3.15

# 《ODE 习题课·一》

1. 作业讲解 + 补充
2. 例题讲解.

## HW1

① (3) ⇒ (1)　$(ml\theta''-mg\cos\theta)\cdot\theta'=0$, $\theta\not\equiv\theta_0$.

① $G(t):=ml\theta''-mg\cos\theta$. 要证 $G(t)\equiv 0$.

反证. 设 $G(t_0)\neq 0$ $\xRightarrow{\text{连续性}}$ $G(t)\neq 0$ in $I(t_0)$ 某邻域

θ 解析

设 含 $t_0$, $G(t)\neq 0$ 的最大区间 $\hat{I}$ { ∃ ✓ ; 有界 ✓ ⇐ $\theta\not\equiv\theta_0$ ; $t_0$附近展开 ⇐ θ解析.

$\theta(t)=\theta(t_0)+\sum\frac{\theta^{(k)}(t_0)}{k!}t^k$

⇓ 一侧 $\theta'\equiv 0$

$\theta(t)\equiv\theta(t_0)$ 某邻域内

矛盾 ✓.

② $F:=\{t\in\mathbb{R}\mid G(t)=0\}\overset{?}{=}\mathbb{R}$

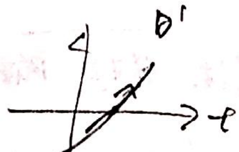
中 ≠ $E:=\{t\in\mathbb{R}\mid \theta'(t)\neq 0\}\subseteq F$
非常值.

F 非空 ✓ . 闭 ✓ (定义) . 开 { $t\in E$ 开 ✓ ; $t\in F\setminus E$: $G(t)=0$, $\theta'(t)=0$ $\xRightarrow{\text{唯一性}}$ $\theta(t)\neq k\pi$ ; $\xRightarrow{G(t)=0}$ $\theta''(t)=\frac{g\cos\theta}{l}\neq 0$.

θ $C^2$可微

⇓ $\mathbb{R}$连通

$F=\mathbb{R}$ ✓.




∴ θ'在t去心邻域内非0. $U\subseteq E\subseteq F$

∴ $U\cup\{t\}$ 故t在F中邻域 ✓

(Ps: 由此 $F\setminus E$ 中点 t: $\theta(t)=0$ 可能存在
但必是离散的)

② (1) • $y(t_0)\neq 0$ ⇒ $y(t)$ 恒不为0.

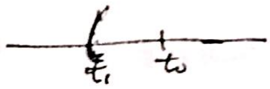
否

• $y(t_0)=0$ ⇒ $y(t)$ 恒为0 (解的唯一性) ✓.

$\xrightarrow{\text{连续性}}$ ∃ 开邻域 $I(t_0)$. $y(t)\neq 0$ in $I$.

设含 $t_0$ 且 $y(t)\neq 0$ 的最大区间 $\hat{I}$.

- 非空 ✓.
- 若右端 $t_1$. $I$ 上 $y=\frac{c}{\cos t}$ ($c\neq 0$).
- $\xrightarrow{\text{连续性}}$ $y(t_1)=\frac{c}{\cos t_1}\neq 0$.
- $\xrightarrow{\text{连续性}}$ $y(t)\neq 0$ in $(t_1-\varepsilon, \ldots)$
- 与最大性矛盾.




∴ $\hat{I}=\mathbb{R}$. ✓.

---

☆ 一般地. 分离变量法处理的方程 $X_1(x)Y_1(y)dx+X_2(x)Y_2(y)dy=0$

$\xrightarrow{Y_1(y)X_2(x)\neq 0}$ $\frac{X_1(x)}{X_2(x)}dx+\frac{Y_2(y)}{Y_1(y)}dy=0$

($X_i(x)$, $Y_i(x)$ 充分光滑) ⇒ $\int\frac{X_1(x)}{X_2(x)}dx+\int\frac{Y_2(y)}{Y_1(y)}dy=C$. ✓

$X_2(x)=0$ $\xRightarrow{\text{根}}$ $x\equiv a_i$. $\forall y$. ✓

$Y_1(y)=0$ $\xRightarrow{\text{根}}$ $y\equiv b_j$. $\forall x$. ✓.

解的唯一性.

例题: $y'+2xy^2=0$ 解 $\begin{cases} y\equiv 0 \\ y=\frac{1}{x^2+c}\end{cases}$

---

☆ 常数变易法 处理一阶线性非齐次方程 $\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$

• 齐次形式通解 $y=Ce^{-\int p(x)dx}$

• 非齐次形式: 设 $y=C(x)e^{-\int p(x)dx}$ ($C(x)$待定)

⇒ $C'(x)=q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}$

⇒ $y(x)=e^{-\int p(x)dx}\left(C_0+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right)$.

