

例1 设  $D_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq t^2, t > 0\}$ ,  $f(x, y)$  在  $D_t$  上连续, 在  $D_t$  内存在连续偏导

数.  $f(0,0)=1$ . 若  $f(x, y)$  在  $D_t$  上满足方程  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{2} f(x, y)$ .  $\vec{n}$  为有向曲

线  $\partial D_t$  的外单位法向量, 求极限  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \cos t} \oint_{\partial D_t} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} d\vec{l} =$

解:  $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}} = \nabla f \cdot \vec{n}$ . 利用格林公式第二种形式得到

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D_t} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} d\vec{l} &= \oint_{\partial D_t} \nabla f \cdot \vec{n} d\vec{l} = \oint_{\partial D_t} (f'_x \vec{i} + f'_y \vec{j}) \cdot \vec{n} d\vec{l} = \iint_{D_t} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \iint_{D_t} f(x, y) dx dy = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t f \cdot r dr = \pi \int_0^t f \cdot r dr \end{aligned}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \cos t} \oint_{\partial D_t} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} d\vec{l} = \pi \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\int_0^t f \cdot r dr}{1 - \cos t} = \pi. \quad (\text{洛必达法则})$$

例2 设  $Q(x, y)$  在全平面上连续可微, 已知曲线积分  $\int_L 2xy dx + Q(x, y) dy$  与路径无关, 并

且对于任意的  $t$ , 有  $\int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy dx + Q(x, y) dy = \int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy dx + Q(x, y) dy$ . 求函数  $Q(x, y)$ .

解: 根据条件得到  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} (2xy) = 2x$ , 因此  $Q(x, y) = x^2 + f(y)$ .

另外算出两个曲线积分

$$\begin{aligned} \int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy dx + Q(x, y) dy &= \int_0^1 2x \cdot 0 dx + \int_0^t Q(1, y) dy \\ &= \int_0^t [1 + f(y)] dy = t + \int_0^t f(y) dy, \end{aligned}$$

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy dx + Q(x, y) dy = \int_0^1 Q(0, y) dy + \int_0^t 2x \cdot 1 dx = \int_0^1 f(y) dy + t^2,$$

令两者相等得到  $t + \int_0^t f(y) dy = \int_0^1 f(y) dy + t^2$ .

关于  $t$  求导数得到  $f(t) = 2t - 1$ , 于是  $Q(x, y) = x^2 + 2y - 1$ .

例3 已知积分  $\int_L (x + xy \sin x) dx + \frac{f(x)}{x} dy$  与路径无关,  $f(x)$  为可微函数, 且  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ,

(1) 求  $f(x)$ ;

(2) 对(1)中求得的  $f(x)$ , 求函数  $u = u(x, y)$  使得  $du = (x + xy \sin x) dx + \frac{f(x)}{x} dy$ ;

(3) 对(1)中求得的  $f(x)$ , 求上述积分, 其中积分路径为从  $A(\pi, 1)$  到  $B(2\pi, 0)$  的任意路径.

解: (1) 
$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{f(x)}{x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (x + xy \sin x)$$

$$x \sin x = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}, \quad f'(x) - \frac{1}{x} f(x) = x^2 \sin x$$

这是一阶线性微分方程. 通解为  $f(x) = x(\sin x - x \cos x + C)$ , 由初始条件得

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad C = -1, \quad \text{于是 } f(x) = x(\sin x - x \cos x - 1).$$

(2) 解法一:  $(x + xy \sin x)dx + \frac{f(x)}{x}dy = (x + xy \sin x)dx + (\sin x - x \cos x - 1)dy$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x + xy \sin x, \quad u = \frac{x^2}{2} - xy \cos x + y \sin x + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -x \cos x + \sin x + \varphi'(y) = \sin x - x \cos x - 1$$

$$\varphi'(y) = -1, \quad \varphi(y) = -y + C$$

$$u = \frac{x^2}{2} - xy \cos x + y \sin x - y + C$$

其中  $C$  为任意常数.

$$u = \int_{(0,0)}^{(x,y)} (x + xy \sin x)dx + (\sin x - x \cos x - 1)dy + C$$

解法二:  $= \int_0^x x dx + \int_0^y (\sin x - x \cos x - 1)dy + C$   
 $= \frac{x^2}{2} - xy \cos x + y \sin x - y + C$

(3) 解法一: 积分与路径无关, 由  $A$  到  $B$  取平行与坐标轴的两条路径,

$$I = \int_1^0 (-\pi \cos \pi - 1)dy + \int_\pi^{2\pi} x dx = (1 - \pi) + \frac{3\pi^2}{2}$$

