Review

一致收敛函数项级数和函数的性质

- 逐项求极限

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\text{在区间}I\text{上一致收敛}\\ f_n(x)\in C(I),\forall n\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\in C(I),\text{即}\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x)$$

- 逐项积分

$$\left.\begin{array}{l}\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\text{在区间}[a,b]\text{上一致收敛} \\ f_n(x)\in C[a,b],\forall n\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \int_a^x \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t, \forall x\in[a,b].$$

- 逐项求导

$$\left.\begin{array}{l} f_n(x)\in C^1[a,b],\forall n \\ \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)\text{在}[a,b]\text{上一致收敛} \\ \exists x_0\in[a,b],s.t.\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x_0)\text{收敛} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} (1)\ \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\text{在}[a,b]\text{上一致收敛;} \\ (2)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right)'=\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x). \end{cases}$$

§3. 幂级数

☆重点

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n, \xleftarrow{\text{转化}} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

内容：

- 幂级数的收敛域、收敛半径
- 幂级数和函数的性质
- C^∞函数的幂级数展开

清華大学

1. 幂级数的收敛性

在x_0点处通项有界

Thm (Abel第一定理) $x_0 \neq 0$, $\{a_n x_0^n\}$有界, 则$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$在 $(-|x_0|, |x_0|)$上绝对收敛; 且$\forall r < |x_0|$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$在$[-r, r]$上一致收敛.

则 $\forall x$ s.t. $|x| < |x_0|$. 同系数级数绝对收敛, 一致收敛.

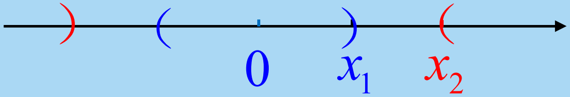
$\sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ 是收敛的!

Proof. $|a_n x_0^n| \le M$, 则$|x| \le r < |x_0|$时,

$$|a_n x^n| = \left|a_n x_0^n \cdot \left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right| \le M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n \le M\left|\frac{r}{x_0}\right|^n.$$

和x无关的一个收敛的几何级数.

故$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$在$[-r, r]$上绝对收敛且一致收敛 (Weierstrass). □



Corollary.

$|a_n x^n| = |a_n x_1^n| \left|\frac{x}{x_1}\right|^n \le N \cdot \left|\frac{x}{x_1}\right|^n$ (点点收敛)

(1) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_1^n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在 $(-|x_1|, |x_1|)$ 上点点绝对收敛.

$\Rightarrow \exists N,\ |a_n x_1^n| \le N$

$|a_n x^n| = |a_n \cdot x_2^n| \left|\frac{x^n}{x_2^n}\right| \ge |a_n x_2^n|$ (发散)

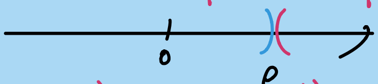
(2) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_2^n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在 $|x| > |x_2|$ 上点点发散.

(3) $\exists \rho \in [0, +\infty], s.t. \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在 $(-\rho, \rho)$ 上点点绝对收敛, 在 $|x| > \rho$ 上点点发散. 称此 ρ 为幂级数的收敛半径.

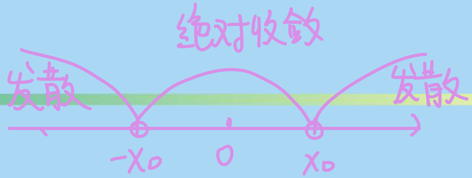
在 $|x| = \rho$ 时, $\sum a_n x^n$ 敛散性不确定

求收敛区域时, 单独判断 $x=\rho$ 或 $x=-\rho$ 的情况。

形如 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ 收敛半径是距 x_0 的距离



收敛区域: $(-\rho, \rho)$ 或 $(-\rho, \rho]$ 或 $[-\rho, \rho)$ 或 $[-\rho, \rho]$



(4) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的收敛半径~~分别~~为ρ

$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$当$|x| < \rho$时绝对收敛, 当$|x| > \rho$时发散

$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$当$|x| < \rho$时收敛, 当$|x| > \rho$时发散

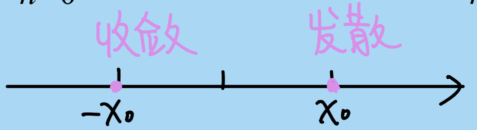
$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$当$|x| < \rho$时绝对收敛, 当$|x| > \rho$时非绝对收敛

