Review

含参广义积分的性质

$$I(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)dx,\quad D=[a,+\infty)\times[\alpha,\beta].$$

$$\bullet\begin{cases} f(x,y), f_y'(x,y)\in C(D); \\ \forall y\in[\alpha,\beta], I(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)dx \text{ 收敛}; \\ \int_a^{+\infty} f_y'(x,y)dx \text{ 关于} y\in[\alpha,\beta]\text{一致收敛}; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \in C^1[\alpha,\beta], \text{且} I'(y)=\frac{d}{dy}\int_a^{+\infty} f(x,y)dx=\int_a^{+\infty} f_y'(x,y)dx.$$

$$\bullet \begin{cases} f(x,y)\in C(D); \\ \int_a^{+\infty} f(x,y)dx\text{关于}y\in[\alpha,\beta]\text{一致收敛}; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I(y)\in C[\alpha,\beta],\text{即} \\ \qquad \lim_{y\to y_0}\int_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int_a^{+\infty} \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx. \\ I(y)\in R[\alpha,\beta], \\ \qquad \text{且}\int_\alpha^\beta dy\int_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int_a^{+\infty}\int_\alpha^\beta f(x,y)dy. \end{cases}$$

Chap3 重积分

§1. 二重积分的概念和性质

二重积分是三重积分的基础. 只有掌握好了二重积分才能学好三重积分. 而且, 二重积分完全体现了重积分的所有思想.

- 二重积分的几何与物理背景
  - 曲顶柱体的体积
  - 平板质量
- 二重积分的概念
- 二重积分的性质

1. 二重积分的几何与物理背景

(1) 曲顶柱体的体积

设曲面S:$z=f(x,y),(x,y)\in D$.求以D为下底,以曲面S为上顶的曲顶柱体Ω的体积(有向)$V(\Omega)$.

•Step1.对D进行分划: 将D分成n个小区域$D_1,D_2,\cdots,D_n$,称之为D的一个分划$T=\{D_i\}_{i=1}^n$.相应地,Ω被分成了曲顶柱体$\Omega_1,\Omega_2,\cdots,\Omega_n$.记

$$d(D_i)\triangleq\sup\{d(P,Q)\,|\,P,Q\in D_i\}.$$

称$\lambda(T)=\max\limits_{1\le i\le n}\{d(D_i)\}$为分划$T$的直径.

•Step2.取标志点　在D_i中任取一点$P_i(\xi_i,\eta_i)$.

•Step3.求近似和　以$\Delta\sigma_i$表示D_i的面积, 则

$$\mathrm{V}(\Omega_i)\approx f(P_i)\Delta\sigma_i,$$

$$\mathrm{V}(\Omega)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{V}(\Omega_i)\approx\sum_{i=1}^{n}f(P_i)\Delta\sigma_i.$$

•Step4.取极限

直观上,当D的分划越来越细,即$\lambda(T)\to 0$时,

$$\sum_{i=1}^{n}f(P_i)\Delta\sigma_i\to\mathrm{V}(\Omega).$$

清華大學

(2) 平板质量

薄板D上点(x,y)处的密度为$m(x,y)$,求薄板质量.

- Step1.分划：将D分成n个小区域$D_i (i=1,2,\cdots,n)$
- Step2.取标志点：在D_i中任取一点$P_i(\xi_i,\eta_i)$.
- Step3.求近似和：用$\Delta\sigma_i$表示D_i的面积,薄板质量

$$m(D)=\sum_{i=1}^{n} m(D_i)\approx\sum_{i=1}^{n} m(P_i)\Delta\sigma_i.$$

- Step4.取极限：

当D的分割越来越细时,$\sum_{i=1}^{n} m(P_i)\Delta\sigma_i \to m(D)$.

