Review

- $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$收敛 $\Leftrightarrow \{S_n\}$收敛.

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, s.t. \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon, \forall n > N, p \geq 1.$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

- 常用级数: $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ 或 $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$

非负项级数

总则: $\{S_n\}$有界　　Cauchy积分

比较:(逐项)　$\xrightarrow{b_n = r^n}$　　Cauchy根式 $\sqrt[n]{a_n}$

比值:(增速)　$\xrightarrow{b_n = r^n}$　　D'Alembert $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

$\xrightarrow{b_n = n^{-p}}$　　Raabe $n(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1)$

§ 3. 一般项级数

1.条件收敛与绝对收敛

Thm $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}a_n$收敛. Proof. $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k\right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p}|a_k|$.□

Def. 若$\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ 收敛,则称$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$为绝对收敛级数 (Absolute Convergent Series);若$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$收敛, $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|$发散,则称$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$为条件收敛级数(Conditional Convergent Series).

Remark. $\sum a_n$发散,$\sum b_n$发散 $\Rightarrow \sum(a_n \pm b_n)$？ 未定！

$\sum a_n$条件收敛,$\sum b_n$条件收敛 $\Rightarrow \sum(a_n \pm b_n)$？ 收敛！

$\sum a_n$绝对收敛,$\sum b_n$绝对收敛 $\Rightarrow \sum(a_n \pm b_n)$ 绝对收敛;

$\sum a_n$绝对收敛,$\sum b_n$条件收敛 $\Rightarrow \sum(a_n \pm b_n)$ 条件收敛;

$\sum a_n$绝对收敛,$\sum b_n$发散 $\Rightarrow \sum(a_n \pm b_n)$ 发散;

$\sum a_n$条件收敛,$\sum b_n$发散 $\Rightarrow \sum(a_n \pm b_n)$ 发散.

2.交错级数判敛法

Thm (交错项级数的Leibnitz判别法)

$$a_n>0, a_n\downarrow, a_n\to 0\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n\text{收敛, 其和}S\le a_1.$$

Proof. $a_n\downarrow,\ S_{2n}=(a_1-a_2)+\cdots+(a_{2n-1}-a_{2n})\ge 0,\ S_{2n}\uparrow,$

$$S_{2n}=a_1-(a_2-a_3)-\cdots-(a_{2n-2}-a_{2n-1})-a_{2n}\le a_1,$$

即$\{S_{2n}\}$单调上升有上界a_1,从而有极限, $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=S\le a_1.$

又$S_{2n+1}=S_{2n}+a_{2n+1}, \lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,所以

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}S_{2n}+\lim_{n\to\infty}a_{2n+1}=S,$$

从而$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=S\le a_1$. □

例. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 条件收敛.

Proof 由Leibnitz判别法, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛. 而$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$发散,

故$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 条件收敛.□

例. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}, \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$条件收敛.

例. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$ 条件收敛. Taylor展开!

Proof. $n\to+\infty$时, $\displaystyle\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}=\frac{(-1)^n}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{n}}$

$$=\frac{(-1)^n}{n}\left[1-\frac{(-1)^n}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]=\frac{(-1)^n}{n}-\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

$\displaystyle\sum\frac{(-1)^n}{n}$条件收敛, $\displaystyle\sum\frac{1}{n^2}$ 绝对收敛, $\displaystyle\sum o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ 绝对收敛,

故原级数条件收敛.□

例. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$发散.

Taylor展开!

Proof. $n \to +\infty$时, $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}$

$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \left[1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$条件收敛, $\sum \frac{1}{n}$发散, $\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} O\left(\frac{1}{n}\right)\right| \le \frac{C}{n^{3/2}}$,

$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} O\left(\frac{1}{n}\right)$绝对收敛, 故原级数发散.□

Remark. 前面两个例子, $n \to +\infty$时,

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} \sim \frac{(-1)^n}{n},$$

$\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$与$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$都条件收敛, 但$\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$发散, $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$收敛. 这说明比较判别法、等价无穷小判敛法等判敛法仅对非负项级数适用.

