第十一次习题课讨论题解答

本次习题课主要讨论广义积分的计算及其收敛性判定。具体有三方面的内容：

一. 广义积分计算
二. 广义积分的收敛性判定
三. 三个重要的广义积分

两点说明：

（1）为了判断广义积分 $J := \int_I f(x)dx$ 的收敛性，我们常常将被积函数 $f(x)$ 作分解 $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$，使得广义积分 $J_1 := \int_I g(x)dx$ 和 $J_2 := \int_I f_2(x)dx$ 的收敛性比较容易判断。根据积分 J_1 和 J_2 的收敛性，我们可以确定积分 J 的收敛性。具体有如下结论：

（i） 如果积分 J_1 和 J_2 都收敛，则积分 $\int_I f(x)dx$ 也收敛。

（ii） 如果积分 J_1 和 J_2 一个收敛，一个发散，则积分 J 发散。

（iii） 如果两个积分都发散，则积分 J 收敛性尚不能确定。此时只能说分解式 $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ 不管用。

例：广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x} + \int_1^{+\infty} -\frac{\cos 2x}{2x} dx$。

（2）对于正常积分，积分 $\int_a^b f(x)dx$ 存在意味着 $\int_a^b |f(x)|dx$ 存在；反之不然。而对于广义积分情形则刚好相反：广义积分 $\int_I |f(x)|dx$ 存在（收敛）意味着 $\int_I f(x)dx$ 存在（收敛），反之不然。

一. 计算下列广义积分

说明：以下广义积分的收敛性不难证明，故略去。但同学们自己作为练习应该考虑。

题 1. $I = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$，其中 $b > a$。

解：对于 $x \in [a,b]$，我们有等式 $\frac{x-a}{b-a} + \frac{b-x}{b-a} = 1$，且 $\frac{x-a}{b-a} \geq 0$，$\frac{b-x}{b-a} \geq 0$。受此启发，

我们作变换 $\dfrac{x-a}{b-a}=\sin^2 t$，于是 $\dfrac{b-x}{b-a}=\cos^2 t$，且 $dx=2\sin t\cos t$。因此

$I=\int_0^{\pi/2}2dt=\pi$。解答完毕。

注：值得注意的是，这个积分的值与上下限 a 和 b 无关。

题 2. $\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{1+x^3}$

解：注意 $x\ge 1$ 时 $0\le\dfrac{1}{1+x^3}\le\dfrac{1}{1+x^2}$，由此可以判断所求无穷积分收敛。为计算积分，可以利用有理函数积分法：$1+x^3=(1+x)(1-x+x^2)$，……（较繁琐）。

另解：原式 $=\int_0^1+\int_1^{+\infty}$，在其中无穷积分中引入积分变量代换 $x=1/t$：

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}=\int_1^0\frac{1}{1+t^{-3}}(-\frac{dt}{t^2})=\int_0^1\frac{t}{t^3+1}dt=\int_0^1\frac{x}{1+x^3}dx,$$

原式化为两个普通积分的和，且都在 $[0,1]$ 区间上：

$$\text{原式}=\int_0^1\frac{1+x}{1+x^3}dx=\int_0^1\frac{dx}{1-x+x^2}=\int_0^1\frac{dx}{(x-1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2(x-1/2)}{\sqrt{3}}\Bigg|_0^1=\frac{2}{\sqrt{3}}(\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}-\arctan(-\frac{1}{\sqrt{3}}))=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\text{。}$$

解答完毕。

题 3. $I=\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)}$，　其中 $a>0$。

解：将积分分成两个部分 $I_1:=\int_0^1\dfrac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)}$ 和 $I_2:=\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)}$

对积分 I_1 作变换 $x=1/y$ 得 $I_1=\int_{+\infty}^1\dfrac{-y^a dy}{(y^2+1)(1+x^a)}=\int_1^{+\infty}\dfrac{x^a dx}{(1+x^2)(1+x^a)}$。

于是 $I=I_1+I_2=\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{1+x^2}=\dfrac{\pi}{4}$。

