



Review

第一型曲面积分的计算

- $S : x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) \in D,$

$$(A, B, C) = \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$$

$$\iint_S f(x, y, z) dS$$

$$= \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv,$$

- $S : z = f(x, y), (x, y) \in D,$

$$\iint_S g(x, y, z) dS = \iint_D g(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2} dx dy.$$



§ 5. 第二型曲面积分

1. 有向曲面

Def. 设 S 为逐片光滑曲面. 任取 S 上一点 (x_0, y_0, z_0) , 任取 S 在该点的两个单位法向量之一, 如 $\vec{n}(x_0, y_0, z_0)$, 若不论点 (x, y, z) 在曲面 S 上如何运动, 当它回到点 (x_0, y_0, z_0) 时, $\vec{n}(x, y, z)$ 总与 $\vec{n}(x_0, y_0, z_0)$ 重合, 而不会与 $-\vec{n}(x_0, y_0, z_0)$ 重合, 则称 S 为双侧曲面. 所谓有向曲面 S , 就是在 S 的两个侧面中指定一侧为正, 或在 S 的两个单位法向量中指定一个为正.

Remark: 不是双侧曲面的例子: *Möbius*带.

清华大学



2. 第二型曲面积分的物理背景及定义

设区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 中分布着流体,其密度均匀(设为1),流速为 $\vec{v}(x, y, z)$. S 为 Ω 内一光滑曲面.求单位时间内自 S 的 A 侧穿过 S 流向 B 侧的流量.

将 S 分割成 n 小片 $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$,在 ΔS_i 上取点 P_i ($i = 1, 2, \dots, n$),将 ΔS_i 近似看成平面,其单位法向量为 S 在点 P_i 指向 B 侧的单位法向量 $\vec{n}(P_i)$.于是,单位时间内自 A 侧穿过 S 流向 B 侧的流量近似为

$$\sum_{i=1}^n \vec{v}(P_i) \cdot \vec{n}(P_i) \Delta S_i.$$



当各个小片曲面的最大直径趋于0时,这个和式的极限就是单位时间内自 A 侧穿过 S 流向 B 侧的流量.

Def. 设 $\vec{v}(x, y, z)$ 为 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 中的连续向量场, S 为 Ω 中光滑有向曲面, $\vec{n}(x, y, z)$ 为 S 的正单位法向量, 则函数 $\vec{v}(x, y, z) \cdot \vec{n}(x, y, z)$ 在 S 上连续, 从而(第一型)曲面积分

$$\iint_S \vec{v}(x, y, z) \cdot \vec{n}(x, y, z) dS \triangleq \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

存在, 称之为向量场 $\vec{v}(x, y, z)$ 在有向曲面 S 上的第二型曲面积分. 当 S 为封闭曲面时, 记作

$$\oiint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \oiint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS.$$



$$\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma),$$

其中 α, β, γ 分别为 \vec{n} 与 x, y, z 正半轴的夹角, 称 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为方向余弦.

有向面积微元 $\vec{n}dS$, 在 oyz, ozx 和 oxy 平面的有向投影面积为

$$(1, 0, 0) \cdot \vec{n}dS = \cos \alpha dS \triangleq dy \wedge dz,$$

$$(0, 1, 0) \cdot \vec{n}dS = \cos \beta dS \triangleq dz \wedge dx,$$

$$(0, 0, 1) \cdot \vec{n}dS = \cos \gamma dS \triangleq dx \wedge dy.$$



Remark: 有向面积微元 $dx \wedge dy, dy \wedge dz, dz \wedge dx$.

当 S 的正法向量与 z 正半轴的夹角为锐角时, dS 在 oxy 平面的投影为正, $dx \wedge dy = dxdy$. 反之, 当 S 的正法向量与 z 正半轴的夹角为钝角时, dS 在 oxy 平面的投影为负, $dx \wedge dy = -dxdy$. 同样理解有向面积微元 $dy \wedge dz$ 和 $dz \wedge dx$.

