



Review

●Lagrange乘子法

$$\max(\min) f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$$

$$s.t. \quad g_i(\mathbf{x}) = g_i(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

其中 $\text{rank} \frac{\partial(g_1, \dots, g_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = m$ (正则性条件).

结论: \mathbf{x}_0 是条件极值问题的最大 (小) 值点, 则 $\exists \lambda_0, s.t. (\mathbf{x}_0, \lambda_0)$ 是

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$$

$$= f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x_1, \dots, x_n) \text{ 的驻点.}$$

Remark: Lagrange乘子法只能给出条件极值问题极值点的范围.



第二章 含参积分与广义含参积分

$$I(t) = \int_a^b f(t, x) dx$$

$$I(t) = \int_a^{+\infty} f(t, x) dx$$

$$I(t) = \int_{-\infty}^b f(t, x) dx$$

x : 积分变量

t : 参变量

Question: $I(t)$ 的连续性、可微性、可积性？

Question: 研究含参积分的意义？



§1. 含参(定)积分的性质

1. 多元函数的一致连续性

Def. 设 $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, s.t.$

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon, \quad \forall x, x' \in \Omega, \|x - x'\| < \delta,$$

则称 f 在 Ω 上一致连续.

Thm. f 在 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上一致连续的充要条件是:

对 Ω 中任意两个点列 $\{x_k\}, \{y_k\}$, 当 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - y_k\| = 0$ 时, 有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (f(x_k) - f(y_k)) = 0.$$

Thm. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界闭集, $f \in C(\Omega)$, 则 f 在 Ω 上一致连续.



2. 含参积分的连续性

Thm1. 设二元函数 $g(t, x)$ 在 $D = [a, b] \times [\alpha, \beta]$ 上连续, 则

$$f(t) = \int_{\alpha}^{\beta} g(t, x) dx \text{ 在 } [a, b] \text{ 上一致连续.}$$

Proof: $g(t, x)$ 在有界闭区域 D 上连续, 从而一致连续. $\forall \varepsilon > 0$,

$\exists \delta > 0$, $\forall (t, x), (t_0, x_0) \in D$, 只要 $\sqrt{(t - t_0)^2 + (x - x_0)^2} \leq \delta$, 就有

$$|g(t, x) - g(t_0, x_0)| < \varepsilon.$$

特别地, $\forall t, t_0 \in [a, b]$, $\forall x \in [\alpha, \beta]$, 只要 $|t - t_0| < \delta$, 就有

$$|g(t, x) - g(t_0, x)| < \varepsilon,$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } |f(t) - f(t_0)| &= \left| \int_{\alpha}^{\beta} g(t, x) dx - \int_{\alpha}^{\beta} g(t_0, x) dx \right| \\ &\leq \int_{\alpha}^{\beta} |g(t, x) - g(t_0, x)| dx \leq \varepsilon(\beta - \alpha). \square \end{aligned}$$



Remark: 定理中 $f(t) = \int_{\alpha}^{\beta} g(t, x) dx$ 在 $[a, b]$ 上连续. 即

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = f(t_0), \quad \forall t_0 \in [a, b].$$

而

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \int_{\alpha}^{\beta} g(t, x) dx,$$

$$f(t_0) = \int_{\alpha}^{\beta} g(t_0, x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \lim_{t \rightarrow t_0} g(t, x) dx,$$

于是

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \int_{\alpha}^{\beta} g(t, x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \lim_{t \rightarrow t_0} g(t, x) dx.$$

对这一等式的解释是: $g(t, x)$ 在 $[a, b] \times [\alpha, \beta]$ 上连续时, 对参变量 t 的极限运算 $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t)$ 与对积分变量 x 的积分运算

$\int_{\alpha}^{\beta} g(t, x) dx$ 可以交换顺序. \square



例.

计算 $\lim_{y \rightarrow 0+} \int_0^1 \frac{1}{1 + (1 + xy)^{1/y}} dx$.

解: $\lim_{y \rightarrow 0+} (1 + xy)^{1/y} = e^x, \quad \forall x \in [0, 1].$ 令

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{1 + (1 + xy)^{1/y}}, & 0 \leq x \leq 1, 0 < y \leq 1, \\ \frac{1}{1 + e^x}, & 0 \leq x \leq 1, y = 0. \end{cases}$$

$f(x, y)$ 在 $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ 上连续, 因此

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0+} \int_0^1 \frac{1}{1 + (1 + xy)^{1/y}} dx &= \lim_{y \rightarrow 0+} \int_0^1 f(x, y) dx \\ &= \int_0^1 \lim_{y \rightarrow 0+} f(x, y) dx = \int_0^1 \frac{1}{1 + e^x} dx = \ln \frac{2e}{1 + e}. \quad \square \end{aligned}$$

清华大学



例: $\lim_{y \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{x}{y^2} e^{\frac{-x^2}{y^2}} dx \stackrel{?}{=} \int_0^1 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x}{y^2} e^{\frac{-x^2}{y^2}} dx$, 为什么?

