Review

- 含参定积分的性质

$$I(t)=\int_{\alpha}^{\beta} g(t,x)\mathrm{d}x,\quad D=[a,b]\times[\alpha,\beta]$$

(1) $g(t,x)\in C(D)$

$$\Rightarrow \begin{cases} I(t)\in C[a,b], \text{即} \lim\limits_{t\to t_0}\int_{\alpha}^{\beta} g(t,x)\mathrm{d}x=\int_{\alpha}^{\beta}\lim\limits_{t\to t_0} g(t,x)\mathrm{d}x \\ \int_a^b \mathrm{d}t\int_{\alpha}^{\beta} g(t,x)\mathrm{d}x=\int_{\alpha}^{\beta}\mathrm{d}x\int_a^b g(t,x)\mathrm{d}t \end{cases}$$

(2) $g(t,x), g_t'(t,x)\in C(D)$

$$\Rightarrow I'(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\alpha}^{\beta} g(t,x)\mathrm{d}x=\int_{\alpha}^{\beta} g_t'(t,x)\mathrm{d}x.$$

(3) $g(t,x), g_t'(t,x) \in C([a,b]\times[c,d]), \alpha(t), \beta(t)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且

$$c \le \alpha(t), \beta(t) \le d, \quad \forall t \in [a,b],$$

则

$$f(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} g(t,x)\mathrm{d}x$$

在区间 $[a,b]$ 上可导, 且

$$f'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} g(t,x)\mathrm{d}x.$$

$$= \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} g_t'(t,x)\mathrm{d}x + g(t,\beta(t))\beta'(t) - g(t,\alpha(t))\alpha'(t).$$

§2. 含参广义积分的一致收敛性

Question: 设$f(t,x)$在$D=[\alpha,\beta]\times[a,+\infty)$上连续, $\forall t\in[\alpha,\beta]$,

广义积分$I(t)=\int_a^{+\infty}f(t,x)\mathrm{d}x$收敛. 问$I(t)\in C[\alpha,\beta]$?

分析:
$$\left|I(t)-I(t_0)\right|=\left|\int_a^{+\infty}f(t,x)\mathrm{d}x-\int_a^{+\infty}f(t_0,x)\mathrm{d}x\right|$$
$$\le\int_a^{+\infty}\left|f(t,x)-f(t_0,x)\right|\mathrm{d}x$$

由f的连续性, $\left|f(t,x)-f(t_0,x)\right|$可控, 但积分区间为 $[a,+\infty)$. 因此需要更多的条件来确保广义含参积分的连续性.

清華大學

1. 含参无穷限积分

1)回顾广义积分的收敛性:

$$I(t_0)=\int_a^{+\infty} f(t_0,x)\mathrm{d}x,\text{则}\underline{\forall\varepsilon>0,\exists \mathrm{M}(\varepsilon,t_0)>a},\text{使得}$$

$$\left|\int_a^{\mathrm{A}} f(t_0,x)dx-I(t_0)\right|<\varepsilon,\qquad \forall \mathrm{A}>\mathrm{M}.$$

Cauchy收敛原理: 若$\forall R>a, f(t_0,x)$在$x\in[a,R]$上Riemann可积,则

$$\int_a^{+\infty} f(t_0,x)\mathrm{d}x \text{ 收敛}$$

$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists \mathrm{M}(\varepsilon,t_0), s.t., \forall \mathrm{A},\mathrm{B}>\mathrm{M},\text{有}\left|\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} f(t_0,x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

2) 含参广义积分的收敛性:

Def. $\forall t \in \Omega \subset \mathbb{R}, \int_a^{+\infty} f(t,x)\mathrm{d}x$ 收敛(此时称无穷限积分在$t \in \Omega$上逐点收敛);若$\forall \varepsilon > 0, \exists \mathrm{M}(\varepsilon), s.t. \forall \mathrm{A} > \mathrm{M}, \forall t \in \Omega$, 都有

$$\left|\int_{\mathrm{A}}^{+\infty} f(t,x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^{\mathrm{A}} f(t,x)\mathrm{d}x - \int_a^{+\infty} f(t,x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon,$$

则称含参广义积分$\int_a^{+\infty} f(t,x)\mathrm{d}x$ 关于$t \in \Omega$一致收敛.