解答完毕。（注：积分值与参数值 a 无关）

题 4. $\int_0^{+\infty}\dfrac{1+x^2}{1+x^4}dx$（有理函数积分或者变量代换）

解法一：$\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx=\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{(1+\sqrt{2}x+x^2)(1-\sqrt{2}x+x^2)}dx$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(\frac{1}{1+\sqrt{2}x+x^2}+\frac{1}{1-\sqrt{2}x+x^2})dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(\arctan\frac{2x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\arctan\frac{2x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}})\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}。$$

解法二：令$t=x-\frac{1}{x}$（评：这变换有点怪异，很难想到。这样的特别技巧并不是很多，我们最好都能记住），则$dt=(1+\frac{1}{x^2})dx$，

且 $x\to 0^+$时$t\to -\infty$， $x\to +\infty$时$t\to +\infty$，

此外 $t^2=(x-\frac{1}{x})^2=x^2+\frac{1}{x^2}-2$， $\frac{x^2+1}{x^4+1}=\frac{1+1/x^2}{x^2+1/x^2}=\frac{dt/dx}{t^2+2}$

$\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{t^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$。解答完毕。

二、判断广义积分的收敛性

题 1. $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$

解：该积分既有奇点$x=0$，又是无穷区间上积分，是混合型的广义积分。需要分别处理。

在奇点$x=0$附近 $\frac{\ln(1+x)}{x^p}\sim\frac{1}{x^{p-1}}$，所以$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$仅当$p<2$时收敛。

以下考察无穷积分$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$的收敛性。

当$p>1$时，取$\varepsilon>0$充分小，使得$p-\varepsilon>1$，从而 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{p-\varepsilon}}dx$收敛，

而且$\lim\limits_{x\to+\infty}x^{p-\varepsilon}\frac{\ln(1+x)}{x^p}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^\varepsilon}=0$，这说明$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$收敛；

当$p\le 1$时， $\lim\limits_{x\to+\infty}x\frac{\ln(1+x)}{x^p}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^{1-p}\ln(1+x)=+\infty$，

由于 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx$ 发散，所以$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$发散。

综上，当且仅当$1<p<2$时， 积分$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$收敛。解答完毕。

题 2. $\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha}{1+x^\beta}dx$，其中$\beta>0$。

解：当$\alpha\ge 0$被积函数没有奇点，当$\alpha<0$时， $x=0$为奇点，

这时 $\dfrac{x^{\alpha}}{1+x^{\beta}} \sim \dfrac{1}{x^{-\alpha}}$ （$x \to 0^{+}$），可见当且仅当 $\alpha > -1$ 时，积分 $\int_{0}^{1} \dfrac{x^{\alpha}}{1+x^{\beta}} dx$ 收敛；

为考察无穷积分 $\int_{1}^{+\infty} \dfrac{x^{\alpha}}{1+x^{\beta}} dx$，注意无论 α 的符号如何，都有

$$\frac{x^{\alpha}}{1+x^{\beta}} \sim \frac{1}{x^{\beta-\alpha}} \quad (x \to +\infty)。$$

由此可见仅当 $\beta > 1+\alpha$ 时积分 $\int_{1}^{+\infty} \dfrac{x^{\alpha}}{1+x^{\beta}} dx$ 收敛。

综上，当且仅当 $\alpha > -1$，且 $\beta > 1+\alpha$ 时， 积分 $\int_{0}^{+\infty} \dfrac{x^{\alpha}}{1+x^{\beta}} dx$ 收敛。解答完毕。

题 3. $\int_{0}^{+\infty} \dfrac{\sin^{2} x}{x^{p}} dx$ （第六章复习题题 2（1），p. 206）

解：先考积分在奇点 $x=0$ 处的收敛性。我们将被积函数写作

$$\frac{\sin^{2} x}{x^{p}} = \frac{1}{x^{p-2}} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{2}。$$

