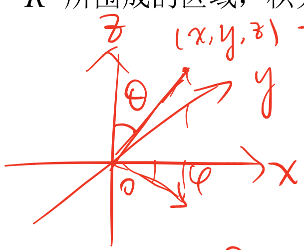
第八次习题课　三重积分

例.1（三重积分）设 V 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 所围成的区域，积分

$$\iiint_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz =$$

$\int_0^{2\pi} d\varphi$

$(x,y,z)\to(r,\theta,\varphi)$



答案：$\dfrac{\pi R^5}{5}(2-\sqrt{2})$ 。原式$=2\pi\int_0^R \rho^4 d\rho\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta d\theta$。

$$\begin{cases} x=\rho\sin\theta\cos\varphi \\ y=\rho\sin\theta\sin\varphi \\ z=\rho\cos\theta \end{cases}$$

$|J|=\rho^2\sin\theta.$

例. 2　　求 $\iiint_\Omega (1+x^2+y^2)zdxdydz$，

其中 $\Omega=\left\{(x,y,z)\,|\,\sqrt{x^2+y^2}\le z\le H\right\}$.

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ z=z \end{cases}$$

解：用柱坐标系，

$\Omega=\{(\rho,\varphi,z)\,|\,0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\rho\le H,\ \rho\le z\le H\}$　$|J|=\rho$

① 变量代换

② Jacobi 行列式.

$$\iiint_\Omega (1+x^2+y^2)zdxdydz\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^H d\rho\int_\rho^H(1+\rho^2)z\rho dz=\pi\left(\frac{H^4}{4}+\frac{H^6}{12}\right)$$

例. 3　　设 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，$F(t)=\iiint_\Omega\left(z^2+f(x^2+y^2)\right)dxdydz$，其中

$\Omega=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le h, x^2+y^2\le t^2\right\}$　$(t>0)$. 求 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{F(t)}{t^2}$.

解:用柱坐标系，$F(t)=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^t d\rho\int_0^h\left[z^2+f(\rho^2)\right]\rho dz=\dfrac{\pi h^3}{3}t^2+2\pi h\int_0^t\rho f(\rho^2)d\rho$，

用 L’ Hospital 法则，$\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{F(t)}{t^2}=\dfrac{\pi h^3}{3}+2\pi h\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\int_0^t\rho f(\rho^2)d\rho}{t^2}=\dfrac{\pi h^3}{3}+\pi hf(0)$.

$\to t f(t^2)$

$\to 2t$

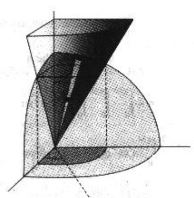
例. 4　求　三　重　积　分　：　$I=\iiint_\Omega(x+y+z)dv$　，　其　中

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\left|\begin{cases}0\le z\le\sqrt{1-y^2-x^2}\\ z\le\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}\right.\right\}$$

$\iiint_\Omega x=\iiint_\Omega y=0$

解：由函数与域的对称性；　$I=\iiint_\Omega(x+y+z)dv=\iiint_\Omega z\,dv$

球坐标系：$I=\iiint_\Omega z\,dv=\int_0^{\pi/4}d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 r\cos\theta r^2\sin\theta dr=\dfrac{\pi}{8}$；



柱坐标系：$I=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}/2}\rho d\rho\boxed{\int_\rho^{\sqrt{1-\rho^2}}zdz}=\dfrac{\pi}{8}$；

$d(\frac{1}{2}\rho^2)$

$\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2}$

$x^2+y^2\le\frac{1}{2}$　$\rho=\sqrt{x^2+y^2}\le\frac{\sqrt{2}}{2}$

直角坐标系：$I=\int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2}dx\int_{-\sqrt{1/2-x^2}}^{\sqrt{1/2-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}}zdz=\frac{\pi}{8}$

先对 xy 积分：$I=\int_0^1 dz\iint_{D(z)}dxdy=\int_1^{\sqrt{2}/2}z\pi z^2dz+\int_{\sqrt{2}/2}^1 z\cdot\pi\left(1-z^2\right)dz=\frac{\pi}{8}$

例.5 求由曲面 $S:(x^2+y^2)^2+z^4=z^2$ 所围立体 Ω 的体积。 $(x^2+y^2)^2=z^2-z^4\geq 0$

解：记立体 Ω 的体积为 $|\Omega|$。由观察可知平面 $z=z\in[0,1]$ 截立体 Ω 所得的截面为圆盘 D_z

$1-z^2\geq 0$

圆心位于 $(0,0,z)$，半径为 $r_z=(z-z^4)^{1/4}$，其面积为 $\pi(z^2-z^4)^{1/2}$。于是

$-1\leq z\leq 1$

$$|\Omega|=\iiint_\Omega dxdydz=\int_0^1 dz\iint_{D_z}dxdy=\int_0^1\pi(z^2-z^4)^{1/2}dz=\pi\int_0^1 z(1-u^2)^{1/2}dz=\cdots。$$

-1

$\rho\leq(z^2-z^4)^{\frac14}$

$V_\Omega=\int_{-1}^1 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{(z^2-z^4)^{\frac14}}\rho d\rho$

解答完毕。

$\frac12(z^2-z^4)^{\frac12}$

$\frac12(1-z^2)^{\frac12}$ ~~dz~~ $d(\frac12 z^2)$

$\frac12(1-t)^{\frac12}dt$

例.6 设 $A=(a_{ij})$ 为 3×3 实对称正定矩阵，$\sum_{i,j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j=1$ 表示三维空间的一个椭球面。证明该椭球面所包围立体 V 的体积为 $|V|=\frac{4\pi}{3\sqrt{\det A}}$。 $\det(J)$

