第七周习题课　条件极值、含参定积分

1. 求原点到曲面$z^2=xy+x-y+4$的最短距离.

解：这个问题可看作条件极值问题：$\begin{cases}\min\{x^2+y^2+z^2\}\\ z^2=xy+x-y+4\end{cases}$。

我们用 Lagrange 乘子法来直接求解这个问题。作 Lagrange 函数

$L(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2+\lambda(z^2-xy-x+y-4)$。令

$$\begin{aligned}L'_x&=2x-\lambda(y+1)=0\\ L'_y&=2y+\lambda(-x+1)=0\\ L'_z&=2z+2\lambda z=0\\ L'_\lambda&=z^2-xy-x+y-4=0\end{aligned}$$

由上述第三个方程可知$\lambda=-1$或$z=0$. 讨论如下：

情形$\lambda=-1$。 联立前两个方程得 $\begin{cases}2x+y=-1\\ x+2y=1\end{cases}$。不难解得唯一的解：$x=-1$，$y=1$。

将$x=-1$，$y=1$代入第四个方程得$z=\pm1$。这就得到问题的两个驻点 $(-1,1,1)$和$(-1,1,-1)$.

情形$z=0$。 联立前两个方程得 $\begin{cases}2x-\lambda y=\lambda\\ -\lambda x+2y=-\lambda\end{cases}$。

(i) 当$\lambda=2$时，容易解得$x=y+1$。代入方程$xy+x-y+4=0$ 得 $y^2+y+5=0$。无实数解。

(ii) 当$\lambda\neq2$时，由方程组 $\begin{cases}2x-\lambda y=\lambda\\ -\lambda x+2y=-\lambda\end{cases}$ 立刻得到

$(2-\lambda)x+(2-\lambda)y=0$。即$y=-x$。代入方程$xy+x-y+4=0$

得$-x^2+2x+4=0$。其解为$x=1\pm\sqrt{5}$。由此得到两个驻点：

$(x,y,z)=(1+\sqrt{5},-1-\sqrt{5},0)$，$(1-\sqrt{5},-1+\sqrt{5},0)$。

综上我们得到四个驻点：$(-1,1,1)$，$(-1,1,-1)$，$(1+\sqrt{5},-1-\sqrt{5},0)$，$(1-\sqrt{5},-1+\sqrt{5},0)$。

这四个点与原点的距离分别为$\sqrt{3}$，$\sqrt{3}$，$2\sqrt{3+\sqrt{5}}$，$2\sqrt{3-\sqrt{5}}$。容易验证，这四个之的最小值是$\sqrt{3}$. 因此，曲面上的两个点$(-1,1,1)$和$(-1,1,-1)$与原点的距离$\sqrt{3}$是所求得最

短距离。解答完毕。

2. 求 $z = xy(4 - x - y)$ 在 $x = 1, y = 0, x + y = 6$ 所围闭区域 $\overline{D}$ 上的最大值与最小值.

解：（1）先求开区域 D^0 内的极值.

$$
\begin{aligned}
z'_x &= 4y - 2xy - y^2 = 0 \\
z'_y &= 4x - x^2 - 2xy = 0
\end{aligned}
$$

驻点 $(0,0),\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3}\right),(0,4),(4,0)$，在 D^0 内的驻点为 $\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3}\right)$.

（2）三条边界上的驻点

$$
\begin{cases}
\text{Max } xy(4 - x - y) \\
x = 1
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\text{Max } xy(4 - x - y) \\
y = 0
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\text{Max } xy(4 - x - y) \\
x + y = 6
\end{cases}
$$

将 $x = 1$ 代入 $z = xy(4 - x - y)$

$$
\begin{aligned}
&z = y(4 - 1 - y) \\
&z' = 3 - 2y = 0 \\
&y = \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

在边界 $x = 1$ 上的驻点为 $\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$，经检验，这个点在 $\overline{D}$ 的边界上.

将 $y = 0$ 代入 $z = xy(4 - x - y)$， $z = 0$． 不必考虑.

