

习题课 函数项级数

二. 函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots$$

(1) 收敛域

- 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 是定义在 D 上的一个函数项级数, $x_0 \in D$, 若数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛,

则称 x_0 是 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的一个**收敛点**。所有收敛点构成的集合称为级数的**收敛域**。

(2) 和函数的概念

- 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域为 I , 则任给 $x \in I$, 存在惟一的实数 $S(x)$, 使得

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ 成立。定义在 } I \text{ 上的函数 } S(x) \text{ 称为级数 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ 的} \textbf{和函数}。$$

1. 讨论下列级数的收敛域

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n^2} : \quad D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid |x - k\pi| \leq \frac{\pi}{6}, k = 0, \pm 1, \cdots \right\};$$

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2} : \quad D = (-\infty, +\infty)$$

$$(3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{200}} x^n : \quad D = \{0\};$$

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n! e^{nx} : \quad D = \emptyset$$

(3) 幂级数及其收敛半径、收敛区间（指开区间）和收敛域

$$\text{幂级数: } \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

- 若 $R \geq 0$ 满足:

(1) 当 $|x| < R$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛; (2) 当 $|x| > R$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散,

则称 R 为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径, 开区间 $(-R, R)$ 称为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛区间。

● **收敛域:** 考虑 $x = \pm R$ 两个端点的收敛性

● 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的系数 a_n 满足 $a_n \neq 0$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$, 则其收敛半径为 $R = \frac{1}{\rho}$ 。

● 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的系数 a_n 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$, 则其收敛半径为 $R = \frac{1}{\rho}$ 。

2. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+2)} (x-a)^n$ 在点 $x_1 = -2$ 条件收敛, 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^2} (x-a)^n$

在点 $x_1 = \frac{1}{2}$ 的收敛情况是 [] [C]

(A) 绝对收敛. (B) 条件收敛. (C) 发散. (D) 不能确定.

3. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n}$ 在 $x = 2$ 收敛, 则实参数 a 的取值范围是_____。

解: 显然 $R = 1$, 且收敛域为 $a - 1 \leq x < a + 1$,

级数在 $x = 2$ 收敛, 则有 $a - 1 \leq 2 < a + 1$, 因此应有 $1 < a \leq 3$ 。

4. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x = -1$ 处条件收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ []

(A) 绝对收敛, (B) 条件收敛, (C) 发散, (D) 不定。 [A]

5. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 **1**, 记级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 1)x^n$ 的收敛

半径为 r , 则必有 [].

(A) $r = 1$. (B) $r \leq 1$. (C) $r \geq 1$. (D) r 不能确定.

$a_n = \frac{1}{n!} - 1$, $a_n + 1 = \frac{1}{n!}$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 1)x^n$ 的收敛半径 $r = +\infty$ 。 (C)

6. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n + (-3)^n} x^{2n}$ 的收敛域为_____。

解:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{n+1}{2^{n+1} + (-3)^{n+1}} x^{2(n+1)}}{\frac{n}{2^n + (-3)^n} x^{2n}} \right| = \frac{x^2}{3}$$

$|x| < \sqrt{3}$ 时收敛, 收敛半径 $R = \sqrt{3}$. 当 $x = \pm\sqrt{3}$ 时, 通项不趋于零, 级数发散. 故收敛域为 $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

7. 已知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域为 $[-8, 8]$, 则 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n(n-1)}$ 的收敛半径 R 为 [].

(A) $R \geq 8$. (B) $R \leq 8$. (C) $R = 8$. (D) 不定.

[C] (收敛的幂级数及其导数和积分有相同的收敛半径)

8. Lebnize 判别法用于收敛域的判断

求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x}{2x+1} \right)^n$ 的收敛域.

解: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (t)^n$ 的收敛半径 $R = 1$, 确由 Leibnize 法则, 收敛域为 $t \in [-1, 1)$.

解 $-1 \leq \frac{x}{x+1} < 1$, 关于 x 的收敛域为 $\left\{ x \mid x < -1, \text{或} \geq -\frac{1}{3} \right\}$.

(4) 幂级数的和函数

9. 常数项级数的和 (分拆法)

求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ 的和

$$\begin{aligned} \text{解: 部分和} \quad S_m &= \sum_{n=1}^m \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^m \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \sum_{n=1}^m \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{m+1} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2} \right) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} S_m &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

解法二: 记 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n(n+1)(n+2)}$

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$

$$S''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$

$$S'(x) = \int_0^x -\ln(1-x)dx = (1-x)\ln(1-x) + x$$

$$S(x) = \int_0^x [(1-x)\ln(1-x) + x]dx = -\frac{1}{2}(1-x)^2 \ln(1-x) + \frac{1}{4}(1-x)^2 + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}$$

$$S(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$$

10. 求 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ 的和函数.