例. $a_n=\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^p}\right), p>0$, 讨论$\sum\limits_{n=2}^{+\infty}a_n$的收敛性.

解: $a_n=\dfrac{(-1)^n}{n^p}-\dfrac{1}{2n^{2p}}+o\left(\dfrac{1}{n^{2p}}\right), n\to+\infty.$

- $p>1$时, $\sum a_n$绝对收敛.
- $\dfrac{1}{2}<p\le 1$时, $\sum a_n$条件收敛.
- $0<p\le\dfrac{1}{2}$时, $a_n-\dfrac{(-1)^n}{n^p}=-\dfrac{1}{2n^{2p}}+o\left(\dfrac{1}{n^{2p}}\right)<0, \forall n>>1.$

$\sum\left(a_n-\dfrac{(-1)^n}{n^p}\right)$发散, 而$\sum\dfrac{(-1)^n}{n^p}$条件收敛, 故$\sum a_n$发散.□

Remark. Taylor展开在级数判敛中的重要性.

Question. 用Taylor展开的方法讨论以下级数的敛散性：

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\left[\sqrt{n}+(-1)^n\right]^p},\quad \begin{cases} p\le 1, 发散; \\ 1<p\le 2, 条件收敛; \\ p>2, 绝对收敛. \end{cases}$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\left[n+(-1)^n\right]^p},\quad \begin{cases} p\le 0, 发散; \\ 0<p\le 1, 条件收敛; \\ p>1, 绝对收敛. \end{cases}$$

3.任意项级数的Dirichlet和Abel判别法

Lemma (分部求和公式--Abel引理) $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}, 1 \le i \le p$,则

(1)记$B_k = \sum_{i=1}^{k} \beta_i,\ \ k = 1, 2, \cdots, p$,则

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \beta_i = \sum_{i=1}^{p-1} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) B_i + \alpha_p B_p;$$

(2)若$\alpha_1 \ge \alpha_2 \ge \cdots \ge \alpha_p$(或$\alpha_1 \le \alpha_2 \le \cdots \le \alpha_p$),且$|B_k| \le L$,

$k = 1, 2, \cdots, p$,则

$$\left| \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \beta_i \right| \le L(|\alpha_1| + 2|\alpha_p|).$$

Proof. (1)记$B_0=0$,则

$$\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\beta_i=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\left(B_i-B_{i-1}\right)=\sum_{i=1}^{p}\alpha_iB_i-\sum_{i=1}^{p}\alpha_iB_{i-1}$$

$$=\sum_{i=1}^{p}\alpha_iB_i-\sum_{i=0}^{p-1}\alpha_{i+1}B_i=\sum_{i=1}^{p-1}\left(\alpha_i-\alpha_{i+1}\right)B_i+\alpha_pB_p-\alpha_1B_0$$

$$=\sum_{i=1}^{p-1}\left(\alpha_i-\alpha_{i+1}\right)B_i+\alpha_pB_p$$

记$\Delta B_i=B_i-B_{i-1}=\beta_i,\Delta\alpha_i=\alpha_{i+1}-\alpha_i$,结论(1)可记为

$\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\Delta B_i=\alpha_iB_i\Big|_{i=0}^{p}-\sum_{i=1}^{p-1}B_i\Delta\alpha_i$, 与分部积分公式相似.

(2)α_i单调, B_i有界,利用(1)中结论,有

$$\left|\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\beta_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{p-1}(\alpha_i-\alpha_{i+1})B_i+\alpha_p B_p\right|$$

$$\le \sum_{i=1}^{p-1}\left|\alpha_i-\alpha_{i+1}\right|\left|B_i\right|+\left|\alpha_p\right|\left|B_p\right|$$

$$\le L\left(\sum_{i=1}^{p-1}\left|\alpha_i-\alpha_{i+1}\right|+\left|\alpha_p\right|\right)$$

$$\le L\left(\left|\alpha_1\right|+2\left|\alpha_p\right|\right).\square$$

Thm (Dirichlet判别法)

$$\left.\begin{array}{l}(1)\text{数列}\{a_n\}\text{单调趋于}0;\\ (2)\left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right| \le M, \forall n;\end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n \text{收敛.}$$

