3.20

《ODE 习题课·二》

1. 作业讲解+补充
2. 例题讲解.

HW3

① Picard序列法求解ODE的展示:

(i) 原理

证明: 归纳法

注意: 要说明 $H(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\int_{t_0}^{t}ds_0\int_{t_0}^{s_0}ds_1\cdots\int_{t_0}^{s_{i-1}}g(s_i)ds_i$

这个函数项级数的收敛性

$\Uparrow$

$y_*(t)$ 收敛　　$y_0\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(t-t_0)^i}{i!}$ 收敛

(ii) (iii) 解释公式 $y_*(t)=y_0e^{t-t_0}+H(t)$

$y_0e^{t-t_0}$ ↓使得 $\begin{cases}\frac{dz}{dt}=z\\ z(t_0)=y_0\end{cases}$ (处理初值条件)

$H(t)$ ↓使得 $\begin{cases}\frac{dz}{dt}=z+g\\ z(t_0)=0\end{cases}$ (处理非齐次项)

(iv). (v) 解ODE例子.

(vi) H(t) 不用级数求和, 用常数变易法算

② Euler序列法求解ODE的展示:

(i) 一般地, Euler序列 $t_k=\frac{k}{N}$, $y_k=y_{k-1}(1+\frac{1}{N})=(1+\frac{1}{N})^k$

$\Rightarrow y_k=(1+\frac{1}{N})^{N\cdot t_k}$. $1\le k\le N$.

(ii) 三段法估计证明 $\Delta t\to0$ 时, $|y(t_k)-y_k|\to0$.

$\forall t\in[0,1]$, $\forall N\in\mathbb{N}^+$, 存在 k 使得 $\frac{t_k}{N}\le t\le\frac{t_{k+1}}{N}$

$|y(t)-(1+\frac{1}{N})^{N\cdot t}|\le\underbrace{|y(t)-y(t_k)|}_{\to0}+\underbrace{|y(t_k)-y_k|}_{\to0}+\underbrace{|y_k-(1+\frac{1}{N})^{N\cdot t}|}_{\to0}$

$\Rightarrow y(t)=\lim_{N\to\infty}(1+\frac{1}{N})^{N\cdot t}=e^t$

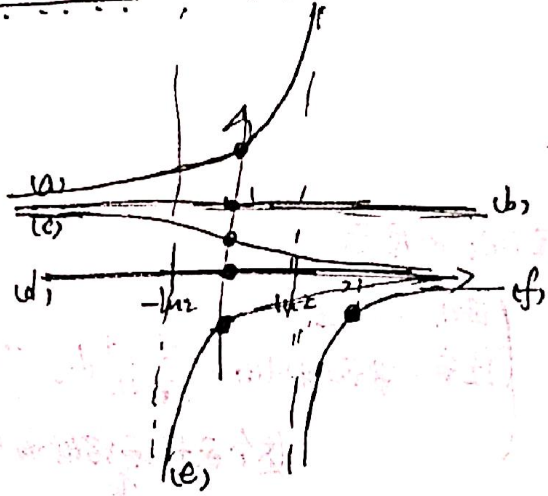
为 $\begin{cases}\frac{dy}{dt}=y\\ y(0)=1\end{cases}$ 的解 !

2/3.20

HW4

① 解的最大存在区间：含初值的ODE解存在的最大的区间

[本题可不用延拓定理，直接解出ODE.]



② 此题为解释：可延拓性定理中方程形式必须为 "$\frac{dy}{dt}=f(t,y)$" ———

因为 "$F(t,y,\frac{dy}{dt})=0$" 时不一定得到定理结果.

(此例中，解区间退化为一个点，或者说为空集)

③ 级数法 求解ODE.

(注意说明解的唯一性时，若用二阶线性齐次ODE解空间为2维线性空间，则必须说明两个初值条件是线性独立的 (or 解函数).)

注2. 前面课程关于线性齐次ODE的存在唯一性定理给出为

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) \cdots + a_0(t)y(t) = 0 \\ y(t)\big|_{t=t_0} = b_0, \quad \cdots \quad y^{(n-1)}(t)\big|_{t=t_0} = b_{n-1} \end{cases}$$

↑

非常特殊形式的初值

的解存在唯一

实际应用中，初值不一定具有上述形式，例如可以为

$$y(t)\big|_{t=t_0} = b_0 \qquad y(t)\big|_{t=t_1} = b_1, \cdots,$$

检验这样形式的初值给出的方程是否存在唯一解

（例如初始条件方面，冗余）

$\Updownarrow$

研究

$$\begin{pmatrix} y_1(t)\big|_{t=t_0} & \cdots & y_n(t)\big|_{t=t_0} \\ y_1(t)\big|_{t=t_1} & \cdots & y_n(t)\big|_{t=t_1} \\ & \cdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

这样的线性方程组解的存在唯一性问题.