$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$当$|x| < \rho$时收敛, 当$|x| > \rho$时非绝对收敛

$$(5)\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx_0^n\text{ 收敛}\Rightarrow\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\text{ 的收敛半径}\rho\ge|x_0|.$$

$$(6)\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx_0^n\text{ 发散}\Rightarrow\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\text{ 的收敛半径}\rho\le|x_0|.$$

$$(7)\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx_0^n\text{条件收敛}\Rightarrow\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\text{ 的收敛半径}\rho=|x_0|.$$



i.e., $\exists\, x_0<0$ s.t. $\sum_{n=0}^{+\infty}|a_nx_0^n|$ 发散

$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx_0^n$ 收敛

(8) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 ρ_1, ρ_2

当 $|x| < \rho_1$, $|x| < \rho_2$, 则 $\sum a_n x^n$, $\sum b_n x^n$ 均收敛

则 $\sum (a_n + b_n) x^n$ 也收敛。

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) x^n \text{ 的收敛半径 } \rho \ge \min\{\rho_1, \rho_2\}; \\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n x^n \text{ 的收敛半径 } \rho \ge \rho_1 \rho_2. \end{cases}$$

当 $|x| < \rho_1 \rho_2$, 则可将 $x = x_1 \cdot x_2$, $|x_1| < \rho_1$, $|x_2| < \rho_2$

由通项有界性放缩掉一个

则 $\sum a_n b_n x^n = \boxed{\sum a_n x_1^n \cdot b_n \cdot x_2^n}$

$\because$ $\sum a_n x_1^n$ 收敛, $\therefore$ $\{a_n x_1^n\}$ 有界, 设 $|a_n x_1^n| \le M$

$\therefore$ 上式 $\le M \cdot \sum b_n x_2^n$ (收敛)　　$\therefore$ 原式收敛

清華大學

Proof. $\forall |x| < \rho_1\rho_2,\ \exists |x_1| < \rho_1, |x_2| < \rho_2,\quad \text{s.t.}\ \ x = x_1 x_2.$

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为ρ_1,则$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x_1^n$ 收敛, $\{a_n x_1^n\}$有界,

$\exists M > 0, s.t.\ |a_n x_1^n| \le M, \forall n.$ 继而有

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n b_n x^n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n x_1^n b_n x_2^n| \le M \sum_{n=0}^{+\infty} |b_n x_2^n|.$$

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ 的收敛半径为ρ_2,则$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |b_n x_2^n|$收敛, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n b_n x^n|$收敛.

由$|x| < \rho_1\rho_2$的任意性, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n b_n x^n$ 的收敛半径$\rho \ge \rho_1\rho_2$.□

Remark.

(1) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的收敛域为区间,且形如$(-\rho,\rho),(-\rho,\rho],$

$[-\rho,\rho),[-\rho,\rho],(-\infty,+\infty)$或$\{0\}$.

(2) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$在其收敛域上内闭一致收敛.

i.e. $\forall [a_i, b_i] \subseteq (a,b)$

$\sum a_n x^n$ 在$[a_i, b_i]$内一致收敛

(Abel第一、二定理)

已知$\forall [a,b] \subseteq [-\rho,\rho]$，$\sum a_n x^n$在$[a,b]$上一致收敛

这里将一致收敛性推广到端点。

Thm.(Abel第二定理) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在其收敛区间的端点$x=\rho$

若端点收敛，则 端点一致收敛。

(或$x=-\rho$)收敛，则$\forall 0<r<\rho$，该级数在$[-r,\rho]$(或$[-\rho,r]$)上一致收敛.（$\Rightarrow$ 幂级数在其收敛域中内闭一致收敛）

Proof. 设$\sum a_n\rho^n$ 收敛. $\forall x\in[0,\rho]$, $\sum a_n x^n = \sum \underbrace{a_n\rho^n}_{\text{一致收敛}} \underbrace{(x/\rho)^n}_{\text{单调一致有界}}$,

$\{(x/\rho)^n\}$关于n单调，且$\left|(x/\rho)^n\right|\le 1$，一致有界. 由Abel判别法,

$\sum a_n x^n$在$[0,\rho]$上一致收敛. 又$\forall r\in(0,\rho)$, $\sum a_n x^n$ 在$[-r,r]$上

一致收敛（Able第一定理），故$\sum a_n x^n$在$[-r,\rho]$上一致收敛.□

求收敛半径方法.

Thm. 记$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$的收敛半径为$\rho$.

(1) 若$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$, 则$\rho = 1/q$; 比值法

(2) 若$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = q$, 则$\rho = 1/q$; 根式法.

这里, $\dfrac{1}{0} = +\infty$, $\dfrac{1}{\infty} = 0$.

