第一次习题课（多元函数极限、连续、可微及偏导）

一．累次极限与重极限

例.1 $f(x,y)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}, & x\cdot y\neq 0 \\ 0, & x\cdot y=0 \end{cases}$，分别求累次极限与二重极限。

例.2 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{3xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & x^2+y^2=0 \end{cases}$，分别求累次极限与二重极限。

例.3 $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$，证明：$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=0$，而二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$不存在。

例.4 记 $D=\{(x,y)\mid x+y\neq 0\}$， $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y},(x,y)\in D$ 。证明：

$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=1,\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=-1$，但是 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in D}} f(x,y)$ 不存在。

二．多元函数的极限与连续，连续函数性质

例.5 求下列极限：

（1） $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}(x+y)^{\frac{x+y+1}{x+y-1}}$；　　（2） $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\ln(x^2+y^2)$；

（3） $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(xy)}{x}$；　　（4） $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$；

（5） $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$ 。

例.6 证明：极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)}\left(\dfrac{|xy|}{x^2+y^2}\right)^{x^2}=0$.

例.7 若 $z=f(x,y)$在 R^2 上连续，且 $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty} f(x,y)=+\infty$，证明 函数 f 在 R^2 上一定有最小值点。

例.8 $f(\mathbf{x})$ 在 R^n 上连续, 且

（1） $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ 时， $f(\mathbf{x})>0$

（2） $\forall c>0,\quad f(c\mathbf{x})=cf(\mathbf{x})$

证明：存在 $a>0, b>0$，使 $a|\mathbf{x}|\le f(\mathbf{x})\le b|\mathbf{x}|$.

例. 9 若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的某个邻域内有定义， $f(0,0)=0$，且

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=a$$

a 为常数。证明：

（1） $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续；

（2）若 $a\ne -1$，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续，但不可微；

（3）若 $a=-1$，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微。

例.10 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2), & x^2+y^2\ne 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点是否连续?

___________(填是或否)；在 $(0,0)$ 点是否可微? _____________(填是或否).

三．多元函数的全微分与偏导数

例. 11 有如下做法：

设 $f(x,y)=(x+y)\varphi(x,y)$ 其中 $\varphi(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续，则

$df(x,y)=[\varphi(x,y)+(x+y)\varphi_x(x,y)]dx+[\varphi(x,y)+(x+y)\varphi_y(x,y)]dy$

令 $x=0, y=0$， $df(0,0)=\varphi(0,0)(dx+dy)$.

(1)指出上述方法的错误；

(2)写出正确的解法.

例.12 设二元函数 $f(x,y)$ 于全平面 $\Re^2$ 上可微，(a,b) 为平面 $\Re^2$ 上给定的一点，则极限

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(a+x,b)-f(a-x,b)}{x}=$ ___________________。

例.13 设 函 数 $f(x,y)$ 在 $(1,1)$ 点 可 微 ， $f(1,1)=1$ ， $f_x'(1,1)=2$ ， $f_y'(1,1)=3$ ，

$g(x)=f(x,f(x,x))$，求 $g'(1)$。

例.14 设 $z=f(x^2y,\dfrac{y}{x})$， 其中 $f\in C^2$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 。

例. 15　设 $z(x,y)$ 定义在矩形区域 $D=\{(x,y)|0\le x\le a, 0\le y\le b\}$ 上的可微函数。证明:

（1） $z(x,y)=f(y)\Leftrightarrow \forall(x,y)\in D, \dfrac{\partial z}{\partial x}\equiv 0$ ；

（2） $z(x,y)=f(y)+g(y)\Leftrightarrow \forall(x,y)\in D, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\equiv 0$

例. 16　n 为整数，若任意 $t>0,\ f(tx,ty)=t^n f(x,y)$，则称 f 是 n 次齐次函数。证明：

$f(x,y)$ 是零次齐次函数的充要条件是

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

例. 17　下列条件成立时能够推出 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点可微, 且全微分 $df=0$ 的是（）.

(A) 在点 (x_0,y_0) 两个偏导数 $f'_x=0, f'_y=0$

(B) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全增量 $\Delta f=\dfrac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$,

(C) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全增量 $\Delta f=\dfrac{\sin(\Delta x^2+\Delta y^2)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$

(D) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全增量 $\Delta f=(\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\dfrac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}$

例. 18　设 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$, 则在 $(0,0)$ 点(　　)

(A) 连续, 但偏导数不存在;　　(B) 偏导数存在, 但不可微;
(C) 可微;　　(D) 偏导数存在且连续.

例. 19　设 $z=\arcsin\dfrac{x}{y}$，求 dz.

例. 20　$u=\arctan\dfrac{x-y}{x+y}$，则 $\mathrm{d}u=$__________________

例.21　设函数 $z=2\cos^2(x-\dfrac{y}{2})$，证明 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

例.22　设函数 $z=(x+2y)^{xy}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.