作拉格朗日函数 $\quad L = xy(4 - x - y) + \lambda(x + y - 6)$

$$
\begin{aligned}
L'_x &= 4y - 2xy - y^2 + \lambda = 0 \\
L'_y &= 4x - x^2 - 2xy + \lambda = 0 \\
L'_\lambda &= x + y - 6 = 0
\end{aligned}
$$

驻点 $(3,3)$ 在 $\overline{D}$ 的边界上.

现有驻点 $\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3}\right),\left(1,\dfrac{3}{2}\right),(3,3)$，加上三个角点 $(1,0),(6,0),(1,5)$. 函数 $z = xy(4 - x - y)$

在有界闭区域 $\overline{D}$ 上连续，必有最大值与最小值，而且最大值点与最小值点必为上述六个点中的两个．计算函数 $z=xy(4-x-y)$ 在六个点上的值，$z\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)=\frac{64}{27}$ 最大；$z(3,3,)=-18$ 最小．

3. 求椭圆 $5x^2+4xy+2y^2=1$ 的长半轴和短半轴长。

分析：观察到 (x,y) 用 $(-x,-y)$ 代替，方程不变，因此椭圆上的点关于坐标原点对称，所以椭圆的中心点在坐标原点。因此问题转化为求 $f(x,y)=x^2+y^2$ 在条件 $5x^2+4xy+2y^2=1$ 下的极值。

解：令 $f(x,y)=x^2+y^2$ 且 $L(x,y)=x^2+y^2-\lambda(5x^2+4xy+2y^2-1)$，

解方程组 $\begin{cases} L_x^{'}=2x-10\lambda x-4\lambda y=0 \\ L_y^{'}=2y-4\lambda x-4\lambda y=0 \\ 5x^2+4xy+2y^2-1=0 \end{cases}$

得 $\begin{cases} (1-5\lambda)x-2\lambda y=0 & (1) \\ -2\lambda x+(1-2\lambda)y=0 & (2) \\ 5x^2+4xy+2y^2-1=0 & (3) \end{cases}$

因为奇次线性方程组有非零解的充分必要条件是系数矩阵的行列式为零，方程(3)表明 $x,\ y$ 不全为零，故上述方程组有非零解，因此必有方程(1)与(2)的系数矩阵行列式

$\begin{vmatrix} 1-5\lambda & -2\lambda \\ -2\lambda & 1-2\lambda \end{vmatrix}=0$，解得 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=\frac{1}{6}$.

设对应于 λ_i，方程组的解是 (x_i,y_i), 带入方程组，且 $(1)x_i+(2)y_i$ 得

$x_i^2+y_i^2-\lambda_i(5x_i{}^2+4x_iy_i+2y_i{}^2)=0$，所以

$x_1^2+y_1^2=\lambda_1=1,\ x_2^2+y_2^2=\lambda_2=\frac{1}{6}$．故长半轴长 1，短半轴长 $\frac{1}{\sqrt{6}}$.

4. 函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(x^2+y^2)z+\ln z+2(x+y+1)=0$ 确定. 求 $z(x,y)$ 的极值。

解法一、将方程中的 z 看做是 x,y 的函数，从而方程变为 x,y 的恒等式。利用无条件极值的解法，求出稳定点，再利用充分条件验证稳定点是否是极值点。

解：对方程两边求偏导$\begin{cases} 2xz+(x^2+y^2+\dfrac{1}{z})z_x^{'}+2=0 \\ 2yz+(x^2+y^2+\dfrac{1}{z})z_y^{'}+2=0 \end{cases}$

令 $z_x^{'}=0,\ z_y^{'}=0$，得 $x=y=-\dfrac{1}{z}$．带入原方程得 $\ln z+2-\dfrac{2}{z}=0$．（此方程的解也可通过图像得到）

令 $g(z)=\ln z+2-\dfrac{2}{z}$，则 $g^{'}(z)=\dfrac{1}{z}+\dfrac{2}{z^2}>0,\ \forall z>0$，所以 $g(z)$ 严格单调增加，