(3) 若$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$, 则$\rho = 1/q$;

(4) 若$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} = q$, 则$\rho = 1/q$;

用正项级数判别法

Proof. (1) $\forall |x| < \dfrac{1}{q}$ $(>)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = q|x| < 1$ $(>)$, 故$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}|a_n x^n|$ 绝对~~的~~收敛. (发散) □

例. 求 $\sum_{n=0}^{+\infty}(1+1/n)^{n^2}x^n$ 的收敛半径与收敛域.

解: $a_n=(1+1/n)^{n^2}$, $\sqrt[n]{a_n}=(1+1/n)^n\to e$, 则 $\rho=1/e$.

$|x|=1/e$ 时,

$$|a_nx^n|=e^{n^2\ln(1+1/n)-n}=e^{n^2\left(1/n-1/2n^2+o(1/n^2)\right)-n}$$

$$=e^{-1/2+o(1)}\to e^{-1/2}\neq 0, n\to+\infty\text{时}.$$

若 $\lim_{n\to\infty}|a_nx^n|\neq 0$，则 $\sum a_nx^n$ 既不绝对收敛，也不条件收敛。

因此 $\sum_{n=0}^{+\infty}(1+1/n)^{n^2}x^n$ 在 $x=\pm 1/e$ 处发散, 其收敛域为

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}{e^n}=\sum_{n=0}^{\infty}e^{\ln(1+\frac{1}{n})\cdot n^2-n}$, $\lim_{n\to\infty}e^{\ln(1+\frac{1}{n})\cdot n^2-n}=e^{n^2(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2}))-n}=e^{n-\frac{1}{2}+o(1)-n}=e^{-\frac{1}{2}}$

$(-1/e,1/e)$. □

当 $y=\pm2$ 时，

$a_ny^n=(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n})\cdot\cancel{\frac{1}{2^n}}\cdot\cancel{(2^n)}(\pm1)^n$

变量代换：令 $y=(x+1)^2$, $(y\geq0)$，先算出 y 的收敛区域

例. 求 $\sum_{n=0}^{+\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})\frac{1}{2^n}(x+1)^{2n}$ 的收敛半径与收敛域.

带幂的常开根号

$=\frac{1}{2}\sqrt[n]{\underbrace{(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n})}_{n\text{个}}}$

解: 令 $a_n=(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})\frac{1}{2^n}$, $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{2}$, $y=\pm2$时,

$\sqrt[n]{1}\leq\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}\leq\sqrt[n]{n}$

$\downarrow$ 1 $\quad$ 由夹逼得1 $\quad$ $\downarrow$ 1

$$|a_ny^n|=(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})\to+\infty,$$

$\therefore y=\pm2$ 时，$\sum a_ny^n$ 都发散

$\sum_{n=0}^{+\infty}a_ny^n$ 的收敛域为 $(-2,2)$. 于是 $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x+1)^{2n}$ 的收敛域为

$(x+1)^2<2$, 即 $x\in(-1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2})$, 收敛半径为 $\rho=\sqrt{2}$. □

$-\sqrt{2}<x+1<\sqrt{2}$

清華大學

$x^0, x^1, x^4, x^9, \ldots$ 将其仍视作 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$，则

$= x^{n\cdot n} = (x^n)^n$

$$\boxed{\begin{array}{l} a_0=a_1=a_4=a_9=a_{16}=\cdots=1 \\ a_2=a_3=a_5=\cdots=0 \end{array}}$$

例. 求 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$ 的收敛半径与收敛域.

0, 1,

用上极限方法。（上极限：所有子列极限中最大的那个）☺

解法一：记 x^n 的系数为 a_n，则 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=1$, $\rho=1$.

又 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(\pm1)^{n^2}$ 发散，故 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$ 的收敛域为 $(-1,1)$.

$\because \lim\limits_{n\to\infty}(\pm1)^{n^2}\neq 0$

解法二：$\forall |x|<1$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left|x^{n^2}\right| \le \sum\limits_{n=0}^{+\infty}|x|^n$ 收敛； $\Rightarrow \rho\ge 1$

又 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(\pm1)^{n^2}$ 发散，故 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$ 的收敛域为 $(-1,1)$, $\rho=1$. □

2.幂级数和函数的性质

Thm. $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$在其收敛域的内部$(-\rho,\rho)$连续;若幂级数在$x=\rho$收敛,则$S(x)$在$x=\rho$左连续;若幂级数在$x=-\rho$收敛,则$S(x)$在$x=-\rho$右连续.

也就是说，幂级数和函数的连续性基本等同于其收敛性，收敛了就一定连续

Thm. 设$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为ρ,则

$$\int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},\quad \forall x\in(-\rho,\rho),$$

且$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$的收敛半径为$\rho$.

