Review

- 幂级数的收敛性、收敛半径

  幂级数在其收敛域中内闭一致收敛

- 幂级数和函数的性质

  逐项求极限、逐项积分、逐项求导

- C^∞函数的幂级数展开、幂级数求和

  (公式法, 变量替换, 待定系数, 逐项求导, 逐项积分)

- C^∞函数 f 不一定能展开成幂级数

Thm. 若$\exists M>0, s.t.$

$$\left|f^{(n)}(x)\right|\le M, \forall x\in(x_0-\rho, x_0+\rho), n=1,2,\cdots$$

则$f(x)$在$(x_0-\rho, x_0+\rho)$内可以展开成Taylor级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Chap7. Fourier级数

一般来说, 任何复杂的振动都可以分解为一系列谐振动之和. 用数学语言来描述: 在相当普遍的条件下, 周期为T的函数 $f(x)$可以表示为以下级数

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos n\omega x+b_n\sin n\omega x\right),\qquad \omega=\frac{2\pi}{T}.$$

1753年, Daniel Bernoulli为了解决弦振动问题时最早提出这一见解时, 与他同时代的数学家(包括Euler 和 D′Alembert)大都持怀疑态度. 直到1829年, Dirichlet才给出前述基本事实的一个严格数学证明.

形如

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos n\omega x+b_n\sin n\omega x\right)$$

的函数项级数称为Fourier 级数. 若该级数收敛,则其和函数以$\dfrac{2\pi}{\omega}$为周期.

§1. Fourier级数

1. 2π 周期函数的Fourier级数

Question. $f(x)$能否由$\{1, \cos x, \sin x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots\}$

在函数项级数收敛的意义下(无穷) 线性表出？ 也即

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)?$$

若能, $a_n = ?\, b_n = ?$

$\forall m \geq 1, n \geq 1,$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \,\mathrm{d}x = 0, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \,\mathrm{d}x = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n-m)x + \cos(n+m)x]\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \pi, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n-m)x - \cos(n+m)x]\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \pi, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx \,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\sin(n+m)x + \sin(n-m)x]\,\mathrm{d}x = 0.$$

设 $$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right),$$

并设上式乘以$\cos kx$或$\sin kx$得到的级数可以逐项积分.

两边在$[-\pi,\pi]$上积分, 得 $$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x;$$

两边同乘$\cos kx$, 并在$[-\pi,\pi]$上积分, 得

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x,\ \ k=1,2,\cdots,n\cdots;$$

两边同乘$\sin kx$, 并在$[-\pi,\pi]$上积分, 得

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x,\ \ k=1,2,\cdots,n\cdots.$$

Def. 设f在$[-\pi,\pi]$上可积或广义绝对可积, 令

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x,\ \ k=0,1,2,\cdots,n\cdots;$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x,\ \ k=1,2,\cdots,n\cdots.$$

称 $$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

为$f(x)$的(形式)Fourier级数, 记作

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

称a_n,b_n为$f(x)$的Fourier系数.

Remark. 若f为奇函数,则

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x = 0,\quad k = 0,1,2,\cdots,n\cdots,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x,$$

$$k = 1,2,\cdots,n\cdots,$$

此时, f的Fourier级数为

$$f \sim \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx,$$

称为正弦Fourier级数.

Remark. 若f为偶函数,则

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x=0,\ \ k=1,2,\cdots,n\cdots$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x,$$

