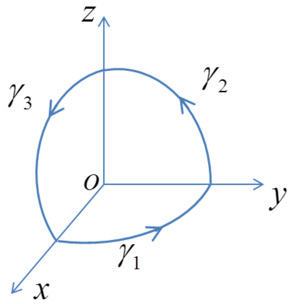
第 10 次习题课 第二型曲线积分、Green 公式

1. L 是球面 $x^2+y^2+z^2=1,(x,y,z\ge 0)$ 与三个坐标平面的交线（从点(1, 1, 1)看过去, L 取逆时针方向），计算 $I=\int_L (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$ 。



解:将 L 依所在平面分为 3 个弧段 $\gamma_i, i=1,2,3,$

每个 γ_i 都是圆心在原点半径为 1 的圆周的 1/4.

$\gamma_1: x=\cos t, y=\sin t, z=0, t\in[0,\frac{\pi}{2}]$, 参数增加与曲线正向一致, 因此

$$\int_{\gamma_1}(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 t+\cos^3 t)dt=-\frac{4}{3}.$$

同理，$\int_{\gamma_i}(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz=-\frac{4}{3}, i=2,3.$

于是 $I=\int_L (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz=-3.$

2. (1) 设$P(x,y),Q(x,y)$是从A到B的光滑弧段 AB 上的连续函数, AB 的长度为l,则

$$\left|\int_{\mathrm{AB}} Pdx+Qdy\right|\le lM,\quad 其中M=\max_{(x,y)\in\mathrm{AB}}\sqrt{P^2(x,y)+Q^2(x,y)}.$$

(2) 设$L: x^2+y^2=R^2$,逆时针方向,$I_R=\int_L \frac{ydx-xdy}{(x^2+xy+y^2)^2}$,则 $\lim\limits_{R\to+\infty} I_R=0$.

证明: (1) 记$\vec{v}=(P,Q)$, 记 AB 的正单位切向量为$\vec{\tau}$, 则$|\vec{v}\cdot\vec{\tau}|\le\|\vec{v}\|=\sqrt{P^2+Q^2}$,

$$\left|\int_{\mathrm{AB}} Pdx+Qdy\right|=\left|\int_{\mathrm{AB}}\vec{v}\cdot\vec{\tau}dl\right|\le\int_{\mathrm{AB}}|\vec{v}\cdot\vec{\tau}|dl\le\int_{\mathrm{AB}}Mdl=Ml.$$

(2) 记$P=\frac{y}{(x^2+xy+y^2)^2}, Q=\frac{-x}{(x^2+xy+y^2)^2}$, 则

$$M=\max_{x^2+y^2\le R^2}\sqrt{P^2(x,y)+Q^2(x,y)}=\max_{x^2+y^2\le R^2}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+xy+y^2)^2}=\frac{4}{R^3},$$

由(1)中结论得$|I_R|\le\frac{4}{R^3}\cdot 2\pi R\to 0, R\to+\infty$时.

3. 计算$\oint_L \dfrac{(x+y)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$，其中$L$是

(1) $(x-2)^2+4(y-1)^2=1$，顺时针方向.

(2) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$，顺时针方向.

解： 令$P=\dfrac{x-y}{x^2+y^2},Q=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$，则$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$。

(1) $P(x,y),Q(x,y)$在$(x-2)^2+4(y-1)^2\le 1$内连续可微，由 Green 公式得

$$\oint_L \frac{(x+y)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=-\iint\limits_{(x-2)^2+4(y-1)^2\le 1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0\,.$$

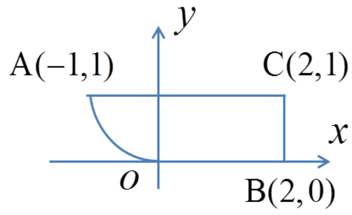
(2) 以$M(0,0)$为中心、充分小的正数δ为半径作圆周$L_\delta: x^2+y^2=\delta^2$，逆时针方向．使得该圆周被包含在$L$之内．记以$L$和$L_\delta$为边界的区域为$D$，由 Green 公式得

$$\oint_{L^-\cup L_\delta^-}\frac{(x+y)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=0.$$

于是
$$\oint_L \frac{(x+y)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=-\oint_{L_\delta}\frac{(x+y)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

$$=-\int_0^{2\pi}\frac{\delta(\cos\theta+\sin\theta)\delta\cos\theta+\delta(\cos\theta-\sin\theta)\delta(-\sin\theta)}{\delta^2}\mathrm{d}\theta=-2\pi\,.$$

4. 计算$I=\int_L(12xy+e^y)dx-(\cos y-xe^y)dy$, L 是从点 $\mathrm{A}(-1,1)$ 沿曲线 $y=x^2$ 到达原点，再沿直线$y=0$到达点$\mathrm{B}(2,0)$的有向曲线.