设 $\vec{v} = (P, Q, R), \vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, 则

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{n} dS &= P \cos \alpha dS + Q \cos \beta dS + R \cos \gamma dS \\ &= P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy\end{aligned}$$



Remark: $\vec{v} = (P, Q, R)$, 第二型曲面积分也记为

$$\iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \iint_S P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy.$$

第二型曲面积分也称为对坐标的曲面积分.

3. 第二型曲面积分的性质

(1)(可积的充分条件) 若 S 为有向光滑曲面, 向量场

$\vec{v}(x, y, z)$ 在 S 上连续, 则 $\iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$ 存在.

(2)(线性性质) 若 $\iint_S \vec{u} \cdot d\vec{S}$ 与 $\iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$ 都存在, 则 $\forall \alpha, \beta$

$\in \mathbb{R}$, $\iint_S (\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) \cdot d\vec{S}$ 也存在, 且



$$\iint_S (\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) \cdot d\vec{S} = \alpha \iint_S \vec{u} \cdot d\vec{S} + \beta \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}.$$

特别地, $\iint_S P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$
 $= \iint_S P dy \wedge dz + \iint_S Q dz \wedge dx + \iint_S R dx \wedge dy.$

(3)(对曲面的可加性) S 由 S_1, S_2, \dots, S_n 拼接而成, 则

$$\iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^n \iint_{S_i} \vec{v} \cdot d\vec{S}.$$

(4) 用 S^- 表示有向曲面 S 的另一侧, 则

$$\iint_{S^-} \vec{v} \cdot d\vec{S} = -\iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}.$$



4. 第二型曲面积分 $\iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS$ 的计算

这里 S 为已知有向曲面, \vec{v} 为 S 上已知向量场. 因此, 计算第二型曲面积分的关键是求出有向曲面 S 的单位法向量 \vec{n} , 然后再计算第一型曲面积分 $\iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS$.

对形如 $\iint_S P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$ 的第二型曲面积分, 令 $\vec{v} = (P, Q, R)$, 将积分视为 $\iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS$ 来计算.



例: $I = \iint_S xz dy \wedge dz + yz dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy$, 其中 S

为半球 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, 上侧为正.

解: $\vec{v} = (xz, yz, z^2)$, $\vec{n} = (x, y, z)/R$.

$$dS = \sqrt{1 + z'_x{}^2 + z'_y{}^2} dx dy = (R/z) dx dy.$$

$$\begin{aligned} I &= \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \iint_S \frac{z}{R} (x^2 + y^2 + z^2) dS \\ &= \iint_{x^2 + y^2 \leq R^2} R^2 dx dy = \pi R^4. \quad \square \end{aligned}$$



例: $I = \iint_S (2x + z) dy \wedge dz + z dx \wedge dy$, 其中 S 为有向曲面 $z = x^2 + y^2$ ($0 \leq z \leq 1$), 其法向量与 z 正半轴夹角为锐角.

解:

$$\vec{v} = (2x + z, 0, z),$$

$$\vec{n} = (-2x, -2y, +1) / \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2},$$

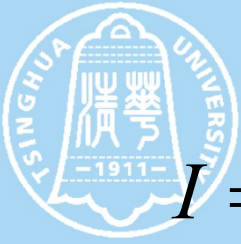
$$dS = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy,$$

$$I = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \iint_S \frac{-4x^2 - 2xz + z}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} dS$$

$$= \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} [-4x^2 - (2x - 1)(x^2 + y^2)] dx dy.$$

由对称性知 $\iint_{x^2 + y^2 \leq 1} x(x^2 + y^2) dx dy = 0$, 于是

清华大学



$$\begin{aligned} I &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (y^2 - 3x^2) dx dy \\ &= \int_0^1 r dr \int_0^{2\pi} r^2 (\sin^2 t - 3 \cos^2 t) dt \\ &= \int_0^1 r^3 dr \int_0^{2\pi} (1 - 4 \cos^2 t) dt \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} [1 - 2(1 + \cos 2t)] dt = -\pi/2. \square \end{aligned}$$

计算第二型曲面积分 $\iint_S \vec{v}(x, y, z) \cdot \vec{n}(x, y, z) dS$ 时, 分别求单位正法向量 $\vec{n}(x, y, z)$ 和面积微元 dS , 计算 $\vec{n}dS$ 时能约分. 因此计算过程可以进一步简化.



