



# Review

## 一致收敛函数项级数和函数的性质

- 逐项求极限

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \text{ 在区间 } I \text{ 上一致收敛} \\ f_n(x) \in C(I), \forall n \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \in C(I), \text{ 即 } \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)$$



## • 逐项积分

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \text{ 在区间 } [a, b] \text{ 上一致收敛} \\ f_n(x) \in C[a, b], \forall n \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \int_a^x \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^x f_n(t) dt, \forall x \in [a, b].$$



● 逐项求导

$$f_n(x) \in C^1[a, b], \forall n$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上一致收敛}$$

$$\exists x_0 \in [a, b], \text{ s.t. } \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x_0) \text{ 收敛}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (1) \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上一致收敛;} \\ (2) \left( \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x). \end{array} \right.$$



### § 3. 幂级数

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

内容:

- 幂级数的收敛域、收敛半径
- 幂级数和函数的性质
- $C^\infty$ 函数的幂级数展开



## 1. 幂级数的收敛性

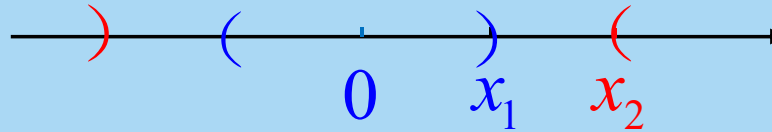
**Thm (Abel第一定理)**  $x_0 \neq 0, \{a_n x_0^n\}$  有界, 则  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  在

$(-|x_0|, |x_0|)$  上绝对收敛; 且  $\forall r < |x_0|, \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  在  $[-r, r]$  上一致收敛.

**Proof.**  $|a_n x_0^n| \leq M$ , 则  $|x| \leq r < |x_0|$  时,

$$|a_n x^n| = \left| a_n x_0^n \cdot \left( \frac{x}{x_0} \right)^n \right| \leq M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \leq M \left| \frac{r}{x_0} \right|^n.$$

故  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  在  $[-r, r]$  上绝对收敛且一致收敛 (Weierstrass).  $\square$



## Corollary.

(1)  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_1^n$  收敛  $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  在  $(-|x_1|, |x_1|)$  上点点绝对收敛.

(2)  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_2^n$  发散  $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  在  $|x| > |x_2|$  上点点发散.

(3)  $\exists \rho \in [0, +\infty], s.t. \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  在  $(-\rho, \rho)$  上点点绝对收敛, 在

$|x| > \rho$  上点点发散. 称此  $\rho$  为幂级数的收敛半径.



(4)  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  的收敛半径分别为  $\rho$

$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  当  $|x| < \rho$  时绝对收敛, 当  $|x| > \rho$  时发散

$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  当  $|x| < \rho$  时收敛, 当  $|x| > \rho$  时发散

$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  当  $|x| < \rho$  时绝对收敛, 当  $|x| > \rho$  时非绝对收敛

$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  当  $|x| < \rho$  时收敛, 当  $|x| > \rho$  时非绝对收敛



$$(5) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_0^n \text{ 收敛} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ 的收敛半径 } \rho \geq |x_0|.$$

$$(6) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_0^n \text{ 发散} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ 的收敛半径 } \rho \leq |x_0|.$$

$$(7) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_0^n \text{ 条件收敛} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ 的收敛半径 } \rho = |x_0|.$$





(8)  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ,  $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$  的收敛半径分别为  $\rho_1, \rho_2$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) x^n \text{ 的收敛半径 } \rho \geq \min\{\rho_1, \rho_2\}; \\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n x^n \text{ 的收敛半径 } \rho \geq \rho_1 \rho_2. \end{array} \right.$$



**Proof.**  $\forall |x| < \rho_1 \rho_2, \exists |x_1| < \rho_1, |x_2| < \rho_2, \text{ s.t. } x = x_1 x_2.$

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  的收敛半径为  $\rho_1$ , 则  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_1^n$  收敛,  $\{a_n x_1^n\}$  有界,

$\exists M > 0, \text{ s.t. } |a_n x_1^n| \leq M, \forall n.$  继而有

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n b_n x^n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n x_1^n b_n x_2^n| \leq M \sum_{n=0}^{+\infty} |b_n x_2^n|.$$

$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$  的收敛半径为  $\rho_2$ , 则  $\sum_{n=0}^{+\infty} |b_n x_2^n|$  收敛,  $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n b_n x^n|$  收敛.

