图论创新训练

第一章修订

(2020~2021 学年度 春季学期)

教材部分：计 95 王文新

习题部分：致理-信计 01 王梓涵

指导老师、助教：崔勇老师、王子逸助教

第一章　基 本 概 念

1.1　图 的 概 念

世界上许多事物以及它们之间的联系都可以用图形直观地表示。这时人们往往用结点表示事物，用边表示它们之间的联系。这种由结点和边构成的图形就是图论所研究的对象。

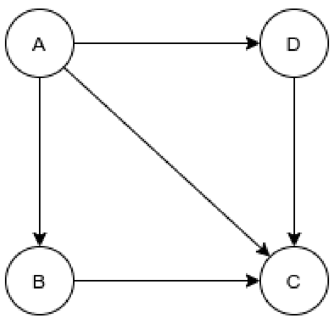


图　1.1

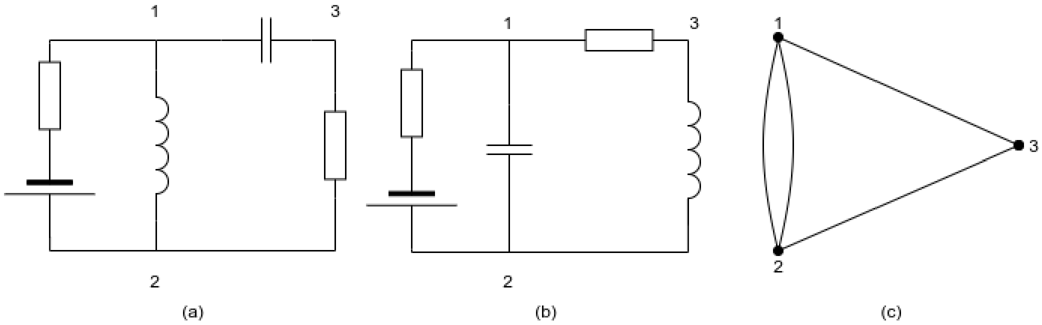


图　1.2

例 1.1.1　A、B、C、D 4 个队进行循环赛。为了解当前各队的胜负情况，可以用结点表示队，用有向边 (u, v) 表示 u 队胜 v 队。例如图 1.1 表示 A 胜 B、C、D；B 胜 C；D 胜 C，而 B 和 D 之间还没有比赛。

例 1.1.2　两个直流电路如图 1.2(a)(b)。基尔霍夫定律*指出：电路特性只与电路网络的拓扑性质有关，而与支路元件的特性无关。因此都可以将它们转化为图 1.2(c) 进行研究。

例 1.1.3　人们常用框图的形式来帮助编写或描述程序。当需要对程序进行分析时，也往往用结点表示程序框，用有向边表示它们之间的顺序关系，如图 1.3。

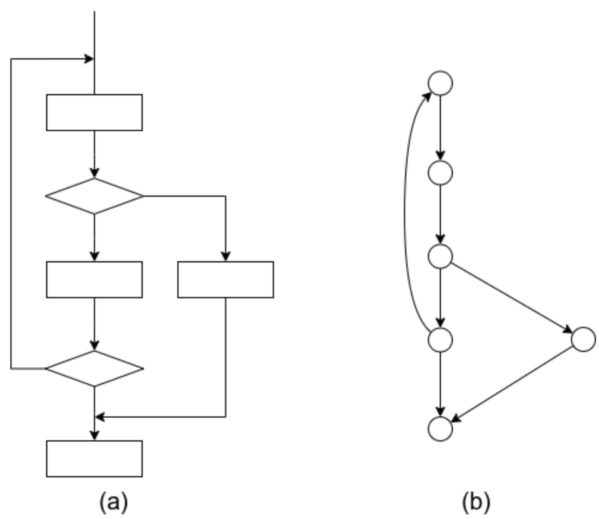


图　1.3

定义 1.1.1　二元组 $(V(G), E(G))$ 称为图。其中 $V(G)$ 是非空集合，称为结点集，$E(G)$ 是 $V(G)$ 诸结点之间边的集合。常用 $G=(V, E)$ 表示图。

图可以分为有限图与无限图两类。本书只讨论有限图，即 V 和 E 都是有限集。给定某个图 $G=(V, E)$，如果不加特殊说明，就认为 $V=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，$E=\{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$，即结点数 |V| $\boxed{|v|} = n$,** 边数 $|E| = m$。

图 G 的边可以是有方向的，也可以是无方向的。它们分称为有向边（或弧）和无向边，用 $e_k=(v_i, v_j)$ 表之。这时我们说 v_i 与 v_j 是相邻结点；e_k 分别与 v_i，v_j 相关联。如果

* 基尔霍夫定律:
所有进入某节点的电流的总和等于所有离开这节点的电流的总和; 沿着闭合回路所有元件两端的电势差（电压）的代数和等于零。
** 借用矩阵阶数的概念, 图的结点数亦可称为图的阶数.

e_k 是有向边，称 v_i 是 e_k 的始点，v_j 是 e_k 的终点；并称 v_i 是 v_j 的直接前趋，v_j 是 v_i 的直接后继。如果 e_k 是无向边，则称 v_i，v_j 是 e_k 的两个端点。全部由有向边构成的图叫有向图；只由无向边组成的图叫无向图；既有有向边又有无向边构成的图称为混合图。例如图 1.4(a)是有向图，(b)是无向图，(c)是混合图。在图 G 中，只与一个结点相关联的边称为自环，在同一对结点之间可以存在多条边，称之为重边。含有重边的图叫多重图。比如图 1.4(a)(b)中 a_4，e_4 分别是自环，a_1，a_2 和 e_1，e_2，e_3 分别是重边。

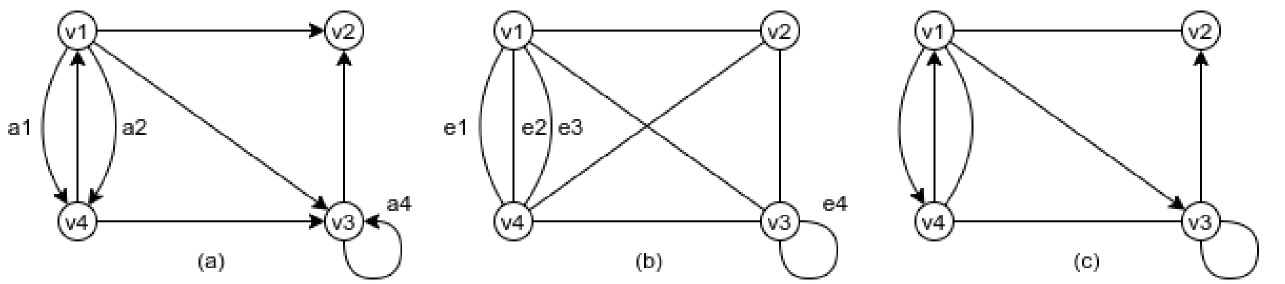


图 1.4

定义 1.1.2 $G=(V, E)$ 的某结点 v 所关联的边数称为该结点的度，用 $d(v)$ 表示。如果 v 带有自环，则自环对 $d(v)$ 的贡献为 2。

例如图 1.4(a)中，$d(v_1)=5$，$d(v_2)=2$，$d(v_3)=5$，$d(v_4)=4$。(b)中，$d(v_1)=5$，$d(v_2)=3$，$d(v_3)=5$，$d(v_4)=5$。有向图中由于各边都是有向边，因此每个结点 v 还有其正度($d^+(v)$)和负度($d^-(v)$)。$d^+(v)$的值是以 v 为始点的边的数目，$d^-(v)$是以 v 为终点的边的数目。显然有 $d^+(v)+d^-(v)=d(v)$。

定义 1.1.3 任意两结点间最多只有一条边，且不存在自环的无向图称为简单图。

以下所说的图在不加说明的情况下指的是无向图。

没有任何边的简单图叫空图，用 N_n 表示；任何两结点间都有边的简单图称为完全图，用 K_n 表示。K_n 中每个结点的度都是 $n-1$。

图 G 具有以下基本性质。

性质 1.1.1 设 $G=(V, E)$有 n 个结点，m 条边，则

$$\sum_{v\in V(G)} d(v) = 2m。$$

证明：由于每条边 $e=(u, v)$对结点 u 和 v 度的贡献各为 1，因此 m 条边对全部结点度的总贡献就是 $2m$。这一性质又称"握手定理"

性质 1.1.2 G 中度为奇数的结点必为偶数个。

证明：G 中任一结点的度或为偶数或为奇数，设 V_e 是度为偶的结点集，V_o 是度为奇的结点集。于是有

$$\sum_{v\in V_e} d(v) + \sum_{v\in V_o} d(v) = 2m,$$

因此 $\sum_{v\in V_o} d(v)$ 为偶数，即 V_o 中含有偶数个结点。此处补充例1.1.3a, 例1.1.3b

性质 1.1.3 有向图 G 中正度之和等于负度之和。

这是因为每条边对结点的正、负度贡献各为 1。

补充例题：

例 1.1.3a 请解答以下两小问:

(1) 序列 (3, 3, 2, 3) 和 (5, 2, 3, 1, 4) 能分别成为图的度数序列吗？为什么？

(2) 已知图 G 中有 10 条边，4 个度数为 3 的结点，其余结点度数均小于等于 2，问 G 中至少有多少个结点？为什么？

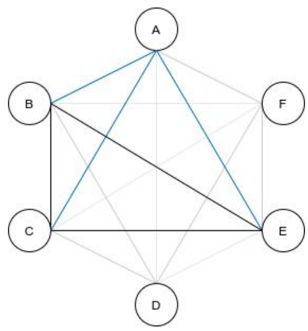
解：(1)由于这两个序列中，奇数的个数均为奇数，由性质 1.1.1（握手定理）可知，它们都不能成为图的度数序列。

(2)图中边数为 10，由性质 1.1.1（握手定理）可知，G 中各结点度数之和为 20，4 个 3 度结点占去 12 度，剩余 8 度，若其余全是 2 度结点，还可分配给 4 个结点，故 G 中至少有 8 个结点。

例 1.1.3b 6 个人中如果没有 3 个人互相认识，则至少有 3 个人相互不认识。

证明: **图论建模，**用 6 个结点表示 6 个人，用蓝色边表示两人认识，用黑色边表示两人不认识，则问题转化为：证明图中存在黑色三角形或存在蓝色三角形。

考察某一结点 A，在与 A 相连的五条边中，必然存在 3 条黑色边或存在 3 条蓝色边，若存在三条蓝色边，不妨假设这三条边连向 B, C, E, 如图。



此时，若 B, C, E 间存在一条蓝色边，这条边相关联的两个结点就将与 A 构成蓝色三角形；反之，若 B, C, E 间不存在蓝色边, 则 BCE 就构成黑色三角形。