3/3.20

例题

Recall: ① ODE $\begin{cases} \text{存在性} \\ C^1, C^\infty, C^\omega\text{性} \\ \text{可延拓性} \\ \text{对初值、参数的依赖性} \end{cases}$

② 线性 ODE: $\begin{cases} \text{解的结构（非齐次通解 = 齐次通解 + 特解）} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \uparrow\ n\text{维线性空间} \\ \text{判别一组解是否线性无关：Wronsk 行列式. Liouvill 公式.} \end{cases}$

③ 解 $\frac{dy}{dt}=f(t,y)$ $\begin{cases} \text{分离变量法} \\ \text{全微分方程法 / 积分因子} \\ \text{Picard 序列 / Euler 序列} \\ \text{常数变易法 / 变量替换} \\ \text{级数法} \end{cases}$

① 用全微分方程法求解：$\underbrace{(2x\sin y+3x^2y)}_{P(x,y)}dx+\underbrace{(x^3+x^2\cos y+y^2)}_{Q(x,y)}dy=0.$

解: 1. check: $\frac{\partial P}{\partial y}=2x\cos y+3x^2=\frac{\partial Q}{\partial x}$. 恰当

$\therefore$ 可以用全微分方程法 ✓

2. 求势函数 $\Phi(x,y)$: $\begin{cases} \frac{\partial\Phi}{\partial x}=P=2x\sin y+3x^2y & ① \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y}=Q=x^3+x^2\cos y+y^2 & ② \end{cases}$

$① \xRightarrow{\text{对}x\text{积分}} \Phi=x^2\sin y+x^3y+\underline{\psi(y)}$ 待定

$\xRightarrow{\text{代入②}} \psi'(y)=y^2$. 可取 $\psi(y)=\frac{1}{3}y^3$

则 $\Phi(x,y):=x^2\sin y+x^3y+\frac{1}{3}y^3$

(满足 $d\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\Phi}{\partial y}dy=Pdx+Qdy\overset{\text{方程}}{=}0$

$\Rightarrow \underline{\Phi(x,y)=\text{---}\equiv C}$ 为方程的解 □.

Rmk: 一个技巧 "分组凑全微分"

$LHS=(2x\sin y\,dx+x^2\cos y\,dy)+(3x^2y\,dx+x^3dy)+y^2dy$

$=d(x^2\sin y)+d(x^3y)+d(\frac{1}{3}y^3)$

$=d(x^2\sin y+x^3y+\frac{1}{3}y^3)$

3.20

② 若 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ 为齐次方程：$\exists m\in\mathbb{Z}$. s.t. $P(tx,ty)=t^m P(x,y)$, $Q(tx,ty)=t^m Q(x,y)$

证明：$\mu(x,y)=\dfrac{1}{xP(x,y)+yQ(x,y)}$ 也一个积分因子.

证：1. 由 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 为 m 次齐次的.

$$\therefore m\cdot P(x,y)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=1}(t^m P(x,y))\overset{齐次}{=}\frac{d}{dt}\Big|_{t=1}P(tx,ty)=\frac{\partial P}{\partial x}\cdot\frac{\partial(tx)}{\partial t}+\frac{\partial P}{\partial y}\cdot\frac{\partial(ty)}{\partial t}\Big|_{t=1}$$

$$\Rightarrow \underline{m\cdot P(x,y)=x\cdot\frac{\partial P}{\partial x}+y\frac{\partial P}{\partial y}}$$

同理. $\underline{m\cdot Q(x,y)=x\cdot\frac{\partial Q}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial Q}{\partial y}}$.

2. $\mu(Pdx+Qdy)=\dfrac{P}{xP+yQ}dx+\dfrac{Q}{xP+yQ}dy$.

$$\therefore \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{P}{xP+yQ}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q}{xP+yQ}\right)=\frac{1}{(xP+yQ)^2}\cdot\left[y\frac{\partial P}{\partial y}Q-\cancel{PQ}-y\frac{\partial Q}{\partial y}P-x\frac{\partial Q}{\partial x}P+\cancel{PQ}+x\frac{\partial P}{\partial x}Q\right]$$

$$=\frac{1}{(xP+yQ)^2}\cdot[Q\cdot mP-P\cdot mQ]=0\ \checkmark.$$

$\therefore$ $\mu(x,y)$ 为方程的一个积分因子 □.

