第六周习题课　条件极值

一．　条件极值

例1 求原点到曲面 $z^2 = xy + x - y + 4$ 的最短距离.

例2 当 x， y， $z > 0$ 时，求函数 $u = \ln x + 2\ln y + 3\ln z$ 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 6r^2$ 上的最大值，这里 $r > 0$．由此进一步证明，对于任意正实数 a,b,c，下述不等式成立 $ab^2c^3 \le 108\left(\dfrac{a+b+c}{6}\right)^6$.

例3 求抛物面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $x + y + z = 1$ 的交线（椭圆）的长轴、短轴的长.

四．多元函数的最大值、最小值及其简单应用

例4 求 $z = xy(4 - x - y)$ 在 $x = 1, y = 0, x + y = 6$ 所围闭区域 $\overline{D}$ 上的最大值.

例5 设 $u(x,y)$ 在 $x^2 + y^2 \le 1$ 上有二阶连续偏导数，在 $x^2 + y^2 < 1$ 内满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u$，且在 $x^2 + y^2 = 1$ 上， $u(x,y) \ge 0$，证明：当 $x^2 + y^2 \le 1$ 时， $u(x,y) \ge 0$。（提示：可用反证法证明）

例6 假设 $f(x,y)$ 有连续的偏导数，在全平面除原点之外处处满足等式

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} > 0.$$

求证原点是 $f(x,y)$ 的唯一极小值点．并且满足 $\lim\limits_{x\to 0, y\to 0} \dfrac{f(x,y) - f(0,0)}{\sqrt{x^2 + x^2}} = 0$.

例7 设 $p > 0$，$q > 0$ 满足 $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$。 求函数 $\dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}$ 在平面第一象限 $x > 0, y > 0$ 里

满足约束条件 $xy=1$ 的最小值。 由此进一步证明 Young 不等式 $\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}\ge xy$，

$\forall x, y>0$。

（注：这是课本第一章总复习题第 16 题，page 97。 在一元微分学里，我们已经学习过利用极值理论证明一些不等式。 利用多元极值理论，我们同样可以得到一些的不等式。本题就是一个很好的例子。）