解: $\lim_{y \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{x}{y^2} e^{\frac{-x^2}{y^2}} dx = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_0^1 e^{\frac{-x^2}{y^2}} d \frac{x^2}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{2} (1 - e^{\frac{-1}{y^2}}) = \frac{1}{2}.$

$$\int_0^1 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x}{y^2} e^{\frac{-x^2}{y^2}} dx = 0 \neq \lim_{y \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{x}{y^2} e^{\frac{-x^2}{y^2}} dx. \text{ 这是因为}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{y^2} e^{\frac{-x^2}{y^2}}, & x \in [0, 1], y \neq 0 \\ 0, & x \in [0, 1], y = 0 \end{cases} \text{ 在 } (0, 0) \text{ 不连续. 事实上,}$$

$$\lim_{x=y^2, y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x=y^2, y \rightarrow 0} \frac{x}{y^2} e^{\frac{-x^2}{y^2}} = \lim_{y \rightarrow 0} e^{-y^2} = 1 \neq f(0, 0) = 0. \square$$

交换极限需谨慎!

清华大学



例. $f \in C[0,1], f(x) > 0, \alpha > 0$. 研究 $g(y) = \int_0^1 \frac{y^\alpha f(x)}{x^2 + y^2} dx \ (y \geq 0)$

的连续性, 并证明你的结论.

结论: $0 < \alpha \leq 1$ 时, $g \in C(0, +\infty)$, 在 $y = 0$ 处不连续;
 $\alpha > 1$ 时, $g \in C[0, +\infty)$.

证明: 对 $(0, +\infty)$ 的任意闭子区间 $[\delta, N]$, $\frac{y^\alpha f(x)}{x^2 + y^2} \ (\alpha > 0)$ 在 $[0,1] \times [\delta, N]$ 上连续, 因此 $g(y)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续.

以下讨论 $g(y)$ 在 $y_0 = 0$ 处的连续性. $g(0) = 0$.

$f \in C[0,1], f(x) > 0$, 因此 f 在 $[0,1]$ 上有最大值 M 和最小值 m , 且 $0 < m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [0,1]$.



$$\frac{my^\alpha}{x^2 + y^2} \leq \frac{y^\alpha f(x)}{x^2 + y^2} \leq \frac{My^\alpha}{x^2 + y^2}, \forall y > 0, 0 \leq x \leq 1.$$

$$\int_0^1 \frac{y^\alpha}{x^2 + y^2} dx = y^{\alpha-1} \int_0^1 \frac{y}{x^2 + y^2} dx = y^{\alpha-1} \arctan \frac{1}{y}, \forall y > 0.$$

当 $0 < \alpha \leq 1$ 时,

$$g(y) = \int_0^1 \frac{y^\alpha f(x)}{x^2 + y^2} dx \geq my^{\alpha-1} \arctan \frac{1}{y}$$
$$\rightarrow \begin{cases} m\pi / 2, & \alpha = 1; \\ +\infty, & 0 < \alpha < 1 \end{cases} \quad y \rightarrow 0^+ \text{ 时.}$$

$g(y)$ 在 $y_0 = 0$ 处不连续.

当 $\alpha > 1$ 时, $0 \leq g(y) \leq My^{\alpha-1} \arctan \frac{1}{y}$, $\lim_{y \rightarrow 0^+} g(y) = 0 = g(0)$,

$g(y)$ 在 $y_0 = 0$ 处连续. \square



3. 含参积分的可微性

Thm2. 设 $D = [a, b] \times [\alpha, \beta]$, 且 $g(t, x), g'_t(t, x) \in C(D)$, 则

$f(t) = \int_{\alpha}^{\beta} g(t, x) dx$ 在 $[a, b]$ 上连续可导, 且

$$f'(t) = \frac{d}{dt} \int_{\alpha}^{\beta} g(t, x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} g'_t(t, x) dx.$$

Proof: $\forall t \in [a, b]$, 设 $t + \Delta t \in [a, b]$ ($f(t + \Delta t)$ 有意义), 则

$$\begin{aligned} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\Delta t} [g(t + \Delta t, x) - g(t, x)] dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} g'_t(t + \theta \Delta t, x) dx, \quad \theta(t, \Delta t, x) \in (0, 1). \end{aligned}$$

$g'_t(t, x) \in C(D)$, 从而一致连续, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, s.t.$

$$|g'_t(t_1, x) - g'_t(t_2, x)| < \varepsilon, \quad \forall (t_i, x) \in D, i = 1, 2, |t_1 - t_2| < \delta.$$