Eg. 求解：$(2y-x)dx+(y-2x)dy=0$

解：积分因子 $\mu=\dfrac{1}{x(2y-x)+y(y-2x)}=\dfrac{1}{y^2-x^2}$

$$\overset{乘以\mu}{\Longrightarrow}\ 0=\frac{2y-x}{y^2-x^2}dx+\frac{y-2x}{y^2-x^2}dy=\frac{1}{2}d\ln\left|\frac{(x+y)^3}{x-y}\right|$$

$$\Rightarrow \frac{(x+y)^3}{x-y}=C\ (C\neq 0)$$

· 另有解 $\mu(x,y)\equiv 0$. 即 $y=\pm x$ (经检验)

综上. 方程的解为 $\underline{C_1(x+y)^3=C_2(x-y)}$. □

③ (1) 证明 Gronwall 不等式：

设 $\underline{K\geq 0}$, $[\alpha,\beta]$ 上连续非负函数 $g(t)$, $f(t)$ 满足：$f(t)\leq K+\int_\alpha^t f(s)g(s)ds$. $\alpha\leq t\leq\beta$

则有 $\underline{f(t)\leq K\exp\left(\int_\alpha^t g(s)ds\right)}$. $\alpha\leq t\leq\beta$.

(2) 证明 ODE 解的唯一性定理：

设 $f(t,y)$ 在 $R=[t_0-a,t_0+a]\times[y_0-b,y_0+b]$ 上 $\underline{连续}$ 且关于 y $\underline{满足 Lipschitz 条件}$.

则 初值问题 $\begin{cases}\dfrac{dy}{dt}=f(t,y)\\ y(t)|_{t=t_0}=y_0\end{cases}$ 的解 (若存在) 必唯一.

证：(1) 令 $F(t):=K+\int_\alpha^t f(s)g(s)ds$，只需证 $F(t)\le K\exp(\int_\alpha^t g(s)ds)$. $\forall\, \alpha\le t\le\beta$.

由条件 有 $F'(t)=f(t)g(t)\le F(t)\cdot g(t)$，$F(\alpha)=K>0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(e^{-\int_\alpha^t g(s)ds}\cdot F(t)\right)' = e^{-\int_\alpha^t g(s)ds}\left(F'(t)-F(t)g(t)\right)\le 0 \\ e^{-\int_\alpha^t g(s)ds}\cdot F(t)\Big|_{t=\alpha}=K \end{cases}$$

$\Rightarrow e^{-\int_\alpha^t g(s)ds}\cdot F(t)\le K$. 即 $F(t)\le K\cdot\exp(\int_\alpha^t g(s)ds)$ ✓

(2) 设 $y=\psi(t)$, $y=\phi(t)$ 为初值问题的两个解.

而 初值问题 $\Leftrightarrow y=y_0+\int_{t_0}^t f(s,y(s))ds$

$\therefore |\psi(t)-\phi(t)| = \left|\int_{t_0}^t (f(s,\psi(s))-f(s,\phi(s)))ds\right|$

$\le \int_{t_0}^t |f(s,\psi(s))-f(s,\phi(s))|ds$ （※：此处 $t\ge t_0$）.

$\overset{\text{Lipschitz条件}}{\le} \int_{t_0}^t L|\psi(s)-\phi(s)|ds$

$\xrightarrow[\substack{K=0,\ g(t)=L \\ f(t)=|\psi(t)-\phi(t)|}]{\text{Gronwall不等式}} f(t)=|\psi(t)-\phi(t)|\le 0\cdot\exp\int_{t_0}^t Lds=0$. $\forall t\in[t_0-a,t_0+a]$

$\therefore \psi(t)\equiv\phi(t)$. $\forall t\in[t_0-a,t_0+a]$ ✓

□.

Rmk： $t_0-a\le t\le t_0$ 时，证法同理，稍作修改：

$|\psi(t)-\phi(t)|=\left|\int_{t_0}^t (f(s,\psi(s))-f(s,\phi(s)))ds\right|$

$\overset{(\because t\le t_0)}{\le} \int_t^{t_0}|f(s,\psi(s))-f(s,\phi(s))|ds$

$\le \int_t^{t_0} L|\psi(s)-\phi(s)|ds$

$\xrightarrow[\substack{K=0,\ g(t)=L \\ f(t)=|\psi(t)-\phi(t)|}]{\text{Gronwall不等式}} f(t)=|\psi(t)-\phi(t)|\le 0\cdot\exp\int_t^{t_0} Lds=0$. $\forall t\in[t_0-a,t_0]$.

$\begin{pmatrix} t_0-a\le t\le t_0 \\ \Leftrightarrow \\ t\le t_0\le t+a \end{pmatrix}$