Proof. $\left|\sum_{i=n}^{m} b_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{m} b_i - \sum_{i=1}^{n-1} b_i\right| \le \left|\sum_{i=1}^{m} b_i\right| + \left|\sum_{i=1}^{n-1} b_i\right| \le 2M, \forall n < m.$

$\{a_n\}$单调,由Abel引理,

$$\left|\sum_{i=1}^{p} a_{n+i} b_{n+i}\right| \le 2M(|a_{n+1}| + 2|a_{n+p}|), \forall n, p.$$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 则

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, s.t. |a_n| < \varepsilon, \forall n > N.$$

从而有

$$\left|\sum_{i=1}^{p} a_{n+i} b_{n+i}\right| \le 6M\varepsilon, \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}.$$

由Cauchy收敛准则, $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_n b_n$ 收敛. □

Remark. Leibnitz判别法是Dirichlet判别法的特殊情形.

Thm (Abel判别法)

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ \text{数列}\{a_n\}\text{单调且有界,}\\ (2)\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} b_k\text{收敛}\end{array}\right\}\Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} a_n b_n\text{收敛.}$$

Proof. $\{a_n\}$单调且有界,从而有极限,设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a.$

已知$\sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_k$收敛, 由Dirichlet判别法, $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(a_n - a)b_n$ 收敛.

故$\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_n b_n = \sum\limits_{k=1}^{+\infty}(a_n - a)b_n + a\sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_n$收敛.□

例. 证明$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos n}{n}$条件收敛.

Proof. $\frac{1}{n}\searrow 0,\ \left|\sum_{k=1}^{n}\cos k\right| = \left|\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)-\sin\frac{1}{2}}{2\sin\frac{1}{2}}\right| \le \frac{1}{\sin\frac{1}{2}}.$

由Dirichlet判别法, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos n}{n}$收敛.

下证$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{\cos n}{n}\right|$发散.

$$\left|\frac{\cos n}{n}\right| \geq \frac{\cos^2 n}{n} = \frac{1+\cos 2n}{2n}.$$

同上可证$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos 2n}{2n}$收敛, 而$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n}$发散,故

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+\cos 2n}{2n} \text{ 发散,}$$

因此$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{\cos n}{n}\right|$发散.

综上,$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos n}{n}$条件收敛.□

清華大學

例. $a_n = \dfrac{\cos\frac{1}{n}\cos n}{n}$, 讨论$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$的收敛性.

解: 由上例, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos n}{n}$ 收敛, 而 $\left\{\cos\dfrac{1}{n}\right\}$单调有界,

由Abel判别法, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$收敛.

$$|a_n| = \left|\frac{\cos\frac{1}{n}\cos n}{n}\right| \geq \frac{\cos\frac{1}{n}\cos^2 n}{n} = \frac{\cos\frac{1}{n}\cdot(1+\cos 2n)}{2n}.$$

一方面, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos\frac{1}{n}\cos 2n}{2n}$ 收敛(证明同上); 另一方面,

$$\frac{\cos\frac{1}{n}}{2n}\geq\frac{\cos 1}{2n},\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos 1}{2n}\text{ 发散},\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos\frac{1}{n}}{2n}\text{ 发散(比较判别法).}$$

故 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos\frac{1}{n}\cdot(1+\cos 2n)}{2n}$ 发散, 从而 $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ 发散.

综上, $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 条件收敛.□

清华大学

例. $a_n=\dfrac{\sin n}{n^p+\sin n}$, 讨论$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$的收敛性.

解: 1) $p\le 0$时, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\ne 0$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$发散.

2) $p>1$ 时, $|a_n|=\dfrac{|\sin n|}{|n^p+\sin n|}\le\dfrac{1}{n^p-1}$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$绝对收敛.