若存在三条黑色边，类似可证。

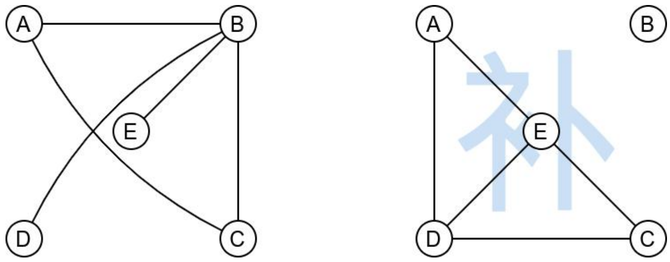
补充定义：独立集与完全子图

定义 1.1.3a 一个**独立集**（也称为稳定集）是一个无向图中一些两两不相邻的结点所形成的集合。

换句话说，独立集 S 由无向图中若干结点组成，且 S 中任两个结点之间没有边。无向图中的每条边至多有一个端点属于独立集 S。

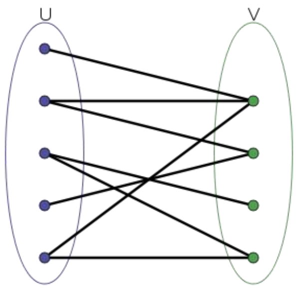
寻找某无向图中一个最大独立集的问题被称为最大独立集问题。该问题已知是 NP 困难的最优化问题。

一个无向图的子图，若其结点两两之间有边连接（即此子图是完全图），则称此子图为该无向图的一个完全子图。独立集是刚好和完全子图相反的概念，图 G 的完全子图和图 G 补图中的独立集是一一对应的。



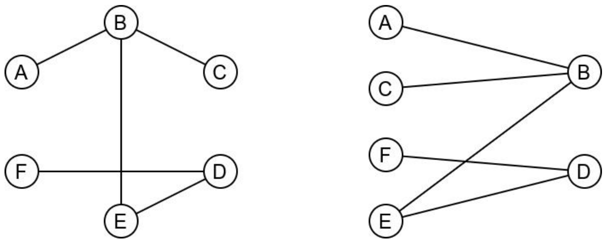
例 1.1.3c 上图（左）中一个最大完全子图是{A, B, C}，对应其补图（右）中的独立集{A, B, C}。

补充定义：二分图



定义 1.1.3b 二分图是一类特殊的图，其结点可以分成两个**互斥的独立集** U 和 V，使得所有边都是连结一个 U 中的点和一个 V 中的点。结点集 U、V 被称为该图的两个部分。

例 1.1.3d

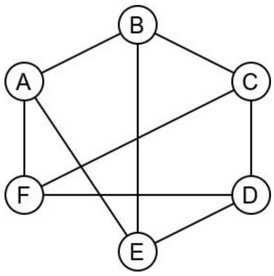


补充定义：正则图

定义 1.1.3c 正则图是每个结点都有相同数目的相邻结点的图，即每个结点的度相同。若每个结点的度均为 k，则称为 k-正则图。

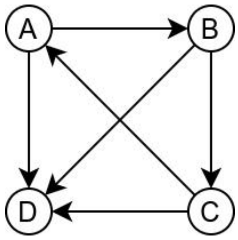
阶为 k 的 (k-1)-正则图是 k-完全图。

例 1.1.3e 一个六阶 3-正则图



补充定义：竞赛图

定义 1.1.3d 竞赛图指每对结点间都有且仅有一条有向边的图。
简单来说，就是为无向完全图的每条边固定了方向。

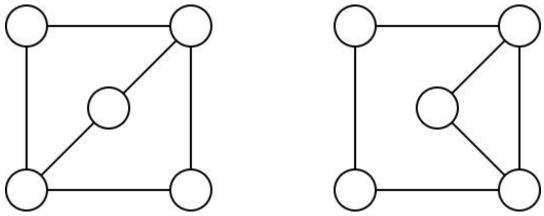


思考：竞赛图和有向简单图是同一概念吗？有何区别？

竞赛图任意两结点间不会有来去两条边。
竞赛图任意两结点间都有一条有向边。

补充定义：度序列

定义 1.1.3f 无向图的度序列是指其结点度的非递增序列。
例 1.1.3f：



上两图具有相同的度序列：3, 3, 2, 2, 2。

度序列是一个图不变量，所以同构图（后文讲解）具有相同的度序列。但是度序列一般不能唯一地识别一个图，在某些情况下，异构图具有相同的度序列（如上例）。

性质 1.1.4 K_n 的边数是 $\frac{1}{2}n(n-1)$。

证明：K_n 中各结点的度都是 $(n-1)$，由性质 1.1.1 即得。

性质 1.1.5 非空简单图 G 中一定存在度相同的结点。

证明：设 G 中不存在孤立结点，则对 n 个结点的简单图，每个结点度 $d(v)$ 的取值范围是 $1 \sim (n-1)$，由抽屉原理，一定存在两个度相同的结点。若存在一个孤立结点，亦类似可证。

定义 1.1.4 如果图 $G=(V, E)$ 的每条边 $e_k=(v_i, v_j)$ 都赋以一个实数 w_k 作为该边的权，则称 G 是赋权图。特别地，如果这些权都是正实数，就称 G 是正权图。

图 1.5 就是一个正权图。权可以表示该边的长度，时间，费用或容量等。

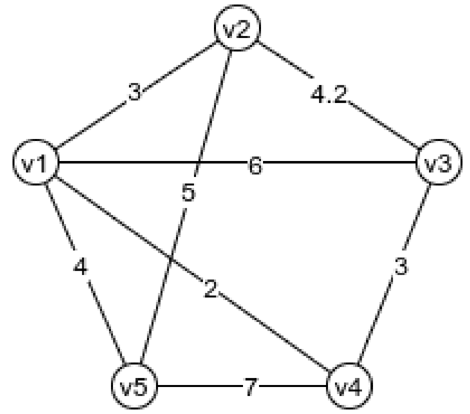


图 1.5

定义 1.1.5 给定 $G=(V, E)$，如果存在另一个图 $G'=(V', E')$，满足 V' V，E' E，则称 G' 是 G 的一个子图。特别地，如果 $V'=V$，就称 G' 是 G 的支撑子图或生成子图；如果 V' V，且 E' 包含了 G 在结点子集 V' 之间的所有边，则称 G' 是 G 的导出子图。

例如，图 1.6 中的 G_1 和 G_2 分别是 G 的支撑子图和导出子图，G_3 是 G 的子图。按照子图的定义，显然 G 也是它自身的子图，而且既是支撑子图，也是导出子图；空图也是 G 的子图，而且是支撑子图。它们都称为平凡子图。

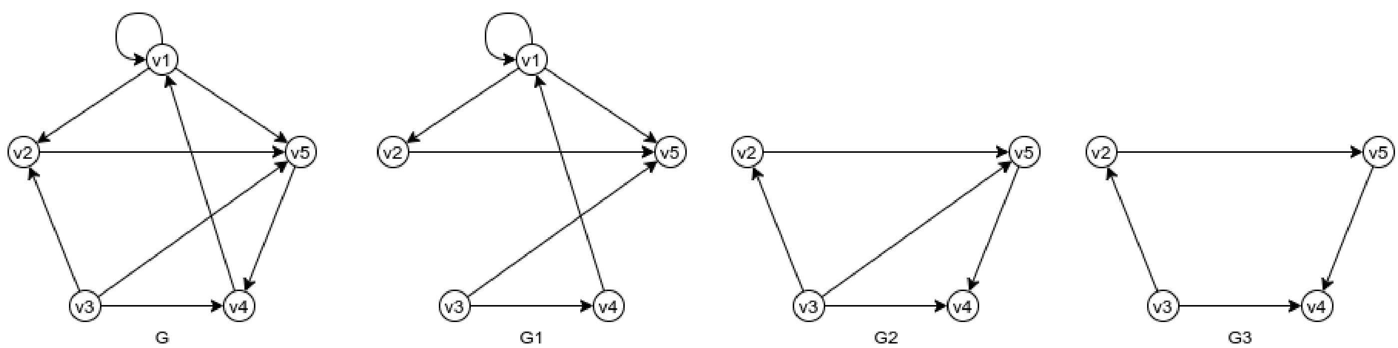


图 1.6

定义 1.1.6 给定两个图 $G_1=(V_1, E_1)$，$G_2=(V_2, E_2)$。令 $G_1 \cup G_2=(V, E)$，其中 $V=V_1 \cup V_2$，$E=E_1 \cup E_2$，$G_1 \cap G_2=(V, E)$，其中 $V=V_1 \cap V_2$，$E=E_1 \cap E_2$，G_1 $G_2=(V, E)$，其中 $V=V_1 \cup V_2$，$E=E_1$ E_2，分别称为 G_1 和 G_2 的并、交和对称差。

例如图 1.7 中 G_1 和 G_2 的并、交、对称差分别是(a)、(b)和(c)。

在 G 中删去一个子图 H，指删掉 H 中的各条边，记作 $G-H$，特别地，对于简单图 G，称 K_n-G 为 G 的补图，记作 $\bar{G}$。例如图 1.7 中 G_1 的补图是(d)。从 G 中删去某个结点 v 及其关联的边所得到的图记作 $G-v$。从 G 中删去某条特定的边 $e=(u, v)$，记作 $G-e$。例如图 1.6 中 $G-v_1=G_2$，$G_2-(v_3, v_5)=G_3$。显见 $G-v$ 是 G 的导出子图，而 $G-e$ 是 G 的支撑子图。如果在 G 中增加某条边 e_{ij}，可记作 $G+e_{ij}$，例如 $G_3+(v_3, v_5)=G_2$。