清华大学



于是, 当 $|\Delta t| < \delta$ 时,

$$|g'_t(t + \theta\Delta t, x) - g'_t(t, x)| < \varepsilon,$$

从而有

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} - \int_{\alpha}^{\beta} g'_t(t, x) dx \right| \\ &= \left| \int_{\alpha}^{\beta} g'_t(t + \theta\Delta t, x) dx - \int_{\alpha}^{\beta} g'_t(t, x) dx \right| \\ &\leq \int_{\alpha}^{\beta} |g'_t(t + \theta\Delta t, x) - g'_t(t, x)| dx \leq (\beta - \alpha)\varepsilon. \end{aligned}$$

$$\text{故 } f'(t) = \int_{\alpha}^{\beta} g'_t(t, x) dx. \square$$



Remark: 当二元函数 $g(t, x), g'_t(t, x)$ 在 $[a, b] \times [\alpha, \beta]$ 上连续

时, 含参变量 t 的积分 $\int_{\alpha}^{\beta} g(t, x) dx$, 对于参变量 t 求导的运算与对于积分变量 x 的积分运算可以交换次序:

$$\frac{d}{dt} \int_{\alpha}^{\beta} g(t, x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} g'_t(t, x) dx.$$

于是, 当积分 $f(t) = \int_{\alpha}^{\beta} g(t, x) dx$ 难以计算, 而 $f(t_0)$ 容易计算

时, 可尝试先求出 $f'(t) = \int_{\alpha}^{\beta} g'_t(t, x) dx$, 再对 t 积分:

$$f(t) = f(t_0) + \int_{t_0}^t f'(t) dt.$$



例.

$F(x) = \int_0^{2\pi} e^{x \cos \theta} \cos(x \sin \theta) d\theta$, 证明 $F(x) \equiv 2\pi$.

Proof. 令 $f(x, \theta) = e^{x \cos \theta} \cos(x \sin \theta)$, 则 $\forall r > 0$, $f(x, \theta)$,

$f'_x(x, \theta)$ 在 $[-r, r] \times [0, 2\pi]$ 上连续. 因此

$$F'(x) = \int_0^{2\pi} f'_x(x, \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} e^{x \cos \theta} \cos \theta \cos(x \sin \theta) d\theta \\ - \int_0^{2\pi} e^{x \cos \theta} \sin(x \sin \theta) \sin \theta d\theta \triangleq I - J.$$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{x} e^{x \cos \theta} d \sin(x \sin \theta) \\ = \frac{1}{x} e^{x \cos \theta} \sin(x \sin \theta) \Big|_{\theta=0}^{2\pi} - \frac{1}{x} \int_0^{2\pi} \sin(x \sin \theta) d e^{x \cos \theta} = J, \forall x \neq 0.$$

于是 $F'(x) \equiv 0, \forall |x| \leq r$. 由 $F(0) = 2\pi$ 及 r 的任意性, $F(x) \equiv 2\pi$. \square

清华大学



Thm3. 设 $g(t, x), g'_t(t, x) \in C([a, b] \times [c, d])$, $\alpha(t), \beta(t)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且

$$c \leq \alpha(t), \beta(t) \leq d, \quad \forall t \in [a, b],$$

则

$$f(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} g(t, x) dx$$

在区间 $[a, b]$ 上可导, 且

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{d}{dt} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} g(t, x) dx \\ &= \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} g'_t(t, x) dx + g(t, \beta(t))\beta'(t) - g(t, \alpha(t))\alpha'(t). \end{aligned}$$



Proof.

令 $J(t, \alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} g(t, x) dx$, 由 $g(t, x), g'_t(t, x)$ 的连续性,

$$J'_t = \int_{\alpha}^{\beta} g'_t(t, x) dx, \quad J'_{\alpha} = -g(t, \alpha), \quad J'_{\beta} = g(t, \beta)$$

均在 $(t, \alpha, \beta) \in D = [a, b] \times [c, d] \times [c, d]$ 上连续 (自证), 因此 $J(t, \alpha, \beta)$ 在 D 上可微. 又因 $\alpha(t), \beta(t)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 复合函数

$$f(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} g(t, x) dx = J(t, \alpha(t), \beta(t))$$

在 $t \in [a, b]$ 上可微, 且

$$\begin{aligned} f'(t) &= J'_t + J'_{\alpha} \cdot \alpha'(t) + J'_{\beta} \cdot \beta'(t) \\ &= \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} g'_t(t, x) dx + g(t, \beta(t))\beta'(t) - g(t, \alpha(t))\alpha'(t). \quad \square \end{aligned}$$



例. $z(x, y) = \int_0^1 f(t) |xy - t| dt, 0 \leq x, y \leq 1, f \in C([0, 1]).$

求证 $z''_{xx} = 2y^2 f(xy).$

证明: 首先要去绝对值.

$$z = \int_0^{xy} f(t)(xy - t)dt + \int_{xy}^1 f(t)(t - xy)dt$$

$$z'_x = \int_0^{xy} f(t)ydt + \int_{xy}^1 f(t)(-y)dt$$

$$z''_{xx} = 2y^2 f(xy). \square$$



例. $f(x) = \int_0^x \left[\int_t^x e^{-s^2} ds \right] dt$. 求 $f(x)$.

