \tan\frac{x}{2} + C$$

Problem 1.3 计算 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

Solution:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+e^{2x}}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{e^x\sqrt{1+e^{-2x}}} = -\int \frac{\mathrm{d}(e^{-x})}{\sqrt{1+(e^{-x})^2}} = -\ln\left(e^{-x}+\sqrt{1+e^{-2x}}\right)+C$$

Problem 1.4 计算 $\int (\frac{\ln x}{x})^2 \mathrm{d}x$.

Solution:

$$\begin{aligned}\int (\frac{\ln x}{x})^2 \mathrm{d}x &= \int (\ln x)^2 \mathrm{d}(-\frac{1}{x}) = -\frac{(\ln x)^2}{x} + \int \frac{1}{x}\mathrm{d}(\ln x)^2 \\ &= -\frac{(\ln x)^2}{x} + \int \frac{2}{x^2}\ln x \mathrm{d}x = -\frac{(\ln x)^2}{x} - \frac{2}{x}\ln x - \frac{2}{x} + C\end{aligned}$$

Problem 1.5 计算 $\int e^{ax}\cos bx \mathrm{d}x (a, b \neq 0)$.

Solution: 记 $I = \int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x$，则有：

$$\begin{aligned} I &= \int e^{ax}\cos bx \mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int \cos bx \mathrm{d}(e^{ax}) = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a^2}\int e^{ax}\mathrm{d}(\sin bx) \\ &= \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx - \frac{b^2}{a^2}I \end{aligned}$$

通过解方程可得 $I = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + C$，另一方面，这道题也可以用欧拉公式和复数给出一个解法：

$$\begin{aligned} \int e^{ax}(\cos bx + i\sin bx)\mathrm{d}x &= \int e^{(a+ib)x}\mathrm{d}x = \frac{1}{a+ib}e^{(a+ib)x} + C \\ &= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[(a\cos bx + b\sin bx) + i(-b\cos bx + a\sin bx)] + C \\ \int e^{ax}\cos bx &= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + C_1 \\ \int e^{ax}\sin bx &= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(-b\cos bx + a\sin bx) + C_2 \end{aligned}$$

Problem 1.6 计算 $\int \frac{x\mathrm{d}x}{x^2-2x\cos a+1}$.

Solution:

$$\begin{aligned}\int \frac{x\mathrm{d}x}{x^2-2x\cos a+1} &= \int \frac{x\mathrm{d}x}{(x-\cos a)^2+\sin^2 a}\\ &= \int \frac{(x-\cos a)\mathrm{d}x}{(x-\cos a)^2+\sin^2 a} + \int \frac{\cos a\mathrm{d}x}{(x-\cos a)^2+\sin^2 a}\\ &= \frac{1}{2}\ln{(x^2-2x\cos a+1)} + \cot a \arctan{(\frac{x-\cos a}{\sin a})} + C\end{aligned}$$

Problem 1.7 计算 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$.

Solution: 做换元 $t=x+1$：

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2-2t+2}} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\mathrm{d}(\frac{1}{t})}{\sqrt{(\frac{1}{t}-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}}\\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1}{t}-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}+\frac{1}{2}}\right|+C\\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{2x^2+2}}{x+1}\right|+C\end{aligned}$$

1.3 各类函数积分法

1.3.1 有理函数积分法

有理函数形式上为两个多项式函数做除法，用带余除法和待定系数法等方式进行化简后可以将其转化为多项式函数与四类部分分式函数的和，多项式函数的积分是容易的，故而我们只需要解决四类部分分式函数的积分就能完全解决有理函数的积分：

(i) $\int \frac{A}{x-a}\mathrm{d}x = A\ln|x-a|+C$

(ii) $\int \frac{A}{(x-a)^n}\mathrm{d}x = \frac{A}{1-n}(x-a)^{n-1}+C(n\neq 1)$

(iii) $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\mathrm{d}x = \frac{M}{2}\ln{(x^2+px+q)} + \frac{b}{a}\arctan\frac{x+\frac{p}{2}}{a}+C$，其中 $a^2=q-\frac{p^2}{4}, b=N-\frac{Mp}{2}$

(iv) $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x = -\frac{M}{2(n-1)(x^2+px+q)^{n-1}} + b\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^n}$，其中 $n>1, a^2=q-\frac{p^2}{4}, b=N-\frac{Mp}{2}$

在待定系数法方面，有一个奥斯特罗格拉茨基公式可以辅助我们，但在考试中通常来说次数不会太高，故仅作参考即可：

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\mathrm{d}x$$

其中 $\frac{P(x)}{Q(x)}, \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}, \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ 都是真有理分式，对于 $Q(x)$ 中每个 $(x-a)^n(n>1)$ 项和每个 $(x^2+px+q)^m(m>1)$ 项，在 $Q_1(x)$ 中相应有 $(x-a)^{n-1}$ 和 $(x^2+px+q)^{m-1}$ 项，但在 $Q_2(x)$ 中仅有 $x-a$ 和 x^2+px+q 项.

Problem 1.8 计算 $\int \frac{x\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

Solution: 做部分分式展开有：

$$\begin{aligned}\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} &= \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x+3}\\ &= \frac{A(x+2)(x+3)+B(x+1)(x+3)+C(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)}\\ &= \frac{(A+B+C)x^2+(5A+4B+3C)x+(6A+3B+2C)}{(x+1)(x+2)(x+3)}\end{aligned}$$

比较系数后可得线性方程组：

$$\begin{cases} A+B+C=0\\ 5A+4B+3C=1\\ 6A+3B+2C=0\end{cases}$$

解得 $A=-\frac{1}{2},B=2,C=-\frac{3}{2}$，所以有：

$$\int\frac{x\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)(x+3)}=-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x+1}+2\int\frac{\mathrm{d}x}{x+2}-\frac{3}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x+3}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+2)^4}{(x+1)(x+3)^3}\right|+C$$

Problem 1.9 计算 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$.