由  $|x| < \rho_1 \rho_2$  的任意性,  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n x^n$  的收敛半径  $\rho \geq \rho_1 \rho_2.$   $\square$



## Remark.

(1)  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  的收敛域为区间, 且形如  $(-\rho, \rho)$ ,  $(-\rho, \rho]$ ,  $[-\rho, \rho)$ ,  $[-\rho, \rho]$ ,  $(-\infty, +\infty)$  或  $\{0\}$ .

(2)  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  在其收敛域上内闭一致收敛.

(Abel 第一、二定理)



Thm.(Abel第二定理)  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  在其收敛区间的端点  $x = \rho$

(或  $x = -\rho$ ) 收敛, 则  $\forall 0 < r < \rho$ , 该级数在  $[-r, \rho]$  (或  $[-\rho, r]$ ) 上一致收敛. ( $\Rightarrow$  幂级数在其收敛域中内闭一致收敛)

**Proof.** 设  $\sum a_n \rho^n$  收敛.  $\forall x \in [0, \rho]$ ,  $\sum a_n x^n = \sum a_n \rho^n (x/\rho)^n$ ,  $\{(x/\rho)^n\}$  关于  $n$  单调, 且  $|(x/\rho)^n| \leq 1$ , 一致有界. 由Abel判别法,  $\sum a_n x^n$  在  $[0, \rho]$  上一致收敛. 又  $\forall r \in (0, \rho)$ ,  $\sum a_n x^n$  在  $[-r, r]$  上一致收敛 (Abel第一定理), 故  $\sum a_n x^n$  在  $[-r, \rho]$  上一致收敛.  $\square$



Thm. 记  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  的收敛半径为  $\rho$ .

(1) 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q$ , 则  $\rho = 1/q$ ;

(2) 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$ , 则  $\rho = 1/q$ ;

(3) 若  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q$ , 则  $\rho = 1/q$ ;

(4) 若  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$ , 则  $\rho = 1/q$ ;

这里,  $\frac{1}{0} = +\infty$ ,  $\frac{1}{\infty} = 0$ .

Proof. (1)  $\forall |x| < \frac{1}{q}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = q|x| < 1$ , 故  $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n x^n|$  的收敛.  
( $>$ ) ( $>$ ) (发散)  $\square$

清华大学



例. 求  $\sum_{n=0}^{+\infty} (1+1/n)^{n^2} x^n$  的收敛半径与收敛域.

解:  $a_n = (1+1/n)^{n^2}$ ,  $\sqrt[n]{a_n} = (1+1/n)^n \rightarrow e$ , 则  $\rho = 1/e$ .

$|x| = 1/e$  时,

$$\begin{aligned} |a_n x^n| &= e^{n^2 \ln(1+1/n) - n} = e^{n^2 (1/n - 1/2n^2 + o(1/n^2)) - n} \\ &= e^{-1/2 + o(1)} \rightarrow e^{-1/2} \neq 0, n \rightarrow +\infty \text{ 时.} \end{aligned}$$

因此  $\sum_{n=0}^{+\infty} (1+1/n)^{n^2} x^n$  在  $x = \pm 1/e$  处发散, 其收敛域为  $(-1/e, 1/e)$ .  $\square$



$x+1=y$ 的换元

例. 求  $\sum_{n=0}^{+\infty} (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}) \frac{1}{2^n} (x+1)^{2n}$  的收敛半径与收敛域.

解: 令  $a_n = (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}) \frac{1}{2^n}$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}$ ,  $y = \pm 2$  时,

$$|a_n y^n| = (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}) \rightarrow +\infty,$$

直接放缩, 前面那个分式求和小于  $n$

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n$  的收敛域为  $(-2, 2)$ . 于是  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x+1)^{2n}$  的收敛域为

$(x+1)^2 < 2$ , 即  $x \in (-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2})$ , 收敛半径为  $\rho = \sqrt{2}$ .  $\square$



例. 求  $\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$  的收敛半径与收敛域.

解法一: 记  $x^n$  的系数为  $a_n$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1, \rho = 1$ .

又  $\sum_{n=0}^{+\infty} (\pm 1)^{n^2}$  发散, 故  $\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$  的收敛域为  $(-1, 1)$ .