2. 矩形区域上的二重积分

Def. f在$D=[a,b]\times[c,d]$上有定义, 对D的任意分划

$$T: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

$$c=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_k=d,$$

及任意$P_{ij}(\xi_{ij},\eta_{ij})\in D_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j],1\le i\le n,$

$1\le j\le k,$若Riemann和$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}f(\xi_{ij},\eta_{ij})\Delta x_i\Delta y_j$的极限

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}f(\xi_{ij},\eta_{ij})\Delta x_i\Delta y_j$$

存在,则称 f 在 D 上($Riemann$)可积,记作 $f\in R(D)$,
并称该极限为 f 在 D 上的二重积分, 记作

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}f(\xi_{ij},\eta_{ij})\Delta x_i\Delta y_j.$$

其中$\iint$是二重积分号,D是积分域,f是被积函数.

Remark: 定义中, $Riemann$和的极限与对D的分划无关,与标志点$\{(\xi_{ij},\eta_{ij})\}$的选取无关. 因此也可以用$\varepsilon-\delta$语言定义二重积分:

清華大學

Def. f在$D=[a,b]\times[c,d]$上有定义, $\mathrm{A}\in\mathbb{R}$. 若$\forall\varepsilon>0$,

$\exists\delta>0$, $s.t.$对 D的任意分划

$$T: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

$$c=y_0<y_1<y_2<\cdots<x_k=d,$$

及任意$P_{ij}(\xi_{ij},\eta_{ij})\in D_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$, $1\le i\le n$,

$1\le j\le k$, 只要$\lambda(T)<\delta$, 就有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} f(\xi_{ij},\eta_{ij})\Delta x_i\Delta y_j-\mathrm{A}\right|<\varepsilon,$$

则称f在D上($Riemann$)可积, 称A为f在D上的二重积分, 记为$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\mathrm{A}$.

$$m_{ij}=\inf_{(x,y)\in D_{ij}}\{f(x,y)\},M_{ij}=\sup_{(x,y)\in D_{ij}}\{f(x,y)\}.$$

Darboux下和： $L(f,T)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}m_{ij}\Delta x_i\Delta y_j$

Darboux上和：$U(f,T)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}M_{ij}\Delta x_i\Delta y_j$

Thm. f为$D=[a,b]\times[c,d]$上有界函数.

(1)T是D的分划, T'为T的加密分划, 则

$$L(f,T)\le L(f,T')\le U(f,T')\le U(f,T);$$

(2)T_1,T_2是D的分划, 则 $L(f,T_1)\le U(f,T_2)$.

Darboux下积分: $\underline{\iint_D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sup_T L(f,T)$

Darboux上积分: $\overline{\iint_D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \inf_T U(f,T)$

Thm. f为$D=[a,b]\times[c,d]$上有界函数, 则以下命题等价

(1) $f\in R(D)$;

(2) $\forall\varepsilon>0, \exists D$的分划$T, s.t.\ U(f,T)-L(f,T)<\varepsilon$;

(3) $\underline{\iint_D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \overline{\iint_D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Def. 称$G\subset\mathbb{R}^2$为零面积集,若$\forall\varepsilon>0$,$\exists$有限个矩形$\{I_i\}$,$i=1,2,\cdots,n$,使得$G\subset\bigcup\limits_{1\le i\le n} I_i$,且这些矩形的面积和$\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma(I_i)<\varepsilon$.

Thm. $D=[a,b]\times[c,d]$,则

(1) $f\in R(D)\Rightarrow f$在D上有界;

(2) $f\in C(D)\Rightarrow f\in R(D)$;

(3) f在D上的间断点集为零面积集$\Rightarrow f\in R(D)$.

3. 一般有界闭集上的二重积分

Def. $D\subset\mathbb{R}^2$为有界闭集, f为D上有界函数. 若存在 $E=[a,b]\times[c,d]$, s.t. $D\subset E$, 且

$$f_E(x,y)=\begin{cases} f(x,y), & (x,y)\in D \\ 0 & (x,y)\in E\setminus D \end{cases} \in R(E),$$

则称f在D上Riemann可积, 且f在D上的积分定义为

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_E f_E(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

将任意形状转化为矩形

清華大學

Thm. $D \subset \mathbb{R}^2$为有界闭集, f为D上有界函数.若f在D上的间断点集为零面积集, ∂D为零面积集,则$f \in R(D)$.