又 $g(1)=0$，所以 $z=1$ 是 $g(z)=0$ 得唯一零点。此时 $(x,y)=(-1,-1)$．因为

$$\begin{cases} 2z+4xz_x^{'}+(x^2+y^2+\dfrac{1}{z})z_{xx}^{''}-\dfrac{1}{z^2}(z_x^{'})^2=0 \\ 2yz_x^{'}+2xz_y^{'}+(x^2+y^2+\dfrac{1}{z})z_{xy}^{''}-\dfrac{1}{z^2}z_x^{'}z_y^{'}=0 \\ 2z+4yz_y^{'}+(x^2+y^2+\dfrac{1}{z})z_{yy}^{''}-\dfrac{1}{z^2}(z_y^{'})^2=0 \end{cases}$$

将 $x=y=-1,z=1$ 及 $z_x^{'}(-1,-1)=0,\ z_y^{'}(-1,-1)=0$ 带入，得

$z_{xx}^{''}(-1,-1)=z_{yy}^{''}(-1,-1)=-\dfrac{2}{3},\ z_{xy}^{''}(-1,-1)=0$，

所以 $z_{xx}^{''}(-1,-1)z_{yy}^{''}(-1,-1)-(z_{xy}^{''}(-1,-1))^2=\dfrac{4}{9}>0,\ z_{xx}^{''}(-1,-1)<0$ 知 $z=1$ 是极大值。

解法二、微分法

解：方程两边微分得 $(2xdx+2ydy)z+(x^2+y^2)dz+\dfrac{1}{z}dz+2dx+2dy=0$，即

$(2xz+2)dx+(2yz+2)dy+(x^2+y^2+\dfrac{1}{z})dz=0$，

令 $dz=0$，则有$\begin{cases} 2(xz+1)=0 \\ 2(yz+1)=0 \end{cases}$ 从而 $xz=-1,\ yz=-1$.

带入原方程，得 $\ln z-\dfrac{2}{z}+2=0$，显然 $z=1$ 是方程的解。

令 $g(z)=\ln z-\dfrac{2}{z}+2$，因为 $g^{'}(z)=\dfrac{1}{z}+\dfrac{2}{z^2}>0$，所以 $g(z)$ 是 z 的严格单调递增函数，

故 $z=1$ 是 $g(z)=0$ 的唯一解。

求二阶微分，得 $(2dx^2+2dy^2)z+(4xdx+4ydy)dz-\dfrac{1}{z^2}dz^2+(x^2+y^2+\dfrac{1}{z})d^2z=0$，

注意到 $dz=0$，将 $xz=-1,yz=-1$ 及 $z=1$ 带入，得 $d^2z=-\dfrac{2}{3}(dx^2+dy^2)<0$，

所以 $z=1$ 是函数的极大值且极大值点 $(-1,-1)$.

5. 证明：对任意的正数 x,y,z，恒有不等式成立：$xy^2z^3 \le 108(\frac{x+y+z}{6})^6$.

证明：令 $f(x,y,z)=\ln x+2\ln y+3\ln z$，约束条件是 $\varphi(x,y,z)=x+y+z-r=0$.

令 $L(x,y,z)=f(x,y,z)-\lambda\varphi(x,y,z)$，

解方程组 $\begin{cases}\frac{1}{x}-\lambda=0\\ \frac{2}{y}-\lambda=0\\ \frac{3}{z}-\lambda=0\\ \varphi(x,y,z)=0,\end{cases}$ 得 $(x,y,z,\lambda)=(\frac{r}{6},\frac{r}{3},\frac{r}{2},\frac{6}{r})$.

