

习题课 级数

一. 常数项级数

1. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则必收敛的级数为 []. [D]

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{u_n}{n}$. (B) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$. (C) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - u_{2n})$. (D) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n+1})$.

2. 已知 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = 2$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n-1} = 5$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n =$ _____. [8]

3. 设 $0 < a_n < \frac{1}{n}$, 则下列级数中肯定收敛的是 []. [D]

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$; (B) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$; (C) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$; (D) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \ln n$

4. 设常数 $\lambda \neq 0$, $a_n > 0$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n \tan \frac{\lambda}{n}) a_{2n}$ [].

(A) 绝对收敛. (B) 条件收敛. (C) 发散. (D) 收敛性与 λ 有关. [A]

5. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 []. [D]

(A) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 小于 1; (B) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 小于等于 1;

(C) 若极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在, 其值小于 1; (D) 若极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在, 其值小于等于 1;

6. 设参数 $a \neq 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + a^2})$ 收敛性的结论是 []. [B]

(A) 绝对收敛. (B) 条件收敛.

(C) 发散. (D) 与参数 a 取值有关.

7. (正常数项级数收敛的判定与其项趋于零阶的估计问题)

设 $a_n > 0$, $p > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[n^p (e^{\frac{1}{n}} - 1) a_n \right] = 1$, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 p 的取值范围是_____.

解: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^{p-1}}} = 1, \quad p > 2$

8. 判断 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$ 的收敛性.

解: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{|a|}{e}$

$|a| < e$, 绝对收敛; $|a| > e$, 发散;

$|a| = e$, $|u_{n+1}| > |u_n|$ (因为 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 单调上升趋于 e) 发散.

9. 设 $a_n > 0$, 单调减且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 发散, 试问 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n + 1}\right)^n$ 是否收敛? 证明结论。

[收敛]

10. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p}\right)$ 的收敛性 ($p > 0$).

解: 记 $a_n = \frac{(-1)^n}{n^p}$, $b_n = \ln(1 + a_n)$, $c_n = a_n - b_n$

则 $c_n \sim \frac{1}{2n^{2p}}$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时.

(1) $p > 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 绝对收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛.

(2) $0 < p \leq \frac{1}{2}$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散.

(3) $\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 绝对收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 条件收敛.

(不能用 Leibnize 方法)

11. 常数项级数和积分的估值

设 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$, 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^p}$ 的收敛性.

解: 令 $\tan x = t$, $\frac{1}{2(n+1)} = \int_0^1 \frac{t^n}{2} dt < a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} < \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$,

$$\frac{1}{n^p(n+1)} < \frac{a_n}{n^p} < \frac{1}{n^{p+1}}.$$

所以当且仅当 $p > 0$ 时, 原级数收敛.

12. 设两条抛物线 $y = nx^2 + \frac{1}{n}$ 和 $y = (n+1)x^2 + \frac{1}{n+1}$,

记他们交点坐标的绝对值为 a_n 。

(1) 求这两条抛物线所围成的平面图形的面积

(2) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n}{a_n}$ 的和。

解: (1) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

$$S_n = 2 \int_0^{a_n} \left[nx^2 + \frac{1}{n} - (n+1)x^2 - \frac{1}{n+1} \right] dx = \frac{4}{3} a_n^3$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n}{a_n} = \frac{4}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{4}{3}$$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x} \quad (x \neq -n)$

解: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x} \quad (x \neq -n)$ 当 n 充分大 (即 $n+x > 0$) 时是交错级数, 且 $\left\{ \frac{1}{n+x} \right\}$ 单

调减少趋于零, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x} \quad (x \neq -n)$ 收敛; 又由于 $\left| \frac{(-1)^{n+1}}{n+x} \right| \sim \frac{1}{n} \quad (n \rightarrow \infty)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发

散, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x} \quad (x \neq -n)$ 条件收敛。

14. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{x}{n}$;

解: 当 $x = 0$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{x}{n}$ 的一般项都为零, 所以级数绝对收敛。

设 $x \neq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{x}{n}$ 当 n 充分大 (即 $n > \frac{2|x|}{\pi}$) 时是交错级数, 且 $\left| \sin \frac{x}{n} \right|$ 单调减少趋

于零, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{x}{n}$ 收敛; 又由于 $\left| (-1)^{n+1} \sin \frac{x}{n} \right| \sim \frac{|x|}{n} (n \rightarrow \infty)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n}$ 发散, 所以

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{x}{n}$ 条件收敛。

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}$

解: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}$ 不存在, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}$ 发散。

16. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{4^n \sin^{2n} x}{n}$

解: 当 $x \in (k\pi - \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{6})$ 时, 由于 $\left| (-1)^{n+1} \frac{4^n \sin^{2n} x}{n} \right| = \frac{1}{n} (4 \sin^2 x)^n$,

$0 \leq 4 \sin^2 x < 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (4 \sin^2 x)^n$ 收敛, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{4^n \sin^{2n} x}{n}$ 绝对收敛。

当 $x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ 时, $\sin^2 x = \frac{1}{4}$, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{4^n \sin^{2n} x}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 是条件收敛级

数。

在其他情况下, 由于 $\left| (-1)^{n+1} \frac{4^n \sin^{2n} x}{n} \right| = \frac{1}{n} (4 \sin^2 x)^n$, $4 \sin^2 x > 1$, 级数的一般项

