**卷 A 试题参考解答**

**一．填空题**（每空 3 分，共 15 题）**（请将答案直接填写在横线上！）**

1．判断级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1000n+1}$的敛散性（收敛或发散）<u>发散</u>。

解：由于$\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{1000n+1}}=\frac{1000n+1}{n}\to 1000$，（$n\to+\infty$）。根据比较判别法的极限形式可知级数

$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1000n+1}$发散。

2．幂级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$的收敛域为开区间$\underline{[-\frac{4}{3},-\frac{2}{3})}$。

解：由于$\sqrt[n]{\frac{3^n+(-2)^n}{n}}=3\frac{\sqrt[n]{1+(-\frac{2}{3})^n}}{\sqrt[n]{n}}\to 3$，$n\to+\infty$，因此$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}t^n$的收敛半径

为$R=\frac{1}{3}$，并且级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}t^n$在右端点$t=\frac{1}{3}$处发散，在左端点$t=-\frac{1}{3}$处收敛。由

此可知级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$的收敛域为区间$[-1-\frac{1}{3},-1+\frac{1}{3})=[-\frac{4}{3},-\frac{2}{3})$。

3．设$D=\{(x,y),0\le x,y\le 1\}$，函数$f(x,y)$在$D$上有一阶连续的偏导数，$f(x,1)=0$，

$\forall x\in[0,1]$，且$\iint_D f(x,y)dxdy=2$，则$\iint_D y\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dxdy=\underline{-2}$.

解：$$\iint_D y\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dxdy=\int_0^1 dx\int_0^1 y\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy=\int_0^1 dx\left(yf(x,y)|_{y=0}^{y=1}-\int_0^1 f(x,y)dy\right)=$$

$$=-\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy=-\iint_D f(x,y)dxdy=-2。$$

4. 设函数$|x|$在闭区间$[-\pi,\pi]$上的 Fourier 级数为$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos nx$，其和函数记作$S(x)$，

则$S(x)$在点$x=3\pi$处的值为$S(3\pi)=\underline{\pi}$。

解：注意到和函数$S(x)$是以$2\pi$为周期的周期函数。因此$S(3\pi)=S(\pi)$。根据 Dirichlet 点

态收敛性定理可知，函数$|x|$在闭区间$[-\pi,\pi]$上的 Fourier 级数$\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n\cos nx$处处收敛，$S(x)$ 在 $x=\pi$ 处的值为 $S(\pi)=[f(-\pi^+)+f(\pi^-)]/2=[|-\pi|+|\pi|]/2=\pi$ 。因此$S(3\pi)=\pi$。

5．级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n+x)^p}\ (x\ge 0)$为条件收敛的充分必要条件是$p$的取值范围为$\underline{0<p\le 1}$。

解：显然当$p\le 0$时，级数的一般项不趋向零，故级数不可能收敛。

当$p>0$时，级数为 Leibniz 型级数，故收敛。而$p>1$时，级数绝对收敛。因此级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n+x)^p}\ (x\ge 0)$为条件收敛的充分必要条件是$p$的取值范围为$\underline{0<p\le 1}$。

6．函数$\sin^2 x$以$2\pi$为周期的 Fourier 级数为$\underline{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x}$。

解：由于三角多项式的 Fourier 级数就是其自身。因此为求函数$\sin^2 x$的 Fourier 级数，只需要将函数$\sin^2 x$展开成三角多项式。因此$\sin^2 x$的 Fourier 级数为$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$。

7．对积分$\int_0^2 dx\int_0^x f(\sqrt{x^2+y^2})dy$作极坐标变换，所得的累次积分为$\underline{\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta\int_0^{\frac{2}{\cos\theta}} rf(r)dr}$。