$D \subset \mathbb{R}^2$为有界闭集, ~~若f在D上有瑕点(瑕点的邻域中f无界)~~, 类比一元函数的瑕积分,拓展f在D上的Riemann可积性.

$D \subset \mathbb{R}^2$为无界闭区域,类比一元函数的无穷限积分,拓展f在D上的可积性.

例. $f(x,y)=\sin\frac{1}{x^2+y^2}$ 在 $[-1,1]\times[-1,1]$ 上Riemann可积. 因为 f 仅有一个间断点 $(0,0)$.

在瑕点的任意邻域内 f 有界

例. Dirichlet函数 $D(x,y)=\begin{cases}1 & (x,y)\in\mathbb{Q}^2\\ 0 & (x,y)\notin\mathbb{Q}^2\end{cases}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中任一有界区域 E 上均不可积. 因为对 E 的任意分划,

$$L(f,T)=0<\sigma(E)=U(f,T).$$

4. 二重积分的性质

1)(线性性质) $f,g\in R(D)$,则$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\alpha f+\beta g\in R(D)$,且

$$\iint_D(\alpha f+\beta g)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\alpha\iint_D f\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\beta\iint_D g\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

2)(区域可加性) D_1,D_2为$\mathbb{R}^2$中有界闭集, $D_1\cap D_2$为零面积集, $D=D_1\cup D_2$,则 $f\in R(D)\Leftrightarrow f\in R(D_i),i=1,2$,且

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

3)(保序性) $f,g\in R(D),f\geq g$,则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geq\iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

特别地, $f\in R(D),f\geq 0$,则$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geq 0$.

4) $f \in R(D)$, 则 $\left|\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \le \iint\limits_D |f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

Proof: $\pm f \le |f|$, 由线性性质和保序性,

$$\pm\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le \iint\limits_D |f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \ \square$$

5)(估值定理) $f \in R(D)$, $m \le f(x,y) \le M$. 记 $\sigma(D)$ 为 D 的面积, 则

$$m\sigma(D) \le \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le M\sigma(D).$$

清华大学

6)(对称性)设$f \in R(D)$, D关于OX轴对称,

- 若$f(x,y)$关于y为奇函数,则$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$;
- 若$f(x,y)$关于y为偶函数,记D_1为D位于OX轴上方的部分,则$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

7)(轮换不变性) 若$D \subset \mathbb{R}^2$关于x, y是轮换对称的,即$(x,y) \in D \Leftrightarrow (y,x) \in D$,则

关于区域对称 $y=x$ 对称

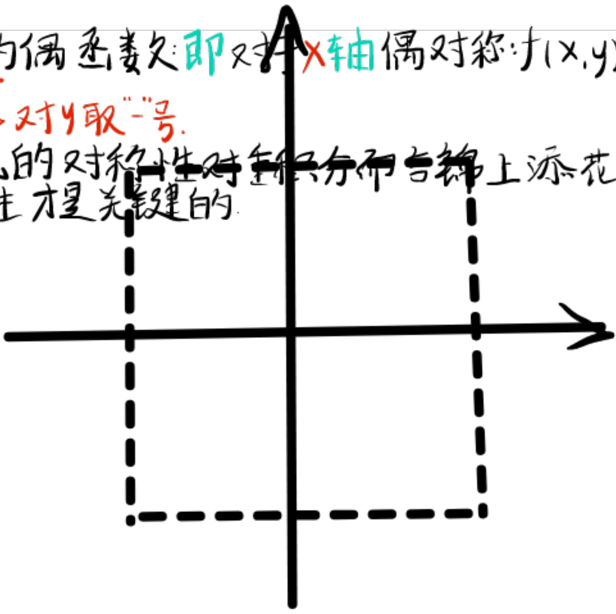
$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D f(y,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

清華大學

①关于y为偶函数:即对x轴偶对称: $f(x,y)=f(x,-y)$ 故只考虑ox轴上方.

对y取"-"号.

②区域的对称性对重积分而言锦上添花,但对重积分而言,函数自身对称性才是关键的.