解法二:  $I = u(x, y)|_A^B = u(B) - u(A) = (1 - \pi) + \frac{3\pi^2}{2}.$

**例4** 计算积分:  $\int_{(1,\pi)}^{(2,\pi)} \left( 1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x} \right) dx + \left( \sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} \right) y dx,$

路径为沿任一条不与轴相交的曲线。

解: 由于  $\frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{2y}{x^2} \cos \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^3} \sin \frac{y}{x} = \frac{\partial Y}{\partial x},$

$$\begin{aligned} \left( 1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x} \right) dx + \left( \sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} \right) dy &= dx + y \cos \frac{y}{x} \left( -\frac{y}{x^2} dx + \frac{1}{x} dy \right) + \sin \frac{y}{x} dy \\ &= dx + y \cos \frac{y}{x} d\left(\frac{y}{x}\right) + \sin \frac{y}{x} dy = dx + y d\left(\sin \frac{y}{x}\right) + \sin \frac{y}{x} dy = d\left(x + y \sin \frac{y}{x}\right), \end{aligned}$$

$$\int_{(1,\pi)}^{(2,\pi)} \left( 1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x} \right) dx + \left( \sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} \right) y dx$$

$$= \int_{(1,\pi)}^{(2,\pi)} d\left(x + y \sin \frac{y}{x}\right) = \left(x + y \sin \frac{y}{x}\right) \Big|_{(1,\pi)}^{(2,\pi)} = \pi + 1$$

**例5** 设在上半平面  $D = \{(x, y) | y > 0\}$  内, 函数  $f(x, y)$  具有连续偏导数, 且对任意的  $t > 0$

都有  $f(tx, ty) = t^{-2} f(x, y)$ , 证明: 对  $D$  内的任意分段光滑的有向简单闭曲线  $L$ , 都

$$\oint_L yf(x, y)dx - xf(x, y)dy = 0.$$

解: 由  $f(tx, ty) = t^{-2} f(x, y)$  两边对  $t$  求导得:

$$xf'_x(tx, ty) + yf'_y(tx, ty) = -2tf(x, y)$$

令  $t = 1$ , 则  $xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) = -2f(x, y)$

记  $X = yf(x, y), Y = -xf(x, y)$

$$\frac{\partial X}{\partial y} = f(x, y) + yf'_y(x, y); \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = -f(x, y) - xf'_x(x, y)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = -f(x, y) - xf'_x(x, y) - [f(x, y) + yf'_y(x, y)]$$

$$= -2f(x, y) - [xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y)] = 0,$$

由于是单连通域, 又有满足  $\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0$ , 这样, 于是对  $L$  内的任意分段光滑的有向简单闭

曲线  $L$ , 都有  $\oint_L yf(x, y)dx - xf(x, y)dy = 0$ .

**例6** 设  $\Omega$  为由圆锥面  $S: x^2 + y^2 = z^2$  和平面  $Ax + By + Cz + D = 0$  所围成的圆锥体。

(i) 证明设此圆锥体的体积  $V$  可以表示为  $V = \frac{1}{3} \iint_{\partial\Omega} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}^0) dS$ , 其中  $\partial\Omega$  为  $\Omega$  区域的边界曲

面,  $\mathbf{n}^0$  为其单位外法向量,  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ .

(ii) 圆锥体的体积  $V$  也可以表示为  $V = \frac{Ah}{3}$ , 其中  $A$  为圆锥的底面积,  $h$  为圆锥的高.

证明: (i) 根据 Gauss 公式得  $\iint_{\partial\Omega} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}^0) dS = \iint_{\partial\Omega^+} (x, y, z) \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} 3dxdydz = 3V$

故  $V = \frac{1}{3} \iint_{\partial\Omega} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}^0) dS$ 。(注：这个结论不仅仅对圆锥体成立，而是一个一般性结论：任何

有界立体  $\Omega$ ，其体积均可以表为  $|\Omega| = \frac{1}{3} \iint_{\partial\Omega} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}^0) dS$ ，其中  $\mathbf{n}^0$  为  $\partial\Omega$  单位外法向量。)

(ii) 由于  $\partial\Omega = S_1 \cup S_2$ ，其中  $S_1$  记锥面部分， $S_2$  记底面部分。因为锥面的顶点在原点，其上每一点的法向量与径向垂直，故  $\iint_{S_1} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}^0) dS = 0$ 。 $S_2$  为平面  $Ax + By + Cz + D = 0$  的