解：不难看出积分区域$D$为三角闭域$D=\{(x,y),0\le x\le 2,0\le y\le x\}$。在极坐标$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$下闭域$D$的原象为$D_0=\{(r,\theta),0\le r\le \frac{2}{\cos\theta},0\le\theta\le\pi/4\}$。因此$\int_0^2 dx\int_0^x f(\sqrt{x^2+y^2})dy=\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy=\iint\limits_{D_0} f(r)rdrd\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta\int_0^{\frac{2}{\cos\theta}} rf(r)dr$。

8．设平面闭域$D=\{(x,y),\ |x|+|y|\le 1\}$，则积分$\iint\limits_D x^{2015}\sin(x^4y^2)dxdy=\underline{0}$。

解：由于积分区域$D$关于 y 轴对称，被积函数$x^{2015}\sin(x^4y^2)$关于$x$是奇函数。所以积分为零。

9. 设曲线$L$为函数$y=e^{x^2}$在闭区间$[0,1]$上的图像，起点为$(0,1)$，终点为$(1,e)$，则第二型曲线积分$\int_{L^+} xdx+ydy=\underline{e^2/2}$。

解：由于场$(x,y)$是梯度场，对应的势函数为$\phi(x,y)=(x^2+y^2)/2$，故积分与路径无关。

因此所求积分为$\phi(1,e^2)-\phi(0,1)=e^2/2$。

10．设$S$为$R^3$中的闭圆盘：$x^2+y^2\le 1$，$z=0$。规定$S$的正法向向下，则第二型曲面积分$\iint\limits_{S^+}(x^2+y^2)dx\wedge dy=\underline{(-\frac{\pi}{2})}$。

解：$\iint\limits_{S^+}(x^2+y^2)dx\wedge dy=-\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)dxdy$（二重积分）$=-\frac{\pi}{2}$。

11．全微分方程$(x+2y)dx+(2x-y)dy=0$的通解为$\underline{2xy+x^2/2-y^2/2=c}$.

解：对微分式$(x+2y)dx+(2x-y)dy=0$重新组合如下

$(x\mathrm{dx}-ydy)+2ydx+2xdy=0$。

由此可以立刻看出，上式的左边是函数$2xy+x^2/2-y^2/2$的全微分。因此方程的通解为

$2xy+x^2/2-y^2/2=c$。

12．设$S$为单位球面: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=1$，外法向为正，则第二型曲面积分$\oiint\limits_{S^+}xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy=\underline{4\pi}$。

解：利用 Gauss 公式得$\oiint\limits_{S^+}xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy=\iiint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\le 1}3dxdydz=4\pi$。

13．函数$\frac{1}{4-x}$在点$x=2$处的 Taylor 级数展开式为$\underline{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x-2)^n}{2^{n+1}}}$。

解：根据以下方式展开比较简单

$$\frac{1}{4-x}=\frac{1}{2-(x-2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x-2}{2}}=\frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{x-2}{2}\right)+\left(\frac{x-2}{2}\right)^2+\cdots\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x-2)^n}{2^{n+1}}。$$

14．设幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-2)^n$在$x=0$处收敛，而在$x=4$处发散，则该幂级数的收敛域为

$\underline{[0,4)}$。

解：由于幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛，即级数$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-2)^n$ 收敛，这表明幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ 的收敛半径 $R \ge 2$。而幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-2)^n$ 在 $x=4$ 处发散，即级数$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n 2^n$ 发散。这表明收敛半径 $R \le 2$。因此幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ 的收敛半径 $R=2$，且左端点 $t=-2$ 收敛，右端点 $t=2$ 发散。因此，幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-2)^n$ 的收敛域为$[2-2,2+2)=[0,4)$。

15．交换累次积分$\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x,y)dy$ 次序后，所得的积分为$\underline{\int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x,y)dx}$。

解：积分$\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x,y)dy$ 的区域为 $D=\{(x,y),1 \le x \le \mathrm{e}, 0 \le y \le \ln x\}$。 区域 $D$ 还可以表为 $D=\{(x,y), 0 \le \mathrm{y} \le 1, \mathrm{e}^{\mathrm{y}} \le x \le \mathrm{e}\}$。因此交换累次积分$\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x,y)dy$ 次序后，所得的积分为$\int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x,y)dx$。

