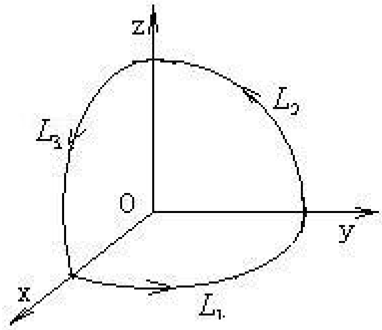
第十周习题课: 曲线、曲面积分　1

一. 曲线积分

1. 计算 $\oint_L xydl$，其中 L 是正方形 $|x|+|y|=a,\ (a>0)$.

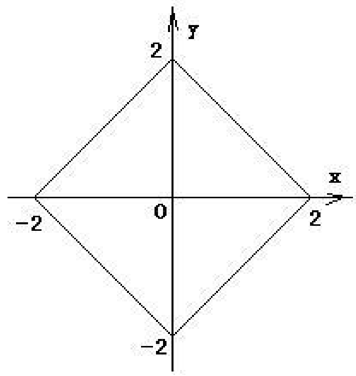
2. 设 L 为椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，其周长记为 a。求 $\oint_L(2xy+3x^2+4y^2)dl$

3. 计算积分 $I=\int_\Gamma (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$，其中 Γ 为球面片 $x^2+y^2+z^2=1$，$x,y,z\ge 0$ 的边界曲线，方向是从点 $(1,0,0)$ 到点 $(0,1,0)$，到点 $(0,0,1)$，再回到 $(1,0,0)$。（课本习题 4.4 题 3（4），page 192）



4. 设 C 为闭曲线：$|x|+|y|=2$，逆时针为正向。

计算 $\oint_C \frac{axdy-bydx}{|x|+|y|}$。



二. 曲面积分

5. 计算 $\iint_S(x^2+y^2)\mathrm{d}S$. 其中 S 是锥体 $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1$ 的边界

6. 求 $I=\iint_S(x+y+z)^2dS$，其中 S 为单位球面.

7. 计算螺旋面 S：$x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，$z=r\varphi$（$0\le r\le R,\ 0\le\varphi\le 2\pi$）的面积。

8. 求圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 被抛物柱面 $z=R^2-x^2$ 及平面 $z=0$ 所截部分 S 的侧面积。

9. 计算均匀半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2\ (z\ge 0)$ 关于 z 轴的转动惯量.

10. 令曲面 S 在球坐标下方程为 $r=a(1+\cos\theta)$，Ω 是 S 围成的有界区域，分别计算 S 和 Ω 在直角坐标系下的形心坐标。

11. 计算第一型曲面积分 $I=\iint\limits_{S}|z|dS$，以及第二型曲面积分 $J=\iint\limits_{S^+}|z|dx\wedge dy$，其中曲面 S 为球面 $S: x^2+y^2+z^2=a^2$；定向曲面 S^+ 的正法向向外。

12. 记 S 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2x$ 所截的有限部分。规定曲面 S 的正向向下，所得的定向曲面记为 S^+。求下面两个积分的值。

(i) $\iint\limits_{S} zdS$。 (ii) $\iint\limits_{S}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\left(xdydz+ydzdx+zdxdy\right)$.

13. 设一元函数 $f(u)$ 于整个实轴上连续，S 代表单位球面 $x^2+\mathrm{y}^2+z^2=1$。证明 Poisson 公式 $\iint\limits_{\mathrm{S}}\mathrm{f}(ax+by+cz)dS=2\pi\int_{-1}^{1}f(\rho t)dt$，这里 $\rho:=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$。（课本习题 4.3 第 11 题，page 187）。