$=\sqrt{\det(A)}$

证明：由于 A 对称正定，因此存在可逆矩阵 P，使得 $A=P^tP$。在线性变换 $y=Px$ 下，V 的象 U 为单位球。这是因为

$$1=\sum_{i,j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j=x^tAx=x^tP^tPx=y^ty=y_1^2+y_2^2+y_3^3。\quad 于是$$

$x^TAx=1$

$y^Ty=1$

$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

$$|V|=\iiint_V dx_1dx_2dx_3=\iiint_U|\det P^{-1}|dy_1dy_2dy_3=|\det P^{-1}||U|=\frac{4\pi}{3}|\det P^{-1}|。$$ 根据关系

$A=P^tP$，我们有 $(\det P)^2=\det A$，于是 $|\det P^{-1}|=\frac{1}{|\det P|}=\frac{1}{\sqrt{\det A}}$。故

$V=\iiint dx_1dx_2dx_3$

$=\iiint_{V_1}(\det(J))dy_1dy_2dy_3$

$$|V|=\frac{4\pi}{3\sqrt{\det A}}。$$ 证毕。

例.7 令曲面 S 在球坐标下方程为 $r=a(1+\cos\theta)$，Ω 是 S 围成的有界区域，计算 Ω 在直角坐标系下的形心坐标。

$\sqrt{\det(A)}$

$\frac{V}{|\det(J)|}=\iiint_{V_1}dy_1dy_2dy_3$

$\rho=1$

(密度) 相加

$V=\frac43\pi\cdot\det(L^{-1})$

$\Rightarrow y=L^{-1}x$

$\boxed{Lx=y}$

$y^Ty=1$

$x=\frac{M_x}{M}$ $y=\frac{M_y}{M}$ $z=\frac{M_z}{M}$

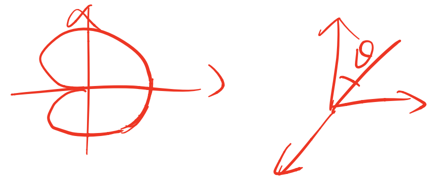
体积

$x^TAx=1$

$x^TL^T(Lx)=1$

$\det(A)=\det(L^TL)$

$=\det(L^T)\ldots$



$=(\det(L))^2$

解： Ω的体积 $V=\iiint\limits_{\Omega}dV=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{a(1+\cos\theta)}r^2dr=\frac{8}{3}\pi a^3$，

Ω关于 z=0 平面的静力矩

$$V_{xy}=\iiint\limits_{\Omega}zdV=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\cos\theta\sin\theta d\theta\int_0^{a(1+\cos\theta)}r^3dr=\frac{32}{15}\pi a^4,$$

M_z

Ω的形心坐标为 $\bar{x}=\bar{y}=0,\bar{z}=\frac{4}{5}a$；

例.8 由六个平面 $3x-\underset{u}{y}-z=\pm1$，$-x+\underset{v}{3y}-z=\pm1$，$-x-\underset{w}{y}+3z=\pm1$ 所围立体的体积为____________________1/2）

8

解：作线性变换 $u=3x-y-z$，$v=-x+3y-z$，$w=-x-y+3z$，则

$\frac{8}{\det(J)}=\frac{1}{2}$

$\det\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\begin{vmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{vmatrix}=16$。于是所求体积为

$|V|=\iiint\limits_{V}dxdydz=\iiint\limits_{U}\left|\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|dudvdw=\frac{1}{16}|U|$，其中 U 为 $|u|\le1$，$|v|\le1$，$|w|\le1$，其体积为8。故所得结论为1/2。

$x^2+y^2+z^2=m^Tm$

$u^2+v^2+w^2=n^Tn=m^TA^TAm=m^Tm$

$m=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

例. 9 设 $V=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le1\}$，$h=\sqrt{a^2+b^2+c^2}>0$，$f(u)$ 在区间 $[-h,h]$上连续，证明：$\iiint\limits_{V}f(ax+by+cz)dxdydz=\pi\int_{-1}^{1}(1-t^2)f(ht)dt$。

$n=\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$

证明：作变量代换

$$u=\frac{1}{h}(ax+by+cz)$$
$$v=a_2x+b_2y+c_2z$$
$$w=a_3x+b_3y+c_3z$$

$\begin{cases}\frac{1}{h}(ax+by+cz)=u\\a_2x+b_2y+c_2z=v\\a_3x+b_3y+c_3z=w\end{cases}$ $Am=n$

其中系数矩阵为正交矩阵。则

$$\iiint\limits_{V}f(ax+by+cz)dxdydz=\int_{-1}^{1}du\iint\limits_{D_u}f(hu)dvdw$$

$A=\begin{pmatrix}\frac{a}{h}&\frac{b}{h}&\frac{c}{h}\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{pmatrix}$

其中 $D_u=\{(v,w)|v^2+w^2\le1-u^2\}$。故 $\iiint\limits_{V}f(ax+by+cz)dxdydz=\pi\int_{-1}^{1}(1-t^2)f(ht)dt$。

$\pi\cdot(1-u^2)$ $\iint\limits_{D_u}dvdw$ $\int_{-1}^{1}f(hu)du$

$A^TA=AA^T=I$

$|\det A|=1$