第六周习题课　条件极值

一.　条件极值

例 1 求原点到曲面$z^2 = xy + x - y + 4$的最短距离.

解：这个问题可看作条件极值问题：$\begin{cases} \min\{x^2+y^2+z^2\} \\ z^2 = xy + x - y + 4 \end{cases}$。

我们用 Lagrange 乘子法来直接求解这个问题。作 Lagrange 函数

$L(x,y,z,\lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(z^2 - xy - x + y - 4)$。令

$$\begin{aligned} L'_x &= 2x - \lambda(y+1) = 0 \\ L'_y &= 2y + \lambda(-x+1) = 0 \\ L'_z &= 2z + 2\lambda z = 0 \\ L'_\lambda &= z^2 - xy - x + y - 4 = 0 \end{aligned}$$

由上述第三个方程可知$\lambda = -1$或$z = 0$. 讨论如下：

情形$\lambda = -1$。 联立前两个方程得 $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$。不难解得唯一的解：$x = -1$, $y = 1$。

将$x = -1$, $y = 1$代入第四个方程得$z = \pm 1$。这就得到问题的两个驻点 $(-1,1,1)$和$(-1,1,-1)$.

情形$z = 0$。 联立前两个方程得 $\begin{cases} 2x - \lambda y = \lambda \\ -\lambda x + 2y = -\lambda \end{cases}$。

(i) 当$\lambda = 2$时，容易解得$x = y + 1$。代入方程$xy + x - y + 4 = 0$ 得 $y^2 + y + 5 = 0$。无实数解。

(ii) 当$\lambda \neq 2$时，由方程组 $\begin{cases} 2x - \lambda y = \lambda \\ -\lambda x + 2y = -\lambda \end{cases}$ 立刻得到 $(2-\lambda)x + (2-\lambda)y = 0$。即$y = -x$。代入方程$xy + x - y + 4 = 0$ 得$-x^2 + 2x + 4 = 0$。其解为$x = 1 \pm \sqrt{5}$。由此得到两个驻点：$(x,y,z) = (1+\sqrt{5}, -1-\sqrt{5}, 0)$, $(1-\sqrt{5}, -1+\sqrt{5}, 0)$。

综上我们得到四个驻点：$(-1,1,1)$, $(-1,1,-1)$, $(1+\sqrt{5}, -1-\sqrt{5}, 0)$, $(1-\sqrt{5}, -1+\sqrt{5}, 0)$。

这四个点与原点的距离分别为$\sqrt{3}$，$\sqrt{3}$，$2\sqrt{3+\sqrt{5}}$，$2\sqrt{3-\sqrt{5}}$。容易验证，这四个之

的最小值是$\sqrt{3}$. 因此，曲面上的两个点$(-1,1,1)$和$(-1,1,-1)$与原点的距离$\sqrt{3}$是所求得最短距离。解答完毕。

例 2 当x，y，$z>0$时，求函数$u=\ln x+2\ln y+3\ln z$在球面$x^2+y^2+z^2=6r^2$上的最大值，这里$r>0$．由此进一步证明，对于任意正实数a,b,c，下述不等式成立$ab^2c^3\le 108\left(\dfrac{a+b+c}{6}\right)^6$．

解：令 $L(x,y,z,\lambda)=\ln(xy^2z^3)-\lambda(x^2+y^2+x^2-6r^2)$，

$x>0$，$y>0$，$z>0$，$\lambda\in R$.

解方程组 $L_x=0$，$L_y=0$，$L_z=0$得$x^2=\dfrac{1}{2\lambda},y^2=\dfrac{2}{2\lambda},z^2=\dfrac{3}{2\lambda}$。

将它们代入球面方程得$\lambda=\dfrac{1}{2r^2}$。

这就得到函数$L(x,y,z,\lambda)$的唯一驻点$(x,y,z,\lambda)=(r,r\sqrt{2},r\sqrt{3},\ 1/(2r^2))$。

可以证明函数$u=\ln x+2\ln y+3\ln z$在球面$x^2+y^2+z^2=6r^2$上的最大值在点$(x,y,z)=(r,r\sqrt{2},r\sqrt{3})$处取得。（严格证明有点麻烦，已超出了本课程对同学们的要求。可类似于课本第 90 页中例 1.9.4，作个直观的说明。）

所以函数$u=\ln x+2\ln y+3\ln z$在球面$x^2+y^2+z^2=6r^2$上的最大值为$u_{\max}=\ln r+\ln 2r^2+3\ln(\sqrt{3}r)=6\ln r+\dfrac{3}{2}\ln 3+\ln 2$。

$$\ln xy^2z^3=\ln x+2\ln y+3\ln z\le 6\ln r+\ln\sqrt{108}=\ln[\sqrt{108}(\frac{x^2+y^2+z^2}{6})^3].$$

$$xy^2z^3\le\sqrt{108}(\frac{x^2+y^2+z^2}{6})^3,$$

两边平方得$x^2y^4z^6\le 108(\dfrac{x^2+y^2+z^2}{6})^6$

所以对任意正数a,b,c有$ab^2c^3\le 108(\dfrac{a+b+c}{6})^6$。证毕。

例 3 求抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $x+y+z=1$ 的交线（椭圆）的长轴、短轴的长.