3) $0<p\le 1$ 时,

$$|a_n|=\frac{|\sin n|}{|n^p+\sin n|}\ge\frac{\sin^2 n}{n^p+1}\ge\frac{\sin^2 n}{2n^p}=\frac{1-\cos 2n}{4n^p},$$

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 发散, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos 2n}{n^p}$ 收敛 (Dirichlet), 则$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1-\cos 2n}{4n^p}$发散,

从而$\sum|a_n|$发散.

$$a_n=\frac{\sin n}{n^p}\left(1+\frac{\sin n}{n^p}\right)^{-1}=\frac{\sin n}{n^p}\left(1-\frac{\sin n}{n^p}+o\left(\frac{\sin n}{n^p}\right)\right)$$

$$=\frac{\sin n}{n^p}-\frac{\sin^2 n}{n^{2p}}+o\left(\frac{\sin^2 n}{n^{2p}}\right), n\to+\infty\text{时}.$$

- $\frac{1}{2}<p\le 1$时,

$$\sum\frac{\sin n}{n^p}\text{收敛}, \left|\frac{\sin^2 n}{n^{2p}}\right|<\frac{1}{n^{2p}}, \sum\frac{\sin^2 n}{n^{2p}}\text{收敛}, \text{故}\sum a_n\text{收敛}.$$

- $0 < p \le \dfrac{1}{2}$时,

$$a_n - \frac{\sin n}{n^p} = -\frac{\sin^2 n}{n^{2p}} + o\left(\frac{\sin^2 n}{n^{2p}}\right) \sim -\frac{\sin^2 n}{n^{2p}}, n \to +\infty\text{时}.$$

$\sum \dfrac{\sin^2 n}{n^{2p}} = \sum \dfrac{1-\cos 2n}{2n^{2p}}$发散, 因此$\sum \left(a_n - \dfrac{\sin n}{n^p}\right)$发散.

而$\sum \dfrac{\sin n}{n^p}$收敛, 故$\sum a_n$发散.

$$\text{综上,} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n^p + \sin n} \begin{cases} \text{发散}, & p \le 1/2; \\ \text{条件收敛}, & 1/2 < p \le 1; \\ \text{绝对收敛}, & p > 1. \end{cases} \quad \square$$

例. 证明: 若$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^\alpha}$收敛, $\beta>\alpha$,则$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^\beta}$收敛.

Proof. $\frac{a_n}{n^\beta}=\frac{a_n}{n^\alpha}\cdot\frac{1}{n^{\beta-\alpha}}$,

$\beta>\alpha$,则$\frac{1}{n^{\beta-\alpha}}\searrow 0$,

而$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^\alpha}$收敛, 由Abel判别法,$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^\beta}$收敛.□

4.无穷求和运算的结合律与交换律

Thm (收敛级数的顺项可括性) $\sum a_n$收敛,则

$$(a_1+\cdots+a_{n_1})+(a_{n_1+1}+\cdots+a_{n_2})+\cdots+(a_{n_{k-1}+1}+\cdots+a_{n_k})+\cdots$$

也收敛到同一和.

Proof. 令$b_k=a_{n_{k-1}+1}+\cdots+a_{n_k}$,分别记$\sum a_k,\sum b_k$的部分和数列为$\{\mathrm{A}_k\},\{\mathrm{B}_k\}$,则 $\mathrm{B}_k=\mathrm{A}_{n_k}$,即$\{\mathrm{B}_k\}$是$\{\mathrm{A}_k\}$的子列. $\sum a_k$收敛,则$\{\mathrm{A}_k\}$收敛,从而$\{\mathrm{B}_k\}$也收敛到同一极限. □

Remark. 以上定理的逆命题不成立,如$\sum(-1)^n$.

Thm 若

$$(a_1+\cdots+a_{n_1})+(a_{n_1+1}+\cdots+a_{n_2})+\cdots+(a_{n_{k-1}+1}+\cdots+a_{n_k})+\cdots$$

收敛,且同一括号中各项有相同的正负号,则 $\sum a_n$ 也收敛到同一和.