二．**计算题**（每题 10 分，共 4 题）（**请写出详细的计算过程和必要的根据！**）

1. 设 S 为空间立体 $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1$ 的边界曲面，求第一类曲面积分 $\iint_S (x^2+y^2)d\mathrm{S}$。

解：曲面 S 由两部分 $\mathrm{S}_1$ 和 $\mathrm{S}_2$ 组成：

$\mathrm{S}_1$ 是锥面的一部分，其方程为 $\mathrm{z}=\sqrt{x^2+y^2}$， $\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2 \le 1$，其面积元素为

$\mathrm{dS}=\sqrt{1+\mathrm{z}_{\mathrm{x}}^2+\mathrm{z}_y^2}=\sqrt{2}$。于是积分

$$\iint_{S_1}(x^2+y^2)d\mathrm{S}=\iint_{x^2+y^2 \le 1}(x^2+y^2)\sqrt{2}dxdy=\sqrt{2}\int_0^1 r^2 r dr\int_0^{2\pi} d\theta=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

$\mathrm{S}_2$ 平面 $\mathrm{z}=1$ 上的闭圆盘 $\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2 \le 1$。其面积元素为

$\mathrm{dS}=\sqrt{1+\mathrm{z}_{\mathrm{x}}^2+\mathrm{z}_y^2}=1$。于是积分

$$\iint_{S_2}(x^2+y^2)d\mathrm{S}=\iint_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)dxdy=\int_0^1 r^2 rdr\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{\pi}{2}。$$

由此得积分 $\iint_S(x^2+y^2)d\mathrm{S}=\iint_{S_1}+\iint_{S_2}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi(1+\sqrt{2})}{2}$。

解答完毕。

2．求幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}n^2x^{n-1}$ 的和函数.

解：设幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}n^2x^{n-1}$ 的和函数为 $S(x)$，即 $S(x):=\sum_{n=1}^{+\infty}n^2x^{n-1}$ 。显然级数的收敛域为 $|x|<1$。根据幂级数逐项积分定理，我们有 $\int_0^x S(t)dt=\sum_{n=1}^{+\infty}nx^n$ ， $\forall x\in(-1,1)$。由此我们进一步得到 $\frac{1}{x}\int_0^x S(t)dt=\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}$ ， $\forall x\in(-1,1)$， $x\neq 0$。再次逐项积分得

$$\int_0^x\frac{1}{t}\left(\int_0^t S(s)ds\right)dt=\sum_{n=1}^{+\infty}x^n=\frac{x}{1-x}=\frac{1}{1-x}-1，\ \forall x\in(-1,1)，\ x\neq 0。$$

于是 $\frac{1}{x}\int_0^x S(t)dt=\left(\frac{1}{1-x}-1\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$ 或

$$\int_0^x S(t)dt=\frac{x}{(1-x)^2}，\ \forall x\in(-1,1)，\ x\neq 0。$$

显然，当 $x=0$ 时，式 $\int_0^x S(t)dt=\frac{x}{(1-x)^2}$ 也成立。故

$$\int_0^x S(t)dt=\frac{x}{(1-x)^2}，\ \forall x\in(-1,1)。$$

于上式两边再次求导得

$$S(x)=\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)'=\frac{1+x}{(1-x)^3}。$$解答完毕。

3．求第二型曲线积分 $I=\int_{\Gamma^+}xdy-ydx$ ，其中定向曲线 $\Gamma^+$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 和柱面 $x^2+y^2=x$ 的交线，逆着正 $z$ 轴朝下看，$\Gamma^+$ 的正向是逆时针方向。

（注：球面和柱面的交线有两个部分，它们关于 $Oxy$ 平面上对称，分别位于 $Oxy$ 平面上方和下方。这里 $\Gamma^+$ 指的是位于 $Oxy$ 平面上方的那个部分闭曲线。）

