

第七次习题课 二重积分

例.1 证明 $\iint_{[0,1]^2} (xy)^{xy} dx dy = \int_0^1 t^t dt$ (第三章的总复习题 9, page 171)

例.2 利用二重积分理论, 证明以下积分不等式。设 $f(x)$, $g(x)$ 于 $[a,b]$ 上连续, 则

$$(1) \left(\int_a^b f(x) dx \right)^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x) dx .$$

$$(2) \left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx .$$

$$(3) \iint_{[a,b]^2} \frac{f(x)}{f(y)} dx dy \geq (b-a)^2, \text{ 这里补充假设 } f(x) > 0, \forall x \in [a,b].$$

例.3 改变累次积分顺序 $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y) dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x,y) dy$;

例.4 设 $f(x,y)$ 为连续函数, 且 $f(x,y) = f(y,x)$. 证明:

$$\int_0^1 dx \int_0^x f(x,y) dy = \int_0^1 dx \int_0^x f(1-x, 1-y) dy.$$

例.5 对积分 $\iint_D f(x,y) dx dy$, $D = \{(x,y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq x+y \leq 1\}$ 进行极坐标变换并写出变换后不同顺序的累次积分

例.6 计算二重积分: $\iint_D |xy| dx dy$, 其中 D 为圆域: $x^2 + y^2 \leq a^2$ 。

例.7 在下列积分中引入新变量 u, v 后, 试将它化为累次积分:

$$\iint_D f(x,y) dx dy, \text{ 其中 } D = \{(x,y) | \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{a}, x \geq 0, y \geq 0\},$$

若 $x = u \cos^4 v, y = u \sin^4 v$.

例.8 试作适当变换, 计算下列积分:

$$(1) \iint_D (x+y) \sin(x-y) dx dy, D = \{(x,y) | 0 \leq x+y \leq \pi, 0 \leq x-y \leq \pi\};$$

$$(2) \iint_D e^{\frac{y}{x+y}} dx dy, D = \{(x,y) | x+y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

例.9 求由曲线所围的平面图形面积: $(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}) = x^2 + y^2$ 。

例.10 试作适当变换,把 $\iint_D f(x+y)dxdy$, 其中 $D = \{(x,y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$ 化为单重积分。

例.11 计算积分 $\iint_{\substack{0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 2}} [x+y] d\sigma$;

例.12 计算 $I = \iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} \right) d\sigma$, 其中 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ 。