第十三次习题课　函数项级数 Fourier 级数

一. 函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots$$

(1)收敛域

- 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 是定义在 D 上的一个函数项级数，$x_0 \in D$，若数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛，则称 x_0 是 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的一个**收敛点**。所有收敛点构成的集合称为级数的**收敛域**。

(2)和函数的概念

- 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域为 I，则任给 $x \in I$，存在惟一的实数 $S(x)$，使得 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 成立。定义在 I 上的函数 $S(x)$ 称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的**和函数**。

1. 讨论下列级数的收敛域

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n^2}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{200}} x^n$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} n! e^{nx}$;

(3)幂级数及其收敛半径、收敛区间（指开区间）和收敛域

幂级数: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$

- 若 $R \ge 0$ 满足：

（1）当$|x|<R$时，$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$绝对收敛；（2）当$|x|>R$时，$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$发散，

则称R为幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$的**收敛半径**，开区间$(-R,R)$称为$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$的**收敛区间**。

- **收敛域**：考虑$x=\pm R$两个端点的收敛性
- 设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$的系数$a_n$满足$a_n\neq 0$，若$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$，则其收敛半径为$R=\frac{1}{\rho}$。
- 设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$的系数$a_n$满足$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$，则其收敛半径为$R=\frac{1}{\rho}$。

2. 设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+2)}(x-a)^n$在点$x_1=-2$条件收敛, 则幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)^2}(x-a)^n$

   在点$x_1=\frac{1}{2}$的收敛情况是 [ ]

(A) 绝对收敛. (B) 条件收敛. (C) 发散. (D) 不能确定.

3. 已知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n}$在$x=2$收敛，则实参数$a$的取值范围是___________。

4. 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$在$x=-1$处条件收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ [ ]

（A）绝对收敛，（B）条件收敛 ，（C）发散 ，（D）不定。

5. 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径为$\mathbf{1}$，记级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+1)x^n$ 的收敛

   半径为r，则必有 [ ].
   (A) $r=1$. (B) $r\le 1$. (C) $r\ge 1$. (D) r不能确定.

6. 幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n+(-3)^n}x^{2n}$的收敛域为______________.

7. 已知$\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$的收敛域为$[-8,8]$，则$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n x^n}{n(n-1)}$的收敛半径$R$为[ ].

（A）$R\ge 8$. （B）$R\le 8$. （C）$R=8$. （D）不定.

8. Lebnize 判别法用于收敛域的判断

求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$ 的收敛域.

(4)幂级数的和函数

9. 常数项级数的和 （分拆法）

求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ 的和

10. 求 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ 的和函数.

11. 求 $\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$ 的和函数.

12. 设 $f_n(x)$ 满足 $f_n'(x)=f_n(x)+x^{n-1}e^x$（$n$ 为正整数），

且 $f_n(1)=\frac{e}{n}$，求函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 之和。（2001-3-8）

13. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$ 的和.

14. 设参数 $a>1$，求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a^n}$ 的和.

15. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{n!}$ 的和为[ ]

(A) $2e^{-1}$。 (B) 0。 (C) e^{-1} (D) $e^{-1}-1$ 。

(5)幂级数在其收敛区间内的基本性质

- **两级数和的收敛半径：** 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 R_1，$\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径为 R_2，一般情况下，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ 的收敛半径为 $R=\min\{R_1,R_2\}$，且

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\text{，}\quad x\in(-R,R)\text{。}$$

- **和函数的连续性：** 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的和函数$S(x)$在其收敛域$I$上连续，

即任给$x_0\in I$，有

$$\lim_{x\to x_0}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\lim_{x\to x_0}a_nx^n\right)\lim_{x\to x_0}S(x)=S(x_0)$$

- **和函数的可积性与逐项积分性质**

幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的和函数$S(x)$在其收敛域$I$上可积，且可逐项积分，即任给$x\in I$，有

$$\int_0^x S(t)dt=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n\right)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^x a_nt^ndt\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+}$$

若记$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径为$R$，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$的收敛半径为$R_1$，则$R\le R_1$。且逐项积分后的幂级数收敛域不会变小。

- **和函数的可导性与逐项求导公式：** 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的和函数$S(x)$在其收敛区间

$(-R,R)$内可导，且可逐项求导，即任给$x\in(-R,R)$，有

$$S'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

16. 已知$\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n}$的收敛域为**[−8，8]**，则$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_nx^n}{n(n-1)}$

的收敛半径$\boldsymbol{R}$为[　　].

