

第十二次习题课 任意项级数、函数项级数

1. 选择题

(1) 设常数 $\lambda \neq 0$, $a_n > 0$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n \tan \frac{\lambda}{n}) a_{2n}$ [].

(A) 绝对收敛. (B) 条件收敛. (C) 发散. (D) 收敛性与 λ 有关. [A]

(2) 设参数 $a \neq 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + a^2})$ 收敛性的结论是 [] [B]

(A) 绝对收敛 (B) 条件收敛 (C) 发散 (D) 与参数 a 取值有关

2. 讨论下列级数的敛散性, 以及绝对收敛性或条件收敛性。

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p} \right) \quad (p > 0).$$

解: 记 $a_n = \frac{(-1)^n}{n^p}$, $b_n = \ln(1 + a_n)$, $c_n = a_n - b_n$

则 $c_n \sim \frac{1}{2n^{2p}}$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时.

(1) $p > 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 绝对收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛.

(2) $0 < p \leq \frac{1}{2}$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散.

(3) $\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 绝对收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 条件收敛.

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x} \quad (x \neq -n).$$

解: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x}$ ($x \neq -n$) 当 n 充分大 (即 $n+x > 0$) 时是交错级数, 且 $\left\{ \frac{1}{n+x} \right\}$ 单

调减少趋于零, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x}$ ($x \neq -n$) 收敛; 又由于 $\left| \frac{(-1)^{n+1}}{n+x} \right| \sim \frac{1}{n}$ ($n \rightarrow \infty$), $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发

散, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x}$ ($x \neq -n$) 条件收敛。

$$(B) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{x}{n};$$

解：当 $x=0$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{x}{n}$ 的一般项都为零，所以级数绝对收敛。

设 $x \neq 0$ ， $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{x}{n}$ 当 n 充分大（即 $n > \frac{2|x|}{\pi}$ ）时是交错级数，且 $\left| \sin \frac{x}{n} \right|$ 单调减少趋

于零，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{x}{n}$ 收敛；又由于 $\left| (-1)^{n+1} \sin \frac{x}{n} \right| \sim \frac{|x|}{n} (n \rightarrow \infty)$ ， $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n}$ 发散，所以

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{x}{n}$ 条件收敛。

$$(C) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos \frac{n\pi}{3}$$

解：设 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos \frac{n\pi}{3}$ 的部分和数列为 $\{S_n\}$ ，则

$$S_{6n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{2\sqrt{3k-2}} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{2\sqrt{3k-1}} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{3k}},$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2\sqrt{3n-2}}$ ， $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\sqrt{3n-1}}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{3n}}$ 都是 Leibniz 级数，即都是收敛的，所以

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{6n}$ 存在且有限。容易证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{6n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{6n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{6n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{6n+4} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{6n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{6n},$$

由此可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos \frac{n\pi}{3}$ 收敛。

由于 $\left| \frac{1}{\sqrt{n}} \cos \frac{n\pi}{3} \right| \geq \frac{1}{2\sqrt{n}}$ ， $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ 发散，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos \frac{n\pi}{3}$ 条件收敛。

$$(D) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{4^n \sin^{2n} x}{n}$$

解：当 $x \in (k\pi - \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{6})$ 时，由于 $\left| (-1)^{n+1} \frac{4^n \sin^{2n} x}{n} \right| = \frac{1}{n} (4 \sin^2 x)^n$ ，

$0 \leq 4 \sin^2 x < 1$ ， $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (4 \sin^2 x)^n$ 收敛，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{4^n \sin^{2n} x}{n}$ 绝对收敛。

当 $x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ 时, $\sin^2 x = \frac{1}{4}$, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{4^n \sin^{2n} x}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 是条件收敛级数。

在其他情况下, 由于 $\left| (-1)^{n+1} \frac{4^n \sin^{2n} x}{n} \right| = \frac{1}{n} (4 \sin^2 x)^n$, $4 \sin^2 x > 1$, 级数的一般项趋于无穷大, 所以级数发散。

$$(E) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n+1)x \cos(n-1)x}{n^p}$$

解: 当 $x = \frac{k\pi}{2}$ 时, 级数的一般项都为零, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n+1)x \cos(n-1)x}{n^p}$ 绝对收敛。

设 $x \neq \frac{k\pi}{2}$ 。当 $p > 1$ 时, 由于 $\left| \frac{\sin(n+1)x \cos(n-1)x}{n^p} \right| \leq \frac{1}{n^p}$, 所以级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n+1)x \cos(n-1)x}{n^p} \text{ 绝对收敛。}$$

当 $0 < p \leq 1$ 时, 由于

$$\frac{\sin(n+1)x \cos(n-1)x}{n^p} = \frac{\sin 2nx}{2n^p} + \frac{\sin 2x}{2n^p},$$

由 Dirichlet 判别法, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{2n^p}$ 收敛, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2x}{2n^p}$ 发散, 所以级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n+1)x \cos(n-1)x}{n^p} \text{ 发散。}$$

当 $p \leq 0$ 时, 由于级数的一般项不趋于零, 所以级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n+1)x \cos(n-1)x}{n^p} \text{ 发散。}$$

$$(F) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{a}{1+a^n} \quad (a > 0).$$

解: 设 $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{a}{1+a^n}$ 。

当 $a > 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \frac{1}{a} < 1$, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{a}{1+a^n}$ 绝对收敛;

当 $a = 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{a}{1+a^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$, 级数条件收敛;

当 $0 < a < 1$ 时, 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 收敛, $\left\{ \frac{a}{1+a^n} \right\}$ 单调有界, 由 Abel 判别法, 级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{a}{1+a^n}$ 收敛, 但由于 $|x_n| \sim \frac{a}{n} (n \rightarrow \infty)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n}$ 发散, 所以级数条件收敛。

3. 讨论下列函数项级数的收敛域 D .

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n^2} : \quad D = \left\{ x \in R \mid |x - k\pi| \leq \frac{\pi}{6}, k = 0, \pm 1, \dots \right\};$$

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2} : \quad D = (-\infty, +\infty)$$

$$(3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{200}} x^n : \quad D = \{0\};$$

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n! e^{nx} : \quad D = \emptyset$$