由此可见，积分在点 $x=0$ 处的收敛，当且仅当 $p-2<1$，即 $p<3$。

我们再来考虑积分在无穷远处的收敛性。我们将被积函数写作

$$\frac{\sin^{2} x}{x^{p}} = \frac{1}{2x^{p}} - \frac{\cos 2x}{2x^{p}}。$$

显然积分 $\int_{1}^{+\infty} \dfrac{1}{2x^{p}} dx$ 收敛，当且仅当 $p>1$

而积分 $\int_{1}^{+\infty} \dfrac{\cos 2x}{2x^{p}} dx$ 收敛，当且仅当 $p>0$。

由此可知积分 $\int_{1}^{+\infty} \dfrac{\sin^{2} x}{x^{p}} dx$ 收敛，当且仅当 $p>1$。

综上所述，积分 $\int_{0}^{+\infty} \dfrac{\sin^{2} x}{x^{p}} dx$ 收敛，当且仅当 $1<p<3$。解答完毕。

题 4. $\int_{1}^{+\infty} x\cos(x^{3}) dx$。（习题 6.2 题 9（2），p. 206）

解：对积分作变量替换 $y=x^3$，我们得到 $\int_1^A x\cos(x^3)dx=\frac{1}{3}\int_1^{A^3}\frac{\cos y}{y^{1/3}}dy$。

由此可见，积分为条件收敛。解答完毕。

注：对于无穷区间型的广义积分而言，积分收敛，并不意味着被积函数有界，当然更遑论被积函数有趋向于零的极限。

题 5. $\int_0^{+\infty}\sin x\sin\frac{1}{x}dx$（第六章复习题题 3，p. 206）

解：注意被积函数没有有限奇点，而在 $x\to+\infty$ 时 $\sin\frac{1}{x}$ 单调减趋于 0。根据 Dirichlet 判别法可知积分收敛。我们进一步积分的绝对收敛性。

注意当 $x\to+\infty$ 时，$\sin\frac{1}{x}\sim\frac{1}{x}$。从而存在 $A>1$，使得 $x\ge A$ 时 $\sin\frac{1}{x}\ge\frac{1}{2x}$。于是

$$\left|\sin x\sin\frac{1}{x}\right|\ge\left|\frac{\sin x}{2x}\right|\ge\frac{\sin^2 x}{2x}=\frac{1}{2x}-\frac{\cos 2x}{2x}。$$

由此可知积分 $\int_0^{+\infty}|\sin x\sin\frac{1}{x}|dx$ 发散。综上可知原广义积分条件收敛。解答完毕。

题 6. 讨论如下广义积分的绝对收敛性和条件收敛性, 其中 $p>0$。

(i) $I_1=\int_2^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}dx$

(ii) $I_2=\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}dx$

(iii) $I_3=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}dx$

解：(i) 由于被积函数为非负的，因此它收敛即为绝对收敛。

当 $p>1/2$ 时， 根据不等式 $\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}\le\frac{1}{x^p(x^p-1)}$，可知积分 I_1 收敛。

当 $0<p\le 1/2$ 时，根据不等式

$$\frac{1}{2x^p(x^p+1)}-\frac{\cos 2x}{2x^p(x^p+1)}=\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+1)}\le\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}$$

可知积分 I_1 发散。

（ii）我们将积分 I_2 的被积函数作如下表示

$\dfrac{\sin x}{x^{\mathrm{p}}+\sin x}=\dfrac{\sin x}{x^p}-\dfrac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}$，因为右边的两个函数的收敛性比较容易判断。

不难看出广义积分 $\int_2^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x^{\mathrm{p}}}dx$ 对任意 $p>0$ 均收敛。 再根据结论（i），我们可以断言，积分 I_2 收敛，当且仅当 $\mathrm{p}>1/2$ 时。

再来考虑绝对收敛性。当 $0<p\le 1$ 时，根据不等式

$$\frac{|\sin x|}{x^{\mathrm{p}}+\sin x}\ge\frac{\sin^2 x}{x^p+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^p+1}-\frac{\cos 2x}{x^p+1}\right),$$

我们可以断言 $\int_2^{+\infty}\dfrac{|\sin x|}{x^p+\sin x}dx$ 发散。

当 $p>1$ 时，根据不等式 $\dfrac{|\sin x|}{x^{\mathrm{p}}+\sin x}\le\dfrac{1}{x^p-1}$， 我们可以断言 $\int_2^{+\infty}\dfrac{|\sin x|}{x^p+\sin x}dx$ 收敛。于是积分 I_2 条件收敛，当且仅当 $1/2<p\le 1$；积分 I_2 绝对收敛，当且仅当 $p>1$。