例. $f\in C([a,b]), f>0, D=[a,b]\times[a,b]$,则

$$\iint_D \frac{f(x)}{f(y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \ge (b-a)^2.$$

Proof: 由于区域D是轮换对称的,因此

$$\iint_D \frac{f(x)}{f(y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \frac{f(y)}{f(x)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

$$\iint_D \frac{f(x)}{f(y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\iint_D \left(\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\ge \frac{1}{2}\iint_D 2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = (b-a)^2. \square$$

$\begin{cases} f\text{:连续可以变号} \\ g\text{:连续不可变号} \end{cases}$

8) (积分中值定理) $D\subset\mathbb{R}^2$为连通有界闭集, ∂D为零面积集, g不变号, $f,g\in C(D)$. 则存在$(\xi,\eta)\in D$, $s.t.$

$$\iint_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(\xi,\eta)\iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

特别地, 若$g\equiv 1$, 记D的面积为$\sigma(D)$, 则

$$\iint_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(\xi,\eta)\sigma(D).$$

Proof. $f,g\in C(D)$, 则$fg\in C(D)$, 从而$fg\in R(D)$.

g不变号, 不妨设$g\geq 0$. 记

$$m=\min_{(x,y)\in D} f(x,y),\ M=\max_{(x,y)\in D} f(x,y),$$

清華大學

则 $mg(x,y) \le f(x,y)g(x,y) \le Mg(x,y).$

由二重积分的保序性,有

$$m\iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le \iint_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\le M\iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

•若 $\iint_D g(x,y)dxdy \ne 0$,则

$$m \le \mu \triangleq \frac{\iint_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y} \le M,$$

由连续函数的介值定理,$\exists(\xi,\eta)\in D, s.t. f(\xi,\eta)=\mu,$

$$\iint_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(\xi,\eta)\iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

•若$\iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$, 由$g\in C(D), g\geq 0$得 $g\equiv 0$.

于是$\forall(\xi,\eta)\in D$,有

$$\iint_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=f(\xi,\eta)\iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.\square$$

Remark: g变号时, 结论不一定成立.

例如, $D=[-1,1]\times[-1,1], f(x,y)=g(x,y)=x$.则

$$\iint_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y>0.$$

清華大學

事实上,

$$\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geq \iint_{\frac{1}{2}\leq x,y\leq 1} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geq \iint_{\frac{1}{2}\leq x,y\leq 1} \frac{1}{4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{16} > 0.$$

而区域D关于y轴对称, $g(x,y)=x$关于x为奇函数,

所以$\iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$

故$\forall(\xi,\eta)\in D,$

$$0 < \iint_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\neq f(\xi,\eta)\iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0. \quad \square$$

例. 求 $\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le r^2} e^{x^2-y^2}\cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$ 方法巧妙,但局限性过大

分析: 将被积函数看成薄板点密度,则所求为原点处的点密度,即被积函数在点(0,0)的值,结果应为1.

解: 由积分中值定理, $\exists(\xi_r,\eta_r)$, $s.t.\ \xi_r^2+\eta_r^2\le r^2$, s.t.

$$\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le r^2} e^{x^2-y^2}\cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=e^{\xi_r^2-\eta_r^2}\cos(\xi_r+\eta_r)\to 1, \text{当} r\to 0 \text{时}. \square$$

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le r^2} e^{(x^2-y^2)}\cos(x+y)\,dxdy=\iint_{\Omega} e^{r^2\cos 2\theta}\cos(r\cdot\sin\theta+r\cos\theta)\cdot r\,dr\,d\theta$$

目前我积不出来,之后再试试; 这个题不要一晃而过,因为此处的 $h(x)$ 选择奇妙

$$\iint_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=f(\xi,\eta)\iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

即选 $g(x)=1$,与 $\sigma(s)$ 产生对接,

另一方面 $\lim\limits_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}$ 也暗含了这层意思

基本的二重积分的计算很重要, 大家要熟练掌握

- 二重积分的基本性质
- 二重积分化累次积分
- 交换积分次序
- 由累次积分给出积分区域
- 极坐标下二重积分的计算
- 二重积分的变量替换方法

清華大學

作业:

习题3.1 No.3,4,10

习题3.2 No.4.