2. (a) 对 gf 的值域中每个 x，存在唯一的 y 使 $g(y)=x$.

由g是单射

又由f是单射，对 B 中每个 y，存在唯一的 $z\in A$ 使 $f(z)=y$.

$\therefore$ 对 gf 的值域中每个 x，存在唯一的 $z\in A$ 使 $g(f(z))=x$，即 $gf(z)=x$.

故 gf 是单射.

(b) $\forall x\in C$，$\exists y\in B$ 使 $g(y)=x$ （由g是满射）.

$\forall y\in B$，$\exists z\in A$ 使 $f(z)=y$ （由f是满射）

$\therefore \forall x\in C$，$\exists z\in A$ 使 $g(f(z))=x$，即 $gf(z)=x$.

故 gf 是满射.

(c) f, g 都是双射 $\Rightarrow$ f, g 都是单射 $\xRightarrow{\text{由(a)}}$ gf 是单射

f, g 都是双射 $\Rightarrow$ f, g 都是满射 $\xRightarrow{\text{由(b)}}$ gf 是满射.

gf 既是单射又是满射 $\Rightarrow$ gf 是双射.

10. 自反性：$\forall (a,b)\in N^2$，有 $a+b=b+a$，故 $(a,b)\sim(a,b)$.

对称性：$\forall (a,b),(c,d)\in N^2$，$a+d=b+c \Leftrightarrow c+b=d+a$，故 $(a,b)\sim(c,d) \Leftrightarrow (c,d)\sim(a,b)$.

传递性：$\forall (a,b),(c,d),(e,f)\in N^2$，若 $(a,b)\sim(c,d)$ 且 $(c,d)\sim(e,f)$，

则 $\begin{cases} a+d=b+c \\ c+f=d+e \end{cases}$，两式相加得 $a+f+c+d=b+e+c+d$，$a+f=b+e$.

$\therefore (a,b)\sim(e,f)$，传递性成立.

12. 由表格知运算·可交换，故只需考虑运算数按e、a、b、c顺序排列的情况。

若三个运算数中有重复，形如 $x\cdot x\cdot y$ 或 $x\cdot y\cdot y$ 则

$$(x\cdot x)\cdot y = e\cdot y = y$$

$$x\cdot(x\cdot y)=\begin{cases} x\cdot z = y & (x\neq e,\ y\neq e) \\ x\cdot y = y & (x=e,\ y\neq e) \\ x\cdot x = e = y & (y=e) \end{cases}$$

$$(x\cdot y)\cdot y = \begin{cases} x\cdot y = x & (y=e,\ x\neq e) \\ z\cdot y = x & (y\neq e,\ x\neq e) \\ y\cdot y = e = x & (x=e) \end{cases}$$

综上，它们均满足结合律。

若三个运算数不重复，经检验，

$(e\cdot a)\cdot b = e\cdot(a\cdot b) = c$　　$(e\cdot a)\cdot c = e\cdot(a\cdot c) = b$

$(e\cdot b)\cdot c = e\cdot(b\cdot c) = a$　　$(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c) = e$。

∴ 运算·满足结合律。

∵ $e\cdot a = a$，$e\cdot b = b$，$e\cdot c = c$，$e\cdot e = e$　∴ e为左单位元。

∵ $a\cdot e = a$，$b\cdot e = b$，$c\cdot e = c$，$e\cdot e = e$　∴ e为右单位元。

∴ e为单位元。

每个元均可逆，且逆元均为它本身。

15. 作 $S\to P$ 的映射 f，$f(a)=3$，$f(b)=2$，$f(c)=1$。

则 $\forall a,b\in S$ 满足 $f(a*b) = f(a)\cdot f(b)$。∴ $(S,*)$ 与 $(P,\cdot)$ 同构。

验证：

$f(a*a) = f(a) = 3$，　$f(a)\cdot f(a) = 3\cdot 3 = 3$

$f(a*b) = f(b) = 2$　　$f(a)\cdot f(b) = 3\cdot 2 = 2$

$f(a*c) = f(c) = 1$　　$f(a)\cdot f(c) = 3\cdot 1 = 1$

$f(b*a) = f(b) = 2$　　$f(b)\cdot f(a) = 2\cdot 3 = 2$

$f(b*b) = f(b) = 2$　　$f(b)\cdot f(b) = 2\cdot 2 = 2$

$f(b*c) = f(c) = 1$　　$f(b)\cdot f(c) = 2\cdot 1 = 1$

$f(c*a) = f(c) = 1$　　$f(c)\cdot f(a) = 1\cdot 3 = 1$

$f(c*b) = f(b) = 2$　　$f(c)\cdot f(b) = 1\cdot 2 = 2$

$f(c*c) = f(c) = 1$　　$f(c)\cdot f(c) = 1\cdot 1 = 1$。

2. $((a_1,a_2)\cdot(b_1,b_2))\cdot(c_1,c_2) = (a_1\cdot b_1, a_2\cdot b_2)\cdot(c_1\cdot c_2) = ((a_1\cdot b_1)\cdot c_1, (a_2\cdot b_2)\cdot c_2)$

$(a_1\cdot a_2)\cdot((b_1,b_2)\cdot(c_1,c_2)) = (a_1\cdot a_2)\cdot(b_1\cdot c_1, b_2\cdot c_2) = (a_1\cdot(b_1\cdot c_1), a_2(b_2\cdot c_2))$.

$\because (S,\cdot)$ 是半群. $\therefore \begin{cases}(a_1\cdot b_1)\cdot c_1 = a_1\cdot(b_1\cdot c_1)\\(a_2\cdot b_2)\cdot c_2 = a_2\cdot(b_2\cdot c_2)\end{cases}$ $\therefore$ 以上两式相等 结合法·满足结合律

$(S\times S,\cdot)$ 是半群.

设 S 的单位元为 e. 则对于 $S\times S$ 中的 (e,e), 有

$(e,e)\cdot(b_1,b_2) = (e\cdot b_1, e\cdot b_2) = (b_1,b_2)$

$(a_1,a_2)\cdot(e,e) = (a_1\cdot e, a_2\cdot e) = (a_1,a_2)$

$\therefore (e,e)$ 为 $S\times S$ 的单位元.

乘法运算有结合律, 且对 Z 封闭. $\therefore (Z,\times)$ 是半群.

4. 又 Z 中有单位元 1 $\therefore \forall x\in Z$ 有 $1\times x = x$, $x\times 1 = x$.

$\therefore (Z,\times)$ 是幺群.

$\{0\}\in Z$, 且 $\{0\}$ 对乘法封闭. 故 $(\{0\},\times)$ 是子半群.

~~设 $e=\{0\}$ $\forall x\in\{0\}$. 满足 $e\times x = x$, $x\times e = x$.~~ $(Z,\times)$ 只有一个单位元 1.

~~$\therefore$ 自是单位元. $\therefore(\{0\},\times)$ 是子幺群.~~ 且 $1\notin\{0\}$. $\therefore (\{0\},\times)$ 不是 $(Z,\times)$ 的子幺群.