Thm. $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$ 的收敛半径为ρ,则$S(x)\in C^{\infty}(-\rho,\rho)$,

且$\forall x\in(-\rho,\rho),\forall k=1,2,\cdots$

阶数低的求导没了！

$$S^{(k)}(x)=k!a_k+\frac{(k+1)!}{1!}a_{k+1}x+\cdots+\frac{(k+n)!}{n!}a_{n+k}x^n+\cdots,$$

且$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(k+n)!}{n!}a_{n+k}x^n$的收敛半径为$\rho$.

上下同乘n！

Remark. 逐项积分和逐项求导后得到的新的幂级数的收敛半径与原级数相同.

Remark. 逐项积分后得到的新的幂级数的收敛域可能改变.例如,$\sum \frac{x^n}{n}$ 的收敛域为 $[-1,1)$,逐项积分后的级数为 $\sum \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$,收敛域为$[-1,1]$.

3.函数的幂级数展开

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-x_0)^n,\ \forall x\in(x_0-\rho,x_0+\rho)$$

$$\Rightarrow \forall x\in(x_0-\rho,x_0+\rho),k=1,2,\cdots$$

$$f^{(k)}(x)=k!a_k+\frac{(k+1)!}{1!}a_{k+1}(x-x_0)$$

$$+\cdots+\frac{(k+n)!}{n!}a_{n+k}(x-x_0)^n+\cdots$$

$$\Rightarrow a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!},\quad (令x=x_0)$$

Remark. 幂级数展开的唯一性.

Def. 称$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$为$f(x)$在$x_0$的Taylor级数;当

$x_0=0$时,Taylor级数也称为Maclaurin级数.

Question. $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$在点$x$处是否收敛?

Question. 若$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$在点$x$处收敛,其和函数

是否一定是$f(x)$?

不一定

例. $f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & x\neq 0; \\ 0 & x=0. \end{cases}$

$$f^{(n)}(0)=0, n=1,2,\cdots,n.$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \equiv 0, \forall x\in\mathbb{R}.$$

故 $f(x)\neq\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n, \forall x\neq 0.\square$

在x_0点展开，表现在幂级数里就是通项(x-x_0)^n里面的那个x_0.
同时还表现在可以幂级数展开的区间上：可展开区间一定是个关于x_0对称的区间，最多的差别是是否取端点。

如何证明区间端点是否可以幂级数展开呢？若（1） 展开后的幂级数在端点收敛（2）展开的原函数在端点连续
那么在端点可以幂级数展开
【该论断的原理：幂级数的收敛意味着连续，所以幂级数在端点单侧连续；又因为在端点单侧附近收敛到原函数，那么在端点的极限就仍然是原函数】

Thm. 若$\exists M>0, s.t.$

任意阶的导数一致有界，而且在关于x_0对称的开区间里一致有界

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \le M, \forall x \in (x_0-\rho, x_0+\rho), n=1,2,\cdots$$

则$f(x)$在$(x_0-\rho, x_0+\rho)$内可以展开成Taylor级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Proof. $$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|$$

(ξ介于x与x_0之间)

$$\le \frac{M}{(n+1)!}\rho^{n+1}, \quad \forall x\in(x_0-\rho, x_0+\rho), \forall n. \square$$

证明收敛域是可以用任意内闭区间收敛导出开区间收敛的（不能这么做的性质是一致收敛）

例. e^x在$x_0=0$的幂级数展开. (公式法)

解：$\forall R>0$,在$(-R,R)$上,$\left|(e^x)^{(n)}\right|=e^x<e^R$有界. 故

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,\quad x\in(-R,R).$$

由R的任意性,

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,\quad x\in\mathbb{R}.\square$$

例. $\left|(\sin x)^{(n)}\right| \le 1$, 故 (公式法)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}. \square$$

例. 上例中$\sin x$的幂级数展开式逐项求导得:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(逐项求导法)

例. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 \cdots + x^n + \cdots, \quad x \in (-1,1).$

例. 求 $\ln(1+x)$ 在 $x_0=0$ 的幂级数展开.　　(逐项积分法)

解: $$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2\cdots+(-1)^n x^n+\cdots,\quad x\in(-1,1).$$

在 $[0,x]$ 上积分得:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots,\quad x\in(-1,1).$$

上式右端幂级数在 $x=1$ 处收敛,其和函数在 $x=1$ 处左连续. 故

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots,\quad x\in(-1,1].$$

□

ln(1+x)的展开区间是(-1,1]

清華大學

例. 求 $\arctan x$在$x_0=0$的幂级数展开. (逐项积分法)