解：设(x_1,y_1,z_1)，(x_2,y_2,z_2)为椭圆上的两点,

$$\begin{cases} \\ \min\left[\left(x_1-x_2\right)^2+\left(y_1-y_2\right)^2+\left(z_1-z_2\right)^2\right] \\ z_1=x_1^2+y_1^2 \\ x_1+y_1+z_1=1 \\ z_2=x_2^2+y_2^2 \\ x_2+y_2+z_2=1 \end{cases}$$

这是条件极值问题,

$$L=\left(x_1-x_2\right)^2+\left(y_1-y_2\right)^2+\left(z_1-z_2\right)^2$$
$$+\lambda_1\left(z_1-x_1^2-y_1^2\right)+\lambda_2\left(x_1+y_1+z_1-1\right)+\lambda_3\left(z_2-x_2^2-y_2^2\right)+\lambda_4\left(x_2+y_2+z_2-1\right)$$

求出驻点，由几何意义可知存在最小值.　太多的约束条件，具体就不解了。

四．多元函数的最大值、最小值及其简单应用

例 4 求 $z=xy(4-x-y)$ 在 $x=1, y=0, x+y=6$ 所围闭区域 $\overline{D}$ 上的最大值.

解:（1）先求开区域 D^0 内的最大值.

$$z'_x=4y-2xy-y^2=0$$
$$z'_y=4x-x^2-2xy=0$$

驻点 $(0,0),\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right),(0,4),(4,0)$，在 D^0 内的驻点为 $\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$.

（2）三条边界上的驻点

$$\begin{cases} \text{Max } xy(4-x-y) \\ x=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Max } xy(4-x-y) \\ y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Max } xy(4-x-y) \\ x+y=6 \end{cases}$$

将 $x=1$ 代入 $z=xy(4-x-y)$

$$z=y(4-1-y)$$
$$z'=3-2y=0$$
$$y=\frac{3}{2}$$

在边界 $x=1$ 上的驻点为 $\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$，经检验，这个点在 $\overline{D}$ 的边界上.

将 $y=0$ 代入 $z=xy(4-x-y)$，

$$z=0$$

不必考虑.

作拉格伦日函数 $\quad L=xy(4-x-y)+\lambda(x+y-6)$

$$\begin{aligned} L'_x &= 4y-2xy-y^2+\lambda=0 \\ L'_y &= 4x-x^2-2xy+\lambda=0 \\ L'_\lambda &= x+y-6=0 \end{aligned}$$

驻点 $(3,3)$ 在 $\overline{D}$ 的边界上.

现有驻点 $\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3}\right),\left(1,\dfrac{3}{2}\right),(3,3)$，加上三个角点 $(1,0),(6,0),(1,5)$. 函数 $z=xy(4-x-y)$ 在有界闭区域 $\overline{D}$ 上连续，必有最大值，而且最大值必为上述六个点之一．计算函数 $z=xy(4-x-y)$ 在六个点上的值，

$$z\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)=\frac{64}{27}$$

最大；

$$z(3,3,)=-18$$

最小.

例 5 设 $u(x,y)$ 在 $x^2+y^2\le 1$ 上有二阶连续偏导数，在 $x^2+y^2<1$ 内满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=u$，

且在 $x^2+y^2=1$ 上， $u(x,y)\ge 0$，证明：当 $x^2+y^2\le 1$ 时， $u(x,y)\ge 0$。（提示：可用反证法证明）

证明：反证法：假设存在点 (x_0,y_0) 满足 ${x_0}^2+{y_0}^2\le 1$ 且 $u(x_0,y_0)<0$ 。

由条件：在 $x^2+y^2=1$ 上， $u(x,y)\ge 0$ 可知，在 $x^2+y^2\le 1$ 上的连续函数 $u(x,y)$ 在区域 $x^2+y^2\le 1$ 的最小值点 (x_1,y_1) 一定发生在区域 $x^2+y^2\le 1$ 的内部，因此

(x_1, y_1) 一定是极小值点，矩阵 $\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{bmatrix}_{(x_1, y_1)}$ 正定或半正定，这与

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)(x_1, y_1)=u(x_1, y_1)<0$$

矛盾。假设不成立，即当 $x^2+y^2 \le 1$ 时， $u(x, y) \ge 0$ 。

例 6 假设 $f(x, y)$ 有连续的偏导数，在全平面除原点之外处处满足等式

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}>0.$$

求证原点是 $f(x, y)$ 的唯一极小值点．并且满足 $\lim\limits_{x\to 0, y\to 0}\dfrac{f(x, y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+x^2}}=0$.