趋于无穷大, 所以级数发散。

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n+1)x \cos(n-1)x}{n^p}$

解: 当 $x = \frac{k\pi}{2}$ 时, 级数的一般项都为零, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n+1)x \cos(n-1)x}{n^p}$ 绝对收敛。

设 $x \neq \frac{k\pi}{2}$ 。当 $p > 1$ 时, 由于 $\left| \frac{\sin(n+1)x \cos(n-1)x}{n^p} \right| \leq \frac{1}{n^p}$, 所以级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n+1)x \cos(n-1)x}{n^p}$ 绝对收敛。

当 $0 < p \leq 1$ 时, 由于

$$\frac{\sin(n+1)x \cos(n-1)x}{n^p} = \frac{\sin 2nx}{2n^p} + \frac{\sin 2x}{2n^p},$$

由 Dirichlet 判别法, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{2n^p}$ 收敛, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2x}{2n^p}$ 发散, 所以级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n+1)x \cos(n-1)x}{n^p}$ 发散。

当 $p \leq 0$ 时, 由于级数的一般项不趋于零, 所以级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n+1)x \cos(n-1)x}{n^p}$ 发散。

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{a}{1+a^n} \quad (a > 0).$

解: 设 $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{a}{1+a^n}$ 。

当 $a > 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \frac{1}{a} < 1$, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{a}{1+a^n}$ 绝对收敛;

当 $a = 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{a}{1+a^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$, 级数条件收敛;

当 $0 < a < 1$ 时, 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 收敛, $\left\{ \frac{a}{1+a^n} \right\}$ 单调有界, 由 Abel 判别法, 级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{a}{1+a^n}$ 收敛, 但由于 $|x_n| \sim \frac{a}{n} (n \rightarrow \infty)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n}$ 发散, 所以级数条件收敛。

19. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛, $\{x_n\}$ 单调减少, 利用 Cauchy 收敛原理证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = 0$ 。

证 由 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛, 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 $N' > 0$, 对一切 $m > n > N'$, 成立

$$0 < x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_m < \frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $N = 2(N'+1)$, 则当 $n > N$ 时, 有 $\left[\frac{n}{2}\right] > N'$, 于是成立

$$0 < \frac{n}{2}x_n < x_{\left[\frac{n}{2}\right]} + x_{\left[\frac{n}{2}\right]+1} + \cdots + x_n < \frac{\varepsilon}{2},$$

即

$$0 < nx_n < \varepsilon.$$

20. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$, 问级数 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 是否收敛?

解 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 不一定收敛。

反例: $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$, $y_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$, 但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$

发散。

21. 设正项数列 $\{x_n\}$ 单调减少, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n$ 发散。问级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+x_n}\right)^n$ 是否收敛?

并说明理由。

解 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+x_n}\right)^n$ 收敛。

因为正项数列 $\{x_n\}$ 单调减少, 所以必定收敛。如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n$ 是 Leibniz

级数, 因此收敛, 与条件矛盾, 所以必定有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha > 0$, 于是当 n 充分大时,

$$\left(\frac{1}{1+x_n}\right)^n < \left(\frac{1}{1+\frac{\alpha}{2}}\right)^n, \text{ 因此 } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+x_n}\right)^n \text{ 收敛}.$$

22. 若 $\{nx_n\}$ 收敛, $\sum_{n=2}^{\infty} n(x_n - x_{n-1})$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛。

证 令 $a_n = x_n, b_n = 1$, 则 $B_k = \sum_{i=1}^k b_i = k$ 。利用 Abel 变换, 得到

$$\sum_{k=1}^n x_k = nx_n - \sum_{k=1}^{n-1} k(x_{k+1} - x_k).$$

由于

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(x_{n+1} - x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} [(n+1)(x_{n+1} - x_n) \cdot \frac{n}{n+1}],$$

因为数列 $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$ 单调有界, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(x_{n+1} - x_n) = \sum_{n=2}^{\infty} n(x_n - x_{n-1})$ 收敛, 由 Abel 判

别法, $\sum_{n=1}^{\infty} n(x_{n+1} - x_n)$ 收敛。再由数列 $\{nx_n\}$ 的收敛性, 即可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛。

23. 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有二阶连续导数, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛。

证 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ 可知 $f(0) = 0, f'(0) = 0$, 于是

$$f\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{f''(0)}{2} \cdot \frac{1}{n^2} \quad (n \rightarrow \infty),$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛。

24. 已知任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)x_n$ 也发散。

证 采用反证法。令 $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)x_n$, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 收敛, 因为 $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$ 单调有界, 则由 Abel 判

别法, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} y_n$ 收敛, 与条件矛盾, 所以级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)x_n$ 发散。

25. 利用

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \rightarrow \gamma \quad (n \rightarrow \infty),$$

其中 γ 是 Euler 常数, 求下述 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 的更序级数的和:

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots.$$

解. 设 $b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$, 设级数

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} + \cdots$$

的部分和数列为 $\{S_n\}$ ，则

$$S_{3n} + \frac{1}{2}(b_n + \ln n) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1},$$

$$S_{3n} + \frac{1}{2}(b_n + \ln n) + \frac{1}{2}(b_{2n} + \ln 2n) = b_{4n} + \ln 4n,$$

于是

$$S_{3n} = b_{4n} - \frac{1}{2}b_n - \frac{1}{2}b_{2n} + \frac{3}{2}\ln 2.$$

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \gamma$ ，得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n} = \frac{3}{2}\ln 2.$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n}$ ，所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{3}{2}\ln 2.$$