解法一：利用 Stokes 公式计算比较简单。记球面上由闭曲线 $\Gamma^+$ 所围的(较小的)部分为 $S^+$，

法规定 $S^+$ 的正法向向上。这样 $S^+$ 与其边界 $\Gamma^+$ 的定向协调。记向量场 $\vec{F}:=(-y,x,0)$，则所求积分可写作 $I=\int_{\Gamma^+}\vec{F}(r)\cdot\vec{\tau}(r)dl$， $\vec{\tau}(r)$ 为 $\Gamma^+$ 上的单位正切向。 简单计算得 $rot\,\vec{F}:=(0,0,2)$。于是根据 Stokes 公式我们有

$$I=\int_{\Gamma^+}\vec{F}(r)\cdot\vec{\tau}(r)dl=\iint_{S^+}rot\vec{F}(r)\cdot\vec{n}(r)dS=\iint_{S^+}2dx\wedge dy,$$

这里 $\vec{n}(r)$ 为 $S^+$ 上的单位正法向。注意到 $S^+$ 在 $Oxy$ 平面上的投影为闭圆盘 $x^2+y^2\le x$，其面积为 $\pi/4$。由此我们得到 $I=\iint_{x^2+y^2\le x}2dxdy=\dfrac{\pi}{2}$。

解法二：仍利用 Stokes 公式计算。记柱面位于上半球面内的那个部分为 $S^+$， 其边界由两条闭曲线，$\Gamma^+$ 和位于 $Oxy$ 平面上的圆周 $L^+$：$x^2+y^2=x$，这里 $L^+$ 的正向仍为逆时针（逆着正 $z$ 轴朝下看）。于是根据 Stokes 定理知

$$\int_{\Gamma^+\cup L^-}\vec{F}(r)\cdot\vec{\tau}(r)dl=\iint_{S^+}rot\vec{F}(r)\cdot\vec{n}(r)dS,$$

这里 $\vec{F}:=(-y,x,0)$。简单计算知其旋度为 $rot\,\vec{F}:=(0,0,2)$。另一方面，柱面 $S^+$ 的单位法向量具有形式 $\vec{n}(r)=(*,*,0)$。因此 $\iint_{S^+}rot\vec{F}(r)\cdot\vec{n}(r)dS=0$。于是我们得到

$$\int_{\Gamma^+}\vec{F}(r)\cdot\vec{\tau}(r)dl=\int_{L^+}\vec{F}(r)\cdot\vec{\tau}(r)dl。$$

上式右边线积分为平面线积分。利用 Green 公式得

$$I=\int_{L^+}xdy-ydx=\iint_{x^2+y^2\le x}2dxdy=2\pi(\tfrac{1}{2})^2=\frac{\pi}{2}。$$

解法三：写出 $\Gamma^+$ 的参数方程。然后直接计算。

注意到柱面 $x^2+y^2=x$ 与 $Oxy$ 平面的交线为圆周 $(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}$。它的参数方程为

$x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos t$，$y=\frac{1}{2}\sin t$，$0\le t\le 2\pi$。将这两个参数方程代入球面方程 $x^2+y^2+z^2=1$

得 $z=\sqrt{1-x(t)^2-y(t)^2}=\sqrt{1-x(t)}=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos t}=\sin\frac{t}{2}$。（实际上由于线积分

$I=\int_{\Gamma^+}xdy-ydx$ 中不显含 $z$，我们并不需要关于分量 $z=z(t)$ 的参数方程）。再注意到参数 $t$ 增加的方向与 $\Gamma^+$ 的正向一致。因此

$$I=\int_{\Gamma^+}xdy-ydx=\int_0^{2\pi}\tfrac{1}{2}(1+\cos t)\tfrac{1}{2}\cos tdt-\tfrac{1}{2}(\sin t)\tfrac{1}{2}(-\sin t)dt=\tfrac{1}{4}\int_0^{2\pi}(\cos t+1)dt=\frac{\pi}{2}。$$