因为 $L''_{xx}=-\frac{1}{x^2}$，$L''_{yy}=-\frac{2}{y^2}$，$L''_{zz}=-\frac{3}{z^2}$，$L''_{xy}=L''_{zx}=L''_{yz}=0$，因此

$$d^2L(x,y,z)=-\frac{1}{x^2}dx^2-\frac{2}{y^2}dy^2-\frac{3}{z^2}dz^2<0,$$

所以唯一的驻点 $(x,y,z)=(\frac{r}{6},\frac{r}{3},\frac{r}{2})$ 是极大值点，从而是最大值点。

因此 $f(x,y,z)\le f(\frac{r}{6},\frac{r}{3},\frac{r}{2})=\ln 108(\frac{x+y+z}{6})^6$. 故不等式成立。

6. 求解下列问题：

(1) 设 $f(x)=\int_0^x\left[\int_t^x e^{-s^2}ds\right]dt$，求 $f'(x)$ 与 $f(x)$.

解：考虑矩形 $|x|\le R, |t|\le R \quad (R>0)$，在矩形中，$\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_t^x e^{-s^2}ds\right]=e^{-x^2}$ 连续，故

$$f'(x)=\int_0^x\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_t^x e^{-s^2}ds\right]dt+\int_x^x e^{-s^2}ds=\int_0^x e^{-x^2}ds=xe^{-x^2}$$

$$f(0)=0$$

$$f(x)=\int_0^x te^{-t^2}dt=1-\frac{1}{2}e^{-x^2}\text{。}$$

(2) 设 $f(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}e^{x\sqrt{1-y^2}}dy$，求 $f'(x)$.

解:

$$f'(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}\frac{\partial}{\partial x}\left[e^{x\sqrt{1-y^2}}\right]dy+e^{x\sqrt{1-\cos^2 x}}(-\sin x)-e^{x\sqrt{1-\sin^2 x}}(\cos x)$$
$$=\int_{\sin x}^{\cos x}\sqrt{1-y^2}e^{x\sqrt{1-y^2}}dy+e^{x\sqrt{1-\cos^2 x}}(-\sin x)-e^{x\sqrt{1-\sin^2 x}}(\cos x)$$

(3) 求 $\lim\limits_{a\to 0}\int_a^{1+a}\dfrac{dx}{1+x^2+a^2}$

解：令 $f(a,u,v)=\int_u^v\dfrac{dx}{1+x^2+a^2}$， $u=a$， $v=1+a$，则复合函数 $f(a,u,v)$ 为变量 a 的连续函数. 故

$$\lim_{a\to 0}\int_a^{1+a}\frac{dx}{1+x^2+a^2}=f(0,0,1)=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}.$$

(4) 求极限 $I=\lim\limits_{y\to 0^+}\int_0^1\dfrac{1}{1+(1+xy)^{\frac{1}{y}}}dx.$

解：令 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+(1+xy)^{\frac{1}{y}}}, & 0\le x\le 1,\ 0<y\le 1,\\ \dfrac{1}{1+e^x}, & 0\le x\le 1,\ y=0.\end{cases}$

则 $f(x,y)\in C(D)$，其中 $D=[0,1]\times[0,1]$. 故

$$I=\lim_{y\to 0^+}\int_0^1\frac{1}{1+(1+xy)^{\frac{1}{y}}}dx=\int_0^1\lim_{y\to 0^+}\frac{1}{1+(1+xy)^{\frac{1}{y}}}dx=\int_0^1\frac{1}{1+e^x}dx=-\int_0^1\frac{de^{-x}}{1+e^{-x}}=\ln\frac{2e}{1+e}.$$

7. 试求 a, b 之值，使积分 $\int_1^3(a+bx-x^2)^2dx$ 达到最小值。

解：记 $F(a,b)=\int_1^3(a+bx-x^2)^2dx$. 积分号下求导，得

$$\begin{cases}F_a'(a,b)=2\int_1^3(a+bx-x^2)dx=0,\\ F_b'(a,b)=2\int_1^3x(a+bx-x^2)dx=0.\end{cases}$$

解方程组得 $\begin{cases}a=-\dfrac{11}{3},\\ b=4.\end{cases}$ 注意到

$$d^2F(a,b)=4da^2+16dadb+\frac{52}{3}db^2=4(da+2db)^2+\frac{4}{3}db^2>0,$$

故 $F(a,b)$ 在唯一的极小值点 $a=-\dfrac{11}{3}$, $b=4$ 处取得最小值。

8. 设 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上一阶偏导数存在。若 $f_y'(x,y)$, $f_{yx}''(x,y)\in C(\mathbb{R}^2)$，证明：

$$f_{xy}''(x,y)=f_{yx}''(x,y),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