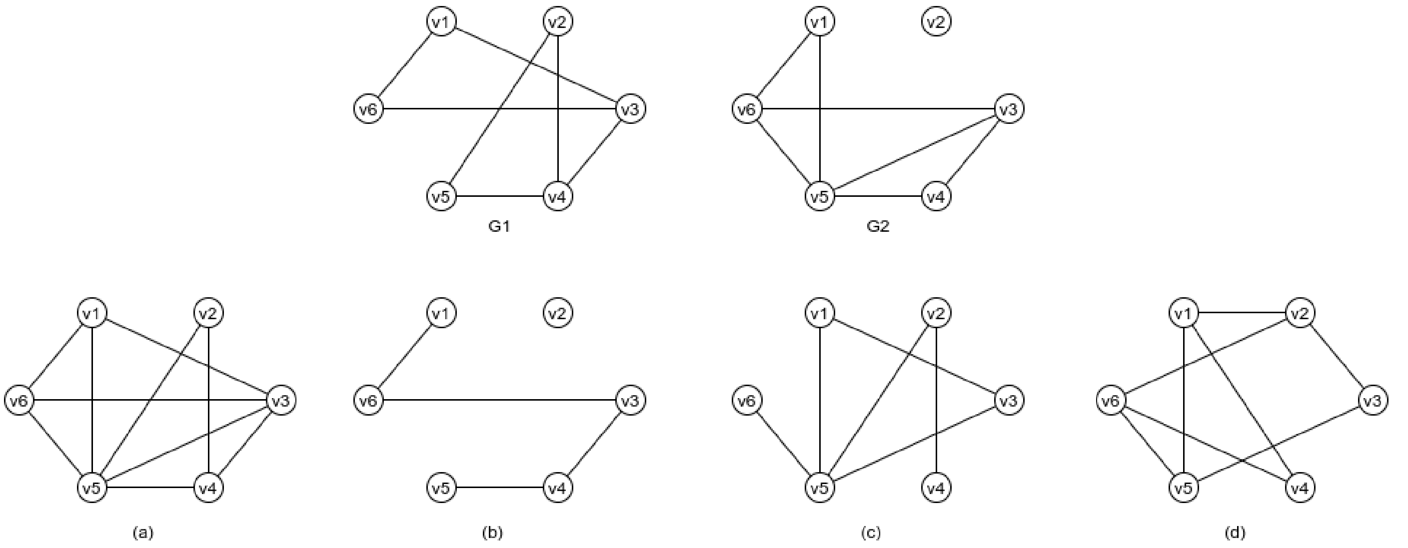


图 1.7

如果 G 是无向图，则 $\Gamma(v)=\{u \mid (v,u)\in E\}$ 称为 v 的邻点集。

定义 1.1.7 设 v 是有向图 G 的一个结点，则

$$\Gamma^{+}(v)=\{u \mid (v,u)\in E\}$$

称为 v 的直接后继集或外邻集；相应地

$$\Gamma^{-}(v)=\{u \mid (u,v)\in E\}$$

称为 v 的直接前趋集或内邻集。

例如图 1.6(a)的 $\Gamma^{+}(v_1)=\{v_1,v_2,v_3\}$，$\Gamma^{+}(v_2)=\{v_3\}$；$\Gamma^{-}(v_1)=\{v_1,v_4\}$，$\Gamma^{-}(v_2)=\{v_1,v_3\}$。图 1.5 中，$\Gamma(v_1)=\{v_2,v_3,v_4,v_5\}$，$\Gamma(v_2)=\{v_1,v_3,v_5\}$。

给定了结点数目及它们之间的相邻关系，便很容易画出图 G，不过它的形状不是唯一的。这种形状不同但结构相同的图叫做同构。

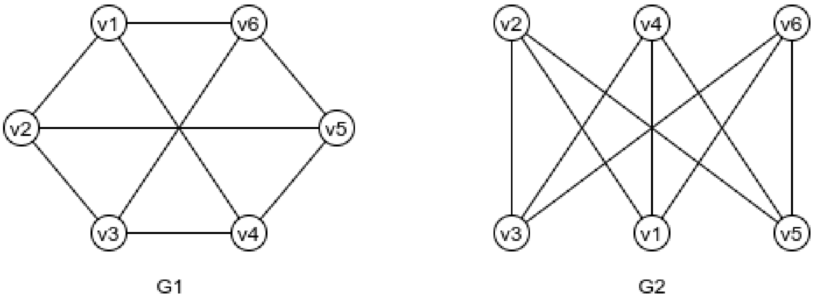


图 1.8

定义 1.1.8 两个图 $G_1=(V_1,E_1)$，$G_2=(V_2,E_2)$，如果 V_1 和 V_2 之间存在双射 f，而且 $(u,v)\in E_1$，当且仅当 $(f(u),f(v))\in E_2$ 时，称 G_1 和 G_2 同构*。记作 $G_1\cong G_2$。

例 1.1.4 图 1.8 的 G_1 和 G_2 是同构的。因为设 $f(v_1)=a$，$f(v_2)=x$，$f(v_3)=b$，$f(v_4)=y$，$f(v_5)=c$，$f(v_6)=z$ 时，对任意 $e=(u,v)\in E_1$，都有 $e'=(f(u),f(v))\in E_2$，反之亦然，即

此符号均为等价符号<=>，下同，见教材

$$(v_1,v_2)\in E_1 \boxed{\backslash} (f(v_1),\ f(v_2))=(a,x)\in E_2,$$

* 在抽象代数中，同构（isomorphism）指的是一个保持结构的双射。
研究同构的主要目的是为了把数学理论应用于不同的领域。如果两个结构是同构的，那么其上的对象会有相似的属性和操作，对某个对象成立的命题在另一个对象上也就成立。这就使得理解和处理该新对象变得容易，并往往可以让数学家对该领域有更深刻的理解。

$(v_1, v_4) \in E_1 \setminus (f(v_1),\quad f(v_2)) = (a, y) \in E_2$,

$(v_1, v_6) \in E_1 \setminus (f(v_1),\quad f(v_2)) = (a, z) \in E_2$,

$(v_2, v_3) \in E_1 \setminus (f(v_2),\quad f(v_3)) = (x, b) \in E_2$,

$(v_2, v_5) \in E_1 \setminus (f(v_2),\quad f(v_5)) = (x, c) \in E_2$,

$(v_3, v_4) \in E_1 \setminus (f(v_3),\quad f(v_4)) = (b, y) \in E_2$,

$(v_3, v_6) \in E_1 \setminus (f(v_3),\quad f(v_6)) = (b, z) \in E_2$,

$(v_4, v_5) \in E_1 \setminus (f(v_4),\quad f(v_5)) = (y, c) \in E_2$,

$(v_5, v_6) \in E_1 \setminus (f(v_5),\quad f(v_6)) = (c, z) \in E_2$,

从定义可知,如若 $G_1 \cong G_2$,必须满足。

(1) $|V(G_1)| = |V(G_2)|$, $|E(G_1)| = |E(G_2)|$。

(2) G_1 和 G_2 结点度的非增序列相同。

(3) 存在同构的导出子图。

其中(3)对判定两个图不同构有时十分有效。例如图 1.9 G_2 的结点集$\{a, b, c, d, e, f\}$所成的导出子图中有 2 个相邻的度为 3 的结点,其余结点的度均为 2。而 G_1 中却没有与之同构的导出子图,因此 G_1 与 G_2 不同构。

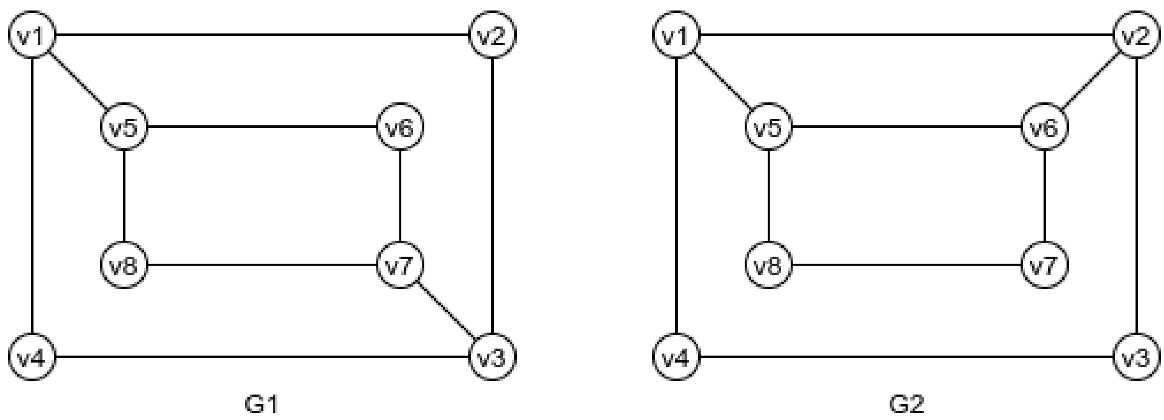
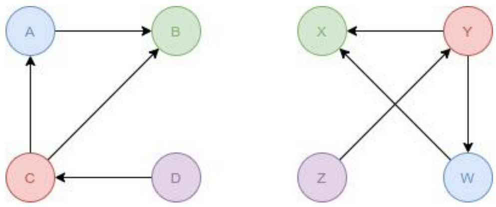


图 1.9

此处补充例1.1.4a, 例1.1.4b

补充：同构的解释

图论中的同构可以理解为：两图之间通过调换结点命名和拖动结点位置即可相互变换的关系。即这一过程无需改变图的连接方式。如下两图同构，可通过 A 和 W、B 和 X、C 和 Y、D 和 Z 的对应关系建立双射以证明。



补充例题：

例 1.1.4a 设G_1与G_2均为无向简单图，证明：$G_1 \cong G_2$ 当且仅当 $\overline{G}_1 \cong \overline{G}_2$。

证明： 证明本题主要使用图同构的定义和补图的定义。设$G_i = \langle V_i, E_i \rangle$，则$\overline{G}_i = \langle V_i, \overline{E}_i \rangle$，其中$\overline{E}_i = \{(u,v)|u,v \in V_i \wedge (u,v) \notin E_i\}, i = 1,2$。

先证必要性（由 $G_1 \cong G_2$ 证明 $\overline{G}_1 \cong \overline{G}_2$）：
因为 $G_1 \cong G_2$，所以存在双射函数$f: V_1 \to V_2$，使得$\forall u,v \in V_1$，有

$$(u,v) \in E_1 \Leftrightarrow (f(u), f(v)) \in E_2$$

于是，$\forall u,v \in V_1$，有

$$(u,v) \notin E_1 \Leftrightarrow (f(u), f(v)) \notin E_2$$

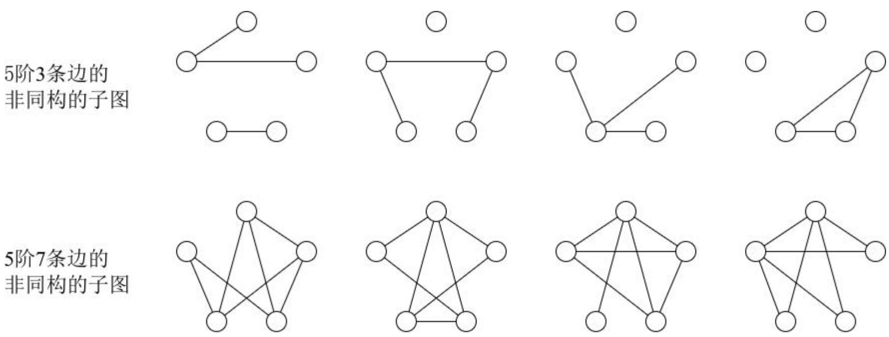
从而，有

$$(u,v) \in \overline{E}_1 \Leftrightarrow (f(u), f(v)) \in \overline{E}_2$$

所以，$\overline{G}_1 \cong \overline{G}_2$。
由于$\overline{\overline{G}} = G$，根据上面的证明，由 $\overline{G}_1 \cong \overline{G}_2$，可推出 $G_1 \cong G_2$，得证充分性。