一部分，其单位法向量为  $\frac{\pm(A, B, C)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ 。注意到在  $S_2$  上，点的位置向量与正法向成锐角。

因此

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}^0) dS &= \iint_{S_2} \left| (x, y, z) \cdot \frac{(A, B, C)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| dS \\ &= \iint_{S_2} \left| \frac{Ax + By + Cz}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| dS = \iint_{S_2} \left| \frac{-D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| dS \\ &= \left| \frac{-D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| \iint_{S_2} dS = Ah \end{aligned}$$

其中  $A = \iint_{S_2} dS$  为圆锥的底面积，而  $h = \left| \frac{-D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$  为原点到平面

$Ax + By + Cz + D = 0$  的距离，也就是圆锥的高。故

$$V = \frac{1}{3} \iint_{\partial\Omega} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}^0) dS = \frac{1}{3} \left( \iint_{S_1} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}^0) dS + \iint_{S_2} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}^0) dS \right) = \frac{1}{3} \iint_{S_2} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}^0) dS = \frac{Ah}{3}。解答完毕。$$

**例7** 设一元函数  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上连续可导，且对于任何位于半空间

$$R_x^+ = \{(x, y, z), x > 0\} \text{ 中}$$

的光滑有向封闭曲面  $S \subset R_x^+$ ，有  $\oiint_S xf(x) dydz - xyf(x) dzdx - e^{2x} z dx dy = 0$ 。进一步假设

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ 。求  $f(x)$ 。

解：对于  $\forall (x_0, y_0, z_0) \in R_x^+$ 。作以  $(x_0, y_0, z_0)$  为球心，以  $r > 0$  为半径的闭球  $B_r$ 。取  $r > 0$  充分小，可以使得  $B_r \subset R_x^+$ 。于是由假设得

$$\begin{aligned} \oiint_{\partial B_r} xf(x) dydz - xyf(x) dzdx - e^{2x} z dx dy &\equiv 0。根据 Gauss 公式有 \\ \iiint_{B_r} [(xf(x))_x + (-xyf(x))_y + (-e^{2x} z)_z] dx dy dz &= 0，即 \end{aligned}$$

$$\iiint_{B_r} [xf'(x) + (1-x)f(x) - e^{2x}] dx dy dz = 0.$$

再根据三重积分的中值定理可知存在  $\xi \in [x_0 - r, x_0 + r]$ , 使得

$$\xi f'(\xi) + (1-\xi)f(\xi) - e^{2\xi} = 0. \text{ 令 } r \rightarrow 0^+ \text{ 即得}$$

$$x_0 f'(x_0) + (1-x_0)f(x_0) - e^{2x_0} = 0.$$

由于  $x_0 > 0$  是任意的, 故  $xf'(x) + (1-x)f(x) - e^{2x} = 0, \forall x > 0$ .

这是一阶线性常微分方程, 根据求解公式得可知其通解为  $f(x) = \frac{e^x}{x}(c + e^x)$ . 进一步由假设

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ , 可以确定  $c = -1$ . 因此  $f(x) = \frac{e^x}{x}(e^x - 1)$ . 解答完毕.

**例8** 利用 Stokes 公式计算积分  $I = \oint_{L^+} (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$ , 其中  $L^+$  为圆周

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ y = x \tan \alpha \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

从  $Ox$  轴的正向看去, 圆周的正向为逆时针方向.

解: 前面 (见第一部分题 1) 我们利用  $L^+$  的参数方程直接计算出了积分. 利用 Stokes 公式计算则更简单. 记  $S^+$  为由圆周  $L^+$  在平面  $y = x \tan \alpha$  上所围的部分 (闭圆盘), 其正法向与  $x$  轴正向成锐角. 由 Stokes 公式得

$$\begin{aligned} I &= \oint_{L^+} (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz = \iint_{S^+} \text{rot}(y-z, z-x, x-y) \cdot d\mathbf{S} \\ &= \iint_S \text{rot}(y-z, z-x, x-y) \cdot \mathbf{n}^0 dS \end{aligned}$$

其中  $\mathbf{n}^0$  为  $S^+$  的单位正法向. 由假设知  $\mathbf{n}^0 = (\sin \alpha, -\cos \alpha, 0)$ . 简单计算知  $\text{rot}(y-z, z-x, x-y) = -2(1, 1, 1)$

$$\begin{aligned} \text{于是 } I &= \iint_S \text{rot}(y-z, z-x, x-y) \cdot \mathbf{n}^0 dS = -2 \iint_S (1, 1, 1) \cdot (\sin \alpha, -\cos \alpha, 0) dS \\ &= 2(\cos \alpha - \sin \alpha) \iint_S dS = 2\pi a^2 (\cos \alpha - \sin \alpha) \end{aligned}$$

其中  $\iint_S dS = \pi a^2$  为平面  $y = x \tan \alpha$  在球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  部分内的面积. 解答完毕.