解答完毕。

4．计算第二型曲面积分 $I=\iint\limits_{S^+} x^2 y dy\wedge dz - xy^2 dz\wedge dx + 3z dx\wedge dy$，其中定向曲面 $S^+$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=2z$ 在平面 $z=1$ 下方的部分，正法向向下。

解：利用 Gauss 定理来计算面积分 I 比较方便。为此我们记 $S_1^+$ 为平面 $z=1$ 上的闭圆盘 $\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2\le 1$，正法向向上，记 $\Omega$ 为 $S$ 和 $S_1$ 所包围的下半球体。记向量场 $\vec{\mathrm{F}}=(x^2y,-xy^2,3z)$。于是根据 Gauss 定理得

$$\iint\limits_{S^+\cup S_1^+} \vec{F}(r)\vec{n}(r)dS=\iiint\limits_{\Omega} div\vec{F}dV=\iiint\limits_{\Omega} 3dV=3|\Omega|=2\pi$$ 。另一方面，

$$\iint\limits_{S_1^+} \vec{F}(r)\vec{n}(\mathrm{r})dS=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} 3dxdy=3\pi$$ 。由此得

$$I=\iint\limits_{S^+} \vec{F}(r)\vec{n}(r)dS=\iiint\limits_{\Omega} div\vec{F}dV-\iint\limits_{S_1^+} \vec{\mathrm{F}}(r)\vec{n}(r)dS=2\pi-3\pi=-\pi$$ 。

解答完毕。

三．**证明题（请写出详细的证明过程！）**

1.（8 分）设数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $a_n>0$，$\forall n\ge 1$ 且 $a_n$ 单调下降。证明，若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n-a_{n+1}}{a_n}$ 发散，则 $\lim_{n\to+\infty} a_n=0$。

证：由于 $a_n$ 单调下降且大于零，故数列 $\{a_n\}$ 必有极限。设 $\lim_{n\to+\infty} a_n=a$，则极限 $a\ge 0$。

假设 $a>0$。往下我们来导出矛盾。记 $b_n:=\frac{a_n-a_{n+1}}{a_n}\ge 0$，$\forall n\ge 1$。 由于 $a_n\ge a$，故 $b_n=\frac{a_n-a_{n+1}}{a_n}\le\frac{a_n-a_{n+1}}{a}$，$\forall n\ge 1$。考虑级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n-a_{n+1}}{a}$。其前 $n$ 项的部分和为 $S_n=\frac{a_1-a_{n+1}}{a}$。显然 $S_n=\frac{a_1-a_{n+1}}{a}\to\frac{a_1-a}{a}$，即级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n-a_{n+1}}{a}$ 收敛。根据级数的比较定理知 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收敛。此与题目的条件 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 发散相矛盾。证毕。

注：实际上级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n-a_{n+1}}{a_n}$ 发散是 $\lim_{n\to+\infty} a_n=0$ 的充分必要条件。上面我们已经证明了充分性。以下我们来证必要性。设 $\lim_{n\to+\infty} a_n=0$，我们来证明级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 发散。对于 $\forall n\ge 1$，

$\forall p \ge 1$， $\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k - a_{k+1}}{a_k} \ge \sum_{n+1}^{n+p} \frac{a_k - a_{k+1}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1} - a_{n+p+1}}{a_{n+1}} = 1 - \frac{a_{n+p+1}}{a_{n+1}}$。

由于 $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$，可取 $p$ 充分大使得 $\frac{a_{n+p+1}}{a_{n+1}} < \frac{1}{2}$。此时

$\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k \ge 1 - \frac{a_{n+p+1}}{a_{n+1}} \ge \frac{1}{2}$。根据 Cauchy 收敛准则知级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 发散。注毕。