$$k=0,1,2,\cdots,n\cdots$$

此时, f的Fourier级数为

$$f\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos nx,$$

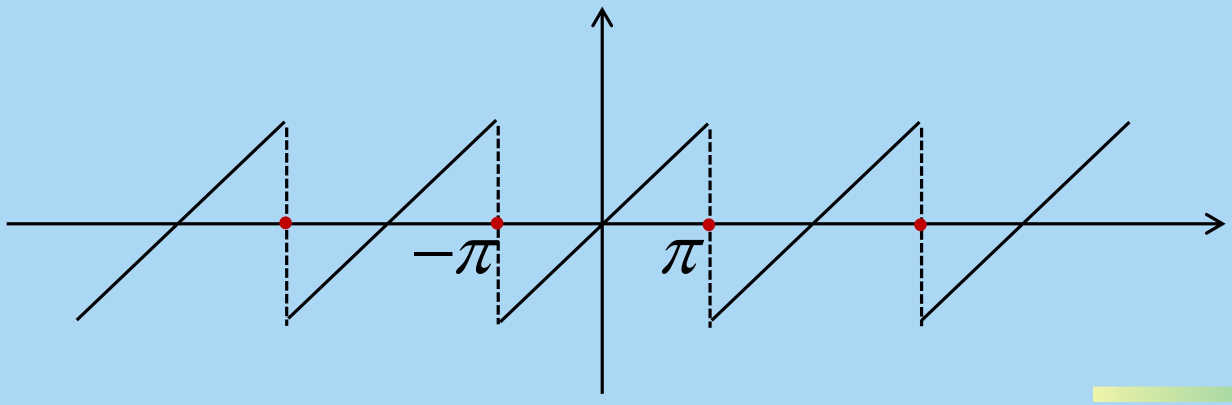
称为余弦Fourier级数.

例. 将$f(x)=x, x\in(0,\pi)$展开成2π周期的正弦Fourier级数和余弦Fourier级数.

解: 为了得到正弦Fourier级数, 将$f(x)$奇沿拓到$(-\pi,0)$,即

$$f(x)=-f(-x),\quad \forall x\in(-\pi,0);$$

令$f(\pi)=f(-\pi)=f(0)=0$, 得到$[-\pi,\pi]$上的奇函数;再2π周期沿拓到$\mathbb{R}$, 得到$\mathbb{R}$上的2π周期奇函数,仍记为$f(x)$.

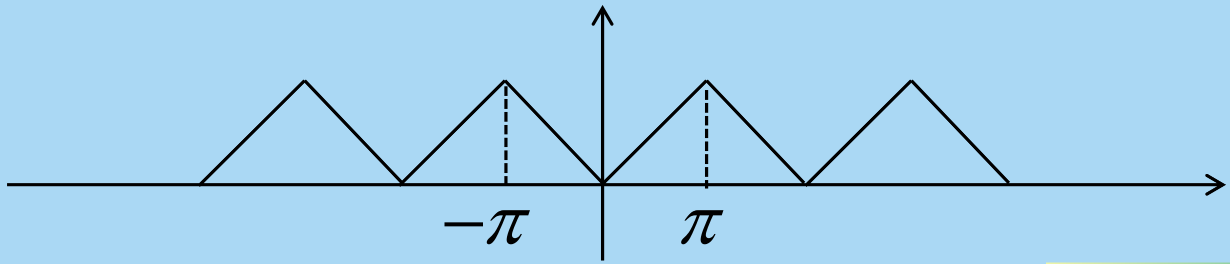


f为奇函数,则 $\quad a_k = 0,\ k = 0,1,2,\cdots,n\cdots,$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin kx\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^{k+1}2}{k}, \quad k = 1,2,\cdots,n\cdots,$$

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{2}{k}\sin kx.$$

为了得到余弦Fourier级数,先将$f(x)$偶沿拓到$(-\pi,0)$,再2π周期沿拓到$\mathbb{R}$,仍记为$f(x)$.



f为偶函数,则 $\quad b_k = 0,\ k = 1, 2, \cdots, n\cdots,$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\mathrm{d}x = \pi;$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos kx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^k - 1}{k^2}, \qquad k = 1, 2, \cdots, n\cdots$$

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k - 1}{k^2}\cos kx,$$

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}. \quad \square$$

Remark. 任给$[-\pi,\pi]$上可积或广义绝对可积的函数f,一定可以构造出f的Fourier级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right).$$

但是,还有两个问题有待解决:

(1)该级数是否收敛?