例题 $\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=x^3$ ($x\neq 0$).

• 代公式: ——.

• 先解 $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=0$ ⇒ $y=\frac{C}{x}$

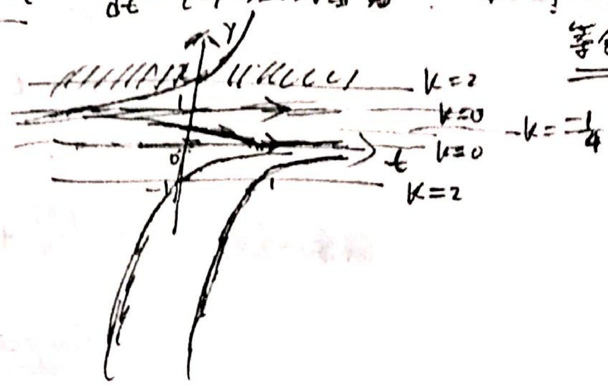
再设 $y=\frac{C(x)}{x}$. 代回原方程: $C'(x)=x^4$ ⇒ $C(x)=\frac{1}{5}x^5+C_0$

⇒ $y=\frac{1}{5}x^4+\frac{C_0}{x}$ ($x\neq 0$) ✓.

HW2

① · 直接解：$\begin{cases} y\equiv 0,1 \\ y=\dfrac{1}{1-Ce^{t}}\ (C\neq 0) \end{cases}$ ⟶ 作草图.

· 解的几何解释：$\frac{dy}{dt}=y(y-1)$ 的线素场　$k=f(t,y)=y(y-1)$ 等斜线




二阶　二阶

②、③　W(t) Wronsk行列式 引入的背景.
朗斯基

n阶

· 二阶线性齐次ODE：$y''(t)+a_1(t)y'(t)+a_0(t)y(t)=0$

令 $y'(t)=:z(t)$ $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} \frac{dy}{dt}=0\cdot y+1\cdot z \\ \frac{dz}{dt}=-a_0 y-a_1 z \end{cases}$ （一阶线性齐次ODE组）

· 它有2个线性独立的解 $\begin{cases} y=y_1 \\ z=z_1 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} y=y_2 \\ z=z_2 \end{cases}$.

Q：如何判定它们线性独立：$W(t):=\begin{vmatrix} z_1(t) & z_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}$ 处处不为0？

A：$W'(t)=-a_1(t)W(t) \Longrightarrow$ Liouville公式 $W(t)=W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t}(-a_1(s))ds}$
节.

∴只需检验在一个初值 $t=t_0$ 处，$W(t_0)\neq 0$，

则 W(t) 处处不为0. $\begin{pmatrix} y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ 线性独立.

则 原ODE通解：$y(t)=C_1y_1(t)+C_2y_2(t)$ ✓.

④ ——————

Y3.5

# 例题

**积分因子法** 处理一阶线性非齐次方程 $\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$

积分因子 $\mu(x) := e^{\int p(x)dx}$ $\Rightarrow$ $\frac{d}{dx}(e^{\int p(x)dx}y)=q(x)e^{\int p(x)dx}$

$\Rightarrow$ $y=e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right)$.

"读出来"

or

解齐次方程 $\mu(x)\left(\frac{dy}{dx}+p(x)y\right)=\frac{d}{dx}(\mu(x)y(x))$

$\Updownarrow$

$\mu(x)p(x)y=\mu'(x)\cdot y$.

① 求解: $y'+y=te^{-t}$

解: 积分因子 $\mu(t)=e^{\int dt}=e^t$ $\Rightarrow$ $\frac{d}{dt}(e^t y)=t$

$\Rightarrow$ $y=e^{-t}(\frac{1}{2}t^2+C)$.

**初等变换法**: 处理一些特殊形式的ODE.

利用变量替换的技巧转化方程.

② 求解: $y'=\frac{y^2+xy}{x^2}$ (齐次方程 $\frac{dy}{dx}=\phi(\frac{y}{x})$)

解: 标准的变量替换是 $y=ux$. $(x\neq0)$.

$\Rightarrow$ $u'x+\cancel{u}=u^2+\cancel{u}$

$$\Rightarrow \begin{cases} u=\frac{1}{C-\ln|x|}, & y=\frac{x}{C-\ln|x|} \quad (x\neq0). \\ u\equiv0, & y\equiv0. \end{cases}$$