解: $$\frac{1}{1+t^2}=1-t^2+t^4+(-1)^n t^{2n}+\cdots,\quad t\in(-1,1).$$

两边在$[0,x]$上积分得

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots,\quad x\in(-1,1).$$

注意到右边级数在$x=\pm1$收敛,而 $\arctan x$在$\mathbb{R}$上连续,故

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots,\quad x\in[-1,1].$$

□

arctanx的展开区间是[-1,1]

例. 求$(1+x)^{\alpha}\ (\alpha \neq 0)$在$x_0=0$的幂级数展开.　　(公式法)

解: $f(x)=(1+x)^{\alpha},\ f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1},\cdots,$

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots,$$

由比值判别法得右端级数收敛半径$\rho=1.$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots,$$

$\alpha \le -1$ 时, $x\in(-1,1);$

$-1<\alpha<0$ 时, $x\in(-1,1];$

$\alpha>0$ 时, $x\in[-1,1].$

非常规点的幂级数展开求法：
1.利用变量替换转化成常规点的展开；
2.利用定义brute calculate；

例. 将$f(x)=\ln\dfrac{1}{2+2x+x^2}$在$x_0=-1$处展开成幂级数.

分析：$\ln(1+t)=t-\dfrac{1}{2}t^2+\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}t^n+\cdots, t\in(-1,1].$

解：$f(x)=-\ln\left(1+(1+x)^2\right),$ （变量替换法）

$$=-\left((1+x)^2-\frac{(1+x)^4}{2}+\frac{(1+x)^6}{3}+\cdots\right) \qquad \left((1+x)^2\le 1\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n(1+x)^{2n}}{n}, \qquad x\in[-2,0].\square$$

清華大學

例. $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^3}$, 求$f^{(200)}(0)$.

解: $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^3}$

$$=x^2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{3n}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{3n+2},x\in(-1,1).$$

令$3n+2=200$, 得$n=66$.

$$\frac{f^{(200)}(0)}{200\,!}=(-1)^{66},\quad f^{(200)}(0)=200!\ \square$$

清華大學

例. 求$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(2n-1)}x^{2n}$的收敛域与和函数.

解: $\rho=1$,收敛域为$[-1,1]$.

$$S'(x)=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)}x^{2n-1},\qquad \forall x\in(-1,1),$$

$$S''(x)=2\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}x^{2n-2}=2\sum_{n=1}^{+\infty}(-x^2)^{n-1}=\frac{2}{1+x^2},\forall x\in(-1,1).$$

$$S'(0)=S(0)=0,\qquad S'(x)=2\arctan x,$$

$$S(x)=2x\arctan x-\ln(1+x^2),\quad x\in[-1,1].\square$$

清华大学

例. 求$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{n!2^n}x^n$的收敛域与和函数.

解: $\frac{(n+1)^2}{(n+1)!2^{n+1}}\Big/\frac{n^2}{n!2^n}\to 0, \rho=+\infty$, 收敛域为$(-\infty,+\infty)$.

$$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nx^n}{(n-1)!2^n}=x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n-1)!2^n}\triangleq xS_1(x), \forall x\in\mathbb{R}.$$

$$\int_0^x S_1(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^x\frac{nt^{n-1}\mathrm{d}t}{(n-1)!2^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{(n-1)!2^n}$$

$$=\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x/2)^{n-1}}{(n-1)!}=\frac{xe^{x/2}}{2}, x\in\mathbb{R}.$$

(e^x展开的变量替换)

清華大學

$$S_1(x) = \left(\frac{xe^{x/2}}{2}\right)' = \frac{1}{4}e^{x/2}(2+x), x \in \mathbb{R}.$$

$$S(x) = xS_1(x) = \frac{1}{4}e^{x/2}(2x+x^2), \forall x \in \mathbb{R}.\square$$

Remark. 逐项求导和逐项积分在幂级数求和以及 C^∞ 函数的幂级数展开中的应用.

逐项求导和逐项积分：把一个幂级数转化为另一个幂级数
最终目的要么是化为几何级数
要么是化为已知函数的幂级数展开

例. 求证: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n+1)!}=1.$

解: 令$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n+1)!},\ x\in\mathbb{R}.$ 欲证$S(1)=1.$

$$\int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^x\frac{nt^{n-1}\mathrm{d}t}{(n+1)!}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}$$

$$=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{e^x-1-x}{x},x\neq 0.$$

$$S(x)=\frac{xe^x-e^x+1}{x^2},x\neq 0.\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n+1)!}=S(1)=1.\ \square$$

清華大學

作业:习题6.3 No.1,2,3

（以上所有大题中单序号小题）