解： 取点$\mathrm{C}(2,1)$, 添加直线段$\overrightarrow{\mathrm{BC}},\overrightarrow{\mathrm{CA}}$，记$L$与$\overrightarrow{\mathrm{BC}},\overrightarrow{\mathrm{CA}}$所围区域为$\mathrm{D}$, 记$P=12xy+e^y,Q=xe^y-\cos y,$

由 Green 公式得

$$\left(\int_L+\int_{\overline{BC}}+\int_{\overline{CA}}\right)(12xy+e^y)dx-(\cos y-xe^y)dy$$

$$=\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}(xe^y-\cos y)-\frac{\partial}{\partial y}(12xy+e^y)\right]dxdy=-\iint_D 12xdxdy$$

$$=-12\int_0^1 ydy\int_{-\sqrt{y}}^2 xdx=-12\int_0^1\left(2-\frac{y}{2}\right)dy=-21.$$

而 $$\int_{\overline{BC}} Pdx+Qdy=\int_{\overline{BC}}(xe^y-\cos y)dy=\int_0^1(2e^y-\cos y)dy=2e-2-\sin 1,$$

$$\int_{\overline{BC}} Pdx+Qdy=\int_{\overline{CA}}(12xy+e^y)dx=\int_2^{-1}(12xy+e^y)dx=-3e-18,$$

所以 $I=-21-(2e-2-\sin 1)-(-3e-18)=\sin 1+e-1.$

5. 设 $f\in C^1[1,4]$, $f(1)=f(4)$, 闭曲线 L 是曲线 $y=x, y=4x, xy=1, xy=4$ 所围区域 D 的正向边界（逆时针方向），计算 $\int_L \frac{f(xy)}{y}dy$。

解：由 Green 公式得 $\int_L \frac{f(xy)}{y}dy=\iint_D f'(xy)dxdy$。

令 $u=\frac{y}{x}, v=xy$, 则 $(u,v)\in[1,4]\times[1,4]$, $\det\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=-2u$. 又 $f(1)=f(4)$, 于是

$$\int_L \frac{f(xy)}{y}dy=\iint_E \frac{1}{2u}f'(v)dudv=\int_1^4\frac{1}{2u}du\int_1^4 f'(v)dv=(f(4)-f(1))\int_1^4\frac{1}{2u}du=0.$$

6. 设 $D_t=\{(x,y)\in R^2 \mid x^2+y^2\le t^2, t>0\}$， $f(x,y)$ 在 D_t 上连续，在 D_t 内存在连续偏导数．$f(0,0)=1$．若 $f(x,y)$ 在 D_t 上满足方程 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{1}{2}f(x,y)$．$\vec{n}$ 为有向曲线 ∂D_t 的外单位法向量，求极限 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{1-\cos t}\oint_{\partial D_t}\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\mathrm{d}l$．

解：$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}=\nabla f\cdot\vec{n}$．利用格林公式第二种形式得到

$$\oint_{\partial D_t}\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\mathrm{d}l=\oint_{\partial D_t}\nabla f\cdot\vec{n}\mathrm{d}l=\oint_{\partial D_t}(f'_x\vec{i}+f'_y\vec{j})\cdot\vec{n}\mathrm{d}l=\iint_{D_t}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\iint_{D_t}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\pi t^2 f(x_t,y_t),$$

其中 $x_t^2+y_t^2<t^2$(积分中值定理). 于是

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{1-\cos t}\oint_{\partial D_t}\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\mathrm{d}l=\frac{1}{2}\pi\lim_{t\to 0}\frac{t^2 f(x_t,y_t)}{1-\cos t}$$

$$=\frac{1}{2}\pi\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{1-\cos t}\lim_{t\to 0}f(x_t,y_t)=\pi f(0,0)=\pi.$$

7. 设C为正向闭曲线：$|x|+|y|=2$, $\oint_C \frac{axdy-bydx}{|x|+|y|}=$[A]

（A） $4(a+b)$； （B） $8(a+b)$； （C） $4(a-b)$； （D） $8(a-b)$.

