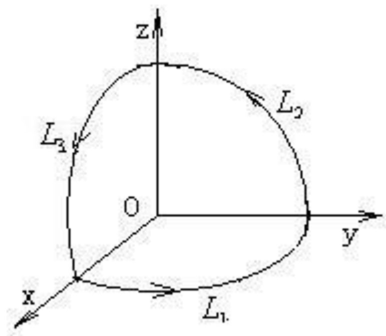
第十周习题课: 曲线、曲面积分　1

一. 曲线积分

1. 计算$\oint_L xydl$，其中L是正方形$|x|+|y|=a,\quad (a>0)$.

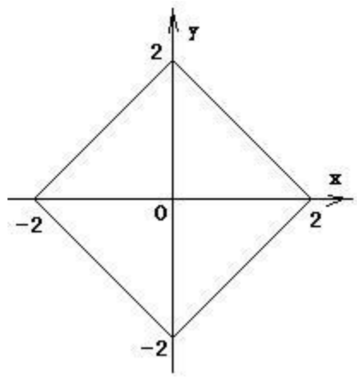
2. 设L为椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，其周长记为$a$。 求$\oint_L (2xy+3x^2+4y^2)dl$

3. 计算积分 $I=\int_\Gamma (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$， 其中$\Gamma$为球面片$x^2+y^2+z^2=1$， $x,y,z\geq 0$的边界曲线，方向是从点$(1,0,0)$到点$(0,1,0)$，到点$(0,0,1)$，再回到$(1,0,0)$。(课本习题 4.4 题 3（4），page 192)



4. 设C为闭曲线：$|x|+|y|=2$，逆时针为正向。

计算$\oint_C \frac{axdy-bydx}{|x|+|y|}$。



二．曲面积分

5. 计算$\iint_S (x^2+y^2)\mathrm{d}S$. 其中$S$是锥体$\sqrt{x^2+y^2}\leq z\leq 1$的边界.

6. 求$I=\iint_S (x+y+z)^2 dS$，其中S为单位球面.

7. 计算螺旋面S：$x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，$z=r\varphi$（$0\leq r\leq R,\ 0\leq\varphi\leq 2\pi$）的面积。

8. 求圆柱面$x^2+y^2=R^2$被抛物柱面$z=R^2-x^2$及平面$z=0$所截部分S的侧面积。

9. 计算均匀半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2\ (z\geq 0)$ 关于 z 轴的转动惯量.

10. 令曲面 S 在球坐标下方程为 $r=a(1+\cos\theta)$，Ω 是 S 围成的有界区域，分别计算 S 和 Ω 在直角坐标系下的形心坐标。

11. 计算第一型曲面积分 $I=\iint\limits_S |z| dS$, 以及第二型曲面积分 $J=\iint\limits_{S^+} |z| dx\wedge dy$，其中曲面 S 为球面 $S: x^2+y^2+z^2=a^2$；定向曲面 S^+ 的正法向向外。

12. 记 S 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2x$ 所截的有限部分。规定曲面 S 的正向

向下，所得的定向曲面记为 S^+。求下面两个积分的值。

（i） $\iint\limits_S zdS$ 。 （ii） $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2+z^2}\left(xdydz+ydzdx+zdxdy\right)$.

13. 设一元函数 $f(u)$ 于整个实轴上连续，S 代表单位球面 $x^2+\mathrm{y}^2+z^2=1$。证明 Poisson 公式 $\iint\limits_{\mathrm{S}} \mathrm{f}(ax+by+cz)dS=2\pi\int_{-1}^{1} f(\rho t)dt$，这里 $\rho := \sqrt{a^2+b^2+c^2}$。（课本习题 4.3 第 11 题，page 187）。

提示：

Lemma：设 Σ 是一个正则的参数曲面。记 Σ' 是 Σ 在一个正交变换（正交矩阵）P 下的象，即 $\Sigma'=P(\Sigma)$。记 $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$，$U=\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$，则对任何 Σ 上连续函数 $g(x,y,z)$，我们有 $\iint\limits_{\Sigma} \mathrm{g}(X)dS=\iint\limits_{\Sigma'} g(P^T U)dS$。（这个 Lemma 大致的意思是说，曲面的面积元素关于正交变换是不变的。）