（iii）注意对于任意 $p>0$，

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x^{\mathrm{p}}+\sin x}=\begin{cases}1, & \mathrm{p}>1\\ 1/2, & \mathrm{p}=1\\ 0, & 0<\mathrm{p}<1\end{cases}$$

这表明点 $x=0$ 并不是被积函数的奇点。 因此积分 I_3 与积分 I_2 的收敛性相同，即积分 I_3 条件收敛，当且仅当 $1/2<p\le 1$；积分 I_3 绝对收敛，当且仅当 $p>1$。解答完毕。

三．三个重要的广义积分

（1）计算 Euler 积分 $I=\int_0^{\pi/2}\ln\cos x\ dx$。

（2）计算 Froullani（伏如兰尼）广义积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{f(ax)-f(bx)}{x}dx$

（3）证明概率积分（也称 Euler-Poisson 积分）$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\ dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$。

（证明有点长，已超出要求，可略去。但证明不超出我们所学，也不难懂。）

（1）. (课本第六章总复习题 9，p.207) 计算 Euler 积分 $I = \int_0^{\pi/2} \ln\cos x\ dx$。

提示：用配对法求积分值。考虑另一个积分 $J = \int_0^{\pi/2} \ln\sin x\ dx$。

解：易见 $x = \pi/2$ 是 Euler 积分的瑕点。这里我们略去证明收敛性的证明（不难），只专注如何求出积分 I 的值。我们尝试用配对法来求积分值。考虑相关积分 $J = \int_0^{\pi/2} \ln\sin x\ dx$。不难证明这两个积分相等，即 $I = \mathrm{J}$。于是我们有

$$2I = \int_0^{\pi/2} \ln\cos x\, dx + \int_0^{\pi/2} \ln\sin x\, dx = \int_0^{\pi/2} \ln\cos x \sin x\, dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2 + \int_0^{\pi/2} \ln\sin 2x dx。$$

对于积分 $\int_0^{\pi/2} \ln\sin 2x\ dx$，作变量替换得 $\int_0^{\pi/2} \ln\sin 2x\ dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln\sin y\, dy$。

显然 $\int_0^{\pi} \ln\sin x\, dx = 2\int_0^{\pi/2} \ln\sin x\, dx$。由此得 $2I = -\frac{\pi}{2}\ln 2 + \int_0^{\pi/2} \ln\sin 2x\, dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2 + I$。

于是 $I = -\frac{\pi}{2}\ln 2$。解答完毕。

注：可利用上述 Euler 积分计算以下积分的值

i) $\int_0^{\pi/2} x\tan x\, dx$

ii) $\int_0^{\pi/2} x\ln\sin x\ dx$

iii) $\int_0^{\pi/2} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 dx$

iv) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\ln\sin x\, dx$

（2） 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续且极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，记作 $f(+\infty)$。证明 Froullani 广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \big(f(0) - f(+\infty)\big)\ln\frac{b}{a}$，其中 a，b 为两个正数。

提示：将积分分成两部分之和$I = \mathrm{I}_1 + I_2$，这两个部分分别为从0到1和1到$+\infty$的积分。

对于积分I_1，考虑从ε到1的积分，将被积函数拆开，并作适当的变量替换。对于积分I_2可作类似处理。

证明：我们将积分I分为两个部分$I = \mathrm{I}_1 + I_2$，

$$I_1 = \int_0^1 \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx，\ I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx。$$

考虑I_1。对于任意$\varepsilon \in (0,1)$，我们有

$$\int_\varepsilon^1 \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int_\varepsilon^1 \frac{f(ax)}{x} dx - \int_\varepsilon^1 \frac{f(bx)}{x} dx = \int_{a\varepsilon}^{a} \frac{f(u)}{u} du - \int_{b\varepsilon}^{b} \frac{f(u)}{u} du =$$

$$= \int_{a\varepsilon}^{\mathrm{b}\varepsilon} \frac{f(u)}{u} du - \int_a^b \frac{f(u)}{u} du。$$

而$\displaystyle\int_{a\varepsilon}^{\mathrm{b}\varepsilon} \frac{f(u)}{u} du = \mathrm{f}(\xi_\varepsilon) \int_a^b \frac{1}{u} du = f(\xi_\varepsilon) \ln\frac{b}{a} \to f(0)\ln\frac{b}{a}$，$\varepsilon \to 0^+$。