解：由$|x|+|y|=2$得到

$$\oint_C \frac{axdy-bydx}{|x|+|y|}=\frac{1}{2}\oint_C axdy-bydx=\frac{1}{2}\iint_{D_C}(a+b)dxdy=\frac{1}{2}(2\sqrt{2})^2(a+b)=4(a+b).$$

8. 设在上半平面$D=\{(x,y)|y>0\}$内，函数$f(x,y)$具有连续偏导数,且对任意的$t>0$都有$f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$，证明：对D内的任意分段光滑的有向简单闭曲线L,都有$\oint_L yf(x,y)dx-xf(x,y)dy=0$。

解：由$f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$两边对 t 求导得：

$$xf_x'(tx,ty)+yf_y'(tx,ty)=-2tf(x,y).$$

令$t=1$, 则
$$xf_x'(x,y)+yf_y'(x,y)=-2f(x,y).$$

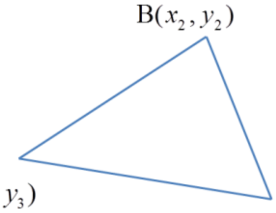
记 $P(x,y)=yf(x,y), Q(x,y)=-xf(x,y)$,则

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-f(x,y)-xf_x'(x,y)-[f(x,y)+yf_y'(x,y)]$$

$$=-2f(x,y)-[xf_x'(x,y)+yf_y'(x,y)]=0.$$

P,Q在L上及L内部连续可微, 由 Green 公式得 $\oint_L yf(x,y)dx-xf(x,y)dy=0$。

9. D是以$\mathrm{A}(x_1,y_1),\mathrm{B}(x_2,y_2),\mathrm{C}(x_3,y_3)$为顶点的三角形区域, 由$\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{BC}},\overrightarrow{\mathrm{CA}}$首尾连接而成的闭曲线为逆时针方向．求$I=\iint_D x^2dxdy.$



解： 令$P=0, Q=\frac{1}{3}x^3$, 由 Green 公式得

$$I=\iint_D x^2dxdy=\int_{\partial D}\frac{1}{3}x^3dy$$
$$=\frac{1}{3}\int_{\overline{AB}}x^3dy+\frac{1}{3}\int_{\overline{BC}}x^3dy+\frac{1}{3}\int_{\overline{CA}}x^3dy$$

$$\int_{\overline{AB}} x^3 dy = \int_{x_1}^{x_2} x^3 \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} dx = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x^4}{4}\bigg|_{x_1}^{x_2} = \frac{(y_2 - y_1)(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2)}{4}.$$

同理，$\int_{\overline{BC}} x^3 dy = \frac{(y_3 - y_2)(x_2 + x_3)(x_2^2 + x_3^2)}{4}$,

$$\int_{\overline{CA}} x^3 dy = \frac{(y_2 - y_1)(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2)}{4}.$$

于是

$$I = \frac{1}{12}\left[(y_2 - y_1)(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2) + (y_3 - y_2)(x_2 + x_3)(x_2^2 + x_3^2) + (y_2 - y_1)(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2)\right].$$

10．设 $f(x)$ 是正值连续函数，D 为圆心在原点的单位圆，∂D 为 D 的正向边界，**证明：**

（1）$\oint_{\partial D} xf(y)dy - \frac{y}{f(x)}dx = \oint_{\partial D} -yf(x)dx + \frac{x}{f(y)}dy;$

（2）$\oint_{\partial D} xf(y)dy - \frac{y}{f(x)}dx \geq 2\pi.$

证明：(1) 左 $= \iint_D \left[f(y) + \frac{1}{f(x)} \right] dxdy = \iint_D \left[f(x) + \frac{1}{f(y)} \right] dxdy$ 右　　**对称性**

（2）$\oint_{\partial D} xf(y)dy - \frac{y}{f(x)}dx = \frac{1}{2}\iint_D \left[f(y) + \frac{1}{f(x)} + f(x) + \frac{1}{f(y)} \right] dxdy$

$$= \iint_D \left[f(x) + \frac{1}{f(x)} \right] dxdy \geq \iint_D 2dxdy = 2\pi.$$

11.　$f(x,y) \in C^2(\mathbb{R}),\ f''_{xx}(x,y) + f''_{yy}(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$.证明: $\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} (xf'_x + yf'_y)dxdy = \frac{\pi}{2e}$.

证明： $\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} (xf'_x + yf'_y)dxdy = \int_0^1 rdr\int_0^{2\pi} (r\cos\theta f'_x + r\sin\theta f'_y)d\theta$

$$= \int_0^1 r\left[\oint_{x^2+y^2=r^2} \frac{xf'_x + yf'_y}{r} dl \right] dr = \int_0^1 r\left[\oint_{x^2+y^2=r^2} \mathrm{grad} f \cdot \vec{n}\, dl \right] dr$$

$$= \int_0^1 r\left[\iint_{x^2+y^2\leq r^2} \left(f''_{xx}(x,y) + f''_{yy}(x,y) \right) dxdy \right] dr$$

$$= \int_0^1 r\left[\iint_{x^2+y^2\leq r^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy \right] dr = \int_0^1 \pi r(1 - e^{-r^2})dr = \frac{\pi}{2e}. \square$$