Thm.(Cauchy收敛原理) 若$\forall R > a, \forall t \in \Omega, f(t,x)$在$x \in [a,R]$上Riemann可积,则

$$\int_a^{+\infty} f(t,x)\mathrm{d}x \text{ 关于} t \in \Omega \text{一致收敛}$$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \mathrm{M}(\varepsilon), s.t. \forall \mathrm{A}, \mathrm{B} > \mathrm{M}, \forall t \in \Omega$, 有$\left|\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} f(t,x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$

Remark. $\int_a^{+\infty} f(t,x)\mathrm{d}x$ 关于$t\in\Omega$非一致收敛

$\Leftrightarrow\ \exists\varepsilon_0>0,\forall \mathrm{M},\exists \mathrm{A},\mathrm{B}>\mathrm{M},\exists t_0\in\Omega, s.t.$

$$\left|\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} f(t_0,x)\mathrm{d}x\right|\ge\varepsilon_0.$$

例. 证明$\int_a^{+\infty} ye^{-xy}\mathrm{d}x$ 关于$y\in[0,+\infty)$不一致收敛.

Pf. $\exists\varepsilon_0=e^{-1}-e^{-2},\ \forall \mathrm{M}>0,\exists \mathrm{A}=\mathrm{M}+1,\ \mathrm{B}=2\mathrm{A}, y_0=\dfrac{1}{\mathrm{A}}, s.t.$

$$\left|\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} y_0e^{-xy_0}\mathrm{d}x\right|=-e^{-xy_0}\Big|_{x=\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}=e^{-\mathrm{A}y_0}-e^{-\mathrm{B}y_0}=\varepsilon_0,$$

故广义积分关于$y\in[0,+\infty)$不一致收敛.□

Thm.(Weirstrass判别法) $\forall t\in\Omega\subset\mathbb{R}, \int_a^{+\infty} f(t,x)\mathrm{d}x$ 收敛,

若存在$[a,+\infty)$上的广义可积函数$g(x), s.t.$

$$\left|f(t,x)\right|\le g(x),\quad \forall (t,x)\in\Omega\times[a,+\infty),$$

则$\int_a^{+\infty} f(t,x)\mathrm{d}x$ 在$t\in\Omega$上一致收敛.

Pf. $\int_a^{+\infty} g(x)dx$收敛, $\underline{\forall\varepsilon>0,\exists \mathrm{M}(\varepsilon)>a>0, s.t.\forall \mathrm{B}>\mathrm{A}>\mathrm{M}(\varepsilon)}$

$$\left|\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} g(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

于是

$$\underline{\left|\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} f(t,x)\mathrm{d}x\right|}\le\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}\left|f(t,x)\right|\mathrm{d}x\le\left|\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} g(x)\mathrm{d}x\right| \underline{<\varepsilon,\forall t\in\Omega.}$$

故$\int_a^{+\infty} f(t,x)\mathrm{d}x$ 在$t\in\Omega$上一致收敛.□

Remark.(Weirstrass) $\forall t \in \Omega \subset \mathbb{R}$, $f(t,x)$在$x \in [a,+\infty)$上连续,若存在$b > a$及$[b,+\infty)$上的广义可积函数$g(x)$, $s.t.$

$$\left|f(t,x)\right| \le g(x), \quad \forall (t,x) \in \Omega \times [b,+\infty),$$

则$\int_a^{+\infty} f(t,x)\mathrm{d}x$ 在$t \in \Omega$上一致收敛.

例. (1)设$c>0$, $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\mathrm{d}x$ 在$y\in[c,+\infty)$上是否一致收敛?

(2)$\int_0^{+\infty} e^{-xy}\mathrm{d}x$ 在$y\in(0,+\infty)$上是否一致收敛?

解: (1) $c>0$, 则$\int_0^{+\infty} e^{-cx}dx=-\frac{1}{c}e^{-cx}\Big|_{x=0}^{+\infty}=\frac{1}{c}$收敛, 且

$$e^{-xy}\le e^{-cx},\quad \forall(x,y)\in[0,+\infty)\times[c,+\infty).$$

故$\int_0^{+\infty} e^{-xy}\mathrm{d}x$ 在$y\in[c,+\infty)$上一致收敛(Weirstrass).