Solution: 做部分分式展开有 $\frac{1}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$，等式两侧乘上 $x+1$ 后取极限 $x\to-1$，即可得 $A=\lim\limits_{x\to-1}\frac{1}{x^2-x+1}=\frac{1}{3}$，做减法得 $\frac{1}{x^3+1}-\frac{1}{3(x+1)}=\frac{-x+2}{3(x^2-x+1)}$，有 $B=-\frac{1}{3},C=\frac{2}{3}$，所以：

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}=\int\frac{\mathrm{d}x}{3(1+x)}+\int\frac{-x+2}{3(x^2-x+1)}\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\ln\left(\frac{x^2+2x+1}{x^2-x+1}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

1.3.2 无理函数积分法

无理函数主要指根式函数，在考试中多数属于一次或二次无理根式的情形，对这些积分我们采取的方法是换元，且换元要有目的性，以消除掉根式化简为有理函数积分，然后用有理函数积分法去解决即可，这里有几个常用的换元技巧，称为欧拉代换：

(i) 若 $a>0$，则使用 $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}x+t$

(ii) 若 $c>0$，则使用 $\sqrt{ax^2+bx+c}=tx\pm\sqrt{c}$

(iii) 对可约的二次根式使用 $\sqrt{a(x-b)(x-c)}=t(x-b)$

Problem 1.10 计算 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

Solution: 做换元 $\sqrt{x^2+x+1}=t-x$，得 $x=\frac{t^2-1}{2t+1}, \mathrm{d}x=\frac{2t^2+2t+2}{4t^2+4t+1}\mathrm{d}t$，则有：

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+x+1}} &= \int \frac{2t^2+2t+2}{4t^3+4t^2+t}\mathrm{d}t = \int \frac{2\mathrm{d}t}{t} - \int \frac{3\mathrm{d}t}{2t+1} - \int \frac{3\mathrm{d}t}{(2t+1)^2} \\
&= 2\ln|x| - \frac{3}{2}\ln|2t+1| + \frac{3}{4t+2} + C \\
&= 2\ln|x+\sqrt{x^2+x+1}| - \frac{3}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\right| + \sqrt{x^2+x+1} - x + C
\end{aligned}$$

Problem 1.11 计算 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.

Solution: 做换元 $\sqrt{1-2x-x^2}=tx-1$，得 $x=\frac{2t-2}{t^2+1}, \mathrm{d}x=\frac{-2t^2+4t+2}{t^4+2t^2+1}\mathrm{d}t$，则有：

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-2x-x^2}} &= \int \frac{-t^2+2t+1}{t^4-t^3+t^2-t}\mathrm{d}t = -\int \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int \frac{\mathrm{d}t}{t-1} - \int \frac{2\mathrm{d}t}{t^2+1} \\
&= \ln\left|\frac{t-1}{t}\right| - 2\arctan t + C \\
&= \ln\left|\frac{1-x+\sqrt{1-2x-x^2}}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}\right| - 2\arctan\left(\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}\right) + C
\end{aligned}$$

1.3.3 三角函数积分法

三角函数求导以后出现循环的现象，因此很多题目都可以用分部积分法来解决，此外有一个通用的方法可以将三角函数积分进行换元变为有理函数积分，称为万能代换 $t=\tan\frac{x}{2}$，代换后主要的形式变化如下：

(i) $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}$

(ii) $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

(iii) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2t}{1-t^2}$

(iv) $\mathrm{d}x = \mathrm{d}(2\arctan x) = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$

万能代换的主要缺点在繁琐，通常换元后还需要进行有理函数积分，但在特殊的情形下，有一些更简单的换元技巧，能够降低换元后得到的有理函数次数：

(i) 若被积函数是关于 $\sin x$ 的奇函数，用 $t=\cos x$.

(ii) 若被积函数是关于 $\cos x$ 的奇函数，用 $t=\sin x$.

(iii) 若被积函数关于 $\sin x, \cos x$ 的次数都是偶数，用 $t=\tan x$.

此外，下面两个积分的结果非常容易获得：

$$\int \frac{a\sin x+b\cos x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x = x+C$$
$$\int \frac{-b\sin x+a\cos x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x = \ln|a\sin x+b\cos x|+C$$

所以对于形如 $\frac{c\sin x+d\cos x}{a\sin x+b\cos x}$ 的被积函数，还可以将 $c\sin x+d\cos x$ 写作 $a\sin x+b\cos x$ 与 $-b\sin x+a\cos x$ 的线性组合，然后用上面两个结论直接获得结果.

Problem 1.12 计算 $\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin x-\cos x+5}$.

Solution: 做万能代换 $t=\tan\frac{x}{2}$：

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin x-\cos x+5} = \int \frac{2\mathrm{d}t}{4t-(1-t^2)+5(1+t^2)} = \int \frac{\mathrm{d}t}{3t^2+2t+2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{3t+1}{\sqrt{5}}\right)+C = \frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{3\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}\right)+C$$

Problem 1.13 计算 $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x$.

Solution: 观察发现被积函数关于 $\sin x, \cos x$ 的次数都是偶数，所以做换元 $t=\tan x$：

$$\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{t^2}{(1+t^2)(1+2t^2)}\mathrm{d}x$$
$$= \arctan t - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}t)+C = x-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x)+C$$

Problem 1.14 计算 $\int \frac{\sin x}{\sin x-3\cos x}\mathrm{d}x$.

