第十一周次习题课讨论题参考解答

本次习题课主要讨论第一型曲线、曲面积分。

一．内容提要：

曲线积分可分为两类：一类与曲线的方向无关，称之为第一型曲线积分；另一类与曲线的方向有关，称之为第二型曲线积分；

曲面积分可分为两类：一类与曲面的方向无关，称之为第一型曲面积分；另一类与曲面的方向有关，称之为第二型曲面积分；

二．复习以下概念和性质：

1. 第一型曲线曲面积分定义；
2. 第一型曲线曲面积分存在的条件：连续函数在光滑曲线（面）上可积分
3. 曲线曲面积分的运算性质：线性性质；区域可加性质；比较性质；绝对可积分性质；
4. 曲线曲面积分中值定理（要求曲线曲面光滑）；

三．曲线曲面积分的计算

1.曲线积分计算的基本方法是根据题意写出所给曲线在适当坐标系下的参数方程将曲线积分的计算化为对参数的定积分；

2. 曲面积分计算的基本方法是根据题意写出所给曲面在适当坐标系下的参数方程将曲面积分的计算化为二重积分；

四．练习题目

4. 1 曲线积分

1．计算 $\oint_L xydl$，其中 L 是正方形 $|x|+|y|=a,\quad (a>0)$.

2．设 L 为椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，其周长记为 a。 求 $\oint_L(2xy+3x^2+4y^2)dl$

3. 计算 $I=\int_L|x|dl$, 其中L为双纽线 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$

4.求 $I=\int_L(xy+yz+zx)ds$, 其中 L 为圆周 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\ x+y+z=0.\end{cases}$

4.2 曲面积分

1． 计算$\iint_S (x^2+y^2)\mathrm{d}S$．其中$S$是锥体$\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1$的边界.

2．求$I=\iint\limits_S (x+y+z)^2 dS$，其中$S$为单位球面.

3．计算螺旋面S：$x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，$z=r\varphi$（$0\le r\le R,\ 0\le\varphi\le 2\pi$）的面积。

4．求圆柱面$x^2+y^2=R^2$被抛物柱面$z=R^2-x^2$及平面$z=0$所截部分S的侧面积。

5．计算第一型曲面积分$I=\iint\limits_S |z|dS$，其中曲面S为球面$S:x^2+y^2+z^2=a^2$；。

6． 记S为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被柱面$x^2+y^2=2x$所截的有限部分。求$\iint\limits_S zdS$。

7. 设一元函数$f(u)$于整个实轴上连续，S 代表单位球面 $x^2+\mathrm{y}^2+z^2=1$。证明 Poisson 公式 $\iint\limits_{\mathrm{S}}\mathrm{f}(ax+by+cz)dS=2\pi\int_{-1}^{1}f(\rho t)dt$，这里$\rho:=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$。

为了证明 Poisson 公式，我们需要先建立一个 Lemma。

Lemma：设Σ是一个正则的参数曲面。记Σ'是Σ在一个正交变换（正交矩阵）P 下的象，即$\Sigma'=P(\Sigma)$。记 $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$，$U=\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$，则对任何$\Sigma$上连续函数$g(x,y,z)$，我们有 $\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{g}(X)dS=\iint\limits_{\Sigma'}g(P^TU)dS$。（这个 Lemma 大致的意思是说，曲面的面积元素关于正交变换是不变的。）