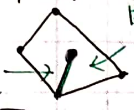
平面图 推论：$m<9$ 或 $n<5$，则是平面图 若无法再加边

① $K_{1,n}$, $K_{2,n}$ 是平面图；K_1, K_2, K_3, K_4 是(极大)平面图

② 若 e 不是割边，则它必为某两个域的公共边界

③ 所有面次数和 $=2m$ 割边 be like  割边对面的度贡献为2.

④ 对于有 k 个连通支的平面图 G，$n-m+r=k+1$

⑤ 若简单连通平面图无割边，且每个域边界数为 t，则 $m \le \frac{t(n-2)}{t-2}$

⑥ 极大平面图：一定连通；一定有 $3r=2m$；

简单连通平面图 G 极大 $\Leftrightarrow$ 每个面次数为3.

$m=3n-6$，$r=2n-4$ ← 满足其一的简单平面图必为极大平面图

一般平面图：$m \le 3n-6$，$r \le 2n-4$.

边界数为 1 $\Leftrightarrow$ 边界为自环；
边界数为 2 $\Leftrightarrow$ 边界为重边 } ⇒ 对简单图，各域边界数 ≥ 3.

⑦ 简单连通平面图 G 的最小度 $\delta \le 5$

⑧ 极小非平面图：K_5，$K_{3,3}$

⑨ 判定是平面图： 插、删二度结点

平面图 $\Leftrightarrow$ 不含 K_5，$K_{3,3}$ 的同胚子图

$\Leftrightarrow$ 不含可收缩到 K_5，$K_{3,3}$ 的子图. ← 两邻接点合成1点

⑩ 对偶图：$\boxed{存在}$、唯一、且连通

平面图 $\Leftrightarrow$ 有对偶图

对原图 G 中一回路 C，对偶图 G^* 中对应各边为 G^* 割集.

⑪ 自对偶图：$G^* \cong G$. n 阶轮图都自对偶

⑫ 图的点着色问题

$\gamma(G)=2 \Leftrightarrow$ G 没有奇回路.

$\Leftrightarrow G^*$ 有欧拉回路 $\Leftrightarrow G^*$ 面可2着色

对不含自环的图 G，$\gamma(G) \le \Delta(G)$ ← 最大度数
(不是 K_n，不是奇圈) 的近似解

着色方法： Welch. Powell 法 ① $\boxed{递减}\boxed{度数}$ 排列点

② 从第一个点开始，每次用一种颜色将该点与后面不相邻的点全部着色

G 分裂出许多图，取这些图的最小色数

⑬ 计算色数：$\gamma(G)=\min\{\gamma(\bar{G}_{ij}), \gamma(\mathring{G}_{ij})\}$

⑭ 色数多项式：$f(G,t)$ → 最多用 t 种颜色着色

$f(K_n,t)=t(t-1)\dots(t-n+1)$；$f(T_n,t)=t(t-1)^{n-1}$

$f(G,t)=f(\bar{G}_{ij},t)+f(\mathring{G}_{ij},t)$ 取这些图的色数多项式之和.

⑮ 面着色.

3-正则平面图可四着色 $\Leftrightarrow \forall$ 平面图可4着色

有 Hamilton 回路的平面图可4着色.

树.

① 定义：连通且无回路，任何边均为桥，$m=n-1$

② 支撑树数目：$\det(B_k B_k^T)$ B_k 是有向连通图的基本关联~

K_n 有 n^{n-2} 个支撑树

算必含 e_1 的树：将 e_1 的始点终点捏成一点

③ 根树的数目：$\det(\vec{B_k} B_k^T)$

算必含 e_1 的$\boxed{根树}$：删去其他到 e_1 终点的边，再算

① 回路矩阵：行线性相关。……对于回路，前为边

② 基本回路矩阵：$(m-n+1)\times m$。把所有余树边放在前，树边放在后，得 $C_f=[I \quad C_{f12}]$ 大小：$(m-n+1)\times m$

③ 回路矩阵 C 的 $m-n+1$ 阶子阵 $\det \ne 0 \Leftrightarrow$ 这些列对应着一棵余树. I 不能忘3!!!