解: 令 $g(x, t) = \int_t^x e^{-s^2} ds$, 则

$$f(x) = \int_0^x g(x, t) dt, \quad g'_x(x, t) = e^{-x^2}.$$

$g(x, t), g'_x(x, t)$ 均为 \mathbb{R}^2 上连续函数, $\alpha(x) = 0, \beta(x) = x$ 均为可导函数. 于是

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int_0^x g'_x(x, t) dt + g(x, \beta(x))\beta'(x) - g(x, \alpha(x))\alpha'(x) \\ &= \int_0^x e^{-x^2} dt + 0 - 0 = xe^{-x^2}. \end{aligned}$$

注意到 $f(0) = 0$, 有

$$f(x) = \int_0^x f'(y) dy = \int_0^x ye^{-y^2} dy = \frac{1}{2}(1 - e^{-x^2}). \quad \square$$

清华大学



4. 含参积分的可积性

Thm4. (累次积分交换次序的充分条件)

设 $g(t, x)$ 在 $(t, x) \in D = [a, b] \times [\alpha, \beta]$ 上连续, 则 $\int_{\alpha}^{\beta} g(t, x) dx$ 在 $t \in [a, b]$ 上可积, $\int_a^b g(t, x) dt$ 在 $x \in [\alpha, \beta]$ 上可积, 且

$$\int_a^b \left(\int_{\alpha}^{\beta} g(t, x) dx \right) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_a^b g(t, x) dt \right) dx,$$

简记为 $\int_a^b dt \int_{\alpha}^{\beta} g(t, x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} dx \int_a^b g(t, x) dt.$

Proof. 由 $g(t, x)$ 的连续性, $\int_{\alpha}^{\beta} g(t, x) dx$ 在 $t \in [a, b]$ 上连续, 从而可积. 同理, $\int_a^b g(t, x) dt$ 在 $x \in [\alpha, \beta]$ 上可积.

清华大学



关于累次积分交换次序, 我们可以证明更一般的结论:

$$\int_a^z \left(\int_\alpha^\beta g(t, x) dx \right) dt = \int_\alpha^\beta \left(\int_a^z g(t, x) dt \right) dx, \quad \forall z \in [a, b].$$

事实上, $z = a$ 时, 上式左右两边相等. 下面只要证两边对 z 的导函数存在且相等.

先看右边. $\forall z, z_0 \in [a, b], x, x_0 \in [\alpha, \beta]$, 有

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^z g(t, x) dt - \int_a^{z_0} g(t, x_0) dt \right| \\ & \leq \int_a^{z_0} |g(t, x) - g(t, x_0)| dt + \left| \int_{z_0}^z |g(t, x)| dt \right|, \end{aligned}$$

由 $g(t, x)$ 的连续性, $\int_a^z g(t, x) dt$ 在 $(z, x) \in D$ 上连续.



而 $\frac{\partial}{\partial z} \int_a^z g(t, x) dt = g(z, x)$ 也在 D 上连续, 于是

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_a^z g(t, x) dt \right) dx &= \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{\partial}{\partial z} \int_a^z g(t, x) dt \right) dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} g(z, x) dx. \end{aligned}$$

再看左边, 有

$$\frac{d}{dz} \int_a^z \left(\int_{\alpha}^{\beta} g(t, x) dx \right) dt = \int_{\alpha}^{\beta} g(z, x) dx,$$

故左右两边的导函数也相等, 命题得证. \square



例. $I = \int_0^1 \frac{x^2 - x}{\ln x} dx.$

化定积分为重积分

解: x^t 在 $(t, x) \in [1, 2] \times [0, 1]$ 上连续, 且

$$\int_1^2 x^t dt = \frac{x^t}{\ln x} \Big|_{t=1}^2 = \frac{x^2 - x}{\ln x}.$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{x^2 - x}{\ln x} dx = \int_0^1 \left(\int_1^2 x^t dt \right) dx = \int_1^2 \left(\int_0^1 x^t dx \right) dt \\ &= \int_1^2 \left(\frac{x^{t+1}}{t+1} \right) \Big|_{x=0}^1 dt = \int_1^2 \frac{1}{t+1} dt = \ln \frac{3}{2}. \square \end{aligned}$$

Question. $\frac{x^2 - x}{\ln x}$ 在 $x = 0, 1$ 的连续性?



作业：习题2.2 No. 1-5