解: 设 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$, 收敛域为 $(-1, 1)$. 在收敛域内,

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{4n} = \frac{1}{1-x^4},$$

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1-x^4} dx = \dots = 1/2$$

$$(1/2 * \ln(1+x)/(1-x) + \arctan x)$$

11. 求 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$ 的和函数.

解: 设 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$,

$$\int_0^x f(x)dx = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x n^2 x^{n-1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$$

$$\int_0^x \frac{1}{x} \left[\int_0^x f(x)dx \right] dx = \int_0^x \left[\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

$$\frac{1}{x} \left[\int_0^x f(x)dx \right] = \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{1-x} \right) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$f(x) = \frac{d}{dx} \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{1+x}{1-x}$$

12. 设 $f_n(x)$ 满足 $f_n'(x) = f_n(x) + x^{n-1}e^x$ (n 为正整数),

且 $f_n(1) = \frac{e}{n}$, 求函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 之和。(2001-3-8)

解: $f_n(x) = e^x \frac{x^n}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = e^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = e^x \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$

13. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$ 的和. 答案: 3

14. 设参数 $a > 1$, 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a^n}$ 的和.

15. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n!}$ 的和为 [] $-\exp(-x) + x\exp(-x)$

(A) $2e^{-1}$. (B) 0. (C) e^{-1} (D) $e^{-1} - 1$. [B]

(5) 幂级数在其收敛区间内的基本性质

● **两级数和的收敛半径:** 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R_1 , $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径为

R_2 , 一般情况下, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ 的收敛半径为 $R = \min\{R_1, R_2\}$, 且

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad x \in (-R, R).$$

● **和函数的连续性:** 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域 I 上连续,

即任给 $x_0 \in I$, 有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} a_n x^n \right) \lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = S(x_0)$$

● **和函数的可积性与逐项积分性质**

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域 I 上可积, 且可逐项积分, 即任给 $x \in I$, 有

$$\int_0^x S(t) dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x a_n t^n dt \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

若记 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R , $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 的收敛半径为 R_1 , 则 $R \leq R_1$ 。且逐项积分后的幂级数收敛域不会变小。

- **和函数的可导性与逐项求导公式：** 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛区间

$(-R, R)$ 内可导, 且可逐项求导, 即任给 $x \in (-R, R)$, 有

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

(6) 初等幂级数展开式

- 直接展开法

直接展开法指的是：利用泰勒级数的定义及泰勒级数收敛的充要条件, 将函数在某个区间上直接展开成指定点的泰勒级数的方法。

由直接展开法易知函数 $e^x, \cos x, \sin x, \ln(1+x), (1+x)^\alpha$ 的麦克劳林级数展开式为：

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \quad x \in (-1, 1],$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n,$$

其中, 当 $\alpha \leq -1$ 时, $x \in (-1, 1)$; 当 $-1 < \alpha < 0$ 时, $x \in (-1, 1]$; 当 $\alpha > 0$ 时, $x \in [-1, 1]$ 。

特别地, 当 $\alpha = -1$ 时, 有 $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad x \in (-1, 1)$ 。

- 间接展开法

间接展开法指的是：通过一定运算将函数转化为其他函数，进而利用新函数的幂级数展开将原来函数展开为幂级数的方法。所用的运算主要是加法运算，数乘运算，（逐项）积分运算和（逐项）求导运算。利用的幂级数展开公式主要是一些简单函数的麦克劳林展开公式，上述几个简单函数就是常用的几个。间接展开法是将函数展开成幂级数的主要方法。

16. 设 $f(x)$ 的 Maclaurin 级数为 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^n$,

又 $g(x) = \frac{xf(x)}{1+x}$, 求 $g(x)$ 的 Maclaurin 级数。

解: $f(x) = \frac{x}{1+x}, \quad g(x) = \frac{x^2}{(1+x)^2},$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+x)^2} &= -\left(\frac{1}{1+x}\right)' = -(1-x+x^2+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots)' \\ &= 1-2x+3x^2+\cdots+(-1)^{n-1} nx^{n-1}+\cdots \end{aligned}$$

故 $g(x) = \frac{x^2}{(1+x)^2} = x^2(1-2x+3x^2+\cdots+(-1)^{n-1} nx^{n-1}+\cdots)$

***** $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ *****

17. 求函数 $f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2}$ 在 $x=1$ 处的幂级数，并求收敛域。

解:

$$\frac{f(x)}{x-1} = \frac{1}{(x+1)^2} = -\left(\frac{1}{x+1}\right)' = -\left(\frac{1}{2} \frac{1}{1+\frac{x-1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{2^n} \right]'$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{2^{n+1}} (x-1)^n$$

收敛半径 $R=2$, $x=-1, 3$ 时幂级数发散, 故收敛域为 $(-1, 3)$.