(2) $\exists\varepsilon_0=e^{-1}-e^{-2}, \forall \mathrm{M}>0, \exists \mathrm{A}=\mathrm{M}+1, \mathrm{B}=2\mathrm{A}, y_0=\frac{1}{\mathrm{A}}, s.t.$

$$\left|\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} e^{-xy_0}\mathrm{d}x\right|=-\frac{1}{y_0}e^{-xy_0}\Big|_{x=\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}=\frac{1}{y_0}(e^{-\mathrm{A}y_0}-e^{-\mathrm{B}y_0})=\mathrm{A}\varepsilon_0>\varepsilon_0,$$

故$\int_0^{+\infty} e^{-xy}\mathrm{d}x$ 在$y\in(0,+\infty)$上非一致收敛(Cauchy).□

Question. $\int_a^{+\infty} f(t,x)g(t,x)\mathrm{d}x$ 在 $t\in\Omega$ 上是否一致收敛?

分析: 给定 $t\in\Omega$, 若 $f(t,x)$ 关于 x 单调, 则

$$\int_A^B f(t,x)g(t,x)\mathrm{d}x$$

$$= f(t,A)\int_A^{\xi} g(t,x)\mathrm{d}x + f(t,B)\int_{\xi}^B g(t,x)\mathrm{d}x.$$

欲使 $\int_a^{+\infty} f(t,x)g(t,x)\mathrm{d}x$ 在 $t\in\Omega$ 上一致收敛, 只要控制 $\left|\int_A^B f(t,x)g(t,x)\mathrm{d}x\right|$, 可以考虑分别对 f 和 g 加条件.

Thm.(Dirichlet) $\forall t\in\Omega\subset\mathbb{R}, f(t,x), g(t,x)$ 在 $x\in[a,+\infty)$ 上连续,

若 (1) $\forall t\in\Omega, f(t,x)$ 关于 x 单调,

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(t,x)=0$ 关于 $t\in\Omega$ 一致成立, 即 $\forall\varepsilon>0, \exists L(\varepsilon)>0,$

$s.t.$ $\quad |f(t,x)|<\varepsilon, \quad \forall x>L(\varepsilon), \forall t\in\Omega;$

(3) $\int_a^{\mathrm{A}} g(t,x)dx$ 关于 $t\in\Omega$ 以及充分大的A一致有界,即

$\exists \mathrm{M}>0, \exists R>0, s.t., \forall t\in\Omega, \forall \mathrm{A}>R,$ 有 $\left|\int_a^{\mathrm{A}} g(t,x)dx\right|\le \mathrm{M}.$

则 $\int_a^{+\infty} f(t,x)g(t,x)\mathrm{d}x$ 在 $t\in\Omega$ 上一致收敛.

Proof.

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} f(t,x)g(t,x)\mathrm{d}x = f(t,\mathrm{A})\int_{\mathrm{A}}^{\xi} g(t,x)\mathrm{d}x + f(t,\mathrm{B})\int_{\xi}^{\mathrm{B}} g(t,x)\mathrm{d}x. \square$$

Thm.(Abel) $\forall t\in\Omega\subset\mathbb{R}, f(t,x), g(t,x)$在$x\in[a,+\infty)$上连续,若

(1)$\forall t\in\Omega, f(t,x)$关于$x$单调;

(2)$x\to+\infty$时, $f(t,x)$关于$t\in\Omega$一致有界,即$\exists \mathrm{M}>0, \exists R>0$,

$s.t.$ $\quad \left|f(t,x)\right|<\mathrm{M}, \quad \forall t\in\Omega, \forall x>R$;

(3)$\int_a^{+\infty} g(t,x)\mathrm{d}x$关于$t\in\Omega$一致收敛;

则 $\int_a^{+\infty} f(t,x)g(t,x)\mathrm{d}x$在$t\in\Omega$上一致收敛.

例. $\int_1^{+\infty}\frac{\sin xy}{x}\mathrm{d}x$关于$y\in[1,+\infty)$是否一致收敛？

解：令$f(x,y)=\frac{1}{x}, g(x,y)=\sin xy$，则$f(x,y)$关于$x$单调；

$$\lim_{x\to+\infty} f(x,y)=0 \text{关于} y\in[1,+\infty) \text{一致成立};$$

$$\left|\int_1^{A} g(x,y)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_1^{A}\sin xy\,\mathrm{d}x\right|$$

$$=\left|\frac{1}{y}\cos xy\Big|_{x=1}^{A}\right| \le \frac{2}{|y|}\le 2,\quad \forall A>1, y\in[1,+\infty).$$

由Dirichlet判别法，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin xy}{x}\mathrm{d}x$关于$y\in[1,+\infty)$一致收敛.□

例. $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$关于$y\in[0,+\infty)$是否一致收敛?