证明：令 $F(x,y)=f_y'(x,y),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2$. 因为 $f_y'(x,y)\in C(\mathbb{R}^2)$，

则对任意的 $c,\ y\in\mathbb{R}$， $f(x,y)-f(x,c)=\int_c^y F(x,t)dt.$

注意到 $F(x,y)\in C(\mathbb{R}^2)$, 且 $F_x'(x,y)=f_{yx}''(x,y)\in C(\mathbb{R}^2)$，

所以 $f_x'(x,y)-f_x'(x,c)=\int_c^y F_x'(x,t)dt.$

从而 $f_{xy}''(x,y)=F_x'(x,y)=f_{yx}''(x,y)$. 证毕

9. 计算积分 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\frac{dx}{\cos x},\quad (|a|<1)$

解：由于 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\frac{1}{\cos x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x}-\frac{\ln(1-a\cos x)}{\cos x}\right)=2a$，

因此这是一个正常积分。注意到

$$\frac{1}{a\cos x}\ln(1+a\cos x)=\int_0^1\frac{dy}{1+ay\cos x},\quad 0\le x<\frac{\pi}{2}.$$

$$\frac{1}{a\cos x}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}=2\int_0^1\frac{dy}{1-a^2y^2\cos^2 x},\quad 0\le x\le\frac{\pi}{2}.$$

$\frac{1}{1-a^2y^2\cos x}$ 在矩形区域 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$， $0\le y\le 1$ 上连续，故

$$\begin{aligned}I&=2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^1\frac{dy}{1-a^2y^2\cos^2 x}=2a\int_0^1 dy\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1-a^2y^2\cos^2 x}\\&=2a\int_0^1 dy\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1-a^2y^2+t^2}\quad (t=\tan x)\\&=a\pi\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{1-a^2y^2}}=\pi\arcsin a.\end{aligned}$$

10. 设 $f(t)=\int_0^1\ln\sqrt{x^2+t^2}dx,\quad (0\le t\le 1)$，求 $f_+'(0)$。

解：函数 $\ln\sqrt{x^2+t^2}$ 和 $\frac{\partial}{\partial t}\ln\sqrt{x^2+t^2}=\frac{t}{x^2+t^2}$ 在 $(0,0)$ 点不连续，

故积分与求偏导不能交换顺序。下面通过定义求，由于 $f(0)=-1$，且

$$f(t)=\ln\sqrt{1+t^2}-\int_0^1\frac{x^2}{x^2+t^2}dx=\ln\sqrt{1+t^2}+\int_0^1\frac{1}{\left(\frac{x}{t}\right)^2+1}dx-1=\ln\sqrt{1+t^2}-1+t\arctan\frac{1}{t}$$

因此 $\dfrac{f(t)-f(0)}{t}=\dfrac{1}{t}\ln\sqrt{1+t^2}+\arctan\dfrac{1}{t}\to\dfrac{\pi}{2},\ t\to 0^+$. 故 $f_+'(0)=\dfrac{\pi}{2}$.

思考：若将 t 的范围改为 $-1\le t\le 1$， $f'(0)$ 是否存在？

11. 求定积分 $I=\int_0^1\dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx.$

解：由于 $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}$ 的原函数不是初等函数，因此不能通过牛顿莱布尼兹公式直接求出积分值。引入变量 α ，令 $I(\alpha)=\int_0^1\dfrac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}dx.$

