

7. 两图的顶点数和边数均相同.

点	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	a	b	c	d	e	f
出度	2	1	2	0	1	3	1	2	2	1	0	3
入度	2	1	2	3	1	0	1	2	2	1	3	0

若同构, 设 $f(x)=y$ 表示 a 中顶点 x 对应 b 中顶点 y , 则有

$$f(v_6)=e, f(v_6)=f.$$

$$\text{令 } f(v_1)=b, f(v_2)=a, f(v_3)=c, f(v_5)=d, \text{ 则}$$

$$(v_i, v_j) \in E(G_a) \Leftrightarrow (v_i, v_j) \in E(G_b), \text{ 故两图同构.}$$

关联矩阵 $B=$

$$8. \text{ 邻接矩阵 } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9$

$$\text{边列表: } A: (1 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 5 \ 6 \ 6 \ 6)$$

$$B: (2 \ 4 \ 5 \ 1 \ 4 \ 3 \ 1 \ 3 \ 4)$$

正向表: A

1	3	4	6	7	10
---	---	---	---	---	----

2	4	5	1	4	3	1	3	4
---	---	---	---	---	---	---	---	---

2. 若 G 是连通图, 命题成立. ~~若 G 不是连通图, 则存在导出子图 G' , $V(G') \subset V(G)$ 且 G' 是极大连通子图.~~
 若 G 不是连通图, 则存在导出子图 G' , $V(G') \subset V(G)$ 且 G' 是极大连通子图.
 对两个顶点 x, y , 分两种情况:

(1) $x \in V(G')$ $y \notin V(G')$ 或 $x \notin V(G')$ $y \in V(G')$. (不妨设为前者)
 若 $(x, y) \in E(G)$ 则 G' 添加 y 后仍连通. 矛盾. 故 $(x, y) \notin E(G)$, $(x, y) \in E(\bar{G})$.

(2) $x, y \in V(G')$
 由 $V(G') \subset V(G)$ 得 $(z) \notin V(G')$.
 由 (1), $(x, z) \in E(\bar{G})$, $(z, y) \in E(\bar{G})$. $\therefore x, y$ 两点在 \bar{G} 中连通.

(3) $x, y \notin V(G')$
 由 $V(G')$ 极大得 $(z) \notin V(G')$.
 由 (1), $(x, z) \in E(\bar{G})$, $(z, y) \in E(\bar{G})$. $\therefore x, y$ 两点在 \bar{G} 中连通.

综上, \bar{G} 中任意两点均连通, \bar{G} 是连通图, 命题成立.

3. 假设不相交. P_1, P_2 端点分别为 s_1, t_1, s_2, t_2 .
 由图连通得 s_1, s_2 间存在道路, 设其中最长为 P .

故 t_1, t_2 间存在道路. 因 t_1 到 s_1, s_1 到 s_2, s_2 到 t_2 均存在道路.
 P 一定先经过 P_1 上若干条边, 再经过 P_1, P_2 以外的部分, 再经过 P_2 上若干条边
 (若干可以为 0). 若离开 P_1 后再回到 P_1 : ①若路经外部分的长度小于等于 P_1 内的
 的长度则可替 P_1 内的部分代替 P_1 外的部分; ②即外部分长度不可能大于 P_1 内的.
 否则 P 可变得更长. 矛盾.

设 P 在 P_1, P_2 上分别经过 d_1, d_2 条边, P_1, P_2 长度为 l .

若 $d_1 + d_2 + 1 > l$, 则 P 比 P_1, P_2 长, 与 P_1, P_2 最长矛盾.

若 $d_1 + d_2 + 1 \leq l$, 则 $s_1 \rightarrow s_2$ 的路径 P' 长度至少为 $l - d_1 + l - d_2 + 1 = 2l - d_1 - d_2 + 1$
 $\geq 2l - (l - 1) + 1 = l + 2$. 与 P_1, P_2 最长矛盾.

综上, P_1, P_2 一定相交.

最长道路