



Review

- $S : x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) \in D$,
简记为 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), (u, v) \in D$. 则曲面面积为

$$\iint_D \|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\| \, du \, dv.$$

- $S: z = f(x, y), (x, y) \in D$, 曲面面积为

$$\iint_D \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2} \, dx \, dy.$$

- 微元法



Chap4 曲线积分与曲面积分

§ 1. 第一型曲线积分

1. 光滑曲线

Def. 点 (x, y, z) 在曲线 L 上变化时,若 L 的单位切向量 $\vec{\tau}(x, y, z)$ 与 $-\vec{\tau}(x, y, z)$ 都连续变化,则称 L 为光滑曲线.

Remark. $L : x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [\alpha, \beta]$, 则
 L 为光滑曲线 $\Leftrightarrow x(t), y(t), z(t) \in C^1([\alpha, \beta])$.

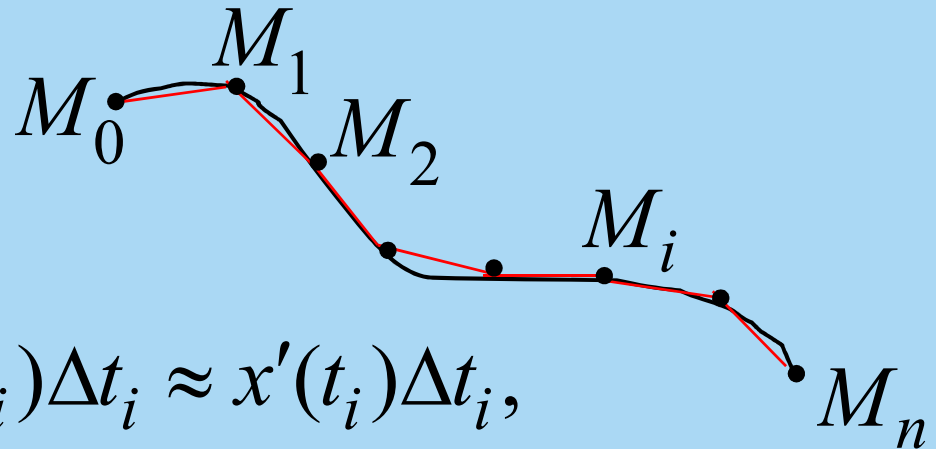


2. 曲线的弧长

光滑曲线 $L: r(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in [\alpha, \beta]$

- 分划 $\Delta: \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta, M_i = r(t_i), 0 \leq i \leq n.$

- 求弧长 $\widehat{M_{i-1}M_i}$:



$$x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\xi_i) \Delta t_i \approx x'(t_i) \Delta t_i,$$

$$y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(\eta_i) \Delta t_i \approx y'(t_i) \Delta t_i$$

$$z(t_i) - z(t_{i-1}) = z'(\lambda_i) \Delta t_i \approx z'(t_i) \Delta t_i,$$



$$\begin{aligned}\overline{M_{i-1}M_i} &\approx \|\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})\| \\ &\approx \sqrt{x'(t_i)^2 + y'(t_i)^2 + z'(t_i)^2} \Delta t_i\end{aligned}$$

• 求和、求极限

$$\text{弧长 } l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt = \int_{\alpha}^{\beta} \|\mathbf{r}'(t)\| dt$$

$$\frac{dl}{dt} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} = \|\mathbf{r}'(t)\|$$

Remark. 物理解释：路程对时间的变化率等于速率。



3. 第一型曲线积分的物理背景及定义

设空间曲线 L 上点 (x, y, z) 处的密度为 $\mu(x, y, z)$, 欲求曲线 L 的质量.

- Step1. 分划: 将曲线 L 分成若干小段 L_1, L_2, \dots, L_n , 用 $\Delta l_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 表示 L_i 的长度.
- Step2. 取标志点: 在 L_i 上取点 $P_i(\xi_i, \eta_i, \gamma_i)$.
- Step3. 近似求和: L 的质量 $m(L) \approx \sum_{i=1}^n \mu(P_i) \cdot \Delta l_i$.
- Step4. 取极限: $\lim_{\max\{\Delta l_i\} \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mu(P_i) \cdot \Delta l_i = m(L)$.