2.（7 分）设 $S$ 为单位球面 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$，$A = (a_{ij})$ 为 $3\times3$ 的实对称矩阵，$\mathrm{tr}(A)$ 表示矩阵 $A$ 的迹，即 $A$ 的对角元素之和。分两个步骤：(i) $A$ 为对角阵；(ii) $A$ 为一般对称阵，证明第一型曲面积分 $\oiint_S (x^T Ax)dS = \frac{4\pi}{3}\mathrm{tr}(A)$，这里 $x^T Ax = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_i x_j$ 。

证法一：情形(i)：$A$ 为对角阵：$A = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ 。此时 $x^T Ax = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i x_{\mathrm{i}}^2$ 。

$$\oiint_S (x^T Ax)dS = \oiint_S (\sum_{\mathrm{i}=1}^{3} \lambda_{\mathrm{i}} x_i^2)dS = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \oiint_S x_i^2 dS \text{。}$$

由对称性知 $\oiint_S x_1^2 dS = \oiint_S x_2^3 dS = \oiint_S x_3^2 dS$ 。因此

$$\oiint_S x_i^2 dS = \frac{1}{3}\oiint_S (\sum_{i=1}^{3} x_i^2)dS = \frac{1}{3}\oiint_S dS = \frac{|S|}{3} = \frac{4\pi}{3}\text{。由此得}$$

$$\oiint_S (x^T Ax)dS = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \oiint_S x_i^2 dS = \frac{4\pi}{3}\sum_{i=}^{3} \lambda_i = \frac{4\pi}{3} tr(A)\text{。结论得证。}$$

情形(ii)：$A$ 为一般对称阵。根据实对称矩阵的性质，存在正交矩阵 $\mathrm{Q}$，使得

$\mathrm{Q}^{\mathrm{T}} AQ = \Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ 为对角矩阵，其对角元素为矩阵 $A$ 的三个特征值。对于面积分 $\oiint_S (x^T Ax)dS$，我们考虑正交变换 $\mathrm{y} = \mathrm{Q}^{\mathrm{T}} x$ 或 $\mathrm{x} = \mathrm{Qy}$。根据面积元素关于正交变换的不变性（见下面的 lemma）可知

$$\oiint_{x_1^2+x_2^2+x_2^3=1} (x^T Ax)dS = \oiint_{y_1^2+y_2^2+y_3^2=1} (\mathrm{y}^T Q^T AQy)\, dS = \oiint_{y_1^2+y_2^2+y_3^2=1} (\mathrm{y}^T \Lambda y)\, dS\text{。}$$

根据情形(i)的结论得

$$\oiint_{y_1^2+y_2^2+y_3^2=1} (\mathrm{y}^T \Lambda y)\, dS = \frac{4\pi}{3}\mathrm{tr}(\Lambda)\text{。}$$

由于矩阵的迹在正交变换下是不变的。因此

$$\oiint_{x_1^2+x_2^2+x_3^2=1}(x^T Ax)dS=\oiint_{y_1^2+y_2^2+y_3^2=1}(y^T \Lambda y)\,dS=\frac{4\pi}{3}tr(\Lambda)=\frac{4\pi}{3}tr(A)$$ 。证毕。

Lemma（面积元素关于正交变换的不变性）：

设 $\Sigma$ 是一个正则的参数曲面。记 $\Sigma'$ 是 $\Sigma$ 在一个正交变换（正交矩阵）P 下的象，

即 $\Sigma'=P(\Sigma)$。记 $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$，$U=\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$，则对任何 $\Sigma$ 上连续函数 $g(x,y,z)$，我们有

$$\iint_{\Sigma} g(X)dS=\iint_{\Sigma'} g(P^T U)dS$$ 。

证明：由假设 $\Sigma$ 有正则的参数表示 $X(s,t)=\begin{pmatrix}x(s,t)\\y(s,t)\\z(s,t)\end{pmatrix}$，$(s,t)\in D$，$D$ 为平面有界闭域。