例 1.1.4b 画出 5 阶 7 条边的所有非同构的无向简单图。

解： 直接枚举符合条件的图并不容易，不如反向考虑：
5 阶 7 条边的无向简单图都是K_5的子图，它们的补图是 5 阶 3 条边的K_5的子图，而K_5的 5 阶 3 条边的所有非同构的子图是比较容易画出的。
由例 1.1+7 可知，K_5的 5 阶 7 条边的非同构的子图与 3 条边的非同构的子图一一对应。如此只需画出K_5的 5 阶 3 条边的非同构子图，它们各自的补图就是所有非同构的 7 条边的子图。有且仅有 4 种可能。



1.2 图的代数表示

在对图 G 进行描述或运算时，需要采用代数方法进行表示。常用的表示方法有

1.2.1 邻接矩阵(创新引入见脚注*)

邻接矩阵表示了结点之间的邻接关系。

有向图的邻接矩阵 A 是一个 n 阶方阵，其元素为。

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & (v_i,v_j)\in E。\\ 0, & 其他。\end{cases}$$

例如图 1.10 的邻接矩阵是

* 边表示一种关系……关系矩阵？
列出结点的关系矩阵，有边记1，无边记0。
无向边：当作两条有向边记两次即可。
赋权图：1改记为边权即可。

$$A=\begin{bmatrix}0&1&1&1&0\\0&0&1&0&1\\0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0\\1&0&0&1&1\end{bmatrix}$$

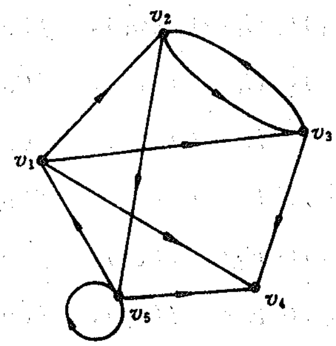


图 1.10

邻接矩阵 A 第 i 行非零元的数目恰是 v_i 的正度，第 j 列非零元的数目是 v_j 的负度。邻接矩阵可以表示自环，但无法表示重边。

无向图的邻接矩阵是一个对称矩阵，例如图 1.11 的邻接矩阵是

$$A=\begin{bmatrix}0&1&1&1&1\\1&0&1&0&1\\1&1&0&1&0\\1&0&1&0&1\\1&1&0&1&1\end{bmatrix}$$

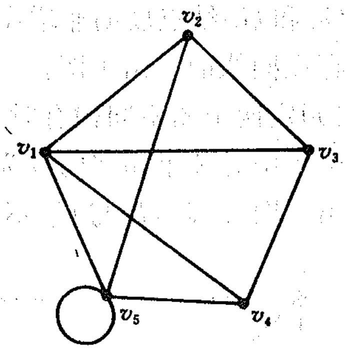


图 1.11

1.2.2 权矩阵

赋权图常用权矩阵 A 进行表示。其元素

$$a_{ij}=\begin{cases}w_{ij}, & (v_i,v_j)\in E。\\ 0, & 其他。\end{cases}$$

例如图 1.5 的权矩阵是

$$A=\begin{bmatrix}0&3&6&2&4\\3&0&4.2&0&5\\6&4.2&0&3&0\\2&0&3&0&7\\4&5&0&7&0\end{bmatrix}$$

1.2.3 关联矩阵

关联矩阵表示结点与边之间的关联关系。

有向图 G 的关联矩阵 B 是 $n\times m$ 的矩阵，当给定结点和边的编号之后，其元素

$$b_{ij}=\begin{cases}1, & e_j=(v_i,v_k)\in E。\\ -1, & e_j=(v_k,v_i)\in E。\\ 0 & 其他。\end{cases}$$

例如图 1.12 的关联矩阵是

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 \end{array} \\
B= & \begin{bmatrix}
1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

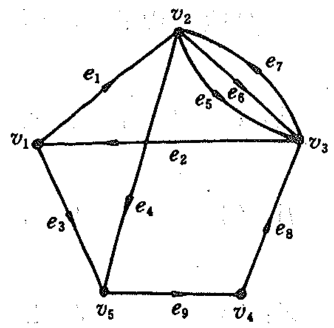


图 1.12

关联矩阵具有以下性质：

1. 每列只有两个非零元：1 和 −1。

2. 第 i 行非零元的数目恰是结点 v_i 的度，其中 1 元的数目是 $d^+(v_i)$，−1 元的数目是 $d^-(v_i)$。

3. 能够表示重边，但不能表示自环。

类似地，无向图也有其关联矩阵 B，但其中不含 −1 元素。

例如图 1.13 的关联矩阵是

$$
\begin{array}{cc}
B= & \begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix} \\
 & \begin{array}{ccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 \end{array}
\end{array}
$$

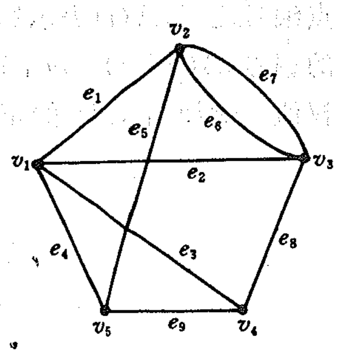


图 1.13

当邻接矩阵和关联矩阵能够表示某个图 G 时，这种表示是唯一的，而且十分直观。但由于它们不能表示重边或自环，因此这种表示有其局限性。特别在使用计算机对某个图 G 进行运算时，采用邻接矩阵或关联矩阵作为输入形式将占据较大的存储空间并可能增加计算复杂度。因此，为克服这些缺陷，再介绍图的另外几种常用表示方法。

邻接矩阵不能表示重边, 关联矩阵（原定义下）不能表示自环

1.2.4 边列表(创新引入见脚注*)

边列表是对关联矩阵的列进行压缩的结果。它由两个 m 维向量 A 和 B 组成，当对 G 的结点和边分别编号之后，若 $e_k=(v_i,v_j)$，则 $A(k)=i$，$B(k)=j$，即 $A(k)$ 存放第 k 条边始点编号，$B(k)$ 存放其终点编号。如果 G 是赋权图，则再增加一个 m 维向量 Z，若 e_k 的权是 w_k，则令 $Z(k)=w_k$。例如图 1.14 的边列表示形式是

A：(4　4　1　2　2　2　4)

B：(1　1　2　2　4　3　3)

Z：(5　3　4　6　7　2　4)

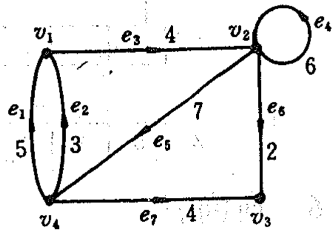


图 1.14

* 关联矩阵中每列0居多, 有用的1和-1较少, 可否压缩?
另一角度考虑, 边表示关系......关系的集合表示?
每条边的信息：<起点，终点，边权>。
排列一起，重新整合为三个向量A：起点们，B：终点们，Z：边权们。

类似地可以得到无向图的边列表，比如图 1.15 的边列表是

A：(1　1　1　2　2　3)

B：(4　4　2　4　3　4)

Z：(5　3　4　7　2　4)

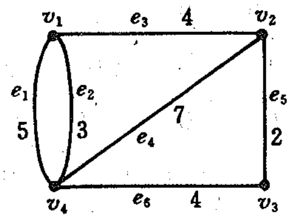
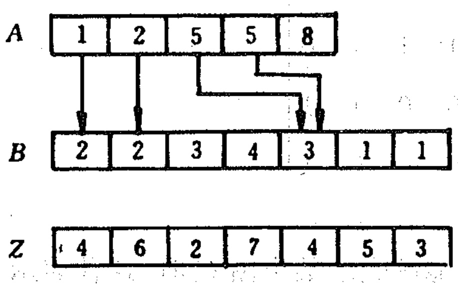


图　1.15

1.2.5　正向表(创新引入见脚注*)

正向表是对邻接矩阵的行进行压缩的结果。它的特点是将每个结点的直接后继集中在一起存放。有向图的正向表由一个$(n+1)$维向量 A，一个 m 维向量 B 组成。当对 G 的结点编号之后，$A(i)$表示结点 v_i 的第一个直接后继在 B 中的地址，B 中存放这些后继结点的编号，$A(n+1)=m+1$。如果 G 是赋权图，则再设置一个 m 维向量 Z，用以存放相应的权值。例如图 1.14 的正向表是



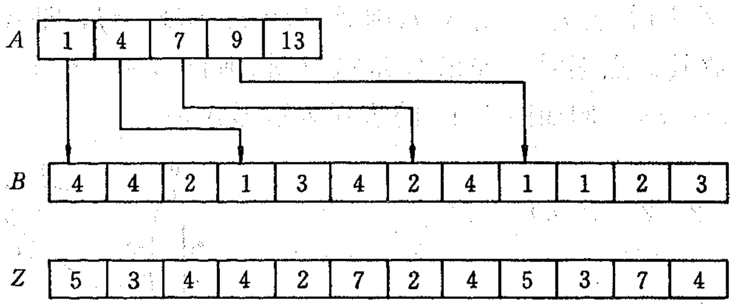
在正向表中存在下述关系：

1. $d^+(v_i)=A(i+1)-A(i)$；

2. $A(i)=\sum_{j=1}^{i-1}d^+(v_j)+1$；

3. 从 $B(A(i))$到 $B(A(i+1)-1)$的任一个值，都是 v_i 的直接后继。

由于无向图的边没有方向性，所以 B 中存放的是相应邻接点的编号，因而 B 和 Z 都要扩充为 $2m$ 维的向量。例如图 1.15 的正向表是



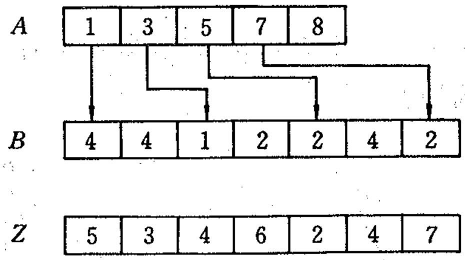
1.2.6　逆向表(创新引入见脚注**)

与正向表相反，逆向表是对有向图邻接矩阵的列进行压缩的结果。它的特点是将每

* 把所有结点的直接后继集依次列出，变成一个长向量？
如何找到每个结点对应的后继集？建立索引，指出每个结点的“第一个”直接后继。

**也可把所有结点的直接前趋集依次列出，建立索引？

个结点的直接前趋集中在一起存放。例如图 1.14 的逆向表是。

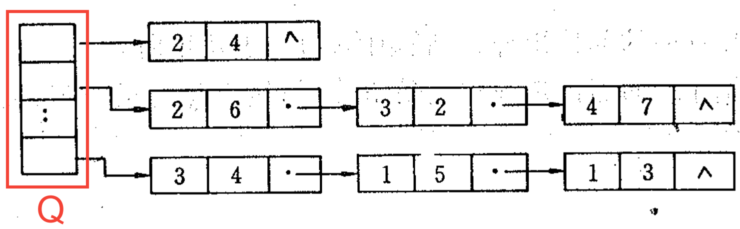


1.2.7 邻接表 (创新引入见脚注*)