**例9** 设有向曲线  $L^+$  是平面  $x + y + z = 0$  与球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  的交线, 从  $z$  轴正向看去

为逆时针为正向. 求第二类曲线积分  $I = \int_{L^+} \frac{(y+1)dx + (z+2)dy + (x+3)dz}{x^2 + y^2 + z^2}$ .

解: 首先注意  $I = \int_{L^+} (y+1)dx + (z+2)dy + (x+3)dz$ .

记  $S^+$  为平面  $x + y + z = 0$  上包含于球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  内的部分, 规定  $S^+$  的正法向与  $z$

轴的正向成锐角。记  $\vec{F} = (y+1, z+2, x+3)$ 。则积分  $I$  可写作  $I = \int_{L^+} \vec{F}(r) \cdot d\vec{r}$ 。简单计算得  $\text{rot } \vec{F} = (-1, -1, -1)$ 。根据 Stokes 公式得  $I = -\iint_{S^+} dydz + dzdx + dxdy$ 。注意到  $S$  的单位正法向  $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ 。于是  $I = -\iint_S (1, 1, 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) dS = -\sqrt{3} \iint_S dS = -\sqrt{3}\pi$ 。解答完毕。

**例10** 设  $\Sigma^+$  是锥面的一个部分:  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $0 \leq z \leq 1$ , 规定其正法线向下, 求面积分

$$I = \iint_{\Sigma^+} xdydz + 2ydzdx + 3(z-1)dxdy.$$

解: 为了用 Gauss 公式来计算上述积分。我们关于锥面  $\Sigma^+$  补上一单位圆盘  $\Sigma_1^+$ :  $x^2 + y^2 \leq 1$ ,  $z = 1$ , 正法线向上。记由锥面  $\Sigma^+$  和圆盘  $\Sigma_1^+$  所围成的立体为  $\Omega$ 。于是应用 Gauss 公式得

$$\iint_{\Sigma^+} + \iint_{\Sigma_1^+} = \iiint_{\Omega} \text{div} F = \iiint_{\Omega} 6dxdydz = 6|\Omega| = 2\pi.$$

而积分  $\iint_{\Sigma_1^+} xdydz + 2ydzdx + 3(z-1)dxdy = 0$ 。

因此原积分  $I = \iint_{\Sigma^+} xdydz + 2ydzdx + 3(z-1)dxdy = 2\pi$ 。解答完毕。

**例11** 计算高斯积分  $I = \oiint_S \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} dS$ , 其中  $S$  为一个不经过原点的光滑封闭曲面, 其中  $\vec{n}$  为

$S$  上点  $(x, y, z)$  处的单位外法线向量,  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ,  $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 。

解: 记  $\vec{V} = \vec{r}/r^3 = (x, y, z)/r^3$ 。则  $\oiint_S \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} dS = \oiint_S \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{n} dS = \oiint_S \vec{V} \cdot \vec{n} dS$ 。简单计算表

明, 证向量场  $V$  的散度恒为零, 即  $\text{div} V = 0$ 。因此当  $S$  不包围原点时, 向量场  $V$  在由  $S$  所包围的闭区域内连续可微。因此利用 Gauss 公式立知面积分  $\oiint_S \vec{V} \cdot \vec{n} dS = 0$ 。

当  $S$  包含围原点时, 原积分等于向量场  $\vec{V}$  关于球面  $\Sigma^+: x^2 + y^2 + z^2 = \delta^2$  (外侧) 上的第二型面积分。于是

$$I = \oiint_S \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} dS = \oiint_{\Sigma^+} \vec{V} \cdot \vec{n} dS = \oiint_{\Sigma^+} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \frac{\vec{r}}{r} dS = \frac{1}{\delta^2} \oiint_{\Sigma} dS = 4\pi.$$

解答完毕。

**例12** 确定常数  $\alpha$  , 使得积分  $\int_A^B (x^4 + 4xy^\alpha)dx + (6x^{\alpha-1}y^2 - 5y^4)dy$  与路径无关, 并求原

函数  $\varphi(x, y)$  , 使得  $d\varphi = (x^4 + 4xy^\alpha)dx + (6x^{\alpha-1}y^2 - 5y^4)dy$  。