证明：

①证明原点之外任意点 (x, y) 都不是驻点，从而不是极值点．

任意固定 $(x, y)\ne(0,0)$ ，由题目条件推出 $\dfrac{(x, y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot \operatorname{grad} f(x, y)>0$ ．于是

$f(x, y)$ 在点 (x, y) 沿方向 $\dfrac{(x, y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 的方向导数不等于零．从而 $(x, y)\ne(0,0)$ 不是驻点．

②证明原点是驻点．

对于任意的 $x>0$ ，考察点 $(x,0)$ ．由题目条件推出 $x\dfrac{\partial f(x,0)}{\partial x}>0$ ，进而推出 $\dfrac{\partial f}{\partial x}>0$ ．令

$x\to 0^+$ ，因为偏导数连续，所以由极限保号性推出 $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\partial f(x,0)}{\partial x}\ge 0$

由题目条件又可以推出在点 $(-x,0)$ 满足 $-x\dfrac{\partial f(-x,0)}{\partial x}>0$ ．进而推出 $\dfrac{\partial f(-x,0)}{\partial x}<0$ ．令

$x\to 0^-$ ，又得到 $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\partial f(x,0)}{\partial x}\le 0$.

由 $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}\ge 0$ 和 $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}\le 0$ 推出 $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}=0$ ．同样的方法又可以推出 $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}=0$ ．因此原点是驻点．

③证明 $f(0,0)$ 是极小值.

任取 $M(x_0, y_0) \neq (0,0)$，现在证明 $(x_0, y_0) > f(0,0)$.

考察线段 $\overrightarrow{OM}$. 由题目条件又可以推出在 $\overrightarrow{OM}$ 上任意一点，$f(x,y)$ 沿 $\overrightarrow{OM}$ 方向的方向导数大于零. 从而 $f(x,y)$ 沿 $\overrightarrow{OM}$ 方向是单调增加的，从而 $f(M) > f(0,0)$.

证毕.

④证明 $\lim\limits_{x\to 0, y\to 0} \dfrac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+x^2}} = 0$.

注意到 $f(x,y)$ 有连续的偏导数，$\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0$ $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 0$. 所以 $\mathrm{d}f(0,0) = 0$.

函数增量与微分之差是 $\sqrt{x^2+x^2}$ 的高阶无穷小量，于是结论得证.

例 7 设 $p > 0$，$q > 0$ 满足 $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$。 求函数 $\dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}$ 在平面第一象限 $x > 0$, $y > 0$ 里满足约束条件 $xy = 1$ 的最小值。 由此进一步证明 Young 不等式 $\dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q} \geq xy$ ，$\forall x, y > 0$ 。

（注：这是课本第一章总复习题第 16 题，page 97。 在一元微分学里，我们已经学习过利用极值理论证明一些不等式。 利用多元极值理论，我们同样可以得到一些的不等式。本题就是一个很好的例子。）

解：考虑条件极值问题 min $\dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}$，$s.t.\ xy = 1$，$x > 0, y > 0$ 。

作 Lagrange 函数 $L(x, y, \lambda) = \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q} - \lambda(xy - 1)$ 。解方程组 $L_x = 0$, $L_y = 0$, $L_\lambda = 0$ ，

即解方程组

$L_x = x^{p-1} - \lambda y = 0$

$L_y = y^{q-1} - \lambda x = 0$

$L_\lambda = -(xy - 1) = 0$

在第一象限 $x > 0, y > 0$ 的解。不难解得方程组有唯一解 $x = 1, y = 1, \lambda = 1$.

由于函数 $\dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}$ 在双曲线 $xy = 1$ 上的函数值趋于正无穷，当 $x \to 0^+$，或 $y \to 0^+$ 。

因此函数$\dfrac{x^p}{p}+\dfrac{y^q}{q}$在双曲线$xy=1$的最小值点就是$x=1, y=1$,最小值为 1。

以下我们来证明 Young 不等式。要证$\dfrac{x^p}{p}+\dfrac{y^q}{q}\ge xy$，$\forall x, y>0$，即要证

$$\frac{1}{p}\frac{x^p}{xy}+\frac{1}{q}\frac{y^q}{xy}\ge 1。$$

记$a=\dfrac{x}{(xy)^{1/p}}$，$b=\dfrac{y}{(xy)^{1/q}}$，则$ab=\dfrac{xy}{(xy)^{(1/p)+(1/q)}}=1$.

根据第一部分条件极值的结论得$\dfrac{a^p}{p}+\dfrac{b^q}{q}\ge 1$。此即$\dfrac{1}{p}\dfrac{x^p}{xy}+\dfrac{1}{q}\dfrac{y^q}{xy}\ge 1$。 这表明 Young 不等式成立。证毕。