因此

$$I_1 = \int_0^1 \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0)\ln\frac{b}{a} - \int_a^b \frac{f(u)}{u} du。$$

考虑I_2。对于任意$\mathrm{A} > 1$，我们类似有

$$\int_1^{\mathrm{A}} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int_{\mathrm{a}}^{b} \frac{f(u)}{u} dx - \int_{aA}^{bA} \frac{f(u)}{u} du。$$

而$\displaystyle\int_{aA}^{bA} \frac{f(u)}{u} du = f(\eta_A) \int_{aA}^{bA} \frac{du}{u} = f(\eta_A) \ln\frac{b}{a} \to f(+\infty)\ln\frac{b}{a}$，$A \to +\infty$。故

$$I_2 = \lim_{A \to +\infty} \int_1^A \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int_a^b \frac{f(u)}{u} du - f(+\infty)\ln\frac{b}{a}。$$

因此原积分为

$I = \mathrm{I}_1 + I_2 = \left(\mathrm{f}(0) - f(+\infty)\right)\ln\dfrac{b}{a}$。证毕。

注 1：我们可以直接对积分$\displaystyle\int_{\mathrm{r}}^{R} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx$作分拆，然后分别做变量替换。然后令$R \to +\infty$和$r \to 0^+$，得到相同的结论。这样处理更简洁。

注 2：利用上述 Froullani 积分，同学们可以计算如下积分，其中a，b为两个正数。

i）$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan ax-\arctan bx}{x}dx$

ii）$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}dx$

（3） 证明概率积分（也称 Euler-Poisson 积分）$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$。

注 1：根据概率积分公式，我们立刻得到$\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$。因为

$\Gamma(1/2)=\int_0^{+\infty}x^{-1/2}e^{-x}dx=2\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$。

注 2：下个学期我们将学习多重积分。届时我们将用更简单的方法证明概率积分公式。

提示： 回忆函数e^t的定义：$e^t:=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{t}{n}\right)^n$。令$t=-x^2$，则 $e^{-x^2}=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n$。

因此我们有理由期待$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\,dx=\int_0^{+\infty}\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n}\right)dx=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx$。 （注：第二个等式的成立是需要证明的）。由于积分$\int_0^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx$不方便处理，所以我们考虑它的截断积分$\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx$， 这里积分上限取为$\sqrt{n}$， 理由是这样的截断积分有一个较整齐的计算结果。于是我们有理由期待$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\,dx=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx$。（这不是证明，而是希望）。

按以下步骤完成计算。

Step1. 记$I_n:=\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx$。证明$I_n=\sqrt{n}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$

Step2. 记$J_n:=\int_0^{\pi/2}\sin^n x dx$，并回忆公式$J_{2n}=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}$， $J_{2n+1}=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$，

证明 (i) $\lim_{n\to+\infty}\frac{J_{2n+2}}{J_{2n}}=1$; (ii) $\lim_{n\to+\infty}\frac{J_{2n+2}}{J_{2n+1}}=1$; (iii) $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\right]^2=\frac{\pi}{2}$

(注：公式(iii)称作华莱士公式即 Wallis 公式)

Step3. 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$。

Step4. 证明 $\left(1-\dfrac{t}{a}\right)^a < e^{-t}$，$\forall a>0$，$\forall t\in[0,a]$。

Step5. 证明 $e^{-t} \le \left(1-\dfrac{t}{a}\right)^a + \dfrac{t^2}{a}e^{-t}$，$\forall a\ge 1$，$\forall t\in[0,a]$。

Step6. 由 Step4,5 可知 $0\le e^{-x^2} - \left(1-\dfrac{x^2}{n}\right)^n \le \dfrac{x^4}{n}e^{-x^2}$，$\forall n\ge 1$，$\forall x\in[0,\sqrt{n}]$。由此证明

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\sqrt{n}}\left[e^{-x^2}-\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n\right]dx = 0.$$

Step7. 证明 $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$。

解： 定义 $I_n := \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx$。

Step 1. 作变量代换 $x=\sqrt{n}\sin t$ 得

$$I_n = \sqrt{n}\int_0^{\pi/2}\cos^{2n+1} t dt = \sqrt{n}\,\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}。\qquad (1)$$