Proof. 记 $b_k=a_{n_{k-1}+1}+\cdots+a_{n_k}$, $\sum a_k$, $\sum b_k$ 的部分和分别为 $\{\mathrm{A}_k\}$, $\{\mathrm{B}_k\}$, 则 $\mathrm{B}_k=\mathrm{A}_{n_k}$. 若第$k$个括号中各项均非负,则

$$\mathrm{B}_{k-1}\le \mathrm{A}_i\le \mathrm{B}_k,\quad \forall n_{k-1}\le i\le n_k.$$

若第k个括号中各项均非正,则 $\mathrm{B}_k\le \mathrm{A}_i\le \mathrm{B}_{k-1}$, $\forall n_{k-1}\le i\le n_k$.

已知 $\lim\limits_{k\to\infty}\mathrm{B}_k$ 存在,由夹挤原理, $\lim\limits_{i\to\infty}\mathrm{A}_i=\lim\limits_{k\to\infty}\mathrm{B}_k$. □

例. $a_n=\dfrac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}$, 证明$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$条件收敛.

Proof. $|a_n|=1/n,\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ 发散, 往证$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$收敛.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n=-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots$$

$$+(-1)^k\left(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2-1}\right)+\cdots\triangleq\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k w_k$$

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$收敛$\Leftrightarrow\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(-1)^k w_k$收敛. 往证$\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(-1)^k w_k$收敛.

由Leibnitz判别法, 只要证$w_k\downarrow 0$.

$$w_k=\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2-1}\qquad (共2k+1项)$$

$$=\left(\frac{1}{k^2}+\cdots+\frac{1}{k^2+k-1}\right)+\left(\frac{1}{k^2+k}+\cdots+\frac{1}{k^2+2k}\right)$$

$$>\frac{k}{k^2+k}+\frac{k+1}{k^2+2k}>\frac{k+1}{(k+1)^2}+\frac{k+2}{(k+1)(k+2)}$$

$$>\left(\frac{1}{(k+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2+k}\right)+\left(\frac{1}{(k+1)^2+k+1}+\cdots+\frac{1}{(k+2)^2-1}\right)$$

$$=w_{k+1},$$

于是$w_k\downarrow$, 又$0<w_k<\dfrac{2k+1}{k^2}$, 故$w_k\downarrow 0$. □

清華大學

绝对收敛和条件收敛的本质区别:绝对收敛的级数有交换律,而条件收敛的级数没有交换律.

Thm $\sum a_n$绝对收敛

$\Rightarrow$任意重排$\sum a_n'$也绝对收敛到同一和.

Thm (Riemann定理) $\sum a_n$条件收敛, 则

$\forall \lambda \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}, \exists$重排$\sum a_n', s.t., \sum a_n' = \lambda.$

Thm $\sum a_n$绝对收敛,则其任意重排也绝对收敛到同一和.

Proof. Case1. $\sum a_n$为非负项级数.

$\sum a_n$重排后得到的级数记为$\sum b_n$,$\sum a_n$与$\sum b_n$的部分和数列分别记为$\{A_n\}$与$\{B_n\}$,则

$$B_n\text{单调上升,且}B_n \le \sum a_n = A,$$

于是$\lim\limits_{n\to\infty} B_n = B \le A.$

反之,$\sum a_n$也可由$\sum b_n$重排得到,同理可得$A \le B$,故$A = B.$

Case2. $\sum a_n$为任意项级数. 令$a_n^+ = \dfrac{|a_n| + a_n}{2}, a_n^- = \dfrac{|a_n| - a_n}{2}$,

即 $a_n^+ = \begin{cases} a_n, & a_n \geq 0, \\ 0, & a_n < 0; \end{cases} \quad a_n^- = \begin{cases} 0, & a_n \geq 0, \\ -a_n, & a_n < 0. \end{cases}$

