

第四周习题课 隐函数（续），空间曲线与曲面

一. 隐函数的二阶（偏）导数

例1. 设 $z = f(x, \varphi(x^2, x^2))$ ，其中函数 f 与 φ 的二阶偏导数连续，求 $\frac{d^2 z}{dx^2}$

二、向量函数的微分和导数

1. 计算极坐标、柱坐标、球坐标变换的 Jacobi 矩阵和 Jacobi 行列式：

(1) 平面极坐标变换 $\vec{f}(r, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$ ，也即 $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ ；

(2) 空间柱坐标变换 $\vec{f}(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ z \end{pmatrix}$ ，也即 $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$ ；

(3) 空间球坐标变换 $\vec{f}(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r \sin \varphi \cos \theta \\ r \sin \varphi \sin \theta \\ r \cos \varphi \end{pmatrix}$ ，也即 $\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \varphi \end{cases}$ 。

2. 计算向量复合函数的 Jacobi 矩阵：

(1) $\mathbf{f}(x, y) = (x, y, x^2 y)$ ， $x = s + t$ ， $y = s^2 - t^2$ ，在 $s = 2, t = 1$ ；

(2) $\mathbf{f}(x, y, z) = (x^2 + y + z, 2x + y + z^2, 0)$ ， $x = uv^2 w^2$ ， $y = w^2 \sin v$ ， $z = u^2 e^v$ 。

三、切平面,切线,法平面,法线

[例1] 求曲线 $L : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 2x \end{cases}$

在点 $M_0(1, 1, \sqrt{2})$ 处的切线和法平面方程

[例2] 设函数 f 可微, 求证：曲面 $S : z = yf\left(\frac{x}{y}\right)$ 的

所有切平面相交于一个公共点。

[例3] 过直线 $10x + 2y - 2z = 27$, $x + y - z = 0$ 作曲面 $3x^2 + y^2 - z^2 = 27$ 的切平面, 求其方程.

[例4] 求证满足微分方程 $y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ 的 $u(x, y)$

为 $u(x, y) = f(x^2 - y^2)$, 其中, f 为任意一元可微函数.