Step2. 记 $J_n := \displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^n x dx$. 注意 J_n 还可以写作 $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^n x dx$。回忆关于积分 J_n 公式

$$J_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}，\quad J_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}。\qquad (2)$$

由此得 $\dfrac{J_{2n+2}}{J_{2n}} = \dfrac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\cdot\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \dfrac{2n+1}{2n+2} \to 1$，$n\to+\infty$。即式(i)成立。

另一方面容易看出 $J_{2n+2} < J_{2n+1} < J_{2n}$，$\forall n\ge 1$。 因此 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{J_{2n+2}}{J_{2n+1}} = 1$。即式(ii)成立。

将公式（2）代入式(ii)，我们就得到 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2n+1}\left[\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\right]^2 = \dfrac{\pi}{2}$，即式(iii)成立。

Step3. 根据 Wallis 公式，我们立刻得到 $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$。

Step4. 证明 $\left(1-\frac{t}{a}\right)^a \le e^{-t}$，$\forall a>0$，$\forall t\in[0,a]$。

证：当 $\mathrm{t}=a$ 时，不等式显然成立。考虑情形 $t\in[0,a)$。

易见所要证的不等式成立

当且仅当 $\ln\left(1-\frac{\mathrm{t}}{a}\right)\le -\frac{t}{a}$，$\forall a>0$，$\forall t\in[0,a)$。

根据熟知的不等式 $\ln(1+x)\le x$，$\forall x>-1$，可知上述不等式成立。

Step5. 证明 $e^{-t}\le\left(1-\frac{t}{a}\right)^a+\frac{t^2}{a}e^{-t}$，$\forall a\ge 1$，$\forall t\in[0,a]$。

证明: 显然要证的不等式成立，

当且仅当 $1\le \mathrm{e}^t\left(1-\frac{t}{a}\right)^a+\frac{t^2}{a}$，$\forall a\ge 1$，$\forall t\in[0,a]$。

考虑函数 $f(t):=\mathrm{e}^t\left(1-\frac{t}{a}\right)^a+\frac{t^2}{a}$。要证 $f(t)\ge 1$。$\forall t\in[0,a]$。

显然 $f(0)=1$，$f(a)=a\ge 1$。我们来考虑 $f(t)$ 在 $[0,a]$ 上的最小值。

设 $f(t)$ 在点 $\xi\in[0,a]$ 处取得最小值。

若 $\xi=0$ 或 $\xi=a$，则 $f(t)\ge f(\xi)\ge 1$，$\forall t\in[0,a]$。结论得证。

设 $\xi\in(0,a)$，则 $f'(\xi)=0$。对 $f(t)$ 求导得

$$f'(t)=\mathrm{e}^t\left(1-\frac{t}{a}\right)^a+\mathrm{a}e^t\left(1-\frac{t}{a}\right)^{a-1}\left(\frac{-1}{a}\right)+\frac{2t}{a}=\frac{2t}{a}-\frac{te^t}{a}\left(1-\frac{t}{a}\right)^{a-1}。$$

由此可知 $e^{\xi}\left(1-\frac{\xi}{a}\right)^{a-1}=2$。于是

$$f(\xi)=2-2\xi/\mathrm{a}+\xi^2/a=1+[(\xi-1)^2+a-1]/a\ge 1。$$

因此 $f(t)\ge f(\xi)\ge 1$，$\forall t\in[0,a]$。结论得证。

Step6. 在 Step4 和 5 的结论中，取 $a=\sqrt{n}$，$t=x^2$，我们就得到

$$0\le e^{-x^2}-\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n\le\frac{x^4}{n}e^{-x^2}，\forall n\ge 1，\forall x\in[0,\sqrt{n}]。$$

容易证明广义积分 $\int_0^{+\infty} x^4 e^{-x^2} dx$ 收敛。 由此证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left[e^{-x^2} - \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n \right] dx = 0$.

Step7. 根据 Step6 中的不等式，我们有

$$0 = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left[e^{-x^2} - \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n \right] dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx - \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx - \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$ 。

概率积分公式得证。证毕。