解法二:  $\forall |x| < 1, \sum_{n=0}^{+\infty} |x^{n^2}| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |x|^n$  收敛;

又  $\sum_{n=0}^{+\infty} (\pm 1)^{n^2}$  发散, 故  $\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$  的收敛域为  $(-1, 1), \rho = 1. \square$





## 2. 幂级数和函数的性质

**Thm.**  $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  在其收敛域的内部  $(-\rho, \rho)$  连续; 若

幂级数在  $x = \rho$  收敛, 则  $S(x)$  在  $x = \rho$  左连续; 若幂级数在  $x = -\rho$  收敛, 则  $S(x)$  在  $x = -\rho$  右连续.

**Thm.** 设  $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  的收敛半径为  $\rho$ , 则

$$\int_0^x S(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \quad \forall x \in (-\rho, \rho),$$

且  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$  的收敛半径为  $\rho$ .



**Thm.**  $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  的收敛半径为  $\rho$ , 则  $S(x) \in C^\infty(-\rho, \rho)$ ,

且  $\forall x \in (-\rho, \rho), \forall k = 1, 2, \dots$

$$S^{(k)}(x) = k! a_k + \frac{(k+1)!}{1!} a_{k+1} x + \dots + \frac{(k+n)!}{n!} a_{n+k} x^n + \dots,$$

且  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(k+n)!}{n!} a_{n+k} x^n$  的收敛半径为  $\rho$ .



**Remark.** 逐项积分和逐项求导后得到的新的幂级数的收敛半径与原级数相同.

**Remark.** 逐项积分后得到的新的幂级数的收敛域可能改变.例如,  $\sum \frac{x^n}{n}$  的收敛域为  $[-1, 1)$ , 逐项积分后的级数为

$$\sum \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}, \text{收敛域为} [-1, 1].$$



### 3. 函数的幂级数展开

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad \forall x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$$

$$\Rightarrow \forall x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho), k = 1, 2, \dots$$

$$f^{(k)}(x) = k! a_k + \frac{(k+1)!}{1!} a_{k+1} (x - x_0)$$

$$+ \dots + \frac{(k+n)!}{n!} a_{n+k} (x - x_0)^n + \dots$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad (\text{令 } x = x_0)$$

**Remark.** 幂级数展开的唯一性.



Def. 称  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$  为  $f(x)$  在  $x_0$  的 Taylor 级数; 当

$x_0 = 0$  时, Taylor 级数也称为 Maclaurin 级数.

Question.  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$  在点  $x$  处是否收敛?

Question. 若  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$  在点  $x$  处收敛, 其和函数  
是否一定是  $f(x)$ ? 不一定



例.  $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0; \\ 0 & x = 0. \end{cases}$

$$f^{(n)}(0) = 0, n = 1, 2, \dots, n.$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \equiv 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{故 } f(x) \neq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \forall x \neq 0. \square$$



Thm. 若  $\exists M > 0, s.t.$

$$|f^{(n)}(x)| \leq M, \forall x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho), n = 1, 2, \dots$$

则  $f(x)$  在  $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$  内可以展开成 Taylor 级数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Proof.  $\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right|$

( $\xi$  介于  $x$  与  $x_0$  之间)

$$\leq \frac{M}{(n+1)!} \rho^{n+1}, \quad \forall x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho), \forall n. \square$$



例.  $e^x$  在  $x_0 = 0$  的幂级数展开.

(公式法)

解:  $\forall R > 0$ , 在  $(-R, R)$  上,  $|(e^x)^{(n)}| = e^x < e^R$  有界. 故

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad x \in (-R, R).$$

由  $R$  的任意性,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}. \square$$





例.  $|(\sin x)^{(n)}| \leq 1$ , 故

(公式法)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}. \square$$

例. 上例中  $\sin x$  的幂级数展开式逐项求导得:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(逐项求导法)

例.  $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1).$



例. 求  $\ln(1+x)$  在  $x_0 = 0$  的幂级数展开. (逐项积分法)

解:  $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1).$

在  $[0, x]$  上积分得:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots, \quad x \in (-1, 1).$$

上式右端幂级数在  $x = 1$  处收敛, 其和函数在  $x = 1$  处左连续. 故

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots, \quad x \in (-1, 1].$$

□



例. 求  $\arctan x$  在  $x_0 = 0$  的幂级数展开. (逐项积分法)