$\sum |a_n|$ 收敛,则非负项级数$\sum a_n^+$与$\sum a_n^-$均收敛,且

$$\sum a_n = \sum \left(a_n^+ - a_n^-\right) = \sum a_n^+ - \sum a_n^-.$$

$\sum a_n$重排后记为$\sum b_n$,则同理有 $\sum b_n = \sum b_n^+ - \sum b_n^-$,

且$\sum b_n^+, \sum b_n^-$(绝对)收敛,由Case1中结论,$\sum a_n^+ = \sum b_n^+$,

$\sum a_n^- = \sum b_n^-$. 故$\sum b_n$绝对收敛且$\sum b_n = \sum a_n$.□

清華大學

Thm (Riemann定理) $\sum a_n$条件收敛, 则

$\forall \lambda \in \mathbb{R} \bigcup \{+\infty\} \bigcup \{-\infty\}$, $\exists$重排$\sum a_n'$, $s.t.$, $\sum a_n' = \lambda$.

Proof. 记$a_n^{\pm} = \dfrac{|a_n| \pm a_n}{2}$. $\sum a_n$条件收敛, 则

$$a_n^{\pm} \geq 0,\ \lim_{n\to\infty} a_n^{\pm} = 0,\ 且\ \sum a_n^{\pm} = \frac{1}{2}\left(\sum |a_n| \pm \sum a_n\right) = +\infty.$$

Case 1. $\lambda \in (-\infty, +\infty)$. 我们来重排级数$\sum a_n$.

$\sum a_n^+ = +\infty$,因此, $\exists n_1, s.t.,\ \lambda < \sum_{i=1}^{n_1} a_i^+ \triangleq U_1$.

$\sum a_n^- = +\infty$,因此, $\exists m_1, s.t.,$

$$U_1 - V_1 \triangleq U_1 - \sum_{j=1}^{m_1} a_j^- < \lambda \leq U_1 - \sum_{j=1}^{m_1 - 1} a_j^-.$$

重复上述重排过程，$\exists n_2 > n_1, m_2 > n_1, s.t.,$

$$U_1 - V_1 + \sum_{i=n_1+1}^{n_2-1} a_i^+ \le \lambda < U_1 - V_1 + \sum_{i=n_1+1}^{n_2} a_i^+ \triangleq U_1 - V_1 + U_2,$$

$$U_1 - V_1 + U_2 - V_2 \triangleq U_1 - V_1 + U_2 - \sum_{j=m_1+1}^{m_2} a_j^-$$

$$< \lambda \le U_1 - V_1 + U_2 - \sum_{j=m_1+1}^{m_2-1} a_j^- .$$

$$U_1 - V_1 + U_2 - V_2 = \sum_{i=1}^{n_1} a_i^+ - \sum_{j=1}^{m_1} a_j^- + \sum_{i=n_1+1}^{n_2} a_i^+ - \sum_{j=m_1+1}^{m_2} a_j^-$$

中前k项之和记为S_k.

当$k \in [m_1 + n_1, m_1 + n_2]$时，$|S_k - \lambda| \le \max\{a_{m_1}^-, a_{n_2}^+\}$;

当$k \in [m_1 + n_2, m_2 + n_2]$时，$|S_k - \lambda| \le \max\{a_{m_2}^-, a_{n_2}^+\}$.

继续重复上述重排过程,则 $\exists n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$,

$$m_1 < m_2 < \cdots < m_k < \cdots, U_k \triangleq \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} a_i^+, V_k \triangleq \sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} a_j^-, s.t.,$$

$$(U_1-V_1)+\cdots+(U_k-V_k)$$

$$=\sum_{i=1}^{n_1}a_i^+-\sum_{j=1}^{m_1}a_j^-+\cdots+\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k}a_i^+-\sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k}a_j^-$$

中前l项之和S_l满足

$$|S_l-\lambda|\le\max\left\{a_{m_{k-1}}^-,a_{n_k}^+\right\},当l\in[m_{k-1}+n_{k-1},m_{k-1}+n_k]时;$$

$$|S_l-\lambda|\le\max\left\{a_{m_k}^-,a_{n_k}^+\right\},\ 当l\in[m_{k-1}+n_k,m_k+n_k]时.$$

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n^\pm=0$,则$\lim\limits_{l\to\infty}S_l=\lambda$,即如上构造的重排满足$\sum a_n'=\lambda$.