这是采用单链表结构表示一个图。对每个结点 v_i 用一个表结点表示。在这里表结点的结构如下

a	b	c

它共分三个域，邻接点域 a 中存放该结点的编号，数据域 b 中存放相应边的数值，链域 c 中存放下一个表结点的地址指针。以图 1.14 为例，它的邻接表形式如下



其中 $Q(i)$ 存放结点 v_i 的第一个直接后继表结点的地址指针。邻接表的特点是使用灵活，比如要从图 G 中删去某条边时，只要摘除对应的表结点就可以实现；若要增加某条边，也只需增加一个表结点，而不需要进行大的变动。

边列表、正向表和邻接表等都能表示重边，也能表示自环。也就是说，它们都能唯一表示任意一个图。而且也都只占据较小的存储空间。邻接矩阵、关联矩阵、边列表、正向表、逆向表之间都可以互相转换。为了直观起见，本书主要采用邻接矩阵和关联矩阵表示图 G，在描述某些算法时，有时也采用正向表等形式的数据结构。

习 题 一

1. 证明在 9 座工厂之间，不可能每座工厂都只与其他 3 座工厂有业务联系，也不可能只有 4 座工厂与偶数个厂有业务联系。

2. 简单图 G 中，如果 $m>\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$，证明 G 不存在孤立结点。

3. 完全图的每边任给一个方向，称为有向完全图。证明在有向完全图中

$$\sum_{v_i\in V}(d^+(v_i))^2=\sum_{v_i\in V}(d^-(v_i))^2。$$

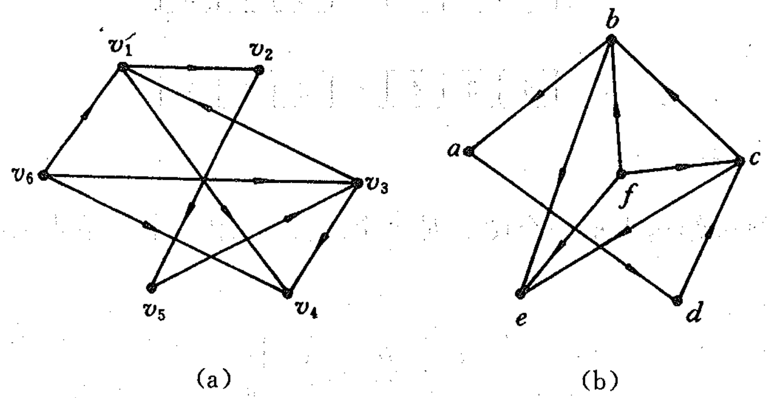
4. 三个量杯容量分别是 8 升、5 升和 3 升，现 8 升的量杯装满了水，问怎样才能把水分成 2 个 4 升，画出相应的图。

* 从结点出发，索引以它为起点的边?
链表：每一小块数据包含
[边的终点，边权，下一块数据的指针]。把小块数据串联起来，形成链表。记下第一块数据的地址，作为链表头，从它开始可以顺序遍历整个链表。
邻接表：把结点顺序列成向量，每个结点后挂一条以它为起点的所有边的链表。

5. 6 个人围成圆形就座，每个人恰好只与相邻者不认识，是否可以重新入座，使每个人都与邻座认识？

6. 证明 9 个人中若非至少有 4 个人互相认识，则至少有 3 个人互相不认识。

7. 判断题图 1.7 是否同构？



题图 1.7

8. 写出题图 1.7(a)的邻接矩阵、关联矩阵，边列表及正向表。

9. 试编写有向图 G 的邻接矩阵与关联矩阵，邻接矩阵与正向表，关联矩阵与边列表之间互相转换的程序。

补充阅读: 图论的起源

一般认为，欧拉（Euler）于 1736 年出版的关于柯尼斯堡七桥问题的论文是图论领域的第一篇文章。此问题被推广为著名的欧拉路问题，亦即一笔画问题。

描述凸多面体顶点数、棱数及面数之间关系的欧拉公式也与图论有密切联系，此后又被柯西（Cauchy）等人进一步研究推广，成为了数学的另一分支拓扑学的起源。

1857 年，哈密顿（Hamilton）发明了"环游世界游戏"（Icosian game），与此相关的则是另一个广为人知的图论问题"哈密顿路径问题"。

西尔维斯特（Sylvester）于 1878 年发表在《自然》上的一篇论文中首次提出"图（graph）"这一名词。

欧拉的论文发表后一个多世纪，凯莱（Cayley）研究了在微分学中出现的一种数学分析的特殊形式，而这最终将他引向对"树"（一种特殊的图）的研究。由于有机化学中有许多树状结构的分子，这些研究对于理论化学有着重要意义，尤其是对某一类图的计数问题。除凯莱外，波利亚等人也发表了一些成果。这些研究成果奠定了图的计数理论的基础。图论中有一部分术语正是来源于这种将数学与化学相联系的做法。

1860 年之 1930 年间，若当（Jordan）、库拉托夫斯基（Kuratowski）和惠特尼（Whitney）从之前独立于图论发展的拓扑学中吸取大量内容进入图论，而现代代数方法的使用更让图论与拓扑走上共同发展的道路。最早的体现之一是物理学家基尔霍夫（Kirchhoff）于 1845 年发表的基尔霍夫电路定律。

第一章补充习题

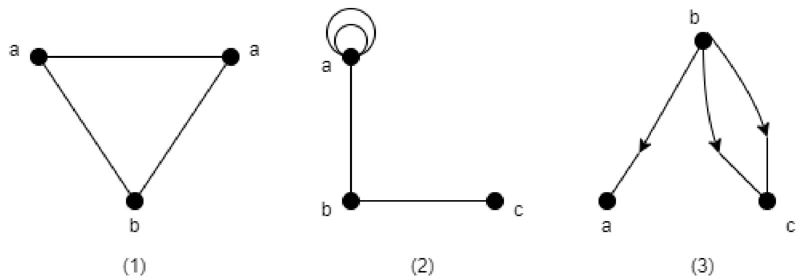
致理-信计 01 王梓涵

2021 年 2 月 8 日

注：★ 越多，题目越难。★★★★ 表示有兴趣的同学可自行尝试的题目。

□ **有向图中的简单图（下称“有向简单图”。下文中所有“简单图”均指无向图的简单图）定义如下：若有向图 G 不含自环与重边，则称 G 为有向简单图。其中两条边 u 与 v 互为重边，如果它们的始点与终点都相同。**

1.【★】判断下列图形为 (a) 简单图或有向简单图 (b) 不是简单图的图 (c) 不是图

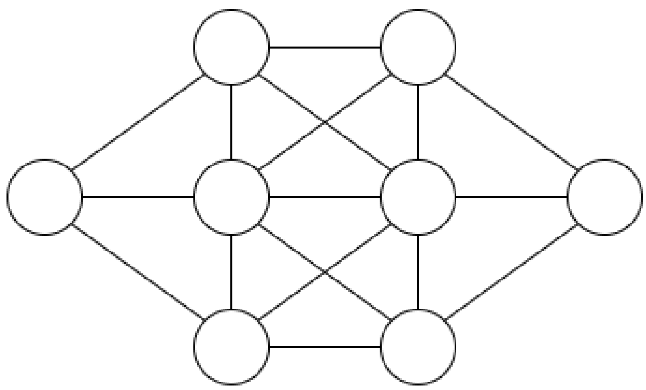


2.【★】求有 n 个结点的简单图个数。

3.【★】求有 n 个结点、m 条边的简单图个数。

4.【★】写出下列图的结点数与边数。
(a) N_n (b) K_n (c) $K_{r,s}$

5.【★★】用 $A \sim H$ 为下图结点编号，使得每个结点的字母与其所有相邻结点的字母在字母表上不相邻。



6.【★★】证明存在 5 个人，他们中没有互相认识的 3 个人，也没有互相不认识的 3 个人。

7.【★】设 G 是至少含有 2 个结点的简单图。证明 G 中至少有 2 个结点度数相同。

8.【★★★】证明对任意 n 个结点、m 条边的简单图 G，若 G 不含 K_3，则 $m \leqslant \frac{1}{4}n^2$.

9.【★★★★】对任意 n 个结点、m 条边的简单图 G，记 k 为其 K_3 的个数，证明 $k \geqslant \frac{m(4m-n^2)}{3n}$.

10.【★】证明对任意正整数 n，k，当 n，k 均为奇数时，不存在 n 个结点的 k-正则图。

11.【★★】对于不同时为奇数的正整数 n，k，给出 n 个结点的 k-正则图的构造。

12.【★★★】对于 v 个结点、ε 条边的简单图 G，若 G 的任意三个结点之间至少存在一条边，证明

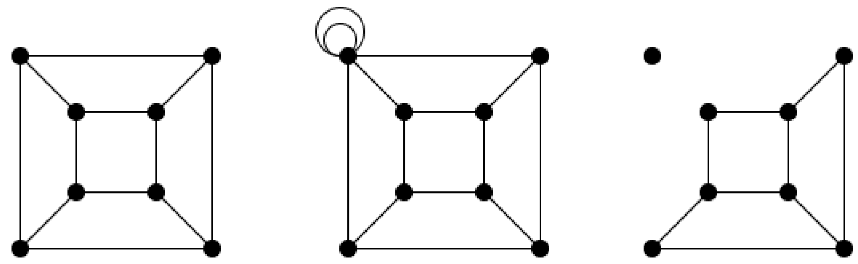
$$\varepsilon_{\min} = \begin{cases} k^2 - k, & \text{if } v = 2k; \\ k^2, & \text{if } v = 2k+1. \end{cases}$$

13.【★★★】设 G 是无自环的无向图，H 是 G 的支撑子图。记 $\varepsilon(G)$ 为 G 的边数，$\varepsilon(H)$ 同理。证明存在这样的 H 使得 H 是二部图且 $\varepsilon(H) \geqslant \frac{\varepsilon(G)}{2}$.

14.【★★★】记 $d_G(x)$ 表示结点 x 在图 G 中的度数。设 G 为无自环的无向图，证明存在 G 的支撑子图 H 使得 H 是 k 部图且对于 G 中的任意结点 x，都有

$$d_H(x) \geqslant (1 - \tfrac{1}{k}) d_G(x).$$

15.【★】写出下列图的结点度的非增序列。



(1)　　(2)　　(3)

16.【★】记 $d = \{d_1, d_2, ..., d_n\}$（$d_1, ..., d_n$ 为非负整数）. 证明存在一个图（可含自环、重边）使得其结点度的非增序列为 d 的充要条件是 $\sum\limits_{i=1}^{n} d_i$ 为偶数。

17.【★】记 $d = \{d_1, d_2, ..., d_n\}$（$d_1, ..., d_n$ 为非负整数）. 证明存在一个图（不含自环、可含重边）使得其结点度的非增序列为 d 的充要条件是 $\sum\limits_{i=1}^{n} d_i$ 为偶数且 $d_1 \leqslant \sum\limits_{i=2}^{n} d_i$.