（A）$\boldsymbol{R\ge 8}$.（B）$\boldsymbol{R\le 8}$.　（C）$\boldsymbol{R=8}$.（D）不定.

(6)初等幂级数展开式

- 直接展开法

直接展开法指的是：利用泰勒级数的定义及泰勒级数收敛的充要条件，将函数在某个区间上直接展开成指定点的泰勒级数的方法。

由直接展开法易知函数e^x, $\cos x$, $\sin x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$的麦克劳林级数展开式为：

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n\text{ ，}\quad x\in(-\infty,+\infty)\text{ ，}$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\text{ ，}\quad x\in(-\infty,+\infty)\text{ ，}$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}\text{ ，}\quad x\in(-\infty,+\infty)\text{ ，}$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n,\quad x\in(-1,1]\text{ ，}$$

$$(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n\text{ ，}$$

其中，当$\alpha\le-1$ 时，$x\in(-1,1)$；当$-1<\alpha<0$ 时，$x\in(-1,1]$；当$\alpha>0$ 时，$x\in[-1,1]$。

特别地，当$\alpha=-1$时，有 $\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ ，$x\in(-1,1)$ 。

- 间接展开法

间接展开法指的是：通过一定运算将函数转化为其他函数，进而利用新函数的幂级数展开将原来函数展开为幂级数的方法。所用的运算主要是加法运算，数乘运算，（逐项）积分运算和（逐项）求导运算。利用的幂级数展开公式主要是一些简单函数的麦克劳林展开公式，上述几个简单函数就是常用的几个。间接展开法是将函数展开成幂级数的主要方法。

17. 设 $f(x)$ 的 Maclaurin 级数为 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n$ ，

又 $g(x)=\dfrac{xf(x)}{1+x}$ ，求 $g(x)$ 的 Maclaurin 级数。

18. 求函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{(x+1)^2}$ 在 $x=1$处的幂级数，并求收敛域.

19. 设 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^3}$ ，则 $f^{(100)}(0)=$________________.

20. 求函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{(x+1)^2}$ 在 $x=1$ 处的幂级数，并求收敛域.

21. 将函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{(x+1)^2}$ 在 $x=1$ 处展成幂级数，并求收敛区间。

22. 函数 $f(x)=xe^x$ 在 $x=1$ 处的幂级数展开式为__________________。

23. 将 $f(x)=\arctan\dfrac{2x}{1-x^2}$ 展开为 x 的幂级数。

二．Fourier 级数

定义在 $[0,l]$ 上的函数可以有多种方式展开成 $2l$ 三角级数，但常用的方式只有三种，即：周期奇延拓、周期偶延拓、周期延拓。三种延拓方式得到的三角级数展开式分别为：

正弦级数展开 $f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\dfrac{n\pi}{l}x$， $x\in[0,l]$，（周期为 $2l$ ）。

其中 $b_n=\dfrac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\dfrac{n\pi}{l}xdx \quad (n=1,2,3,\cdots)$。

余弦级数展开 $f(x)\sim\dfrac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\dfrac{n\pi}{l}x$， $x\in[0,l]$，（周期为 $2l$ ）。

其中 $a_n=\dfrac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\dfrac{n\pi}{l}xdx \quad (n=0,1,2,\cdots)$。

(2)狄利克雷（Dirichlet）定理

设 $f(x)$ 是周期为 2π 的可积函数，且满足

（1） $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续或只有有限个第一类间断点，

（2） $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上只有有限个单调区间，

则 $f(x)$ 的以 2π 为周期的傅里叶级数收敛，且

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)=\frac{1}{2}(f(x^+)+f(x^-))$$

24. 已知 $f(x)=x+1,\ x\in[0,1]$， $S(x)$ 是 $f(x)$ 的周期为 1 的三角级数的和函数，则

$S(0), S(\frac{1}{2})$ 的值分别为____，____。

25. 证明 $\forall x \in (-\pi, \pi)$，成立 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \cos nx = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}$.

26. 设 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x, \quad x \in (-\infty, +\infty)$，其中

$b_n = 2\int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx, \qquad f(x) = x^2, x \in [0, 1]\ (n = 1, 2, \cdots)$，求 $S(-\frac{1}{2})$.

27. 将函数 $f(x) = x^2 \quad x \in (0, \pi)$ 按下列要求展开成 Fourier 级数:

(1) 按正弦 Fourier 展开;　　(2) 按余弦 Fourier 展开.