④ $C_f=[\boxed{I} \quad C_{f12}]$，$B_k=[B_{11} \quad B_{12}]$，$C_f$, B_k 边次序一致 (都是余树边排在前)

则 $\boxed{C_{f12}} = -B_{11}^T B_{12}^{-T}$

割集矩阵

① 行为割集，列为边. 一条树边 $\Leftrightarrow$ 一个割集

G 最多有 $\frac{1}{2}(2^n-2)=2^{n-1}-1$ 个割集. 一条余树边 $\Leftrightarrow$ 一个回路

② 基本割集矩阵：每个割集有一个树边(方向正)及若干余树边。把余树边放在前，树边放在后，得

$S_f=[S_{f11}, \boxed{I}]$ → 各列对应一棵树 (S_f: rank $=n-1$)

③ 割集矩阵：$(n-1)\times m$.

割集矩阵 S 的 $n-1$ 阶子阵 $\det \ne 0 \Leftrightarrow$ 这些列对应 G 的一棵树.

④ 若 C_f, S_f 边次序一致，$C_f=[I, C_{f12}]$，$S_f=[S_{f11} \quad I]$

得 $\boxed{S_{f11}=-C_{f12}^T=B_{f12}^{-1}B_{11}}$

Prim 求最小支撑树 $O(n^2)$ 适用于稠密图

首先任选结点 v_0，构成集合 V'；然后不断在 $V-V'$ 中选一条到 V' 中某点(如 v)最短的边 (u,v) 进入树 T，并令 $V'=V'+u$ ~~直到 V'=~~V. 用 u 的所有关联边更新 $V-V'$ 中的点，直到 $V=V'$.

若 $u=v_j$，则 $\pi(i)=\min\{\pi(i), w_{ji}\}$

而 dijkstra 中更新方法为 $\pi(i)=\min\{\pi(i), \pi(j)+w_{ji}\}$.

Dijkstra： 求所有点到 v_0 的最短距离 $O(n^2)$

首先令 $P=\{v_0\}$，集合 $V-P$ 中各点权值为 w_{0i}，若 v_0 与 v_i 间无边则为 ∞

然后在 $V-P$ 中选择 π 最小的点 v_j 加入集合 P；

对 $V-P$ 中剩余结点的 π 值进行修正：$\pi(i)=\min\{\pi(i), \pi(j)+w_{ji}\}$.

Kruskal： $O(m+p\cdot\lg m)$，p 为迭代次数

T = 空图；将 G 中边按边权从小到大重排为 $e_1,\dots,e_m$ 集 E

for $i=1$ to $n-1$ 适用于稀疏图.

{ 在 E 中顺序取边，直到找到不与 T 中边构成回路的边 e_j，在 E 中删去 e_j 及其之前的边；$T=T+e_j$; }.

根树 ① 有序：分支点孩子有序；② k-叉：分支点至多有 k 个孩子；③ 正则：每个分支点恰有 k 个孩子；④ 满：每个叶结点的层数 = 树高.

Huffman 算法构造$\boxed{最优二叉树}$： $O(n\cdot\log n)$ 性质：一定正则 构造出的最优二叉树不唯一

① 将所有 w_i 按照从小到大排序，放入优先级队列 Q 中。

② 从 Q 中弹出2点，并将这两点合并，合并后根结点权重 = 左结点权重 + 右结点权重，再根据大小插回 Q 中；重复至 Q 空.

编码问题 由一棵正则二叉树诱导的前缀码唯一
最佳前缀码不唯一 (even under certain 标号 rule)

将各个字符的出现频率(次数)设为权重，构造最优二叉树；若 v 只有一个孩子，标 0 或 1；否则左 0 右 1.

