第 13 周　曲线曲面积分 3

例 1　设 $D_t=\{(x,y)\in R^2 \mid x^2+y^2\le t^2, t>0\}$， $f(x,y)$ 在 D_t 上连续，在 D_t 内存在连续偏导数． $f(0,0)=1$．若 $f(x,y)$ 在 D_t 上满足方程 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\dfrac{1}{2}f(x,y)$． $\vec{n}$ 为有向曲线 ∂D_t 的外单位法向量，求极限 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{1-\cos t}\oint_{\partial D_t}\dfrac{\partial f}{\partial \vec{n}}\mathrm{d}l=$

解： $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{n}}=\nabla f\cdot\vec{n}$．利用格林公式第二种形式得到

$$\oint_{\partial D_t}\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\mathrm{d}l=\oint_{\partial D_t}\nabla f\cdot\vec{n}\mathrm{d}l=\oint_{\partial D_t}(f'_x\vec{i}+f'_y\vec{j})\cdot\vec{n}\mathrm{d}l=\iint_{D_t}(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\iint_{D_t}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t f\cdot r\mathrm{d}r=\pi\int_0^t f\cdot r\mathrm{d}r$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{1-\cos t}\oint_{\partial D_t}\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\mathrm{d}l=\pi\lim_{t\to 0}\frac{\int_0^t f\cdot r\mathrm{d}r}{1-\cos t}=\pi$$．（洛必达法则）

例 2　设 $Q(x,y)$ 在全平面上连续可微, 已知曲线积分 $\int_L 2xydx+Q(x,y)dy$ 与路径无关, 并且对于任意的 t , 有 $\int_{(0,\ 0)}^{(1,\ t)}2xydx+Q(x,y)dy=\int_{(0,\ 0)}^{(t,\ 1)}2xydx+Q(x,y)dy$. 求函数 $Q(x,y)$.

解：根据条件得到 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial y}(2xy)=2x$，因此 $Q(x,y)=x^2+f(y)$.

另外算出两个曲线积分

$$\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xydx+Q(x,y)dy=\int_0^1 2x\cdot 0dx+\int_0^t Q(1,y)dy$$

$$=\int_0^t[1+f(y)]dy=t+\int_0^t f(y)dy\ ,$$

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xydx+Q(x,y)dy=\int_0^1 Q(0,y)dy+\int_0^t 2x\cdot 1dx=\int_0^1 f(y)dy+t^2\ ,$$

令两者相等得到　　$t+\int_0^t f(y)dy=\int_0^1 f(y)dy+t^2$.

关于 t 求导数得到　　$f(t)=2t-1$，于是 $Q(x,y)=x^2+2y-1$.

例 3　已知积分 $\int_L(x+xy\sin x)dx+\dfrac{f(x)}{x}dy$ 与路径无关， $f(x)$ 为可微函数, 且 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$,

（1）求 $f(x)$;

(2) 对(1)中求得的 $f(x)$, 求函数 $u=u(x,y)$ 使得 $du=(x+xy\sin x)dx+\dfrac{f(x)}{x}dy$;

(3) 对 (1) 中求得的 $f(x)$，求上述积分，其中积分路径为从 $A(\pi,1)$ 到 $B(2\pi,0)$ 的任意路径.

解: (1)
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(x+xy\sin x)$$
$$x\sin x=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}，\quad f'(x)-\frac{1}{x}f(x)=x^2\sin x$$
这是一阶线性微分方程. 通解为 $f(x)=x(\sin x-x\cos x+C)$，由初始条件得 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，$C=-1$，于是 $f(x)=x(\sin x-x\cos x-1)$.

(2) 解法一: $(x+xy\sin x)dx+\frac{f(x)}{x}dy=(x+xy\sin x)dx+(\sin x-x\cos x-1)dy$
$$\frac{\partial u}{\partial x}=x+xy\sin x，\quad u=\frac{x^2}{2}-xy\cos x+y\sin x+\varphi(y)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-x\cos x+\sin x+\varphi'(y)=\sin x-x\cos x-1$$
$$\varphi'(y)=-1，\quad \varphi(y)=-y+C$$
$$u=\frac{x^2}{2}-xy\cos x+y\sin x-y+C$$
其中 C 为任意常数.
$$u=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(x+xy\sin x)dx+(\sin x-x\cos x-1)dy+C$$
解法二: $=\int_0^x xdx+\int_0^y(\sin x-x\cos x-1)dy+C$
$$=\frac{x^2}{2}-xy\cos x+y\sin x-y+C$$
(3) 解法一: 积分与路径无关, 由 A 到 B 取平行与坐标轴的两条路径,
$$I=\int_1^0(-\pi\cos\pi-1)dy+\int_\pi^{2\pi}xdx=(1-\pi)+\frac{3\pi^2}{2}$$
解法二: $I=u(x,y)\big|_A^B=u(B)-u(A)=(1-\pi)+\frac{3\pi^2}{2}$。