则 $I(1)=I$. 易见 $f(x,\alpha)=\dfrac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上满足积分号下求导的条件，于是

$$\begin{aligned}I'(\alpha)&=\int_0^1\frac{x}{(1+x^2)(1+\alpha x)}dx=\frac{1}{1+\alpha^2}\int_0^1\left(\frac{\alpha+x}{1+x^2}-\frac{\alpha}{1+\alpha x}\right)dx\\&=\frac{1}{1+\alpha^2}\left(\alpha\arctan x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\ln(1+\alpha x)\right)\Bigg|_0^1\\&=\frac{1}{1+\alpha^2}\left(\frac{\pi}{4}\alpha+\frac{1}{2}\ln 2-\ln(1+\alpha)\right).\end{aligned}$$

由此得出

$$\begin{aligned}I(1)&=I(0)+\int_0^1 I'(\alpha)d\alpha=\int_0^1\frac{1}{1+\alpha^2}\left(\frac{\pi}{4}\alpha+\frac{1}{2}\ln 2-\ln(1+\alpha)\right)d\alpha\\&=\left(\frac{\pi}{8}\ln(1+\alpha^2)+\frac{1}{2}\ln 2\arctan\alpha\right)\Big|_0^1-I(1),\end{aligned}$$

从而 $I(1)=\dfrac{\pi}{8}\ln 2.$

12. 计算积分 $I(a)=\int_0^{\pi/2}\dfrac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}dx$ 。

解：显然 $I(0)=0$ ，且 $I(a)$ 是奇函数。容易验证，对于上述积分，

积分号下求导定理的条件满足。于是我们有 $I'(a)=\int_0^{\pi/2}\dfrac{dx}{1+a^2\tan^2 x}$ 。

以下求这个积分。当 $a>0$ 时，令 $u=a\tan x$ 。则 $dx=\dfrac{adu}{a^2+u^2}$ 。 于是

$$I'(a)=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+a^2\tan^2 x}=\int_0^{+\infty}\frac{adu}{(1+u^2)(a^2+u^2)}$$ 。由于

$\dfrac{a}{(1+u^2)(a^2+u^2)}=\dfrac{a}{1-a^2}\left(\dfrac{1}{a^2+u^2}-\dfrac{1}{1+u^2}\right)$。因此不难求出 $I'(a)=\dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{1+a}$ 。

注意到 $I(0)=0$ 。于是我们得到 $I(a)=\int_0^{\pi/2}\dfrac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}dx=\dfrac{\pi}{2}\ln(1+a)$ 。

又 $I(a)$ 是奇函数。故

$$I(a)=\int_0^{\pi/2}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}dx=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(a)\ln(1+|a|)，\quad \forall a\in(-\infty,+\infty)。$$

======

以下供学有余力的同学选做。

13. 假设 $f(x,y)$ 有连续的偏导数，在全平面除原点之外处处有 $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}>0$.

求证：原点是 $f(x,y)$ 的唯一极小值点．并且满足 $\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

证明：

①证明原点之外任意点 (x,y) 都不是驻点，从而不是极值点.

任意固定 $(x,y)\neq(0,0)$，由题目条件推出 $\dfrac{(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\operatorname{grad}f(x,y)>0$．于是

$f(x,y)$ 在点 (x,y) 沿方向 $\dfrac{(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 的方向导数不等于零．从而 $(x,y)\neq(0,0)$ 不是驻点.

②证明原点是驻点.

对于任意的 $x>0$，考察点 $(x,0)$．由题目条件推出 $x\dfrac{\partial f(x,0)}{\partial x}>0$，进而推出 $\dfrac{\partial f}{\partial x}>0$．令

$x\to 0^+$，因为偏导数连续，所以由极限保号性推出 $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\partial f(x,0)}{\partial x}\geq 0$

由题目条件又可以推出在点 $(-x,0)$ 满足 $-x\dfrac{\partial f(-x,0)}{\partial x}>0$．进而推出 $\dfrac{\partial f(-x,0)}{\partial x}<0$．令

$x\to 0^-$，又得到 $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\partial f(x,0)}{\partial x}\leq 0$.

由 $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}\geq 0$ 和 $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}\leq 0$ 推出 $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}=0$．同样的方法又可以推出 $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}=0$．因

此原点是驻点.

③证明 $f(0,0)$ 是极小值.