18.【★★★★】(Erdös-Gallai 定理) 记 $d = \{d_1, d_2, ..., d_n\}$（$d_1, ..., d_n$ 为非负整数）. 证明：存在一个简单无向图使得其结点度的非增序列为 d 的充要条件是 $\sum\limits_{i=1}^{n} d_i$ 为偶数且

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leqslant k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, d_i\} \ , 1 \leqslant k \leqslant n.$$

□ **一个竞赛图的比分序列为把该竞赛图每个点的出度从小到大排列得到的序列。**

19.【★★★★】(兰道定理) 证明一个长度为 n 的序列 $s = \{s_1, ..., s_n\}, n \geqslant 1, s_1 \leqslant ... \leqslant s_n$ 是合法的比分序列当且仅当

$$\sum_{i=1}^{k} s_i \geqslant \binom{k}{2} \ , \forall\ 1 \leqslant k \leqslant n.$$

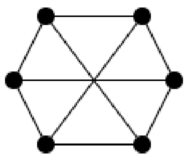
20.【★★★】证明对任意竞赛图 D,

$$\sum_{x\in V} d^+(x)^2 = \sum_{x\in V} d^-(x)^2 = \sum_{x\in V} (v - d^-(x))^2 - v^2.$$

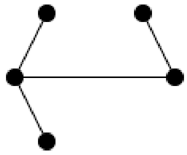
其中 V 表示 D 的结点集合，$v = |V|$，$d^+(x)$、$d^-(x)$ 分别表示结点 x 在 D 中的出度、入度。

21.【★】证明任意 k-正则竞赛图结点数 $n = 2k + 1$.

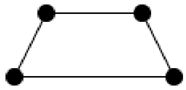
22.【★】判断下列图是否是图 G 的子图



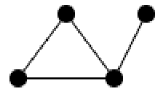
(G)



(1)

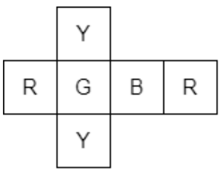


(2)

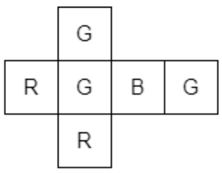


(3)

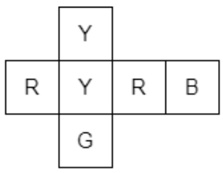
23.【★★★】(四色方柱问题）给出如下四个正方体的展开图，正方体各面分别用四种颜色之一（简记为 R、B、G、Y）着色。是否可以将这四个正方体摞成 $4*1*1$ 的长方体使得该长方体各侧面都包含四种颜色？给出一个构造。



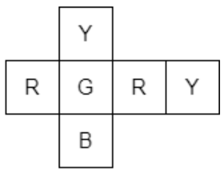
cube 1



cube 2

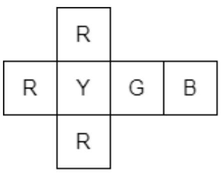


cube 3

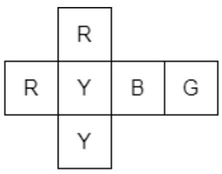


cube 4

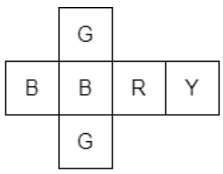
24.【★★★】给出如下四个立方体的四色方柱问题的一个解。



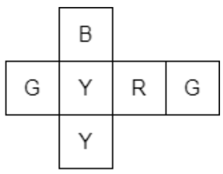
cube 1



cube 2

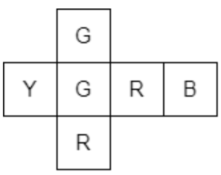


cube 3

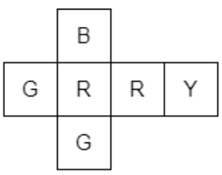


cube 4

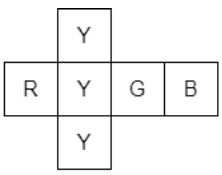
25.【★★★】证明如下四个立方体的四色方柱问题无解。



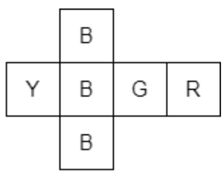
cube 1



cube 2

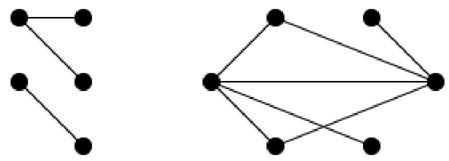


cube 3



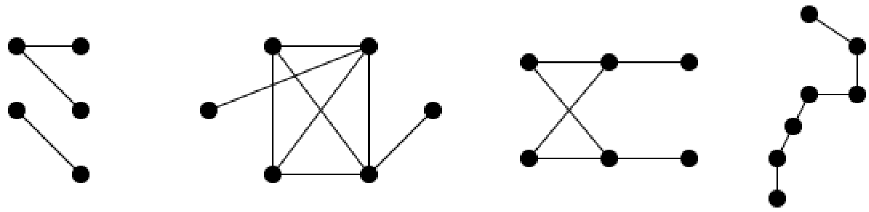
cube 4

26.【★】找出下列图的最大完全子图



(1) (2)

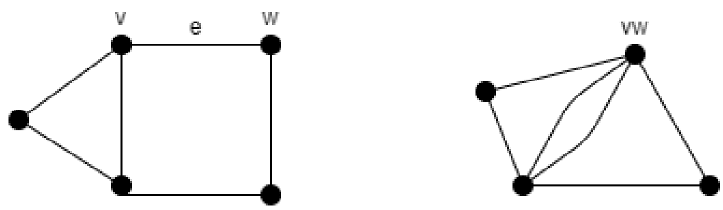
27.【★★】观察下列图的独立集与其补图的最大完全子图，你发现了什么？



(1) (2) (3) (4)

28.【★】设 G 是含有 n 个结点、m 条边的无向图，v 是 G 中一个度数为 k 的结点，e 是 G 中一条边。写出 $G-e$，$G-v$ 的结点数与边数。

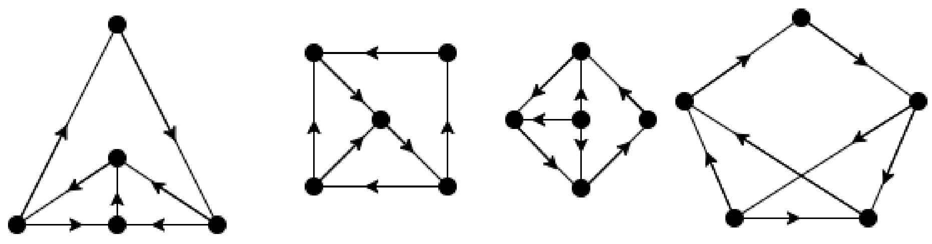
□ **设 G 是无向图，e 是 G 中一条边。定义运算 $G\setminus e$：删去图 G 中的边 e，并将 e 的两个端点合并为同一点，对于每一组新出现的多重边只保留其中一条。如图：**



G G \ e

29.【★】设 G 是含有 n 个结点、m 条边的简单图，e 是 G 中一条边。若 e 的两个端点 u 和 v 有 k 个共同的相邻点，试写出 $G\setminus e$ 的结点数与边数。

30.【★★】判断图 G 与下列各图是否同构



(G) (1) (2) (3)

31.【★】举例说明结点度的非增序列相同的两个图可能不同构

32.【★★】求有 4 个结点的简单图个数，其中相互同构的图算作同一个。

33.【★★】判断带有下列邻接矩阵的简单图是否同构。

(a)
$$\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&0&1\\0&0&0&1\\1&1&1&0\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&1\\1&0&0&1\\1&1&1&0\end{bmatrix}$$

(b)
$$\begin{bmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&1\\1&0&0&1\\0&1&1&0\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\1&0&1&0\end{bmatrix}$$

34.【★★】证明若图 $G1$ 与 $G2$ 同构，则其邻接矩阵 $M(G1)$ 与 $M(G2)$ 的秩相等

35.【★★】判断带有下列关联矩阵的简单图是否同构。

$$\begin{bmatrix}1&1&0&0&0\\1&0&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&1&1&1&0\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}0&1&0&0&1\\0&1&1&1&0\\1&0&0&1&0\\1&0&1&0&1\end{bmatrix}$$

36.【★★】证明 34 题的结论对于关联矩阵也成立。

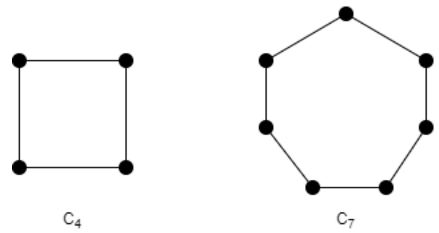
□ **自补图是指与自己的补图同构的图**。

37.【★★】找出所有 4 个结点的自补的简单图。

38.【★★】证明自补的简单图 G 的结点个数 n 满足 $n \equiv\ 0\ or\ 1\ (mod\ 4)$

39.【★★★】设 G 是有 n 个结点的自补的简单图，$n \equiv\ 1\ (mod\ 4)$，证明 G 中度数为 $\frac{n-1}{2}$ 的结点存在且有奇数个。

□ **圈图 (cycle graph)C_n 是一类 n 个结点的 2-正则图**。**如图**。



40.【★】对哪些整数 n 来说圈图 C_n 是自补图?