例 4 计算积分: $\int_{(1,\pi)}^{(2,\pi)}\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)ydx$，
路径为沿任一条不与轴相交的曲线。

解: 由于 $\frac{\partial X}{\partial y}=-\frac{2y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^3}\sin\frac{y}{x}=\frac{\partial Y}{\partial x}$，
$$\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy=dx+y\cos\frac{y}{x}\left(-\frac{y}{x^2}dx+\frac{1}{x}dy\right)+\sin\frac{y}{x}dy$$
$$=dx+y\cos\frac{y}{x}d\left(\frac{y}{x}\right)+\sin\frac{y}{x}dy=dx+yd\left(\sin\frac{y}{x}\right)+\sin\frac{y}{x}dy=d\left(x+y\sin\frac{y}{x}\right),$$
$$\int_{(1,\pi)}^{(2,\pi)}\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)ydx$$

$$=\int_{(1,\pi)}^{(2,\pi)} d\left(x+y\sin\frac{y}{x}\right)=\left(x+y\sin\frac{y}{x}\right)\Bigg|_{(1,\pi)}^{(2,\pi)}=\pi+1$$

例 5 设在上半平面 $D=\{(x,y)\big|y>0\}$ 内，函数 $f(x,y)$ 具有连续偏导数,且对任意的 $t>0$ 都有 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$，证明: 对 L 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L,都有 $\oint_L yf(x,y)dx-xf(x,y)dy=0$。

解：由 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$ 两边对 t 求导得：

$$xf'_x(tx,ty)+yf'_y(tx,ty)=-2tf(x,y)$$

令 $t=1,$ 则 $xf'_x(x,y)+yf'_y(x,y)=-2f(x,y)$

记 $X=yf(x,y),Y=-xf(x,y)$

$$\frac{\partial X}{\partial y}=f(x,y)+yf'_y(x,y)\,;\quad \frac{\partial Y}{\partial x}=-f(x,y)-xf'_x(x,y)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}=-f(x,y)-xf'_x(x,y)-[f(x,y)+yf'_y(x,y)]$$

$$=-2f(x,y)-[xf'_x(x,y)+yf'_y(x,y)]=0\ ,$$

由于是单连通域，又有满足 $\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}=0$，这样，于是对 L 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L，都有 $\oint_L yf(x,y)dx-xf(x,y)dy=0$。

例 6 设 Ω 为由圆锥面 $S:x^2+y^2=z^2$ 和平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 所围成的圆锥体。

(i) 证明设此圆锥体的体积 V 可以表示为 $V=\frac{1}{3}\iint\limits_{\partial\Omega}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}^0)dS$，其中 $\partial\,\Omega$ 为 Ω 区域的边界曲面，$\mathbf{n}^0$ 为其单位外法向量，$\mathbf{r}=(x,y,z)$.

(ii) 圆锥体的体积 V 也可以表示为 $V=\frac{Ah}{3}$，其中 A 为圆锥的底面积，h 为圆锥的高.

证明： (i) 根据 Gauss 公式得 $\iint\limits_{\partial\Omega}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}^0)dS=\iint\limits_{\partial\Omega^+}(x,y,z)\cdot d\mathbf{S}=\iiint\limits_{\Omega}3dxdydz=3V$

故$V=\dfrac{1}{3}\iint\limits_{\partial\Omega}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}^0)dS$。（注：这个结论不仅仅对圆锥体成立，而是一个一般性结论：任何有界立体Ω，其体积均可以表为$|\Omega|=\dfrac{1}{3}\iint\limits_{\partial\Omega}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}^0)dS$，其中$\mathbf{n}^0$为$\partial\Omega$单位外法向量。）