由此导出曲面 $\Sigma'=P(\Sigma)$ 的一个参数表示 $U(s,t)=PX(s,t)$，$(s,t)\in D$。

记两个曲面 $\Sigma$ 和 $\Sigma'$ 关于上述参数表示的 Gauss 系数，E，G，F 和 $E'$，$G'$，$F'$，即

$E=X_s(s,t)^T X_s(s,t)$，$G=X_t(s,t)^T X_t(s,t)$，$F=X_s(s,t)^T X_t(s,t)$；

$E'=U_s(s,t)^T U_s(s,t)$，$G'=U_t(s,t)^T U_t(s,t)$，$F'=U_s(s,t)^T U_t(s,t)$

则 $E'=U_s(s,t)^T U_s(s,t)=X_s(s,t)^T P^T P X_s(s,t)=X_s(s,t)^T X_s(s,t)=E$。

同理可证 $G'=G$，$F'=F$。因此我们有 $\sqrt{E'G'-F'^2}=\sqrt{EG-F^2}$。于是

$$\iint_{\Sigma'} g(P^T U)dS=\iint_D g(P^T U(s,t))\sqrt{E'G'-F'^2}\,dsdt=$$

$$=\iint_D g(P^T U(s,t))\sqrt{EG-F^2}\,dsdt=\iint_D g(X(s,t))\sqrt{EG-F^2}\,dsdt=\iint_{\Sigma} g(X)dS$$ 。

证毕。

证法二：（利用 Gauss 定理）定义线性向量场 $\vec{F}(x)$ 如下

$\vec{F}(x)=(\sum_{j=1}^{3}a_{1j}x_j,\sum a_{2j}x_j,\sum_{j=1}^{3}a_{3j}x_j)$。则二次型 $x^T Ax=\sum_{i,j=1}^{3}a_{ij}x_i x_j$ 可表示为

$x^T Ax=\vec{F}(x)\cdot x$。注意点 $x=(x_1,x_2,x_3)\in S$ 处的朝外单位法向量为其自身 $(x_1,x_2,x_3)$。

因此第一型曲面积分 $\oiint_S (x^T Ax)dS$ 可表示为场 $\vec{F}(x)$ 的第二型曲面积分

$$\oiint_S (x^T Ax)dS = \oiint_{S^+} \vec{F}(x)\cdot\vec{n}(x)dS \text{。}$$

在根据 Gauss 定理得

$$\oiint_{S^+} \vec{F}(x)\cdot\vec{n}(x)dS = \iiint_{x_1^2+x_2^2+x_3^2\le 1} div\vec{F}(x)dv = \iiint_{x_1^2+x_2^2+x_3^2\le 1} (a_{11}+a_{22}+a_{33})dv = \frac{4\pi}{3}tr(A) \text{。}$$

这就证明了$\oiint_S (x^T Ax)dS = \frac{4\pi}{3}\mathrm{tr}(A)$。证毕。

证法三：根据单位球面$S$ $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$的对称性，我们不难看出积分

$\oiint_{S^+} x_i x_j dS = 0$，当$i\ne j$。由此得

$$\oiint_S (x^T Ax)dS = \oiint_S (\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_i x_j)dS = \oiint_S (a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2)dS \text{。}$$

仍根据单位球面$S$的对称性，我们有

$\oiint_S x_1^2 dS = \oiint_S x_2^3 dS = \oiint_S x_3^2 dS$。因此

$$\oiint_S (x^T Ax)dS = \oiint_S (a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2)dS = \sum_{i=1}^{3} a_{ii}\oiint_S x_i^2 dS =$$

$$= \frac{trA}{3}\oiint_S (x_1^2+x_2^2+x_3^2)dS = \frac{trA}{3}\oiint_S dS = \frac{trA}{3}|S| = \frac{(trA)4\pi}{3}$$ 。证毕。