微积分 重要公式

The Important Equations of Calculus

关舒文
华南理工大学

Latest Update : 2020 年 6 月 16 日

目录

1 常用三角函数公式

1.1 积化和差公式

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)] \tag{1.1.1}$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)] \tag{1.1.2}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)] \tag{1.1.3}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)] \tag{1.1.4}$$

1.2 和差化积公式

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{1.2.1}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{1.2.2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{1.2.3}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{1.2.4}$$

$$\tan\alpha+\tan\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} \tag{1.2.5}$$

1.3 归一化公式

泰勒展开是唯一的

没本质区别

~~sin²x：对sinx泰勒的平方 显然不如 对cos2x泰勒~~

$$\sin^2 x+\cos^2 x = 1 \tag{1.3.1}$$

$$\sec^2 x-\tan^2 x = 1 \tag{1.3.2}$$

$$\cosh^2 x-\sinh^2 x = 1 \tag{1.3.3}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$$

$$\sin^2 x = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)$$

1.4 倍 (半) 角公式 降 (升) 幂公式

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \tag{1.4.1}$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x) \tag{1.4.2}$$

$$\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} + o(x^4)$$

$$\tan^2 x = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x} \tag{1.4.3}$$

$$\therefore \sin^2 x = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} \tag{1.4.4}$$

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} \tag{1.4.5}$$

$$\tan x = \frac{2\tan(x/2)}{1-\tan^2(x/2)} \tag{1.4.6}$$

1.5 万能公式

令 $u = \tan\frac{x}{2}$ 则

换变元展开 $y=\frac{x}{1-x}(x\to 2)$

$y=\frac{x+2}{-1-x}(x\to 0)$ 展开即可

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2} \tag{1.5.1}$$

$$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \tag{1.5.2}$$

分式型泰勒：上下次数最小的提出来

$$\underset{x\to 0}{y} = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2} \longrightarrow \frac{1}{1}$$

$$= 1 + \frac{2x}{1-x+x^2} \longrightarrow \frac{2x}{1}$$

$$= 1 + 2x + \frac{2x^2-2x^3}{1-x+x^2}$$

2 常用的佩亚诺型余项泰勒公式

泰勒公式 (ξ 在x_0 与x 之间):

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o[(x-x_0)^n]$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

常见类中只有$\ln(x+1)$、项与阶乘无关

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$
$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$$
$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + o(x^3)$$
$$\sec x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)$$
$$\csc x = \frac{1}{x} + \frac{x}{6} + \frac{7}{360}x^3 + o(x^3)$$
$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$
$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$
$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$
$$\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

由此可得常用的泰勒公式

这些全都是麦克 展开在0处

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\ln(x+1) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + o(x^n)$$

令 $n = 2m$ 有,

sinx: 偶次为0　$+1!-3!+5!$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots + (-1)^{m-1}\frac{1}{(2m-1)!}x^{2m-1} + o(x^{2m})$$

cosx: 奇次为0　$0!-2!+4!$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \cdots + (-1)^m\frac{1}{(2m)!}x^{2m} + o(x^{2m+1})$$

tanx: 偶次为0

tanx展开也是奇次项

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots + o(x^{2m-1})$$

此处考虑到 tan 的泰勒公式其通项公式会出现伯努利数故此处略去其通项

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots + o(x^{2m})$$

与sinx呼应

常用于近似计算的泰勒公式

反三角函数很有规律：

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n) \tag{2.0.7}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-x)^n$$

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n}$$

$$\sin x = \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$
$$\arcsin x = \frac{x^1}{1!} + \frac{x^3}{3!}$$
$$\text{则}\arccos x = \frac{\pi}{2} - \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!}$$
$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5$$
$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3$$
$$\text{则}\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - x + \frac{1}{3}x^3$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{i=0}^{n}\frac{\prod_{j=0}^{i-1}(\alpha-j)}{i!}x^n + o(x^n)$$

其实是巧合

$$= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + o(x^n) \tag{2.0.8}$$

$$\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

$$\alpha^x = \sum_{i=0}^{n}\frac{\ln^n\alpha}{n!}x^n + o(x^n)$$

联系下e^x

$$= 1 + x\ln\alpha + \frac{\ln^2\alpha}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\ln^n\alpha}{n!}x^n + o(x^n) \tag{2.0.9}$$

其实这是$(\arcsin x)' + (\arccos x)' = 0$

$(\arctan x)' + (\operatorname{arccot} x)' = 0$

的缘故

3 基本求导公式

$\sin^{(n)}x = \sin(x+\frac{n\pi}{2})$

$\cos^{(n)}x = \cos(x+\frac{n\pi}{2})$

$$(C)' = 0 \tag{3.0.1}$$

$$(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1} \tag{3.0.2}$$

$$(\sin x)' = \cos x \tag{3.0.3}$$

$$(\cos x)' = -\sin x \tag{3.0.4}$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \tag{3.0.5}$$

$$(\cot x)' = -\csc^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x} \tag{3.0.6}$$

$$(\sec x)' = \sec x \cdot \tan x \tag{3.0.7}$$

$$(\csc x)' = -\csc x \cdot \tan x \tag{3.0.8}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \ (a>0, a\neq 1) \tag{3.0.9}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\cdot \ln a} \ (a>0, a\neq 1) \tag{3.0.10}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{3.0.11}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{3.0.12}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \tag{3.0.13}$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \tag{3.0.14}$$

令 $\arctan x = y$.