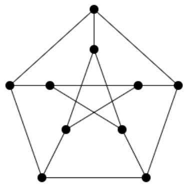
□ G **的边图** $L(G)$ **是以** G **的边为结点的图**。$L(G)$ **中两个结点相邻当且仅当它们在** G **中对应的边有公共端点**。

41.【★】证明 $L(K_3)$ 和 $L(K_{1,3})$ 相同。

42.【★★】写出用 G 的结点度数表示 $L(G)$ 的边数的表达式。

43.【★】证明若 G 是 k-正则图，则 $L(G)$ 是 $(2k-2)$-正则图。

□ **彼得森图是一类有 10 个结点、15 条边的 3-正则图，如图：**



44.【★★★】证明 $L(K_5)$ 是彼得森图的补图。

□ **Ulam 猜想：设图 G 有 P 个点 v_i，H 有 P 个点 u_i，$P \geqslant 3$. 若对每个 i，子图 $G_i = G - v_i$ 与 $H_i = H - u_i$ 同构，则图 G 与 H 同构。**

45.【★★★★】试证明 Ulam 猜想对于正则图是正确的。

□ **一个有向图的逆图 (converse) 是将其每条边都反向后得到的有向图。**

46.【★】有向图 D 和它的逆图 D' 的邻接矩阵有什么关系？

47.【★★】记矩阵 A 为无向图 G 的邻接矩阵。尝试用 A 和 A^T 的运算表示 G 中各结点的度数。如果 G 是有向图呢？

48.【★★】记矩阵 A 为图 G 的邻接矩阵。尝试说明 A^k 的 i 行 j 列元素 a_{ij} 表示什么。

49.【★★】无向图的关联矩阵与其转置之积可以表示什么？

50.【★】表示一个有 n 个结点、m 条边的非赋权图需要多少存储空间？其中分别利用

(a) 邻接矩阵

(b) 关联矩阵

(c) 边列表

(d) 正向表

第一章补充习题解答或提示

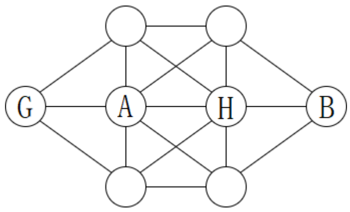
致理-信计 01 王梓涵

2021 年 2 月 8 日

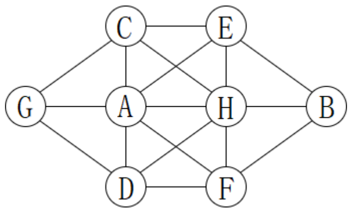
1. (1)c (2)b (3)b
2. $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$
3. $C^m_{\frac{n(n-1)}{2}}$
4. (a) 结点数 n，边数 0

   (b) 结点数 n，边数 $\frac{n(n-1)}{2}$

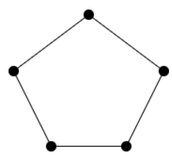
   (c) 结点数 $r+s$，边数 rs
5. 注意到最容易填的字母是 A 和 H，因为 A、H 在 A H 中只有一个字母与其相邻；而图中最难填的位置是最中间两个结点，因为这两个结点相邻的结点最多。所以不难想到把 A 和 H 填到中间两个位置。于是 B 和 G 的位置也唯一确定。

   接着尝试 C 的填法即可。

   其实，虽然直接尝试需要 8!=40320 次，但容易想到填的方法具有一定对称性，比如不可能 A 填在最左边的结点而 H 却不填在最右边的结点（纯个人思考，欢迎构造反例）；又结合图的同构的知识（比如... 和... 是一样的），所以即使直接尝试也不需要 8! 次。请聪明的同学们分析一下直接尝试需要多少次呢?

6. 若两人互相认识，则他们之间存在一条边；否则不存在边。给出一种构造：
7. 设 G 有 n 个结点。假设 G 中任意两个结点的度数都不相同，易知 G 的各结点度数分别为 0,1,2,..., n-1. 其中度数为 (n-1) 的结点与其他所有结点之间都存在边，而度数为 0 的的结点与其他所有结点之间都不存在边，矛盾。

8. 记 V 为 G 的结点集合。任取 G 的一条边 xy. 由 G 不含 K_3，易知 $(d(x)-1)+(d(y)-1)\leqslant n-2$，即

$$d(x)+d(y)\leqslant n$$

按照上式对 G 中所有的边求和，得到

$$\sum_{x\in V} d^2(x)\leqslant nm$$

由 $Cauchy-Schwarz$ 定理，易知

$$nm\geqslant \sum_{x\in V} d^2(x)\geqslant \frac{1}{n}(\sum_{x\in V} d(x))^2=\frac{4}{n}m^2$$

即，$m\leqslant \frac{1}{4}n^2$

9. 记 E 为 G 的边的集合，V 为 G 的结点集合。对于 G 中一条边 xy，令 Δ_{xy} 表示 G 中包含 xy 的 K_3 的个数。易知

$$k=\frac{1}{3}\sum_{xy\in E}\Delta_{xy}$$

对于任意 $xy\in E$，

$$(d(x)-1-\Delta_{xy})+(d(y)-1-\Delta_{xy})+\Delta_{xy}\leqslant n-2$$

即，

$$d(x)+d(y)-\Delta_{xy}\leqslant n$$

按上式对 G 的所有边求和

$$\sum_{xy\in E}(d(x)+d(y))-\sum_{xy\in E}\Delta_{xy}\leqslant nm$$

即，

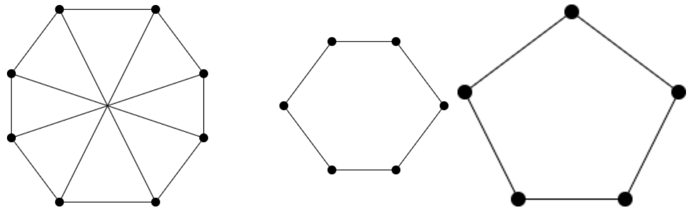
$$\sum_{x\in V} d^2(x)\leqslant \sum_{xy\in E}\Delta_{xy}+nm$$

结合第 8 题，易知

$$\frac{4}{n}m^2\leqslant \sum_{x\in V} d^2(x)\leqslant 3k+nm$$

10. 由握手定理，无向图的所有结点度数和为偶数；而当 n 和 k 都为奇数时，n 个结点的 k-正则图的所有结点度数和为奇数，矛盾。

11. 当 k 为偶数时，构造如下：将 n 个点排成一个圈，其中每个点与自己两侧相邻 $\lfloor\frac{k}{2}\rfloor$ 个点之间有边。当 n 为偶数 k 为奇数时，在上述构造基础上，每个点与自己“正对”的点之间有边。如图。



12. 提示：当 $v=2k$ 时，构造 $\varepsilon=k^2-k$ 的图 G。将 v 个点排成一个圈，其中每个点与自己两侧相邻 $\left\lfloor\frac{v-2}{2}\right\rfloor$ 个点之间有边。若 $\frac{v-2}{2}$ 为奇数，则每个点与自己“正对”的点之间有边。（见上题图）

   当 v 为奇数时，在图 G 的基础上加入一个结点 z 形成新图 H，其中 z 与 G 中“挨着”的 $\frac{v}{2}$ 个结点之间有边。

13. 令 H 是 G 的边数尽量多的是二分图的支撑子图，并令 $\{X,Y\}$ 是 H 的一个二分。任取 G 中一结点 x，不妨设 $x\in X$. 令 $d=d_G(x)-d_H(x)$（其中 $d_G(x)$ 表示 x 在图 G 中的度数。$d_H(x)$ 同理）. 易知 $d\leqslant d_H(x)$。若不然，令 $X^{'}=X\setminus\{x\}$、$Y^{'}=Y\cup\{x\}$，考虑可以二分为 $\left\{X^{'},Y^{'}\right\}$ 的 G 的支撑子图 $H^{'}$，则 $\varepsilon(H^{'})\geqslant\varepsilon(H)$，矛盾。

   于是，$d_G(x)=d+d_H(x)\leqslant 2d_H(x)$. 按该式对 G 的所有结点求和即得结论。

14. 同上题解法。

15. (1)$(3,3,3,3,3,3,3,3)$ (2)$(7,3,3,3,3,3,3,3)$ (3)$(3,3,3,3,2,2,2,0)$

16. 必要性：由握手定理易知任一图均满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}d_i$ 为偶数。

   充分性：给出一种构造。由握手定理易知度数为奇数的结点有偶数个。将度数为奇数的结点两两配对，每一对的两个结点连一条边，之后各结点再连若干自环。

17. 必要性：$\sum\limits_{i=1}^{n}d_i$ 为偶数的必要性由上题易知。显然，当 d_1 对应结点以外的结点之间有边时，$d_1<\sum\limits_{i=2}^{n}d_i$；当 d_1 对应结点以外的结点之间无边时，$d_1=\sum\limits_{i=2}^{n}d_i$；

   充分性：给出一种构造。将 d_1 对应结点与其余结点中对应 d_i 最大的结点连一条边，并将该点对应的 d_i 更新为 d_i-1；重复 d_1 次，再将更新后的 $\{d_2,...,d_n\}$ 从大到小排序为 $\{d_{i_2},...,d_{i_n}\}$。易知 $\{d_{i_2},...,d_{i_n}\}$ 满足 $d_{i_2}\leqslant\sum\limits_{k=3}^{n}d_{i_k}$（若不然，则 $d_{i_2}>d_1$，矛盾），因此重复上述步骤即可。

18. 参考：Kanari，“判断度数序列是否合法的 Erdös-Gallai 定理”，Kanari’s Blog，2014.3，http://kanari.logdown.com/posts/2014/03/09/erdos-gallai-theorem-conditions-for-a-sequence-to-be-graphical

   hdmmblz，“图的可视化问题、havel-hakimi 算法、Erdös-Gallai 定理”，2019.1，https://blog.csdn.net/hdmmblz/article/details/86506433

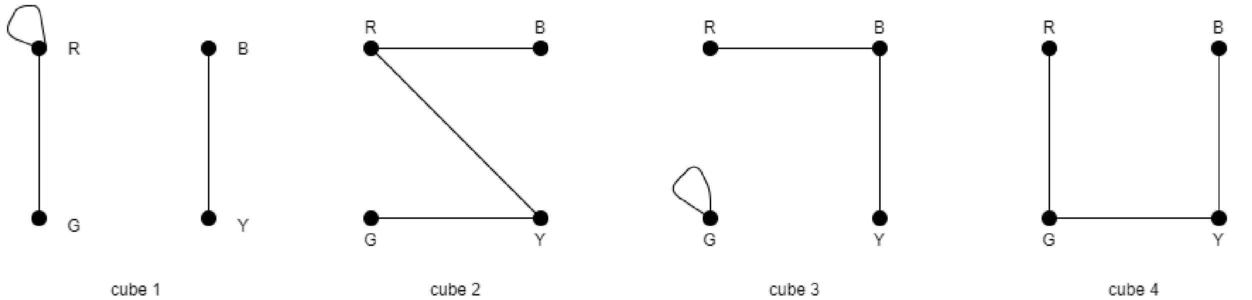
19. 参考：a_crazy_czy，“[竞赛图判定定理] 兰道定理 (Laudau’s Theorem) 介绍及其一种证明”，2017.6，https://blog.csdn.net/a_crazy_czy/article/details/73611366

20. 提示：$d^-(x)=v-1-d^+(x)$, $\forall x\in V$.

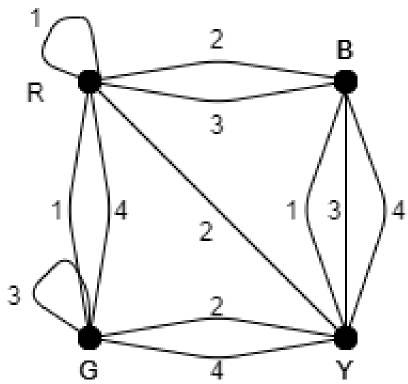
21. 在 k-正则竞赛图中，每个结点入度、出度均为 k. 因为竞赛图中任意两个结点之间均存在一条有向边，故易知 k-正则竞赛图结点数为 $2k+1$.