Case2. $\lambda=+\infty$, Case3. $\lambda=-\infty$, 证明留作课后思考.□

§ 4. 无穷乘积

无穷乘积： $\prod\limits_{1\le n<+\infty} p_n = p_1 p_2 \cdots p_n \cdots,$

部分乘积： $P_n = \prod\limits_{1\le k\le n} p_k.$

Def.若 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P \in \mathbb{R}$,则称 $\prod\limits_{1\le n<+\infty} p_n$收敛,记为

$$\prod_{1\le n<+\infty} p_n = P;$$

若数列$\{P_n\}$发散,则称 $\prod\limits_{1\le n<+\infty} p_n$发散.

Remark. $\prod\limits_{1\le n<+\infty} p_n$收敛 $\Leftrightarrow \{P_n\}$收敛.

例. 证明 $\prod\limits_{2\le n<+\infty}\dfrac{n^3-1}{n^3+1}=\dfrac{2}{3}$.

Proof. 记 $a_n=\dfrac{n^2-n+1}{n(n-1)}$, 则

$$p_n=\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+1)(n^2-n+1)}$$

$$=\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}\Big/\frac{n^2-n+1}{n(n-1)}=a_{n+1}/a_n$$

$$\prod_{n=2}^{m}p_n=\prod_{n=2}^{m}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_{m+1}}{a_2}=\frac{2}{3}a_{m+1},\quad \prod_{2\le n<+\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{2}{3}.\square$$

清華大學

Thm.(无穷乘积收敛的必要条件)

$$\prod_{1\le n<+\infty} p_n = P \neq 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} p_n = 1.$$

Proof. 记 $P_n = \prod_{1\le k\le n} p_k$, 则 $\lim_{n\to+\infty} P_n = P \neq 0.$

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} P_n}{\lim\limits_{n\to+\infty} P_{n-1}} = \frac{P}{P} = 1. \square$$

Corollary. $\prod_{1\le n<+\infty} (1+a_n)$收敛到非零实数 $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$

Thm. 设$p_n > 0, |a_n| < 1$, 则

$$\prod_{1\le n<+\infty} p_n = P > 0 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \ln p_n \text{ 收敛}$$

$$\prod_{1\le n<+\infty} (1+a_n) = P > 0 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1+a_n) \text{ 收敛}.$$

Proof. $P > 0$, 则

$$\prod_{1\le n<+\infty} p_n = P \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \prod_{1\le k\le n} p_k = P$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \sum_{1\le k\le n} \ln p_k = \ln P \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \ln p_n = \ln P. \square$$

Remark. $\prod_{1\le k\le n} p_k = e^{\sum_{1\le k\le n} \ln p_k}$, 因此 $\prod_{1\le n<+\infty} p_n = e^{\sum_{1\le n<+\infty} \ln p_n}$.

例. $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2 < +\infty$, 证明 $\prod_{1\le n<+\infty} \cos u_n$ 收敛.

Proof. $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2 < +\infty$, 则 $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

$\exists N$, 当 $n \ge N$ 时, $\cos u_n > 0$,

$$0 \ge \ln\cos u_n = \ln\sqrt{1-\sin^2 u_n} = \frac{1}{2}\ln(1-\sin^2 u_n)$$

$$\sim -\frac{1}{2}\sin^2 u_n \sim -\frac{1}{2}u_n^2,\ n\to+\infty \text{时}.$$

$\sum_{n=N}^{+\infty} u_n^2 < +\infty$, 则 $\sum_{n=N}^{+\infty} \ln\cos u_n$ 收敛, 从而 $\prod_{1\le n<+\infty} \cos u_n$ 收敛. $\square$

作业:习题5.3 No.4(单),5-11