$(\arctan x)' = \frac{1}{\tan' y} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\tan^2 y}$

不是 $(\tan y)'$

$= \frac{1}{1+x^2}$

$(\operatorname{arccot} x)' = \frac{1}{(\cot y)'} = -\sin^2 y = -\frac{1}{1+\cot^2 y}$

$= -\frac{1}{1+x^2}$

4 函数图形描述中涉及到的重要公式

4.1 常用曲率计算公式

> 曲率的定义式 $K = \left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|$

由定义式我们可以推得

1. **直角坐标**系中的曲线 $y=y(x)$ 有曲率表达式

$$K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}; \tag{4.1.1}$$

2. **参数方程**表示的曲线 $x=\varphi(t), y=\psi(t)$ 有曲率表达式

$$K = \frac{|\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)|}{[\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)]^{3/2}}; \tag{4.1.2}$$

3. **极坐标**表示的的曲线 $y=y(x)$ 有曲率表达式

$$K = \frac{\left|r^2+2{r'}^2-r\cdot r''\right|}{(r^2+r'^2)^{3/2}}; \tag{4.1.3}$$

4. 曲线在对应点 $M(x,y)$ 的曲率中心 $D(\alpha,\beta)$ 的坐标为

$$\begin{cases} \alpha = x - \dfrac{y'(1+{y'}^2)^3}{y''^2} \\ \beta = y + \dfrac{1+{y'}^2}{y''} \end{cases} \tag{4.1.4}$$

.

4.2 曲线的渐近线

1. 若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$，则称 $y=b$ 为曲线 $f(x)$ 的**水平渐近线**
2. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$，则称 $x=x_0$ 为曲线 $f(x)$ 的**垂直渐近线**
3. 若 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(ax+b)] = 0$，其中 $\begin{cases} a = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} \\ b = \lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax] \end{cases}$ 则称 $y=ax+b$ 为曲线 $f(x)$ 的**斜渐近线**

5 基本积分公式

$$\int k\,\mathrm{d}x = kx + C \ (\text{其中}k\text{为常数}) \tag{5.0.1}$$

$$\int x^{\mu}\,\mathrm{d}x=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C\ (\mu\neq-1) \tag{5.0.2}$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\ln|x|+C \tag{5.0.3}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan x+C \tag{5.0.4}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C_1=-\arccos x+C_2 \tag{5.0.5}$$

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x+C \tag{5.0.6}$$

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x=\sin x+C \tag{5.0.7}$$

$$\int \tan x\,\mathrm{d}x=-\ln|\cos x|+C \tag{5.0.8}$$

$$\int \cot x\,\mathrm{d}x=\ln|\sin x|+C \tag{5.0.9}$$

$$\int \csc x\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|+C=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C=\ln|\csc x-\cot x|+C \tag{5.0.10}$$

$$\int \sec x\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C=\ln|\sec x+\tan x|+C \tag{5.0.11}$$

$$\int \sec^2 x\,\mathrm{d}x=\tan x+C \tag{5.0.12}$$

$$\int \csc^2 x\,\mathrm{d}x=-\cot x+C \tag{5.0.13}$$

$$\int \sec x\cdot\tan x\,\mathrm{d}x=\sec x+C \tag{5.0.14}$$

$$\int \csc x\cdot\cot x\,\mathrm{d}x=-\csc x+C \tag{5.0.15}$$

$$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C \tag{5.0.16}$$

$$\int a^x\,\mathrm{d}x=\frac{a^x}{\ln a}+C \tag{5.0.17}$$

$$\int \sinh x\,\mathrm{d}x=\cosh x+C \tag{5.0.18}$$

$$\int \cosh x\,\mathrm{d}x=\sinh x+C \tag{5.0.19}$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C \tag{5.0.20}$$

$$\int \frac{1}{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C \tag{5.0.21}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x=\arcsin\frac{x}{a}+C \tag{5.0.22}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\,\mathrm{d}x=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C \tag{5.0.23}$$

6 基本积分方法

6.1 第一类换元法

6.1.1 三角函数之积的积分

1. 一般地, 对于 $\sin^{2k+1} x \cos^n x$ 或 $\sin^n x \cos^{2k+1} x$ (其中 $k \in \mathbb{N}$) 型函数的积分, 总可依次作变换 $u = \cos x$ 或 $u = \sin x$, 从而求得结果;
2. 一般地, 对于 $\sin^{2k} x \cos^{2l} x$ 或 (其中 $k, l \in \mathbb{N}$) 型函数的积分, 总是利用降幂公式 $\sin^2 = \frac{1}{2}(1-\cos 2x), \cos^2 = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$ 化成 $\cos 2x$ 的多项式, 从而求得结果;
3. 一般地, 对于 $\tan^n x \sec^{2k} x$ 或 $\tan^{2k-1} x \sec^n x$ (其中 $n, k \in \mathbb{N}_+$) 型函数的积分, 总可依次作变换 $u = \tan x$ 或 $u = \sec x$, 从而求得结果;