Solution: 考虑将 $\sin x$ 写作 $\sin x-3\cos x$ 与 $3\sin x+\cos x$ 的线性组合，设 $\sin x = A(\sin x-3\cos x)+B(3\sin x+\cos x)$，两边比较系数后可得线性方程组：

$$\begin{cases} A+3B=1 \\ -3A+B=0 \end{cases}$$

解得 $A=\frac{1}{10}, B=\frac{3}{10}$，所以有：

$$\int \frac{\sin x}{\sin x-3\cos x}\mathrm{d}x = \frac{x}{10}+\frac{3}{10}\ln|\sin x-3\cos x|+C$$

2 定积分

2.1 定积分的计算

微积分基本定理是用来计算定积分的主要工具，则不定积分是计算定积分的基础，微积分基本定理表述为对于 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$，若存在原函数 $F(x)$，则有：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = F(x)\mid_a^b$$

在应用时，需要格外注意两点：

(i) 有些函数满足微积分基本定理的条件，但本身原函数很难显式地写出来，这时可能需要采用别的方法求解积分.

(ii) 对于不满足连续性条件的函数，如果是有第一类间断点的话，可以在各间断点之间的连续区间上应用微积分基本定理求解.

在定积分的问题中，如果需要换元，对换元使用的函数有一定的额外要求：

(i) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$x=\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上严格单调可微且导函数可积，满足 $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$，则有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$.

(ii) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$x=\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可微且导函数可积，满足 $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b,\varphi([\alpha,\beta])\subset[a,b]$，则有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$.

如果换元使用的函数不满足要求，则会得到错误的计算结果，同时还需注意在换元的过程中积分上下限也会随之变化.

Problem 2.1 (2019 期末) 计算 $\int_0^2 |1-x|\mathrm{d}x$.

Solution: 这个函数在积分区间上满足微积分基本定理的条件，但绝对值函数的原函数写出来很不方便，可以考虑分成两个一次函数进行积分：

$$\int_0^2 |1-x|\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x)\mathrm{d}x + \int_1^2 (x-1)\mathrm{d}x = (x-\frac{x^2}{2})\mid_0^1 + (\frac{x^2}{2}-x)\mid_1^2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$$

Problem 2.2 计算 $\int_0^{2\pi} \frac{\sec^2 x}{2+\tan^2 x}\mathrm{d}x$.

Solution: 易知 $\int \frac{\sec^2 x}{2+\tan^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(\tan x)}{2+\tan^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\frac{\tan x}{\sqrt{2}})+C$，但此时若直接代入上下限 0 和 2π 会得到积分值为 0 的荒谬结果，原因在于三角函数在积分区间上的某些点是无定义的，因此不能直接使用微积分基本定理.

考虑周期性和对称性可知原函数在 $[0,\frac{\pi}{2}],[\frac{\pi}{2},\pi],[\pi,\frac{3\pi}{2}],[\frac{3\pi}{2},2\pi]$ 四个区间上积分值相等，且在区间上都满足微积分基本定理，则有：

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sec^2 x}{2+\tan^2 x}\mathrm{d}x = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}(\tan x)}{2+\tan^2 x} = \frac{4}{\sqrt{2}}\arctan(\frac{\tan x}{\sqrt{2}})\mid_0^{\frac{\pi}{2}^-} = \sqrt{2}\pi$$

利用对称性可以简化很多定积分的计算，除了普通的奇函数与偶函数以外，最常用的对称性是有关三角函数的，可以总结两条技巧如下：

(i) 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x$

(ii) 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，则 $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$

类似的，$\tan x$ 和 $\cot x$ 之间也有对称性可以利用.

Problem 2.3 计算 $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

Solution: 记 $I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$，做换元 $x = \pi - t$：

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - t)\sin t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \frac{\pi\sin t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t - \int_0^{\pi} \frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t \\
&= -\pi\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}(\cos t)}{1+\cos^2 t} - I = -\pi\arctan(\cos t)\mid_0^{\pi} - I = \frac{\pi^2}{2} - I
\end{aligned}$$

通过解方程可得 $I = \frac{\pi^2}{4}$.

Problem 2.4 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\tan x)\mathrm{d}x$.

Solution:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\tan x)\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\tan x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\tan x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\tan x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cot(\frac{\pi}{2} - x))\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\tan x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \ln(\cot u)\mathrm{d}(\frac{\pi}{2} - u) \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\tan x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \ln(\tan t)\mathrm{d}t = 0
\end{aligned}$$

2.2 定积分相关定理

在定积分这一块有关的定理如下：

(i) 变限积分求导：设 $f(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} u(x,t)\mathrm{d}t$ 是变限积分函数，其中 $\varphi(x), \psi(x)$ 可微，$u(x,t)$ 连续，则有 $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\mathrm{d}u(x,t)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}t + u(x,\psi(x))\psi'(x) - u(x,\varphi(x))\varphi'(x)$.

(ii) 第一中值定理：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积且不变号，则 $\exists\xi \in [a,b]$，使得 $\int_a^b f(x)d(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

(iii) 第二中值定理：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调可积，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $\exists\xi\in[a,b]$，使得 $\int_a^b f(x)d(x)\mathrm{d}x=f(a)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x+f(b)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x$.

(iv) 定积分的柯西不等式：$(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x)^2\le\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$.

对两个中值定理，要注意应用条件，尤其是 ξ 的取值是落在闭区间上的，这可能会带来一些麻烦，需要单独处理.

Problem 2.5 计算 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^{2x}\ln(1+t^2)\mathrm{d}t}{x^3}$.