(2)如果收敛,其和函数是否为f?即什么条件下

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)?$$

清華大學

2.任意周期函数的Fourier级数

设$f(x)$以$2l$为周期,在$[-l,l]$上可积或广义绝对可积.令

$$t=\frac{\pi}{l}x,\quad \varphi(t)=f(x)=f\left(\frac{l}{\pi}t\right),$$

则$\varphi(t)$以2π为周期,在$[-\pi,\pi]$上可积或广义可积. 于是

$$\varphi(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos nt+b_n\sin nt\right),$$

其中

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos nt\,\mathrm{d}t,\ n=0,1,2,\cdots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\sin nt\,\mathrm{d}t,\ \ n = 1, 2, \cdots.$$

再令$t = \dfrac{\pi}{l}x$,则$\varphi(t) = f(x)$,

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x,\ \ n = 0, 1, 2, \cdots$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x,\ \ n = 1, 2, \cdots$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right).$$

例. $f(x)=x^2, \forall x\in[-1,1]$, f以$T=2$为周期, 求f的Fourier级数.

解: $a_0=\int_{-1}^{1}x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$,

$$a_n=\int_{-1}^{1}x^2\cos n\pi x\,\mathrm{d}x=(-1)^n\frac{4}{(n\pi)^2},\quad n=1,2,\cdots$$

$$b_n=\int_{-1}^{1}x^2\sin n\pi x\,\mathrm{d}x=0,\quad n=1,2,\cdots$$

$$f(x)\sim\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi x.\square$$

3. Bessel不等式,Fourier级数的几何解释

称f在$[a,b]$上广义绝对可积,若f与$|f|$均在$[a,b]$上广义可积.

记$[a,b]$上可积或广义绝对可积的函数构成的集合为$\Re[a,b]$.

Def. $\forall f, g \in \Re[-\pi,\pi]$, f与g的内积为

$$(f,g) \triangleq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

若$(f,g)=0$,则称f与g正交.$\|f\| \triangleq \sqrt{(f,f)}$称为$f$的长度.

Remark. 内积的引入,是为了给只有代数性质的线性空间引入长度、角度等几何性质.

Remark. 内积运算要满足3条性质.

(1)$(f,f)\geq 0$,且$(f,f)=0 \Leftrightarrow f(x)$几乎处处为0.

(2)$(f,g)=(g,f)$.

(3)$(a_1 f_1 + a_2 f_2, g) = a_1(f_1, g) + a_2(f_2, g)$,

$$\forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}, \forall f_1, f_2 \in \mathfrak{R}[-\pi,\pi].$$

Remark. $\mathfrak{R}[-\pi,\pi]$中内积的定义不唯一.

Def.考察函数系$\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$或者$\{f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots\}$.

(1)如果函数系中的函数长度非零且两两正交, 也即

$$(f_i, f_j)\begin{cases} \neq 0, & i = j, \\ = 0, & i \neq j, \end{cases}$$

则称函数系是正交的.

(2)如果正交函数系中的函数长度都为1, 也即

$$(f_i, f_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

则称函数系是标准正交的.

Remark. 正交函数系一定线性无关.

Remark. $\{1, \cos x, \sin x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots\}$ 是 $\Re[-\pi, \pi]$ 中（线性无关）的正交函数系.

Remark. $\{1, \cos x, \sin x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots\}$ 标准正交化得

$$\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos x, \sin x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots\right\}.$$

记$\varphi_0(x)=1\big/\sqrt{2}\,,\varphi_{2n-1}(x)=\cos nx,\varphi_{2n}(x)=\sin nx,\quad n=1,2,\cdots$

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

$$=\frac{a_0}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

记$c_0=\dfrac{a_0}{\sqrt{2}},c_{2n-1}=a_n,c_{2n}=b_n,n=1,2,\cdots$,即$c_k=(f,\varphi_k)$, 则

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{+\infty}c_n\varphi_n(x).$$

Thm. $f \in \Re[-\pi,\pi], \{c_k\}, \{\varphi_k\}$ 如前定义,则

(1) $\forall n \geq 0, \forall \lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R},$