代数结构

① f 左可逆 $\Leftrightarrow$ f 单射；② f 右可逆 $\Leftrightarrow$ f 满射；且可逆映射的逆唯一 …… 称为 A 关于~的……

n阶循环群，每个正因子d都有唯一d阶子群。
无限循环群，任意两个不等元素幂次不等。
任意两个阶相等的循环群同构.$(Z_n,+)$

A上全部变换为$M(A)$ || $|M(A)|=n^n$. 双射一一变换

非空集合A ∀一一变换 + "·" = $E(A)$，一一变换群。⇒置换群。S_n: $n!$个置换 长度为l的轮换，对换。| 不相交：commute | n元置换唯一分解不相交轮换。| 逆序数：对换个数奇偶同 $i_1 i_2 \cdots i_n$ $N(\sigma)$为奇，奇置换，偶置换。偶置换群，A_n交错群 $\frac{n!}{2}$个 | $E(A)$子群变换群。任意群≅变换群。| n阶有限群≅S_n的一子群。

前n个 左陪集aH || $|aH|=|H|$. $a\in H \Leftrightarrow aH=H$ || $x\in aH$则 $xH=aH$，a陪集代表 || 划分，$G=\cup aH$ || $aH=bH \Leftrightarrow a\in bH$ or $b\in aH \Leftrightarrow ab^{-1}\in H$，$b^{-1}a\in H$ $e\in eH$，陪集一般不是群。|| 指数$[G:H]=\frac{|G|}{|H|}$ 有限群子群阶为群阶因子，反之不对应 || 有限群G任意元素阶n | n且$x^n=e$ || 阶为素数G循环。|| A.B:G有限子群 $|AB|=\frac{|A||B|}{|A\cap B|}$. $AB=\{ab\}=\cup aB$.

空图无边；平凡图一个点 || 简单图：无重边自环，无向，圈≥3. 有向无自环图圈≥2 || 非空简单图一定有同度数结点。|| 无向完全图K_n. 有向完全图. K-正则图 || 圈图，轮图(阶含心) || 完全二分图，$K_{m,n}$ || 多重图：重边 自环 无向；伪图：重边自环无向 || 支撑，生成子图. $G(V')$ $G(E')$ || 同构 || 补图 || 邻接矩阵；δ_{ij}. 无向图行的1=对应列的1；有向图：行出度，列入度 || 自环，重边，权 || 无向关联阵：重边为2 || 有向图不能表示重边 || 边列表，$A(k)=i$，$B(k)=j$ || 正向表：$A(n+1)$，$B:m$. 无向图2m. 正向表存出边，逆向表存入边 || 邻接表 V_1 → $0\ e_1$ → $2\ e_3\ \wedge$ || $G_1\otimes G_2$: $V_1\cup V_2$, E⊗

有向简单图圈≥2 || 简单→初级 || 无向图deg≥2则有圈 || 有向图无视向考量连通 || 可达，相互可达，(弱)连通，单向连通，强连通 ||

最短路，距离 || 有向图距离不对称 || 极大连通子图，连通支. $P(G)$ || 割集 点连通度 || 不连通图$K(G)=0$，K_n无点割集 || ∃v.w，v.w间路必过u. 充要条件 || 桥 || 边连通度$\lambda(G)$ || $\lambda(K_n)=n-1$，不连通图$\lambda(G)=0$ || 充要：u.v 恒过e ⇔ e不在任何圈上 || 删点割集产生≥2，删边割集=2 ||

欧拉：经所有边 || 非欧拉图：有路无圈 || 无向连通有欧拉充要：偶度 || 找欧拉回路：点扩充法 || 6126→612432 6 || 仅两奇点有欧拉道路 || k个奇度点，则$E(G)$可划分为$\frac{k}{2}$个简单道路。|| 2k奇点k笔画 || 有向图每个点入=出有欧拉回路 || 仅一组点$d^+(i)$多1，$d^-(i)$少一则有欧道 ||

H：无向连通初级回路过所有点 || k3及以上为H. || $P(G-S)\le|S|$ ⇐ H回；H道⇒ $P(G-S)\le|S|+1$ || 二分H图$|V_1|=|V_2|$ || $\forall d(u)+d(v)\ge n-1 \Rightarrow$ H道 || $\ge n\Rightarrow$ H回 || $\forall \ge\frac{n}{2}\Rightarrow$ H回 || 闭合图充要≥n则加边 || 简单图闭合图唯一 || n>2闭合图完全，则H图

最短路局部最短 || 边权为1，BFS，O(m) || 选址问题：$d_i=\max d_{ij}$，$d_k=\min$.