(ii) 由于$\partial\,\Omega=S_1\cup S_2$，其中$S_1$记锥面部分，$S_2$记底面部分．因为锥面的顶点在原点，其上每一点的法向量与径向垂直，故$\iint\limits_{S_1}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}^0)dS=0$。$S_2$为平面$Ax+By+Cz+D=0$的一部分，其单位法向量为$\dfrac{\pm(A,B,C)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$．注意到在$S_2$上，点的位置向量与正法向成锐角。因此

$$\begin{aligned}\iint\limits_{S_2}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}^0)dS&=\iint\limits_{S_2}\left|(x,y,z)\cdot\frac{(A,B,C)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|dS\\&=\iint\limits_{S_2}\left|\frac{Ax+By+Cz}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|dS=\iint\limits_{S_2}\left|\frac{-D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|dS\\&=\left|\frac{-D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|\iint\limits_{S_2}dS=Ah\end{aligned}$$

其中$A=\iint\limits_{S_2}dS$为圆锥的底面积，而$h=\left|\dfrac{-D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|$为原点到平面$Ax+By+Cz+D=0$的距离，也就是圆锥的高．故

$$V=\frac{1}{3}\iint\limits_{\partial\Omega}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}^0)dS=\frac{1}{3}\left(\iint\limits_{S_1}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}^0)dS+\iint\limits_{S_2}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}^0)dS\right)=\frac{1}{3}\iint\limits_{S_2}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}^0)dS=\frac{Ah}{3}$$

。解答完毕。

例 7　设一元函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续可导, 且对于任何位于半空间

$R_x^+=\{(x,y,z),\ \ x>0\}$中

的光滑有向封闭曲面$S\subset R_x^+$，有$\oiint\limits_S xf(x)dydz-xyf(x)dzdx-e^{2x}zdxdy=0$。进一步假设$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$。求$f(x)$。

解：对于$\forall(x_0,y_0,z_0)\in R_x^+$。作以$(x_0,y_0,z_0)$为球心，以$r>0$为半径的闭球$B_x$。取$r>0$充分小，可以使得$B_r\subset R_x^+$。于是由假设得

$\oiint\limits_{\partial B_r}xf(x)dydz-xyf(x)dzdx-e^{2x}zdxdy\equiv0$。根据 Gauss 公式有

$\iiint\limits_{B_r}[(xf(x))_x+(-xyf(x))_y+(-e^{2x}z)_z]dxdydz=0$，即

$$\iiint_{B_r}[xf'(x)+(1-x)f(x)-e^{2x}]dxdydz=0\text{。}$$

再根据三重积分的中值定理可知存在$\xi\in[x_0-r,x_0+r]$，使得

$\xi f'(\xi)+(1-\xi)f(\xi)-e^{2\xi}=0$。令$r\to 0^+$即得

$x_0 f'(x_0)+(1-x_0)f(x_0)-e^{2x_0}=0$。

由于$x_0>0$是任意的，故　$xf'(x)+(1-x)f(x)-e^{2x}=0$，$\forall x>0$。

这是一阶线性常微分方程，根据求解公式得可知其通解为$f(x)=\dfrac{e^x}{x}(c+e^x)$。进一步由假设$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$，可以确定$c=-1$。因此$f(x)=\dfrac{e^x}{x}(e^x-1)$。解答完毕。

例 8　利用 Stokes 公式计算积分$I=\oint_{L^+}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$，其中$L^+$为圆周

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\ y=x\tan\alpha\quad\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$

从 0x 轴的正向看去，圆周的正向为逆时针方向.

解:前面（见第一部分题 1）我们利用L^+的参数方程直接计算出了积分。利用 Stokes 公式计算则更简单。记S^+为由圆周L^+在平面$y=x\tan\alpha$上所围的部分（闭圆盘），其正法向与x轴正向成锐角。由 Stokes 公式得

$$I=\oint_{L^+}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz=\iint_{S^+}rot(y-z,z-x,x-y)\cdot d\mathbf{S}$$
$$=\iint_{S}rot(y-z,z-x,x-y)\cdot\mathbf{n}^0dS$$