6.1.2 常见的凑微分类型

$$\int f(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int f(ax+b)\mathrm{d}(ax+b)\ (a \neq 0) \tag{6.1.1}$$

$$\int f(ax^{m+1}+b)x^m\mathrm{d}x = \frac{1}{a(m+1)}\int f(ax^{m+1}+b)\mathrm{d}(ax^{m+1}+b) \tag{6.1.2}$$

$$\int f\left(\frac{1}{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\int f\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right) \tag{6.1.3}$$

$$\int f(\ln x)\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \int f(\ln x)\mathrm{d}(\ln x) \tag{6.1.4}$$

$$\int f(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \int f(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}(\mathrm{e}^x) \tag{6.1.5}$$

$$\int f(\sqrt{x})\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2\int f(\sqrt{x})\mathrm{d}(\sqrt{x}) \tag{6.1.6}$$

$$\int f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x = \int f(\sin x)\mathrm{d}\sin x \tag{6.1.7}$$

$$\int f(\cos x)\sin x\mathrm{d}x = -\int f(\cos x)\mathrm{d}\cos x \tag{6.1.8}$$

$$\int f(\tan x)\sec^2 x\mathrm{d}x = \int f(\tan x)\mathrm{d}\tan x \tag{6.1.9}$$

$$\int f(\cot x)\csc^2 x\mathrm{d}x = -\int f(\cot x)\mathrm{d}\cot x \tag{6.1.10}$$

$$\int f(\arcsin x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int f(\arcsin x)\mathrm{d}\arcsin x \tag{6.1.11}$$

$$\int f(\arctan x)\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int f(\arctan x)\mathrm{d}\arctan x \tag{6.1.12}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}f(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C \tag{6.1.13}$$

6.2 有理函数的积分

6.2.1 部分分式

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} =& \frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_\alpha}{x-a} + \\ & \frac{B_1}{(x-b)^\beta} + \frac{B_2}{(x-b)^{\beta-1}} + \cdots + \frac{B_\beta}{x-b} +\end{aligned}$$

$$\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{\lambda}}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{\lambda-1}}+\cdots+\frac{M_{\lambda}x+N_{\lambda}}{x^2+px+q}+\cdots \tag{6.2.1}$$

6.2.2 三角函数的特殊定积分

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, \mathrm{d}x \\ I_n &= \frac{n-1}{n} I_{n-2} \\ &= \begin{cases} \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} & (n\text{为大于1的正奇数}), I_1=1 \\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} & (n\text{为正偶数}), I_0=\frac{\pi}{2} \end{cases} \end{aligned} \tag{6.2.2}$$

7 多元函数微分

7.1 偏导数

7.1.1 偏导数记法

设函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内有偏导数:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_x(x,y), \quad \frac{\partial z}{\partial y}=f_y(x,y)$$

他们的偏导数若存在, 那么称其偏导数为 $z=f(x,y)$ 的二阶偏导数. 按照对变量求导次序不同, 有如下四个二阶偏导数:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y) \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y) \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y).$$

7.2 全微分

8 微分方程 (该部分将会采用详细的讲义样式)

8.1 微分方程的基本概念

定义 8.1 微分方程的定义

一般地, 凡表示未知函数, 未知函数的导数与自变量之间的关系的方程, 称为**微分方程**. 其中未知函数的最高阶导数的阶数, 称为**微分方程的阶**. 一般地,n 阶微分方程的形式是:

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$$

定义 8.2 微分方程的解

设函数 $y=\varphi(x)$ 在区间 I 上有 n 阶连续导数, 如果在区间 I 上有:

$$F[x,\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x)]\equiv 0,$$

那么函数 $y=\varphi(x)$ 称为**微分方程 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$ 在区间 I 上的解** 特别地, 如果微分方程的解含有任意常数[1], 且任意常数的个数与微分方程的阶数相同, 这样的解称为**微分方程的通解**.

[1]此处的任意常数必须是相互独立的, 或者说他们线性无关.

通解中时常含有任意常数，所以它还不能完全确定地反映某一客观事物的规律性. 所以为了完全确定地反映客观事物的规律性, 必须确定这些常数的值. 为此要根据问题的实际情况，提出确定这些常数的条件. 例如设一阶微分方程中的未知函数为 $y=\varphi(x)$，通常给出的条件为 $x=x_0, y=y_0$，也记为 $y|_{x=x_0}=y_0$.

因此我们定义, 在实际问题中所给定的能够确定这些常数的条件称为**初值条件**. 由初值条件确定了常数的值进而可以得到微分方程的**特解**.

9 可分离变量的微分方程

本节我们将讨论一阶微分方程 $y'=f(x,y)$