22. (1) 是 (2) 是 (3) 不是

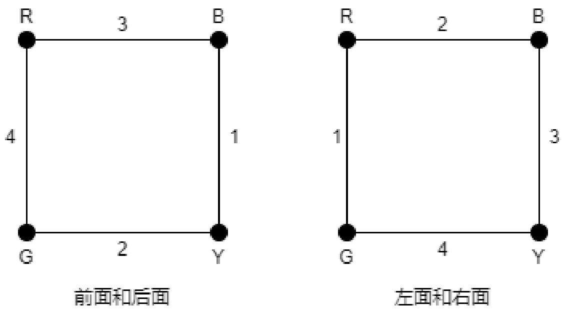
23. (a). 为每个立方体画出以四个颜色为结点的图；互为对面的两个面代表的颜色结点之间连一条边，如图。



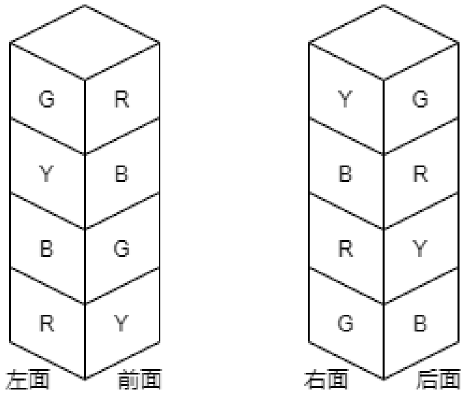
将四个方块的图并起来。



找出该图的两个 2-正则的支撑子图，使得这两个子图都恰好包含每个立方体的图中的一条边，且这两个子图之间没有共同的边。



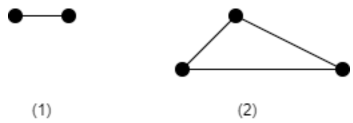
根据这两个子图可以构造出答案，如图。



24. 同上题解法。

25. 同上题解法。在构造出的图中不能找出符合条件的两个子图，故无解。

26. 如图



27. $\widetilde{G}$ 的最大完全子图的结点个数 $=G$ 最大独立集的结点个数

28. $G-e$ 结点数：n ；边数：$m-1$

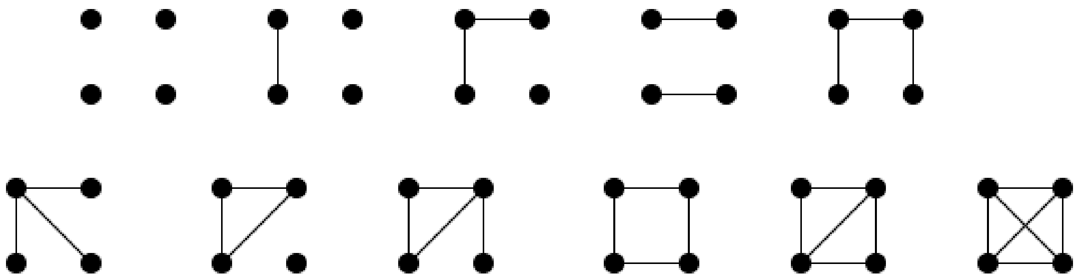
    $G-v$ 结点数：$n-1$ ；边数：$m-k$

29. 结点数：$n-1$ ；边数：$m-k-1$

30. (1) 不同构 (2) 同构 (3) 不同构

31. 上题 (G) 与 (1)、(G) 与 (3) 即可作为例子。

32. 共 11 个，如图。



33. (a) 不同构 (b) 不同构

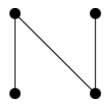
34. 提示 1：利用矩阵的第一类初等变换和矩阵相似的知识。

    提示 2：交换结点 i 和结点 j 的标号，相当于把邻接矩阵的第 i 行与第 j 行互换，同时把第 i 列与第 j 列互换。

35. 同构。

36. 提示：交换两条边的标号，相当于交换关联矩阵中对应的两列；交换两个结点的标号，相当于交换关联矩阵中对应的两行。

37. 互相不同构的 4 个结点的自补简单图只有 1 种：



38. 相互同构的图，边数相同。若 G 是自补简单图，则 $\frac{n(n-1)}{2}$ 应为偶数。故易知 $n \equiv\ 0\ or\ 1\ (mod\ 4)$.

39. 记 V_o 和 V_e 分别为 G 中度数为奇数和度数为偶数的结点集合。由握手定理，易知 $|V_o|$ 为偶数。由 $n \equiv 1\ (mod\ 4)$ 易知 n 为奇数，因此 $|V_e|$ 为奇数，$\frac{1}{2}(v-1)$ 为偶数。

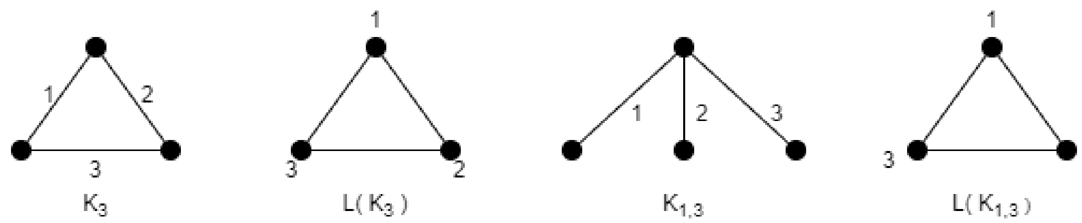
    令 V_e' 为 V_e 中度数不为 $\frac{1}{2}(v-1)$ 的结点的集合，只需证 $\left|V_e'\right|$ 为偶数。令 $x \in V_e$，则由 $G \cong \widetilde{G}$ 易知必存在 $y_x \in V(G)$ 使得 $d_G(y_x) = d_{\widetilde{G}}(x)$. 注意到

$$d_G(y_x) = d_{\widetilde{G}}(x) = (n-1) - d_G(x)$$

    为偶数。于是 $y_x \in V_e$. 由于 $d_G(x) \neq \frac{1}{2}(n-1)$，则 $d_G(y_x) \neq \frac{1}{2}(n-1)$ 且 $y_x \neq x$。于是 $y_x \in V_e'$。又 $y_x \neq y_z$ 若 $x, z \in V_e'$ 且 $x \neq z$，则易知 V_e' 中的结点成对出现，则 $\left|V_e'\right|$ 为偶数。

40. n=5.（圈图是 2-正则图。补图也是 2-正则图的圈图只有 C_5，经验证，n=5 符合题意）

41. 如图

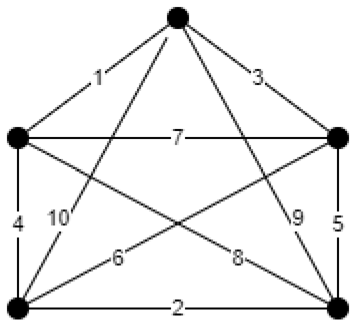


42. 记 V 为 G 的结点集合，$d(x)$ 为结点 x 的度数，m 为 $L(G)$ 的边数。则

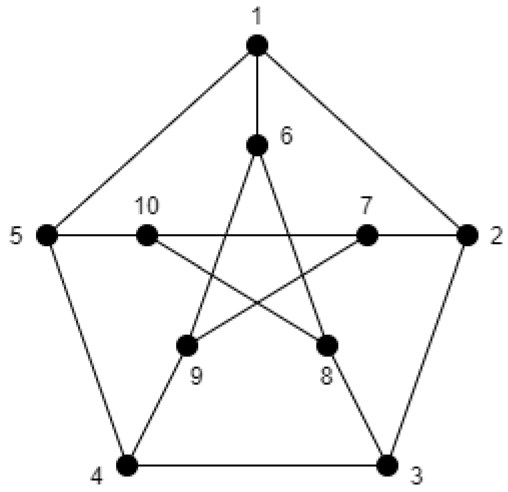
$$m = \sum_{x \in V} \binom{d(x)}{2}$$

43. 任取 G 中一条边 xy。通过结点 x，xy 对应结点可以与 $d(x)-1$ 个结点连边，通过结点 y，xy 对应结点可以与 $d(y)-1$ 个结点连边。因为 G 是 k-正则图，所以 xy 对应结点度数为 $2(k-1)$.

44. 按如下方式标号即可证明。



K_5



彼得森图

45. 参考：彭太华，《Ulam 在重构猜想的一些讨论》，《西南师范学院学报》，1985.5

46. D 与 $D^{'}$ 的邻接矩阵互为转置。

47. 记 $A\times A^T=(a_{ij})$，d_i 为第 i 个结点的度数，则

$$a_{ii}=d_i$$

记 $A^T\times A=(b_{ij})$. 如果 G 是有向图，则

$$a_{ii}=d_i^+,\quad b_{ii}=d_i^-$$

48. a_{ij} 表示第 i 个结点与第 j 个结点之间有多少条恰好含 k 条边的通路。

49. 无向图关联矩阵与其转置之积的主对角线元素分别表示对应结点的度数。

50. (a)n^2 (b)$n\times m$ (c)$2m$ (d)$n+m+1$

参考资料

[1]：Robin.J.Wilson，*Introduction to Graph Theory*，5th Edition，北京，世界图书出版公司北京公司，2015 年版
[2]：Xu Junming，*A First Course in Graph Theory*，科学出版社
[3]：张磊、李世群，《用矩阵判断无向图同构的几种方法》，2011.12，https://wenku.baidu.com/view/6cdd2c73168884868762d6cb.html
[4]：南京大学计算机科学与技术系，“图的表示与图同构”，https://wenku.baidu.com/view/449d9ee2cd7931b765ce0508763231126fdb7786.html
[5]：彭太华，《Ulam 在重构猜想的一些讨论》，《西南师范学院学报》，1985.5
[6]：a_crazy_czy，“[竞赛图判定定理] 兰道定理 (Laudau’s Theorem) 介绍及其一种证明”，2017.6，https://blog.csdn.net/a_crazy_czy/article/details/73611366
[7]：[美]Kenneth H.Rosen，《离散数学及其应用》第五版，袁崇义、屈婉玲、王捍贫、刘田译，北京，机械工业出版社，2007.6
[8]：潇洒走一回 LW，“CUGB 图论专场 2：C-Kindergarten 最大完全子图”，2014.2，https://blog.csdn.net/u011466175/article/details/19282085
[9]：Kanari，“判断度数序列是否合法的 Erdős-Gallai 定理”，Kanari’s Blog，2014.3，http://kanari.logdown.com/posts/2014/03/09/erdos-gallai-theorem-conditions-for-a-sequence-to-be-graphical
[10]hdmmblz，“图的可视化问题、havel-hakimi 算法、Erdős-Gallai 定理”，2019.1，https://blog.csdn.net/hdmmblz/article/details/86506433