18. 设 $f(x) = \frac{x}{1+x^3}$, 则 $f^{(100)}(0) =$ _____.

解: $f(x) = \frac{x}{1+x^3} = x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n,$

$$f^{(3n+1)}(0) = (-1)^n (3n+1)!$$

$$n=33,$$

$$f^{(100)}(0) = -100!$$

19. 函数 $f(x) = xe^x$ 在 $x=1$ 处的幂级数展开式为
$$e \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} \right) (x-1)^n \right].$$

解: 由 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ ($x \in (-\infty, +\infty)$), 对函数 $f(x) = xe^x$ 进行间接展开

$$\begin{aligned} xe^x &= e[(x-1)e^{x-1} + e^{x-1}] \\ &= e \left[(x-1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x-1)^n \right] \\ &= e \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} \right) (x-1)^n \right]. \end{aligned}$$

20. 将 $f(x) = \arctan \frac{2x}{1-x^2}$ 展开为 x 的幂级数。

解: 注意到 $f(x) = \arctan \frac{2x}{1-x^2} = \arctan \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} \right)$

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \text{ 则当 } |x| < 1 \text{ 时有}$$

$$f(x) = \int_0^x \frac{2}{1+t^2} dt = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

Fourier 级数

定义在 $[0, l]$ 上的函数可以有多种方式展开成 $2l$ 三角级数, 但常用的方式只有三种, 即: 周期奇延拓、周期偶延拓、周期延拓。三种延拓方式得到的三角级数展开式分别为:

正弦级数展开 $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad x \in [0, l], \text{ (周期为 } 2l \text{)}.$

其中 $b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \quad (n=1, 2, 3, \dots).$

余弦级数展开 $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} x, \quad x \in [0, l], \text{ (周期为 } 2l \text{)}.$

其中 $a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx \quad (n=0, 1, 2, \dots).$

(2) 狄利克雷 (Dirichlet) 定理

设 $f(x)$ 是周期为 2π 的可积函数, 且满足

(1) $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上连续或只有有限个第一类间断点,

(2) $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上只有有限个单调区间,

则 $f(x)$ 的以 2π 为周期的傅里叶级数收敛, 且

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{1}{2} (f(x^+) + f(x^-))$$

例12.1. 已知 $f(x) = x + 1, x \in [0, 1]$, $S(x)$ 是 $f(x)$ 的周期为1的三角级数的和函数, 则

$$S(0), S\left(\frac{1}{2}\right) \text{ 的值分别为 } \underline{\frac{3}{2}}, \underline{\frac{3}{2}}.$$

例12.2. 证明 $\forall x \in (-\pi, \pi)$, 成立 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \cos nx = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}$.

例12.3. 设 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x, x \in (-\infty, +\infty)$, 其中

$$b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx, \quad f(x) = x^2, x \in [0, 1] (n = 1, 2, \dots), \text{ 求 } S\left(-\frac{1}{2}\right) = -1/4.$$

例12.4. 将函数 $f(x) = x^2, x \in (0, \pi)$ 按下列要求展开成 Fourier 级数:

(1) 按正弦 Fourier 展开; (2) 按余弦 Fourier 展开.

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos nx \, dx \\
&= \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{n} \int_0^\pi x^2 d \sin nx \right. \\
&= \frac{2}{n\pi} x^2 \sin nx \Big|_0^\pi - \frac{4}{n\pi} \int_0^\pi x \sin nx \, dx \\
&= -\frac{4}{n\pi} \int_0^\pi x \sin nx \, dx \\
&= \frac{4}{[n^2 - \pi]} \int_0^\pi x d \cos nx \\
&= \frac{4}{[n^2 - \pi]} x \cos nx \Big|_0^\pi - \frac{4}{[n^2 - \pi]} \int_0^\pi \cos nx \, dx \\
&= \frac{4}{n^2} \cos n\pi - 0 \\
&= (-1)^n \cdot \frac{4}{n^2} \\
a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \, dx \\
&= \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^\pi \\
&= \frac{2}{3} \pi^2
\end{aligned}$$

所以

余弦级数为

$$f(x) = \frac{1}{3} \pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{4}{n^2} \cos nx \quad (n \text{ 从 } 1 \text{ 到 } \infty)$$