Def. 设曲线 L 长度有限, $f(x, y, z)$ 是定义在 L 上的函数. 将 L 分成若干段 L_1, L_2, \dots, L_n , 用 $\Delta l_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 表示 L_i 的长度, 在 L_i 上任取点 $P_i(\xi_i, \eta_i, \gamma_i) (i = 1, 2, \dots, n)$, 构造积分和 $\sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta l_i$. 若极限

$$\lim_{\max\{\Delta l_i\} \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta l_i$$

存在, 则称该极限为函数 f 在曲线 L 上的(第一型)曲线积分, 记作 $\int_L f(x, y, z) dl$. L 为封闭曲线时记作 $\oint_L f(x, y, z) dl$.



Remark: 极限 $\lim_{\max\{\Delta l_i\} \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta l_i$ 与对曲线 L 的分割无关, 与 P_i 的选取也无关.

Remark: $\int_L dl$ 表示曲线 L 的长度.



4.第一型曲线积分 $\int_L f(x, y, z)dl$ 的计算

设曲线 L 有参数方程：

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), \quad (\alpha \leq t \leq \beta),$$

其中 $x(t), y(t), z(t) \in C^1([\alpha, \beta])$.

- Step1.分划： $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$, 对应地, 曲线 L 被分成若干个弧段 L_1, L_2, \cdots, L_n .
- Step2.取点：在 L_i 上取点 $P_i = (x(t_i), y(t_i), z(t_i))$.



• Step 3. 近似和: L_i 的长度为

$$\begin{aligned}\Delta l_i &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt \\ &\approx \sqrt{x'(t_i)^2 + y'(t_i)^2 + z'(t_i)^2} \cdot \Delta t_i.\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n f(P_i) \cdot \Delta l_i \approx \sum_{i=1}^n f(P_i) \cdot \sqrt{x'(t_i)^2 + y'(t_i)^2 + z'(t_i)^2} \cdot \Delta t_i$$

• Step 4. 取极限: $\max_{1 \leq i \leq n} \Delta t_i \rightarrow 0$ 时, $\max_{1 \leq i \leq n} \Delta l_i \rightarrow 0$, 于是

$$\int_L f dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt.$$



5.第一型曲线积分的性质

(1)(积分存在的充分条件)设

• L 为光滑曲线, 即 L 的参数方程为

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) (\alpha \leq t \leq \beta),$$

且 $x(t), y(t), z(t) \in C^1([\alpha, \beta])$,

• $f(x, y, z)$ 是曲线 L 上的连续函数. 即关于 t 的一元函数

$$f(x(t), y(t), z(t)) \in C([\alpha, \beta]),$$

则第一型曲线积分 $\int_L f dl$ 存在.



(2)(线性性质) 设 $\int_L fdl$ 和 $\int_L gdl$ 存在, 则 \forall 实数 α, β , 积分 $\int_L (\alpha f + \beta g)dl$ 存在, 且

$$\int_L (\alpha f + \beta g)dl = \alpha \int_L fdl + \beta \int_L gdl.$$

(3)(关于积分曲线的可加性) 设曲线 L 由曲线 L_1, L_2, \dots, L_k 连接而成, 则

$$\int_L fdl = \int_{L_1} fdl + \int_{L_2} fdl + \dots + \int_{L_k} fdl.$$

(4)(保序性) $f \leq g$, 则 $\int_L fdl \leq \int_L gdl$.



(5)(积分估值不等式) $\left| \int_L f dl \right| \leq \int_L |f| dl.$

(6)(轮换不变性) 若曲线 L 关于 x, y 有轮换对称性, 即 $(x, y, z) \in L \Leftrightarrow (y, x, z) \in L$, 则

$$\int_L f(x, y, z) dl = \int_L f(y, x, z) dl.$$



例: $I = \int_L (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}) dl, L: x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} (a > 0).$

解: L 的参数方程为 $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, t \in [0, 2\pi]$.