其中$\mathbf{n}^0$为S^+的单位正法向。由假设知$\mathbf{n}^0=(\sin\alpha,-\cos\alpha,0)$. 简单计算知

$rot(y-z,z-x,x-y)=-2(1,1,1)$

于是$I\ =\iint_S rot(y-z,z-x,x-y)\cdot\mathbf{n}^0dS=-2\iint_S(1,1,1)\cdot(\sin\alpha,-\cos\alpha,0)dS$

$$=2(\cos\alpha-\sin\alpha)\iint_S dS=2\pi a^2(\cos\alpha-\sin\alpha)$$

其中$\iint_S dS=\pi a^2$为平面$y=x\tan\alpha$在球面$x^2+y^2+z^2=a^2$部分内的面积. 解答完毕。

例 9　设有向曲线L^+是平面$x+y+z=0$与球面$x^2+y^2+z^2=1$的交线，从z轴正向看去为逆时针为正向。求第二类曲线积分$I=\int_{L^+}\dfrac{(y+1)\,dx+(z+2)\,dy+(x+3)\,dz}{x^2+y^2+z^2}$。

解：首先注意$I=\int_{L^+}(y+1)\,dx+(z+2)\,dy+(x+3)\,dz$。

记S^+为平面$x+y+z=0$上包含于球面$x^2+y^2+z^2=1$内的部分，规定S^+的正法向与z

轴的正向成锐角。记$\vec{F}=(y+1,z+2,x+3)$。则积分I可写作$I=\int\limits_{L^+}\vec{F}(r)\cdot d\,\vec{r}$。简单计算得$rot\,\vec{F}=(-,1-1,-1)$。根据 Stokes 公式得$I=-\iint\limits_{S^+}dydz+dzdx+dxdy$. 注意到$S$的单位正法向$\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$。于是$I=-\iint\limits_{S}(1,1,1)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)dS=-\sqrt{3}\iint\limits_{S}dS=-\sqrt{3}\pi$。解答完毕。

例 10 设Σ^+是锥面的一个部分：$z=\sqrt{x^2+y^2}$，$0\le z\le 1$，规定其正法线向下，求面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma^+}xdydz+2ydzdx+3(z-1)dxdy\text{。}$$

解：为了用 Gauss 公式来计算上述积分。我们关于锥面Σ^+补上一单位圆盘$\sum_1^+$：$x^2+y^2\le 1$，$z=1$，正法线向上。记由锥面Σ^+和圆盘Σ_1^+所围成的立体为Ω。于是应用 Gauss 公式得

$$\iint\limits_{\Sigma^+}+\iint\limits_{\Sigma_1^+}=\iiint\limits_{\Omega}divF=\iiint\limits_{\Omega}6dxdydz=6\,|\,\Omega\,|=2\pi\text{。}$$

而积分$\iint\limits_{\Sigma_1^+}xdydz+2ydzdx+3(z-1)dxdy=0$。

因此原积分$I=\iint\limits_{\Sigma^+}xdydz+2ydzdx+3(z-1)dxdy=2\pi$。解答完毕。

例 11 计算高斯积分$I=\oiint\limits_{S}\frac{\cos(\bar{r},\bar{n})}{r^2}\mathrm{d}S$，其中$S$为一个不经过原点的光滑封闭曲面，其中$\bar{n}$为$S$上点$(x,y,z)$处的单位外法线向量，$\bar{r}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$，$r=|\bar{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

解：记$\vec{V}=\vec{r}/r^3=(x,y,z)/r^3$。则$\oiint\limits_{S}\frac{\cos(\bar{r},\bar{n})}{r^2}\mathrm{d}S=\oiint\limits_{S}\frac{\bar{r}}{r^3}\cdot\bar{n}\mathrm{d}S=\oiint\limits_{S}\vec{V}\cdot\bar{n}\mathrm{d}S$. 简单计算表明，证向量场$V$的散度恒为零，即$divV=0$. 因此当$S$不包围原点时，向量场$V$在由$S$所包围的闭区域内连续可微。因此利用 Gauss 公式立知面积分$\iint\limits_{S}V\cdot ndS=0$。

当S包含围原点时，原积分等于向量场$\vec{V}$关于球面$\Sigma^+:x^2+y^2+z^2=\delta^2$（外侧）上的第二型面积分. 于是

$$I=\oiint\limits_{S}\frac{\cos(\bar{r},\bar{n})}{r^2}\mathrm{d}S=\oiint\limits_{\Sigma^+}\vec{V}\cdot\vec{n}dS=\oiint\limits_{\Sigma^+}\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\frac{\vec{r}}{r}dS=\frac{1}{\delta^2}\oiint\limits_{\Sigma}dS=4\pi\text{。}$$