解:令$f(x,y)=\dfrac{\sin x}{x}, g(x,y)=e^{-xy}$,则

$$\int_0^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\left(=\frac{\pi}{2}\right),$$

关于$y\in[0,+\infty)$一致收敛; 给定$y\in[0,+\infty), g(x,y)$关于x单调, 且

$$|g(x,y)|=|e^{-xy}|\le 1,\quad \forall x\ge 0, y\ge 0.$$

由Abel判别法,$\int_0^{+\infty} e^{-xy}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 关于$y\in[0,+\infty)$一致收敛.□

清華大學

2. 含参瑕积分

$$f(t,x): D=[\alpha,\beta]\times[a,b)\to\mathbb{R},$$

$$I(t)=\int_a^b f(t,x)\mathrm{d}x,\ \ \forall t\in[\alpha,\beta].\quad (b\text{为瑕点})$$

Def. 设$\forall t\in\Omega\subset\mathbb{R}$, $\int_a^b f(t,x)\mathrm{d}x$ 收敛, b为唯一瑕点 (此时称瑕积分在$t\in\Omega$上逐点收敛); 若$\forall\varepsilon>0,\exists\delta(\varepsilon)\in(0,b-a), s.t.$

$$\left|\int_{b-\eta}^b f(t,x)dx\right|=\left|\int_a^{b-\eta} f(t,x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(t,x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon,$$

$$\forall\eta\in(0,\delta), \forall t\in\Omega,$$

则称含参瑕积分$\int_a^b f(t,x)\mathrm{d}x$ 关于$t\in\Omega$一致收敛.

Thm.(Cauchy收敛原理) $\forall t\in\Omega\subset\mathbb{R}$, b为瑕积分$\int_a^b f(t,x)\mathrm{d}x$的唯一瑕点, 且$\forall 0<\eta<b-a, \forall t\in\Omega, f(t,x)$在$x\in[a,b-\eta]$上Riemann可积. 则

$$\int_a^b f(t,x)\mathrm{d}x \text{ 关于} t\in\Omega\text{一致收敛}$$

$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta(\varepsilon)\in(0,b-a), s.t.$$

$$\left|\int_{b-\eta_2}^{b-\eta_1} f(t,x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon,\quad \forall\eta_1,\eta_2\in(0,\delta), \forall t\in\Omega.$$

Thm.(Weirstrass) $\forall t\in\Omega\subset\mathbb{R}, \int_a^b f(t,x)\mathrm{d}x$ 收敛, b为唯一瑕点, 且存在$[a,b)$上广义可积函数$g(x), s.t.$

$$|f(t,x)|\le g(x),\quad \forall (t,x)\in\Omega\times[a,b),$$

则$\int_a^b f(t,x)\mathrm{d}x$ 在$t\in\Omega$上一致收敛.

Remark.(Weirstrass) $\forall t\in\Omega\subset\mathbb{R}$, $f(t,x)$在$x\in[a,b)$上连续, 若存在$\delta>0$及$[b-\delta,b)$上广义可积函数$g(x), s.t.$

$$|f(t,x)|\le g(x),\quad \forall (t,x)\in\Omega\times[b-\delta,b),$$

则$\int_a^b f(t,x)\mathrm{d}x$ 在$t\in\Omega$上一致收敛.

Thm.(Dirichlet) $\forall t \in \Omega \subset \mathbb{R}, f(t,x), g(t,x)$在$x \in [a,b)$上连续,若

(1) $\forall t \in \Omega, f(t,x)$关于$x$单调;

(2) $\lim\limits_{x \to b^-} f(t,x) = 0$关于$t \in \Omega$一致成立;

(3) $\int_a^A g(t,x)\mathrm{d}x$关于$t \in \Omega$以及$A \in [a,b)$一致有界;

则$\int_a^b f(t,x)g(t,x)\mathrm{d}x$在$t \in \Omega$上一致收敛.

Thm.(Abel) $\forall t \in \Omega \subset \mathbb{R}, f(t,x), g(t,x)$在$x \in [a,b)$上连续, 若

(1) $\forall t \in \Omega, f(t,x)$关于$x$单调;

(2)$x \to b^-$时, $f(t,x)$关于$t \in \Omega$一致有界;

(3)$\int_a^b g(t,x)\mathrm{d}x$关于$t \in \Omega$一致收敛;

则 $\int_a^b f(t,x)g(t,x)\mathrm{d}x$在$t \in \Omega$上一致收敛.

作业：习题2.1 No.4(单)