$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \\ &= \sqrt{(-3a \cos^2 t \sin t)^2 + (3a \sin^2 t \cos t)^2} dt \\ &= 3a |\sin t \cos t| dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} [(a \cos^3 t)^{\frac{4}{3}} + (a \sin^3 t)^{\frac{4}{3}}] \cdot \frac{3a}{2} |\sin 2t| dt \\ &= \frac{3}{2} a^{\frac{7}{3}} \int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \sin^4 t) |\sin 2t| dt = 4a^{\frac{7}{3}}. \quad \square \end{aligned}$$

清华大学



例: $I = \oint_L x^2 dl$, 其中 L 为 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$

解法一: 将 $z = -x - y$ 代入 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, 有

$$x^2 + xy + y^2 = R^2/2, \text{ 即 } \left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2} + y\right)^2 = \left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

$$\text{即 } L: \begin{cases} x = \sqrt{2/3}R \cos t, \\ y = \sqrt{1/2}R \sin t - \sqrt{1/6}R \cos t, \\ z = -\sqrt{1/2}R \sin t - \sqrt{1/6}R \cos t, \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

$$dl = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt = R dt.$$

$$I = \oint_L x^2 dl = \int_0^{2\pi} \frac{2}{3} R^2 \cos^2 t \cdot R dt = \frac{2}{3} \pi R^3. \quad \square$$



例: $I = \oint_L x^2 dl$, 其中 L 为 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$

解法二: 利用轮换不变性.

$$\begin{aligned} I &= \oint_L x^2 dl = \oint_L y^2 dl = \oint_L z^2 dl \\ &= \frac{1}{3} \oint_L (x^2 + y^2 + z^2) dl \\ &= \frac{R^2}{3} \oint_L dl = \frac{2\pi R^3}{3}. \square \end{aligned}$$



例: 求圆柱面 $x^2 + y^2 = ay$ 介于锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 和平面 $z = 0$ 之间部分 S 的面积.

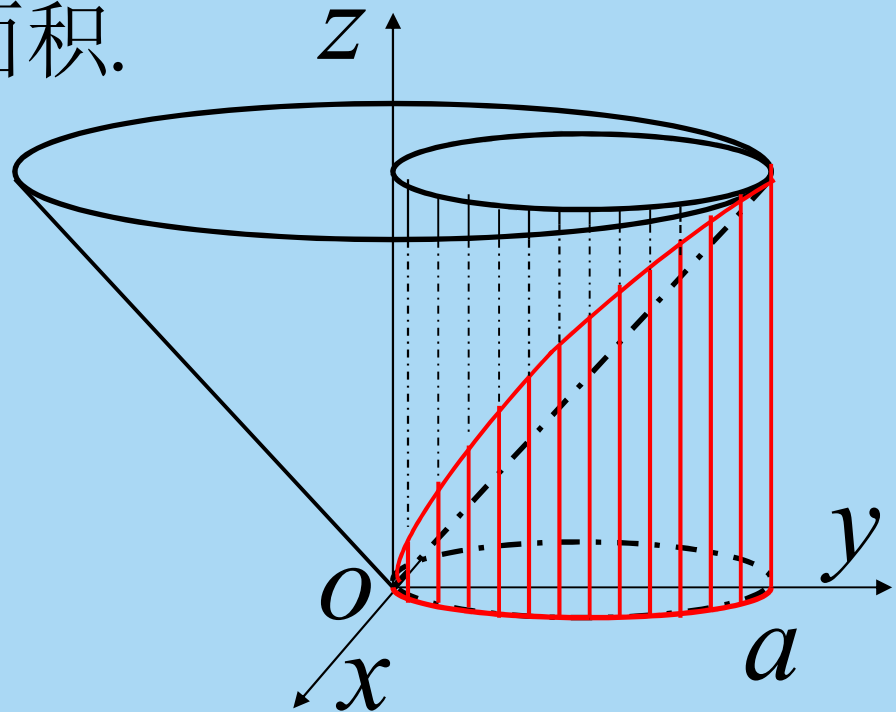
解: 记 $L: \begin{cases} x^2 + y^2 = ay \\ z = 0 \end{cases}$,

由微元法得

$$\sigma(S) = \oint_L \sqrt{x^2 + y^2} dl$$

L 的参数方程为:

$$x = \frac{a}{2} \cos t, y = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \sin t, t \in [0, 2\pi].$$





$$\begin{aligned}\sigma(S) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{a}{2} \cos t\right)^2 + \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} \sin t\right)^2} \cdot \frac{a}{2} dt \\ &= \frac{a^2}{2\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin t} dt \\ &= 2a^2. \square\end{aligned}$$



作业：习题4.2 No. 3-7