Solution: 当 $x\to0$ 时 $\int_0^{2x}\ln(1+t^2)\mathrm{d}t$ 的积分区间趋于 0，易知此时积分值为 0，所以使用洛必达法则有：

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{2x}\ln(1+t^2)\mathrm{d}t}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{2\ln(1+4x^2)}{3x^2}=\frac{8}{3}$$

Problem 2.6 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明 $\lim\limits_{h\to0^+}\int_0^1\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}f(0)$.

Solution: 令 $\int_0^1\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\sqrt{h}}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x+\int_{\sqrt{h}}^1\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x$，由积分第一中值定理，存在 $0\le\xi\le\sqrt{h}$，使得 $\int_0^{\sqrt{h}}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_0^{\sqrt{h}}\frac{h}{h^2+x^2}\mathrm{d}x=f(\xi)\arctan\frac{1}{\sqrt{h}}$，所以：

$$\lim_{h\to0^+}\int_0^{\sqrt{h}}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{h\to0^+}f(\xi)\arctan\frac{1}{\sqrt{h}}=\frac{\pi}{2}f(0)$$

另一方面，因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，所以 $\exists M>0$，使得 $|f(x)|$ 在 $[0,1]$ 上小于 M，则 $|\int_{\sqrt{h}}^1\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x|\le\int_{\sqrt{h}}^1\frac{h}{h^2+x^2}|f(x)|\mathrm{d}x<M\int_{\sqrt{h}}^1\frac{h}{h^2+x^2}\mathrm{d}x=M(\arctan\frac{1}{h}-\arctan\frac{1}{\sqrt{h}})$，所以：

$$\lim_{h\to0^+}\left|\int_{\sqrt{h}}^1\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x\right|\le\lim_{h\to0^+}M(\arctan\frac{1}{h}-\arctan\frac{1}{\sqrt{h}})=0$$

上面两式相加即得 $\lim\limits_{h\to0^+}\int_0^1\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}f(0)$.

Problem 2.7 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可微且 $f(a)=0$，证明 $\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\le\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b(f'(x))^2\mathrm{d}x$.

Solution: 由 $f(a)=0$，可设 $f(x)=\int_a^x f'(x)\mathrm{d}x$，根据柯西不等式有：

$$f^2(x)=(\int_a^x f'(x)\mathrm{d}x)^2\le(x-a)\int_a^x(f'(x))^2\mathrm{d}x\le(x-a)\int_a^b(f'(x))^2\mathrm{d}x$$

将上式两侧积分后即得 $\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\le\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b(f'(x))^2\mathrm{d}x$.

Problem 2.8 证明 $\int_0^{2\pi}(\int_x^{2\pi}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t)\mathrm{d}x=0$.

Solution: 不妨设 $Si(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$，则 $\int_x^{2\pi}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=Si(2\pi)-Si(x)$，所以原式等于：

$$\int_0^{2\pi}(Si(2\pi)-Si(x))\mathrm{d}x=2\pi Si(2\pi)-\int_0^{2\pi}Si(x)\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}x\mathrm{d}Si(x)=\int_0^{2\pi}\sin x\mathrm{d}x=0$$

2.3 积分的应用

在积分的应用这一块，首先是需要熟悉各种公式，这些公式最好能够理解记忆下来，而在具体问题上应用这些时，重点则是对它们处理的情形进行分析，套用合适的公式并计算积分求解.

平面区域面积计算公式：

(i) 直角坐标系下平面区域面积：直接进行积分，注意有时候可能对 y 积分更简单.

(ii) 极坐标系下平面区域面积：设区域 $D=\{(r,\theta)\mid 0\le r\le r(\theta),\alpha\le\theta\le\beta\}$，则面积 $S_D=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\mathrm{d}\theta$.

曲线弧长计算公式：

(i) 直角坐标系下曲线弧长：设曲线 $C:y=f(x),a\le x\le b$，则弧长 $L_C=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\mathrm{d}x$.

(ii) 极坐标系下曲线弧长：设曲线 $C:r=r(\theta),\alpha\le\theta\le\beta$，则弧长 $L_C=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\theta)+(r'(\theta))^2}\mathrm{d}\theta$.

(iii) 参数方程曲线弧长：设曲线 $C:\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases},a\le t\le b$，则弧长 $L_C=\int_a^b\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\mathrm{d}t$.

其它积分应用公式：

(i) 曲率和曲率半径：曲率 $\kappa=\frac{|f''(x)|}{(1+(f'(x))^2)^{\frac{3}{2}}}$，曲率半径 $\rho=\frac{1}{\kappa}$.

(ii) 旋转体体积：设曲线下方区域 $D=\{(x,f(x))\mid a\le x\le b\}$，则绕 x 轴旋转所得旋转体体积 $V_\Omega=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.

(iii) 旋转曲面面积：设曲线 $C:\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases},a\le t\le b$，则绕 x 轴旋转所得旋转曲面面积 $S_\Sigma=2\pi\int_a^b|y(t)|\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\mathrm{d}t$.

Problem 2.9 计算极坐标曲线 $\theta(r)=\sin(\pi r),0\le r\le 1$ 与 x 轴所围成的图形面积.

Solution: 大致绘出图形后发现，对于每个 θ，图形边界上有两个对应的点，因此设 $r_1(\varphi),r_2(\varphi)$ 为图形左右交点构成的曲线，则所求面积为 $S=\frac{1}{2}\int_0^1(r_2^2(\varphi)-r_1^2(\varphi))\mathrm{d}\varphi$.