Remark: 设 $\vec{v} = (P, Q, R)$.

Case 1. $S: x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) \in D$.

$$(A, B, C) = \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v, \quad \vec{n}(x, y, z) = \pm \frac{(A, B, C)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$dS = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv,$$

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS &= \pm \iint_S \frac{PA + QB + RC}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} dS \\ &= \pm \iint_D (PA + QB + RC) du dv. \end{aligned}$$

当向量 (A, B, C) 与曲面 S 的正向单位法向量同向 (反向) 时, 取正号 (负号).



Case 2. $S: z = f(x, y), (x, y) \in D$.

$$A = -f'_x, B = -f'_y, C = 1, \vec{n}(x, y, z) = \pm \frac{(f'_x, f'_y, -1)}{\sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y}},$$

$$dS = \sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y} dx dy.$$

$$\begin{aligned} \text{于是} \quad \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS &= \pm \iint_S \frac{-Pf'_x - Qf'_y + R}{\sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y}} dS \\ &= \pm \iint_D (-Pf'_x - Qf'_y + R) dx dy. \end{aligned}$$

当向量 $(-f'_x, -f'_y, 1)$ 与曲面 S 的正向单位法向量同向(反向)时, 取正号(负号).



例: $I = \iint_S xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$, 其中 S 为椭圆面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的内侧.

解: S 的参数方程 $\mathbf{r} = (a \sin \varphi \cos \theta, b \sin \varphi \sin \theta, c \cos \varphi)$,
 $\varphi \in [0, \pi], \theta \in [0, 2\pi]$.

$$\mathbf{r}'_{\varphi} = (a \cos \varphi \cos \theta, b \cos \varphi \sin \theta, -c \sin \varphi),$$

$$\mathbf{r}'_{\theta} = (-a \sin \varphi \sin \theta, b \sin \varphi \cos \theta, 0),$$

$$\mathbf{r}'_{\varphi} \times \mathbf{r}'_{\theta} = (bc \sin^2 \varphi \cos \theta, ac \sin^2 \varphi \sin \theta, ab \sin \varphi \cos \varphi)$$

$$\begin{aligned} I &= -abc \iint_D (\sin^3 \varphi \cos^2 \theta + \sin^3 \varphi \sin^2 \theta + \sin \varphi \cos^2 \varphi) d\varphi d\theta \\ &= -abc \iint_D \sin \varphi d\varphi d\theta = -4\pi abc. \square \end{aligned}$$



Remark: 对形如 $\iint_S P dy \wedge dz, \iint_S Q dz \wedge dx, \iint_S R dx \wedge dy$

的第二型曲面积分,也可以直接化成 S 在坐标面上的投影区域上的二重积分计算. 例如,

$$S : x = x(y, z), y = y, z = z, (y, z) \in D_{yz}.$$

$$\mathbf{r}'_y \times \mathbf{r}'_z = (x'_y, 1, 0) \times (x'_z, 0, 1) = (1, *, *)$$

$$\iint_S P dy \wedge dz = \pm \iint_S (P, 0, 0) \cdot (\mathbf{r}'_y \times \mathbf{r}'_z) dy dz = \pm \iint_S P dy dz.$$

对具体的例子, 这种方法一般比较麻烦. 但因此 $dy \wedge dz$, $dz \wedge dx$, $dx \wedge dy$ 有直观的几何解释, 所以该方法在理论分析上很有用. 将来证明 Gauss 公式时就要用到这种观点.