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \varphi_k \right\| \geq \left\| f - \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k \right\|;$$

(2) $\left\| f - \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k \right\|^2 = \| f \|^2 - \sum_{k=0}^{n} c_k^2;$

(3) $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k^2 \leq \| f \|^2.$ (Bessel不等式)

Proof. $\left\| f-\sum_{k=0}^{n}\lambda_k\varphi_k \right\|^2 = \left(f-\sum_{k=0}^{n}\lambda_k\varphi_k , f-\sum_{k=0}^{n}\lambda_k\varphi_k \right)$

$$= (f,f) - 2\left(f,\sum_{k=0}^{n}\lambda_k\varphi_k \right) + \left(\sum_{k=0}^{n}\lambda_k\varphi_k , \sum_{k=0}^{n}\lambda_k\varphi_k \right)$$

$$= \|f\|^2 - 2\sum_{k=0}^{n}\lambda_k (f,\varphi_k) + \sum_{k=0}^{n}\lambda_k^2$$

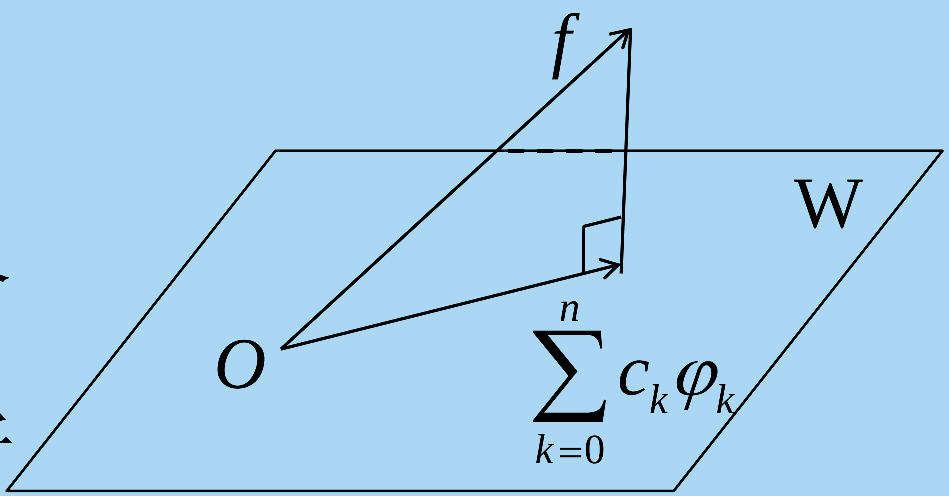
$$= \|f\|^2 - 2\sum_{k=0}^{n}\lambda_k c_k + \sum_{k=0}^{n}\lambda_k^2 = \|f\|^2 + \sum_{k=0}^{n}(c_k-\lambda_k)^2 - \sum_{k=0}^{n}c_k^2$$

$\geq \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n}c_k^2$, "="成立当且仅当$\lambda_k = c_k, k = 0,1,\cdots,n$. □

Remark. $f\in\Re[-\pi,\pi],\{\varphi_k\}$如前,在所有线性组合$\sum_{k=0}^{n}\lambda_k\varphi_k$中, f的Fourier级数的前n项和是最佳均方逼近的.

几何解释如下.

在内积空间V中,标准正交向量$\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_n$的线性组合$\sum_{k=0}^{n}\lambda_k\varphi_k$张成了一个$n+1$维子空间W. f是空间V中一点,要求子空间W中离f最近的点.



所求的点应为f在子空间W中的垂直投影,即$\sum_{k=0}^{n}c_k\varphi_k$.

由Bessel不等式可得以下推论:

Corollary. $f \in \Re[-\pi, \pi]$,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)$$

则

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

换言之,

$$f \in \Re[-\pi, \pi]$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \,\mathrm{d}x = 0.$$

作业:习题7.1 No.1(单),2