解:  $\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 + (-1)^n t^{2n} + \cdots, \quad t \in (-1, 1).$

两边在  $[0, x]$  上积分得

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots, \quad x \in (-1, 1).$$

注意到右边级数在  $x = \pm 1$  收敛, 而  $\arctan x$  在  $\mathbb{R}$  上连续, 故

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots, \quad x \in [-1, 1].$$

□



例. 求  $(1+x)^\alpha$  ( $\alpha \neq 0$ ) 在  $x_0 = 0$  的幂级数展开. (公式法)

解:  $f(x) = (1+x)^\alpha$ ,  $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$ ,  $\dots$ ,

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots,$$

由比值判别法得右端级数收敛半径  $\rho = 1$ .

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots,$$

$$\alpha \leq -1 \text{ 时, } x \in (-1, 1);$$

$$-1 < \alpha < 0 \text{ 时, } x \in (-1, 1];$$

$$\alpha > 0 \text{ 时, } x \in [-1, 1].$$



例. 将  $f(x) = \ln \frac{1}{2+2x+x^2}$  在  $x_0 = -1$  处展开成幂级数.

分析:  $\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}t^n + \cdots, t \in (-1, 1]$ .

解:  $f(x) = -\ln(1 + (1+x)^2),$  (变量替换法)

$$= -\left( (1+x)^2 - \frac{(1+x)^4}{2} + \frac{(1+x)^6}{3} + \cdots \right) \quad ((1+x)^2 \leq 1)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (1+x)^{2n}}{n}, \quad x \in [-2, 0]. \square$$



例.  $f(x) = \frac{x^2}{1+x^3}$ , 求  $f^{(200)}(0)$ .

解:  $f(x) = \frac{x^2}{1+x^3}$

$$= x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{3n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{3n+2}, x \in (-1, 1).$$

令  $3n+2=200$ , 得  $n=66$ .

$$\frac{f^{(200)}(0)}{200!} = (-1)^{66}, \quad f^{(200)}(0) = 200! \quad \square$$



例. 求  $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n-1)} x^{2n}$  的收敛域与和函数.

解:  $\rho = 1$ , 收敛域为  $[-1, 1]$ .

$$S'(x) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)} x^{2n-1}, \quad \forall x \in (-1, 1),$$

$$S''(x) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} x^{2n-2} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-x^2)^{n-1} = \frac{2}{1+x^2}, \quad \forall x \in (-1, 1).$$

$$S'(0) = S(0) = 0, \quad S'(x) = 2 \arctan x,$$

$$S(x) = 2x \arctan x - \ln(1+x^2), \quad x \in [-1, 1]. \square$$



例. 求  $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!2^n} x^n$  的收敛域与和函数.

解:  $\frac{(n+1)^2}{(n+1)!2^{n+1}} \bigg/ \frac{n^2}{n!2^n} \rightarrow 0, \rho = +\infty$ , 收敛域为  $(-\infty, +\infty)$ .

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{(n-1)!2^n} = x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{n-1}}{(n-1)!2^n} \triangleq xS_1(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\int_0^x S_1(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x \frac{nt^{n-1} dt}{(n-1)!2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)!2^n}$$

$$= \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x/2)^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{xe^{x/2}}{2}, x \in \mathbb{R}.$$

( $e^x$  展开的变量替换)





$$S_1(x) = \left( \frac{xe^{x/2}}{2} \right)' = \frac{1}{4} e^{x/2} (2 + x), x \in \mathbb{R}.$$

$$S(x) = xS_1(x) = \frac{1}{4} e^{x/2} (2x + x^2), \forall x \in \mathbb{R}. \square$$

**Remark.** 逐项求导和逐项积分在幂级数求和以及  $C^\infty$  函数的幂级数展开中的应用.



例. 求证:  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1.$

解: 令  $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{n-1}}{(n+1)!}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . 欲证  $S(1) = 1$ .

$$\begin{aligned} \int_0^x S(t) dt &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x \frac{nt^{n-1}}{(n+1)!} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} \\ &= \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{e^x - 1 - x}{x}, x \neq 0. \end{aligned}$$

$$S(x) = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}, x \neq 0. \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!} = S(1) = 1. \quad \square$$



作业：习题6.3 No. 1, 2, 3

（以上所有大题中单序号小题）