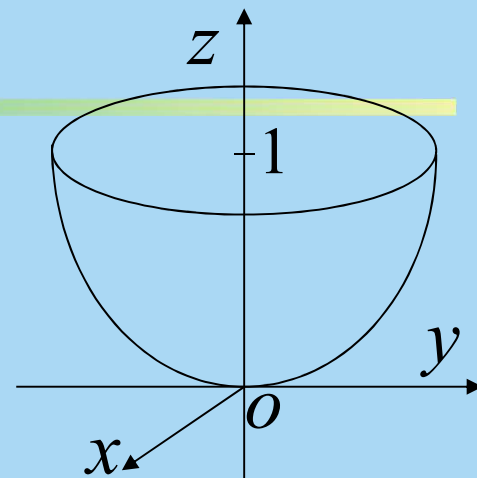
清华大学



例: $I = \iint_S (2x + z) dy \wedge dz + z dx \wedge dy,$

S 为曲面 $z = x^2 + y^2$ ($0 \leq z \leq 1$) 的内侧.

解: 设 D_{yz}, D_{xy} 分别为 S 在 oyz, oxy 平面上的投影区域, 则



$$\begin{aligned} I &= \iint_{S, x \geq 0} (2x + z) dy \wedge dz + \iint_{S, x \leq 0} (2x + z) dy \wedge dz + \iint_S z dx \wedge dy, \\ &= \iint_{D_{yz}} (2\sqrt{z - y^2} + z)(-dydz) + \iint_{D_{yz}} (-2\sqrt{z - y^2} + z) dydz \\ &\quad + \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dx dy \\ &= -4 \iint_{D_{yz}} \sqrt{z - y^2} dydz + \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dx dy, \end{aligned}$$

清华大学



其中

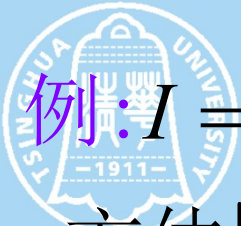
$$\iint_{D_{yz}} \sqrt{z - y^2} dy dz = \int_{-1}^1 dy \int_{y^2}^1 \sqrt{z - y^2} dz$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{2}{3} (z - y^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_{z=y^2}^1 dy = \int_{-1}^1 \frac{2}{3} (1 - y^2)^{\frac{3}{2}} dy$$

$$= \frac{4}{3} \int_0^1 (1 - y^2)^{\frac{3}{2}} dy = \frac{4}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^4 t dt = \frac{\pi}{4}.$$

$$\iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2 \cdot r dr = \frac{\pi}{2}.$$

于是, $I = -4 \times \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}.$ \square



例: $I = \iint_S xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$, 其中 S 为长方体 $|x| \leq a, |y| \leq b, |z| \leq c$ 的外表面.

解: S 由六块侧面 S_1, S_2, \dots, S_6 拼接而成.

在 $S_1: x = a, |y| \leq b, |z| \leq c$ 上, $\vec{n} = (1, 0, 0), x = a$, 于是

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy \\ = \iint_{S_1} x dS = \iint_{|y| \leq b, |z| \leq c} a dy dz = 4abc. \end{aligned}$$

同理, $\iint_{S_i} xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy = 4abc,$
 $i = 2, 3, \dots, 6.$

故 $I = 24abc. \square$

我们将用Guass公式给出更简洁的计算.

清华大学



Summary

第二型曲面积分的计算

- 方法一：化第二型曲面积分为第一型曲面积分

$$\iint_S P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

其中 $\vec{v} = (P, Q, R)$

- 方法二： $S: x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) \in D,$

$$\iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \pm \iint_D (PA + QB + RC) du dv.$$

$$(A, B, C) = \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = \left(\det \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \det \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right).$$

清华大学



●方法三 $S: z = f(x, y), (x, y) \in D,$

$$\iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \pm \iint_D (-Pf'_x - Qf'_y + R) dx dy.$$

●方法四: 直接化二重积分 S 在坐标面上的投影区域上的二重积分

$$\iint_S P dy \wedge dz = \pm \iint_{D_{yz}} P dy dz$$

$$\iint_S Q dz \wedge dx = \pm \iint_{D_{xz}} Q dx dz$$

$$\iint_S R dx \wedge dy = \pm \iint_{D_{xy}} R dx dy$$



作业：习题4.5 No. 3, 5, 7.