当 r 从 0 增大到 $\frac{1}{2}$ 时，πr 从 0 增大到 $\frac{\pi}{2}$，所以 $r_1(\varphi)=\frac{\arcsin\varphi}{\pi}$，而当 r 从 $\frac{1}{2}$ 增大到 1 时，πr 从 $\frac{\pi}{2}$ 变化为 π，此时应有 $\arcsin\varphi=\pi-\pi r$，则 $r_2(\varphi)=1-\frac{\arcsin\varphi}{\pi}$，所以：

$$S=\frac{1}{2}\int_0^1(r_2^2(\varphi)-r_1^2(\varphi))\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{2}\int_0^1(1-\frac{\arcsin\varphi}{\pi})^2-(\frac{\arcsin\varphi}{\pi})^2\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{2}\int_0^1 1-\frac{2\arcsin\varphi}{\pi}\mathrm{d}\varphi$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\int_0^1\arcsin\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}(\sqrt{1-\varphi^2}+x\arcsin\varphi)\mid_0^1=\frac{1}{\pi}$$

Problem 2.10 计算极坐标下平面图形 $D=\{(r,\theta)\mid 0\le r\le r(\theta),0\le\alpha\le\theta\le\beta\le\frac{\pi}{2}\}$ 绕极轴旋转所得旋转体体积.

Solution: 考虑由从 φ 到 $\varphi+\Delta\varphi$ 构成的小扇形绕极轴旋转所得体积，可以将其近似成圆的扇形来计算体积，然后再积分即可得整个旋转体的体积，对于一个 r 和 φ 都为固定值的扇形绕极轴旋转所得体积，将扇形划分成一个直角三角形和一个曲边三角形后，直接按照截面面积来计算旋转体体积得：

$$V=\pi\int_0^{r\cos\varphi}x^2\tan^2\varphi\mathrm{d}x+\pi\int_{r\cos\varphi}^{r}(r^2-x^2)\mathrm{d}x=\frac{2\pi}{3}r^3(1-\cos\varphi)$$

两边微分得 $dV=\frac{2\pi}{3}r^3\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$，所以我们相信所求体积公式为 $V=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\varphi)\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$.

注意这个方法是不严格的，但在曲线性质比较好的情况下，我们相信肯定能通过这样的推导获得正确的结果，如果需要严格计算的话，可以将曲线看作参数方程曲线：

$$\begin{cases}x=r(\varphi)\cos\varphi\\ y=r(\varphi)\sin\varphi\end{cases}$$

然后类比参数方程下旋转曲面面积公式可以推导出参数方程下旋转体体积公式进行计算，此外也可以直接严格推导极坐标下旋转体体积公式，但是比较麻烦，因此这里会提出考虑不严格的微元法或参数方程.

3 广义积分

3.1 广义积分的计算

根据定积分的定义，积分区间应该是一个有界区间且被积函数应该在积分区间上有界，而广义积分则打破了这个限制：允许函数在某些点上无界，或者允许积分区间取到 $\pm\infty$，此时我们定义积分就是使用极限来定义的，因此积分的计算也可以归结为极限的运算，而微积分基本定理的极限版本在这里成立，所以广义积分的计算与普通定积分的计算没有区别.

利用对称性也可以简化广义积分的计算，在这里常用的是换元 $x=\frac{1}{t}$，换元前后在两个积分 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_1^\infty f(t)\mathrm{d}t$ 之间有对称性可以利用.

Problem 3.1 计算 $\int_0^\infty \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$.

Solution:

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x + \int_1^0 \frac{\frac{1}{t}\ln\frac{1}{t}}{(1+\frac{1}{t^2})^2}\mathrm{d}\frac{1}{t}\\
&= \int_0^1 \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x + \int_1^0 \frac{t\ln t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t = 0
\end{aligned}
$$

Problem 3.2 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\mathrm{d}x$.

Solution: 记 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\mathrm{d}x$，则有：

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin(\frac{\pi}{2}-x)\mathrm{d}x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln\sin x + \ln\sin(\frac{\pi}{2}-x))\mathrm{d}x\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln\sin x + \ln\cos x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln\sin 2x - \ln 2)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin 2x\mathrm{d}2x - \frac{\pi}{4}\ln 2\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln\sin 2x + \ln\cos 2x)\mathrm{d}2x - \frac{\pi}{4}\ln 2 = \frac{1}{2}I - \frac{\pi}{4}\ln 2
\end{aligned}
$$

通过解方程可得 $I=-\frac{\pi}{2}\ln 2$.

3.2 广义积分判敛

比较判敛法：设 $+\infty$ 是 $f(x),g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的唯一瑕点，令 $\lim_{x\to\infty}\frac{|f(x)|}{|g(x)|}=C$，则有：

(i) 若 $0<C<+\infty$，则 $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^\infty g(x)\mathrm{d}x$ 同收敛同发散

(ii) 若 $C=0$，则 $\int_a^\infty g(x)\mathrm{d}x$ 收敛推出 $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ 收敛

(iii) 若 $C=+\infty$，则 $\int_a^\infty g(x)\mathrm{d}x$ 发散推出 $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ 发散

通常我们都是和积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 进行比较判敛，当 $p<1$ 时这个积分在 $(0,1]$ 区间上收敛，当 $p>1$ 时这个积分在 $[1,+\infty)$ 区间上收敛，而和这个积分进行比较等价于计算函数的阶数，由此可以衍生出比阶判别法等判敛法.

此外需要注意，判敛的时候我们需要把不同的瑕点分开来讨论，使得每个积分区域上只有一个瑕点，当积分在每个积分区域上都收敛时，可以推出原积分是收敛的.