解: 记  $P(x, y) = x^4 + 4xy^\alpha$  ,  $Q(x, y) = 6x^{\alpha-1}y^2 - 5y^4$  。令  $P_y = Q_x$  , 得

$4\alpha xy^{\alpha-1} = 6(\alpha-1)x^{\alpha-2}y^2$  。由此解得  $\alpha-2=1$  , 且  $4\alpha = 6(\alpha-1)$  ,  $\alpha-1=2$  , 所以  $\alpha=3$  。

当  $\alpha=3$  时, 对微分形式  $(x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy$  作适当组合得

$$(x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy = x^4dx - 5y^4 + (4xy^3dx + 6x^2y^2dy)$$

$= d(\frac{x^5}{5} - y^5 + 2x^2y^3)$  。由此可得所求原函数为  $\varphi(x, y) = \frac{x^5}{5} - y^5 + 2x^2y^3 + c$  。解答完毕。

**例13** (P.229 9) 设  $D \subset R^2$  为开集,  $u(x, y)$  为调和函数  $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, (x, y) \in D\right)$  , 证明

(1)  $u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \left( u \frac{\partial \ln r}{\partial \mathbf{n}} - \ln r \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) dl$  , 其中  $(x_0, y_0) \in D$  ,  $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$  ,  $\mathbf{n}$

为  $D$  的外法向量;

(2)  $u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi R} \int_L u(x, y) dl$  , 其中  $L$  为以  $(x_0, y_0)$  为圆心,  $R$  为半径的圆。

证明: (1)  $\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \left( u \frac{\partial \ln r}{\partial \mathbf{n}} - \ln r \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) dl = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \left( u \frac{\partial \ln r}{\partial x} - \ln r \frac{\partial u}{\partial x}, u \frac{\partial \ln r}{\partial y} - \ln r \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot \mathbf{n}^0 dl$  。

而  $\frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial \ln r}{\partial x} - \ln r \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( u \frac{\partial \ln r}{\partial y} - \ln r \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0$  ,  $(x, y) \neq (x_0, y_0)$  ,

所以令  $L_\varepsilon : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \varepsilon^2$  ,

$$\int_{\partial D} \left( u \frac{\partial \ln r}{\partial x} - \ln r \frac{\partial u}{\partial x}, u \frac{\partial \ln r}{\partial y} - \ln r \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot \mathbf{n}^0 dl = \int_{L_\varepsilon} \left( u \frac{\partial \ln r}{\partial x} - \ln r \frac{\partial u}{\partial x}, u \frac{\partial \ln r}{\partial y} - \ln r \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot \mathbf{n}^0 dl$$

$$= \int_{L_\varepsilon} \left( u \frac{\partial \ln r}{\partial x}, u \frac{\partial \ln r}{\partial y} \right) \cdot \mathbf{n}^0 dl - \int_{L_\varepsilon} \left( \ln r \frac{\partial u}{\partial x}, \ln r \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot \mathbf{n}^0 dl$$

$$\int_{L_\varepsilon} \left( \ln r \frac{\partial u}{\partial x}, \ln r \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot \mathbf{n}^0 dl = \ln \varepsilon \int_{L_\varepsilon} \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot \mathbf{n}^0 dl = \ln \varepsilon \iint_{D_\varepsilon} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy = 0$$

因为  $\frac{\partial \ln r}{\partial x} = \frac{x-x_0}{\varepsilon^2}$  ,  $\frac{\partial \ln r}{\partial y} = \frac{y-y_0}{\varepsilon^2}$  , 所以

$$\begin{aligned}
& \int_{L_\varepsilon} \left( u \frac{\partial \ln r}{\partial x}, u \frac{\partial \ln r}{\partial y} \right) \cdot \mathbf{n}^0 dl = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{L_\varepsilon} u \cdot (x - x_0, y - y_0) \cdot \mathbf{n}^0 dl \\
& = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{L_\varepsilon} u \cdot (x - x_0, y - y_0) \cdot \frac{(x - x_0, y - y_0)}{\varepsilon} dl = \frac{1}{\varepsilon} \int_{L_\varepsilon} u(x, y) dl = \frac{1}{\varepsilon} u(\xi, \eta) \int_{L_\varepsilon} dl = 2\pi u(\xi, \eta) \\
& \varepsilon \rightarrow 0, \quad u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \left( u \frac{\partial \ln r}{\partial \mathbf{n}} - \ln r \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) dl.
\end{aligned}$$

(2) 略