解答完毕。

例 12 确定常数α，使得积分$\int_A^B (x^4+4xy^\alpha)dx+(6x^{\alpha-1}y^2-5y^4)dy$与路径无关，并求原

函数$\varphi(x,y)$，使得$d\varphi=(x^4+4xy^\alpha)dx+(6x^{\alpha-1}y^2-5y^4)dy$。

解：记$P(x,y)=x^4+4xy^\alpha$，$Q(x,y)=6x^{\alpha-1}y^2-5y^4$。令$P_y=Q_x$，得

$4\alpha xy^{\alpha-1}=6(\alpha-1)x^{\alpha-2}y^2$。由此解得$\alpha-2=1$，且$4\alpha=6(\alpha-1)$，$\alpha-1=2$，所以$\alpha=3$。

当$\alpha=3$时，对微分形式$(x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy$作适当组合得

$$(x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy=x^4dx-5y^4+(4xy^3dx+6x^2y^2dy)$$

$=d(\frac{x^5}{5}-y^5+2x^2y^3)$。由此可得所求原函数为$\varphi(x,y)=\frac{x^5}{5}-y^5+2x^2y^3+c$。解答完毕。

例 13 （P.229 9）设$D\subset R^2$为开集，$u(x,y)$为调和函数$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,(x,y)\in D\right)$，证明

（1）$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D}\left(u\frac{\partial\ln r}{\partial\mathbf{n}}-\ln r\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\right)dl$，其中$(x_0,y_0)\in D$，$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$，$\mathbf{n}$为$D$的外法向量；

（2）$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi R}\int_L u(x,y)dl$，其中$L$为以$(x_0,y_0)$为圆心，$R$为半径的圆。

证明：（1）$\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D}\left(u\frac{\partial\ln r}{\partial\mathbf{n}}-\ln r\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\right)dl=\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D}\left(u\frac{\partial\ln r}{\partial x}-\ln r\frac{\partial u}{\partial x},u\frac{\partial\ln r}{\partial y}-\ln r\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\mathbf{n}^0dl$。

而$\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial\ln r}{\partial x}-\ln r\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial\ln r}{\partial y}-\ln r\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0,\quad (x,y)\neq(x_0,y_0)$，

所以令$L_\varepsilon:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\varepsilon^2$，

$$\int_{\partial D}\left(u\frac{\partial\ln r}{\partial x}-\ln r\frac{\partial u}{\partial x},u\frac{\partial\ln r}{\partial y}-\ln r\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\mathbf{n}^0dl=\int_{L_\varepsilon}\left(u\frac{\partial\ln r}{\partial x}-\ln r\frac{\partial u}{\partial x},u\frac{\partial\ln r}{\partial y}-\ln r\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\mathbf{n}^0dl$$

$$=\int_{L_\varepsilon}\left(u\frac{\partial\ln r}{\partial x},u\frac{\partial\ln r}{\partial y}\right)\cdot\mathbf{n}^0dl-\int_{L_\varepsilon}\left(\ln r\frac{\partial u}{\partial x},\ln r\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\mathbf{n}^0dl$$

$$\int_{L_\varepsilon}\left(\ln r\frac{\partial u}{\partial x},\ln r\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\mathbf{n}^0dl=\ln\varepsilon\int_{L_\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\mathbf{n}^0dl=\ln\varepsilon\iint_{D_\alpha}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dxdy=0$$

因为$\frac{\partial\ln r}{\partial x}=\frac{x-x_0}{\varepsilon^2},\frac{\partial\ln r}{\partial y}=\frac{y-y_0}{\varepsilon^2}$，所以

$$\int_{L_\varepsilon}\left(u\frac{\partial \ln r}{\partial x},u\frac{\partial \ln r}{\partial y}\right)\cdot \mathbf{n}^0 dl=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{L_\varepsilon} u\cdot\left(x-x_0,y-y_0\right)\cdot \mathbf{n}^0 dl$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{L_\varepsilon} u\cdot\left(x-x_0,y-y_0\right)\cdot\frac{\left(x-x_0,y-y_0\right)}{\varepsilon}dl=\frac{1}{\varepsilon}\int_{L_\varepsilon}u(x,y)dl=\frac{1}{\varepsilon}u(\xi,\eta)\int_{L_\varepsilon}dl=2\pi u(\xi,\eta)$$

$\varepsilon\to 0$， $u(x_0,y_0)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\partial D}\left(u\frac{\partial \ln r}{\partial \mathbf{n}}-\ln r\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)dl$ 。

（2）略

例 14 （P.230,10）