Abel 判敛法：设 $+\infty$ 是 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的唯一瑕点，$\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，$g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调有界，则 $\int_a^{\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

Dirichlet 判敛法：设 $+\infty$ 是 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的唯一瑕点，$\int_a^{h} f(x)\mathrm{d}x$ 在 $h\in[a,+\infty)$ 上有界，$g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调趋于 0，则 $\int_a^{\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

在这两个判别法的理解上，可以记成是分别对 $f(x),g(x)$ 两个函数的性质有要求，而对 $f(x)$ 的要求较强时，对 $g(x)$ 的要求就会减弱，反之亦然.

Problem 3.3 讨论 $\int_0^{\infty}(\frac{x}{x^2+p}-\frac{p}{x+1})\mathrm{d}x$ 的敛散性.

Solution: 由 $\int_0^{\infty}(\frac{x}{x^2+p}-\frac{p}{x+1})\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\frac{(1-p)x^2+x-p^2}{(x^2+p)(x+1)}\mathrm{d}x$ 知，当 $p=1$ 时 $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\frac{x-1}{(x^2+p)(x+1)}=1$，故广义积分收敛，当 $p\neq 1$ 时 $\lim\limits_{x\to\infty} x\frac{x-1}{(x^2+p)(x+1)}=1-p\neq 0$，故广义积分发散.

Problem 3.4 讨论 $\int_0^{\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

Solution: 这个积分有两个瑕点，不妨设 $I=\int_0^{\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}\mathrm{d}x=\int_0^{1}\frac{\ln(1+x)}{x^p}\mathrm{d}x+\int_1^{\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}\mathrm{d}x=I_1+I_2$，然后分别讨论 I_1,I_2 的敛散性.

对于 I_1，有 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x^p}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x^{p-1}}$，故当 $p<2$ 时 I_1 收敛，$p\geq 2$ 时 I_1 发散.

对于 I_2，当 $p\leq 1$ 时有被积函数 $\frac{\ln(1+x)}{x^p}\geq\frac{\ln 2}{x^p}$ 恒成立，故 I_2 发散，当 $p>1$ 时有 $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{p+1}{2}}\frac{\ln(1+x)}{x^p}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^{\frac{p-1}{2}}}=0$，故 I_2 收敛.

综上所述，当 $1<p<2$ 时广义积分 $\int_0^{\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛.

Problem 3.5 讨论 $\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^p}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

Solution: 这个积分有两个瑕点，不妨设 $I=\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^p}\mathrm{d}x=\int_0^{1}\frac{\sin^2 x}{x^p}\mathrm{d}x+\int_1^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^p}\mathrm{d}x=I_1+I_2$，然后分别讨论 I_1,I_2 的敛散性.

对于 I_1，根据 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$ 且 $\frac{\sin^2 x}{x^p}=\frac{1}{x^{p-2}}(\frac{\sin x}{x})^2$ 可知，当且仅当 $p<3$ 时 I_1 收敛.

对于 I_2，因为 $\frac{\sin^2 x}{x^p}=\frac{1}{2x^p}-\frac{\cos 2x}{2x^p}$，其中 $\int_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{2x^p}$ 收敛当且仅当 $p>1$，而根据 Dirichlet 判别法，$\int_1^{\infty}\frac{\cos 2x}{2x^p}\mathrm{d}x$ 收敛当且仅当 $p>0$，所以 I_2 收敛当且仅当 $p>1$.

综上所述，当 $1<p<3$ 时广义积分 $\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛.

4 微分方程

4.1 基本计算方法

一阶方程 $y' = f(x,y)$ 有三类基本的可积型方程：变量分离型方程、恰当方程和线性方程，其中恰当方程我们没有涉及，另外两类需要掌握.

变量分离型方程：形如 $y' = f(x)g(y)$，分离变量后取不定积分得通解 $\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x + C$.

齐次方程：形如 $y' = f(\frac{y}{x})$，做变量代换 $u = \frac{y}{x}$ 得 $xu' + u = f(u)$，新方程为一个变量分离型方程，按上面的方法积分求解即可.

一阶线性方程：形如 $y' + p(x)y = q(x)$，最简洁的解法是引入积分因子 $e^{\int p(x)\mathrm{d}x}$，可得：

$$e^{\int p(x)\mathrm{d}x}(y' + p(x)y) = (ye^{\int p(x)\mathrm{d}x})' = q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}$$

积分得 $ye^{\int p(x)\mathrm{d}x} = \int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C$，所以有通解 $y = e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}(\int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C)$.

伯努利方程：形如 $y' + p(x)y = q(x)y^n (n \neq 0, 1)$，做变量代换 $u = y^{1-n}$ 得 $u' + (1-n)p(x)u = (1-n)q(x)$，新方程为一个一阶线性方程，按上面的方法求解即可.

高阶方程通常情况下是无法直接求解的，但是部分方程可以通过换元法进行降阶：

(i) 不显含 y 的 n 阶方程：形如 $y^{(n)} = F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \cdots, y^{(n-1)})$，可做换元 $p(x) = y^{(k)}(x)$，得到 $n-k$ 阶方程 $p^{(n-k)} = F(x, p, p', \cdots, p^{(n-k-1)})$，求解后积分 k 次即得原方程的解

(ii) 不显含 x 的方程：形如 $y'' = F(y, y')$，可做换元 $p(y(x)) = y'(x)$，得到方程 $p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = F(y, p)$，求解新方程后积分一次即得原方程的解

除了可降阶的方程外，我们只关注高阶线性微分方程的结构，其中最重要的两类是高阶线性常系数方程和二阶线性方程.

Problem 4.1 解方程 $x^2y^2y' = y - 1$.