任取 $(x,y)\neq(0,0)$， 我们证明 $f(x,y)>f(0,0)$，因此 $(0,0)$ 是函数 $f(x,y)$ 的极小值点。

令 $g(t)=f(tx,ty)$. 易知函数 $g(t)$ 是连续可微的。

由一元函数的 Lagrange 中值定理知 $g(1)-g(0)=g'(\xi)$， $\xi\in(0,1)$.

另一方面由复合函数的链式法则，有 $g'(t)=f_x^{'}(tx,ty)x+f_y^{'}(tx,ty)y$.

由假设 $xf_x^{'}+yf_y^{'}>0$ 知， $g'(t)=\dfrac{1}{t}\left(f_x(tx,ty)tx+f_y(tx,ty)ty\right)>0$， $\forall t>0$.

于是 $f(x,y)-f(0,0)=g(1)-g(0)=g'(\xi)>0$.

另解：直接利用二元函数的微分中值公式。

任取 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ 满足 $(x,y)\neq(0,0)$，存在 $\theta\in(0,1)$ 使得

$$f(x,y)-f(0,0)=xf_x^{'}(\theta x,\theta y)+yf_y^{'}(\theta x,\theta y)=\frac{1}{\theta}[\theta xf_x^{'}(\theta x,\theta y)+\theta yf_y^{'}(\theta x,\theta y)]>0,$$

因此 $f(x,y)>f(0,0)$. 故 $(0,0)$ 是函数 $f(x,y)$ 的极小值点。

④证明 $\lim\limits_{x\to0,y\to0}\dfrac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

注意到 $f(x,y)$ 有连续的偏导数，所以 $f(x,y)$ 可微。由于 $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}=0$， $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}=0$，因此 $\mathrm{d}f(0,0)=0$. 故函数值增量与微分之差是 $\sqrt{x^2+y^2}$ 的高阶无穷小量，

即 $\lim\limits_{x\to0,y\to0}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$. 证毕。

14. 设 $p>0$，$q>0$ 满足 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$。 求函数 $\dfrac{x^p}{p}+\dfrac{y^q}{q}$ 在平面第一象限 $x>0,y>0$ 里满足约束条件 $xy=1$ 的最小值。 由此进一步证明 Young 不等式 $\dfrac{x^p}{p}+\dfrac{y^q}{q}\geq xy$， $\forall x,y>0$。

（注：这是课本第一章总复习题第 16 题，page 97）

解：考虑条件极值问题 $\min\ \dfrac{x^p}{p}+\dfrac{y^q}{q}$， $s.t.\ xy=1$， $x>0,y>0$。

作 Lagrange 函数 $L(x,y,\lambda)=\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}-\lambda(xy-1)$。解方程组 $L_x=0$，$L_y=0$，$L_\lambda=0$，

即解方程组

$$L_x=x^{p-1}-\lambda y=0$$
$$L_y=y^{q-1}-\lambda x=0$$
$$L_\lambda=-(xy-1)=0$$

在第一象限 $x>0, y>0$ 的解。不难解得方程组有唯一解 $x=1, y=1, \lambda=1$.

由于函数 $\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}$ 在双曲线 $xy=1$ 上的函数值趋于正无穷，当 $x\to0^+$，或 $y\to0^+$。

因此函数 $\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}$ 在双曲线 $xy=1$ 的最小值点就是 $x=1, y=1$,最小值为 1。

以下我们来证明 Young 不等式。要证 $\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}\ge xy$，$\forall x,y>0$，即要证

$$\frac{1}{p}\frac{x^p}{xy}+\frac{1}{q}\frac{y^q}{xy}\ge1。$$

记 $a=\frac{x}{(xy)^{1/p}}$，$b=\frac{y}{(xy)^{1/q}}$，则 $ab=\frac{xy}{(xy)^{(1/p)+(1/q)}}=1.$

根据第一部分条件极值的结论得 $\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\ge1$。此即 $\frac{1}{p}\frac{x^p}{xy}+\frac{1}{q}\frac{y^q}{xy}\ge1$。 这表明 Young 不等式成立。证毕。