第十四次习题课讨论题参考解答　幂级数

1. 求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$的收敛域.

解：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}$的收敛半径$r=1$，在$t=1$发散，在$t=-1$收敛. 因此$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}$的收敛域为$t\in[-1,1)$. 求解不等式$-1\le\frac{x}{2x+1}<1$, 得到级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^x$的收敛域为$x<-1$或$x\ge-\frac{1}{3}$。

2. 设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+2)}(x-a)^n$在点$x_1=-2$条件收敛, 则该幂级数在点$x_2=\frac{1}{2}$的收敛情况是(　　)

(A)绝对收敛；(B)条件收敛；(C)发散；(D)不能确定。

解：案答为（C）。理由：首先题中两个幂级数的收敛半径均为 1. 由$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+2)}(x-a)^n$在点$x_1=-2$条件收敛，可知点$x_1=-2$位于它的收敛区间的端点，即　$|-2-a|=1$。于是$|1/2-a|=|-2-a+5/2|\ge 5/2-|2+a|=3/2>1$。因此$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)^2}(x-a)^n$在点$x_2=\frac{1}{2}$处发散。

3. 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n}$在$x=2$收敛，试讨论实参数$a$的取值范围。

解：显然幂级数的收敛半径$R=1$，且收敛域为　$a-1\le x<a+1$。

由于级数在$x=2$收敛，则有　$a-1\le 2<a+1$，因此应有$1<a\le 3$。

4. 假设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$在$x=-1$处条件收敛，判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$的收敛性：（　　）

（A）　绝对收敛，（B）条件收敛 ，（C）发散 ，（D）不定。

解:答案为[A]。由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$在$x=-1$处条件收敛可知，$x=-1$位于收敛区间的端点。

因此幂级数的收敛半径为 2，其收敛区间为$(-1,\ 3)=(1-2,\ 1+2)$。点$x=2$位于收敛开区

间的内部。因此幂级数在点 $x=2$ 绝对收敛，此即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛。

5. 记幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+1)x^n$ 的收敛半径为 r，并假设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 1，问以下哪个结论正确？(　　)

(A) $r=1$；(B) $r\le 1$；(C) $r\ge 1$。

解：结论(C)正确。因为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 的收敛半径均为 1. 根据幂级数的四则运算可知，它们的和 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+1)x^n$ 的收敛半径至少是 1，即 $r\ge 1$。半径大于 1 是可能的。 例：$a_n=\frac{1}{n!}-1$，$a_n+1=\frac{1}{n!}$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 1，而 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+1)x^n$ 的收敛半径 $r=+\infty$。另一个极端例子：取 $a_n=-1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+1)x^n$ 的收敛半径 $r=+\infty$。

6. 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ 的和.

解：记 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$。不难确定其收敛域为(-1, 1). 在收敛域内, 我们可以逐项求导。于是 $f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty} x^{4n}=\frac{1}{1-x^4}$。再两边积分得 $f(x)=\int_0^x \frac{1}{1-t^4}dt=\frac{1}{2}\arctan x+\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}$。

7. 求 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$ 的和函数.

解：设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$，则

$$\int_0^x f(t)dt=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty} n^2 t^{n-1}dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x n^2 t^{n-1}dt=\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$$

$$\int_0^x\frac{1}{t}\left[\int_0^t f(s)ds\right]dt=\int_0^x\left[\sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1}\right]dt=\sum_{n=1}^{\infty} x^n=\frac{x}{1-x}。$$

于是 $$\frac{1}{x}\left[\int_0^x f(x)dx\right]=\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1-x}\right)=\frac{1}{(1-x)^2}。$$

由此得 $$f(x)=\frac{d}{dx}\frac{x}{(1-x)^2}=\frac{1+x}{(1-x)^3}。$$

8. 设参数 $a>1$，求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a^n}$ 的和.

解： 记 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{a^n}$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a^n}=S(1)$. 考虑积分

$$\int_0^x S(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{nt^{n-1}}{a^n}dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^n}=\frac{1}{1-\frac{x}{a}}-1=\frac{a}{a-x}-1。$$ 于是

$$S(x)=\left(\frac{a}{a-x}-1\right)'=\frac{a}{(a-x)^2}。$$ 于是 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a^n}=S(1)=\frac{a}{(a-1)^2}.$$