Solution: 这是一个变量分离型方程，有 $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y-1}{x^2y^2}$，有通解 $\int \frac{y^2}{y-1}\mathrm{d}y = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2} + C$，解得 $\frac{y^2}{2} + y + \ln|y-1| = -\frac{1}{x} + C$.

Problem 4.2 解方程 $(x+y)\mathrm{d}x - (x-y)\mathrm{d}y = 0$.

Solution: 由 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x+y}{x-y} = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$ 看出这是一个齐次方程，做变量代换 $u = \frac{y}{x}$ 得 $xu' + u = \frac{1+u}{1-u}$，有通解 $\int \frac{1-u}{1+u^2}\mathrm{d}u = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} + C$，解得 $\arctan u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) + C_1 = \ln|x|$，代回 $u = \frac{y}{x}$ 得 $\sqrt{x^2+y^2} = Ce^{\arctan\frac{y}{x}}$.

Problem 4.3 解方程 $y' + \frac{y}{x} = 3x$.

Solution: 这是一个标准的一阶线性方程，直接用公式解即可得通解 $y = x^2 + \frac{C}{x}$.

Problem 4.4 解方程 $(e^{-y} - x)y' = 1$.

Solution: 这里可以将 x 看作关于 y 的方程，则有 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+x=e^{-y}$，得到一个 x 关于 y 的标准一阶线性方程，直接用公式解即可得通解 $x=e^{-y}(y+C)$.

4.2 线性方程

二阶线性方程: 形如 $y''+p(x)y'+q(x)y=r(x)$，其中 $r(x)=0$ 的情形称为齐次方程，$r(x)\neq 0$ 的情形称为非齐次方程，二阶线性方程无法直接求解，但如果已知齐次方程的一个通解，则可以得到整个方程解的结构，其思路是：

(i) 从齐次方程的一个非平凡解 $y_1(x)$ 出发，构造出另一个线性无关解 $y_2(x)$

(ii) 得到齐次方程两个线性无关解后，利用常数变易法构造非齐次方程的一个特解 $y_p(x)$

这里提到的线性无关需要用朗斯基行列式判断，两个齐次方程解 $y_1(x),y_2(x)$ 线性无关当且仅当 $W_{y_1,y_2}(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}$ 不为 0，类似的概念可以推广到高阶线性方程.

若已经得到 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的一个通解 $y_1(x)$，令 $y_2(x)=c(x)y_1(x)$ 是另一个线性无关解，代入方程后解一个一阶线性方程可得：

$$c(x)=\int_0^x \frac{1}{y_1^2(s)}e^{-\int_0^s p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s$$

能够证明这样得到的 $y_1(x),y_2(x)$ 一定是线性无关的，再将两个解代入非齐次方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=r(x)$，设 $W_{y_1,y_2}(x)$ 表示两个解对应的朗斯基行列式，可以解得一个特解：

$$y_p(x)=-y_1(x)\int_0^x \frac{y_2(s)r(s)}{W_{y_1,y_2}(s)}\mathrm{d}s+y_2(x)\int_0^x \frac{y_1(s)r(s)}{W_{y_1,y_2}(s)}\mathrm{d}s$$

这里的公式比较复杂，可以结合推导过程理解记忆，事实上推导过程只涉及到求解一阶线性方程和线性方程组，理解之后不难掌握这部分内容.

高阶线性常系数方程 $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x)$ 的通用解法是用特征方程确定通解，再结合 $f(x)$ 的特点使用待定系数法确定特解.

这里以二阶线性常系数方程 $y''+py'+q=0$ 为例说明通解的求解情况，此时对应特征方程为 $m^2+pm+q=0$：

(i) 若 $p^2>4q$，特征方程有两个互异实根 m_1,m_2，则原方程有两个线性无关解 e^{m_1x},e^{m_2x}

(ii) 若 $p^2<4q$,特征方程有两个共轭复根 $m_1,m_2=a\pm ib$,则原方程有两个线性无关解 $e^{ax}\sin bx,e^{ax}\cos bx$

(iii) 若 $p^2=4q$，特征方程有一个二重实根 $-\frac{p}{2}$，则原方程有两个线性无关解 $e^{-\frac{px}{2}},xe^{-\frac{px}{2}}$

对于高阶的情形可将特征方程分解因式后类似讨论，比如若 λ_0 是 k 重实根，则有 k 个线性无关解 $e^{\lambda_0x},xe^{\lambda_0x},\cdots,x^{k-1}e^{\lambda_0x}$.

考虑方程 $y''+py'+qy=e^{ax}$，设 $f(m)=m^2+pm+q$ 为对应的特征多项式：

(i) 若 a 不是特征根，则方程有特解 $y_p(x)=\frac{1}{f(a)}e^{ax}$

(ii) 若 a 是一重特征根，则方程有特解 $y_p(x)=\frac{1}{f'(a)}xe^{ax}$

(iii) 若 a 是二重特征根，则方程有特解 $y_p(x)=\frac{1}{f''(a)}x^2e^{ax}=\frac{1}{2}x^2e^{ax}$

考虑方程 $y''+py'+qy=\sin bx$ 或 $y''+py'+qy=\cos bx$：

(i) 若 ib 不是特征根（此时 $-ib$ 一定不是特征根），则方程有特解 $y_p(x)=A\sin bx+B\cos bx$

(ii) 若 ib 是特征根（此时 $-ib$ 一定也是特征根），则方程有特解 $y_p(x)=x(A\sin bx+B\cos bx)$

考虑方程 $y''+py'+qy=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$：

(i) 若 0 不是特征根（即 $q\neq 0$），则方程有特解 $y_p(x)=A_0+A_1x+A_2x^2+\cdots+A_nx^n$

(ii) 若 0 是一重特征根（即 $q=0,p\neq 0$），则方程有特解 $y_p(x)=x(A_0+A_1x+A_2x^2+\cdots+A_nx^n)$

(iii) 若 0 是二重特征根（即 $q=0,p=0$），则方程有特解 $y_p(x)=x^2(A_0+A_1x+A_2x^2+\cdots+A_nx^n)$

欧拉方程：形如 $x^ny^{(n)}+\cdots+a_{n-1}xy'+a_ny=f(x)$，可做换元 $x=e^u$，得到一个高阶线性常系数方程，求解新方程后通过逆换元计算即得原方程的解.