无回路图为林，连通则为树。T：1度节点为树叶，大于1为内节点 | 任意两点存在唯一路径 | m=n-1 | 任何边为桥 | 加边则有回路 | 有回路图也可有割边 | 支撑树，生成树 | T的树枝 | 余树边为弦 | 关联阵B. 删去点V_k的行. B_k. | 不同支撑树数目：$|B_k B_k^T|$ | 不含e的树：$G'=G-e$. 必含e：$T(G)-T(G')$. 或缩e两端为G_1'. $T(G_1')$ | 根树：某结点入为0，其余入1，V_0为根外向树 | B_{V_0}去根节点。B_{V_0}把1变为0行列式不变 | $\vec{B_k}$去掉V_k且将1换为0，根树=$\det(\vec{B_k}B_k^T)$ 以V_k为根不过e_1：删去e_1. 过e_1：作减法或删去到e_1终点的其他边 || 完全回路阵：e为列，回路为行 || T确定，每条余树边对应基本回路，与弦e同向，C_f. m-n+1行. $C_f=[I\ C_{f12}]$余树边在前，树在后. 基本回路阵∈回路阵：B与C边排列一致：$BC^T=0$. B_k与C_f边排列一致. $B_k=[B_{11},B_{12}]$则$C_{f12}=-B_{11}^T B_{12}^{-T}$. || 基本割集：一条树边与某些余树边，树边在后，一条树边割一个割集. $S_f=[S_{f11}\ I]$ S与C排列一致时. $SC^T=0$；S：割集矩阵. $S_{f11}=-C_{f12}^T=B_{12}^{-1}B_{11}$

层数：长度 | 树高 | k叉：至多k子 | 正则：均k子 | 正则→满 访支点 正则k元树 $n=ik+1$ | 高h k叉树 $n\le k^h$ | $WPL=\sum w_i l_i$. 最优二叉树一定正则 | 前缀码：互不为前缀 || 只有0,1二元前缀 || 左0右1 || 最优二叉树→最优前缀码

Warshall：如果$P(i,j)=1$，则P能到的点由P直接可到的点与P到j再到的点组成，即将i行与j行相加．for k．for i．for j．$P_{ij}=P_{ij}\vee(P_{ik}\wedge P_{kj})$
从左上开始从上到下从左到右扫，如果$i_j\neq0$，i行+j行写入i行。$O(n^3)$

$A^l(i,j)$是i到j长为l的路径数。$O(n^4)$

TSP精确解：DFS．边排序，展开n-1条，判定H，回溯再展开。 n!

便宜算法：每次选最小V，插入t增量最小的边 $O(n^2)$，更新．

Dijkstra：记录前趋，用$\pi(j)+l_{ij}$更新，依选小，全部时要素，Prim，用l_{ij}更新．$O(n^2)$ R^+
有向则仅有向更新．Ford：每次都用所有边更新，k++，直到$k=n-1$
$O(mn)$ Floyd：把warshall弄成权阵，无边则∞，取小值

中国邮路问题：找奇点，加边，判定回路。有向图：
$d_{v_i}=d^+-d^-$．加超收超发点出>入的指向超收，入>出的被超发指向。求d_{v_s}条经过所有虚边的道路，且和最小。 PT图：多点则设置超发超收点；Top排序找0入度结点，标号，删边，循环，保留原标号，$O(m)$
$\pi(1)=0$，$\pi(i)=\max(\pi_j+l(j,i))$．保留每个点$\pi(i)$
$t(v)=T(v)-\pi(v)$ $T(v)=\min(T(j)-l(i,j))$，从后往前，(直接后继一路径长)min.
随机生成支撑树：广搜与深搜避圈．

Kruskal：对边长排序，每次加入一条边少一个连通支。

Huffman：pop出前两个合并再插回．$O(n\cdot\log n)$