Problem 4.5 解方程 $y''+3y'+2y=\sin x+x^2$.

Solution: 特征方程 $m^2+3m+2=0$，解得 $m_1=-1,m_2=-2$，所以对应齐次方程有通解 $y(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$.

由于 i 和 0 都不是特征方程的根，所以可设方程特解为 $y_p(x)=A\cos x+B\sin x+Cx^2+Dx+E$，代入方程得：

$$(A-3B)\sin x+(3A+B)\cos x+2Cx^2+(6C+2D)x+(2C+3D+2E)=\sin x+x^2$$

解得 $A=\frac{1}{10},B=-\frac{3}{10},C=\frac{1}{2},D=-\frac{3}{2},E=\frac{7}{4}$，所以原方程通解为：

$$y(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+\frac{1}{10}\cos x-\frac{3}{10}\sin x+\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{7}{4}$$

Problem 4.6 解方程 $y'''-4y''+6y'-4y=0$.

Solution: 特征方程 $m^3-4m^2+6m-4=0$，分解因式得 $(m-2)(m^2-2m+2)=0$，解得 $m_1=2,m_2=1+i,m_3=1-i$，所以方程有通解 $y(x)=C_1e^{2x}+C_2e^x\cos x+C_3e^x\sin x$.

Problem 4.7 解方程 $y''+y=\frac{1}{\sin x}$.

Solution: 特征方程 $m^2+1=0$，解得 $m_1=i,m_2=-i$，所以对应齐次方程有两个线性无关解 $y_1(x)=\cos x,y_2(x)=\sin x$.

考虑常数变易法，两个线性无关解的朗斯基行列式为：

$$W_{y_1,y_2}(x)=\begin{vmatrix}y_1(x) & y_2(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{vmatrix}=1$$

利用公式计算特解：

$$\begin{aligned} y_p(x) &= -y_1(x)\int_0^x \frac{y_2(s)r(s)}{W_{y_1,y_2}(s)}\mathrm{d}s + y_2(x)\int_0^x \frac{y_1(s)r(s)}{W_{y_1,y_2}(s)}\mathrm{d}s \\ &= -\cos x\int_0^x \frac{\sin s}{\sin s}\mathrm{d}s + \sin x\int_0^x \frac{\cos s}{\sin s}\mathrm{d}s \\ &= -x\cos x + \sin x \ln \sin x \end{aligned}$$

所以方程有通解 $y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x - x\cos x + \sin x\ln\sin x$.

Problem 4.8 解方程 $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$.

Solution: 利用换元 $x = e^u$ 得到一个二阶线性常系数方程，通解为 $y(x) = C_1x + \frac{C_2}{x^2}$.

Problem 4.9 解方程 $y' + \frac{y}{x} + 4x^2y^2 + 1 = 0$.

Solution: 观察到 $y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{x}(xy' + y)$，做换元 $u = xy$，得到 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -x(1+4u^2)$，这是一个变量分离型方程，积分后解得通解为 $y = -\frac{1}{2x}\tan(x^2 + C)$.

Problem 4.10 解方程 $x^2y' + xy + x^2y^2 = 4$.

Solution: 观察到 $x^2y' + xy = x(xy' + y)$，做换元 $u = xy$，得到 $u' = xy' + y$，这是一个变量分离型方程，积分后解得通解为 $y = \frac{2}{x} + \frac{4}{Cx^5 - x}$.

4.3 微分方程组

设关于 t 的向量值可导函数 $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \cdots, u_n(t))^T$ 满足 $\frac{du}{dt} = Au$，其中 A 是一个常数矩阵，求解 $u(t)$ 就是一个线性微分方程组的问题.

在线性微分方程组问题中，最简单的情形是 A 为对角阵的情形，这时实际上对于不同的 i, j，$u_i(t), u_j(t)$ 互不干扰，只需分别求解 n 个方程即可.

当 A 不是对角阵的时候，我们只讨论 A 可对角化的情况，此时可以通过相似对角化 A 来对方程“解耦”，得到一个变量替换后的对角矩阵形式下的线性微分方程组问题，对每个分量单独解方程后，再解一个线性方程组即可得原方程中 $u(t)$ 的解.

Problem 4.11 设 $u(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$，解方程组 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$.

Solution: 将矩阵 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 进行对角化，则方程转化为：

$$\begin{pmatrix} x(t) + y(t) \\ x(t) - y(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} (x(t) + y(t))' \\ (x(t) - y(t))' \end{pmatrix}$$

解得 $x(t)+y(t)=C_1e^t, x(t)-y(t)=C_2e^{-t}$，所以 $u(t)=C_1\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}e^t+C_2\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}e^{-t}$.

Problem 4.12 设 $u(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\\ z(t)\end{pmatrix}$，解方程组 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x'(t)\\ y'(t)\\ z'(t)\end{pmatrix}$.

Solution: 可以解得矩阵 $\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&0&3\end{bmatrix}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$，对应特征向量为 $x_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},x_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},x_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，所以 $u(t)C_1e^tx_1+C_2e^{2t}x_2+C_3e^{3t}x_3$.