



§ 2. n 元函数与 n 元向量值函数

1. n 元函数 f

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto y$$

$x \in \mathbb{R}^n$: 自变量

$y \in \mathbb{R}$: 因变量

Ω : f 的定义域

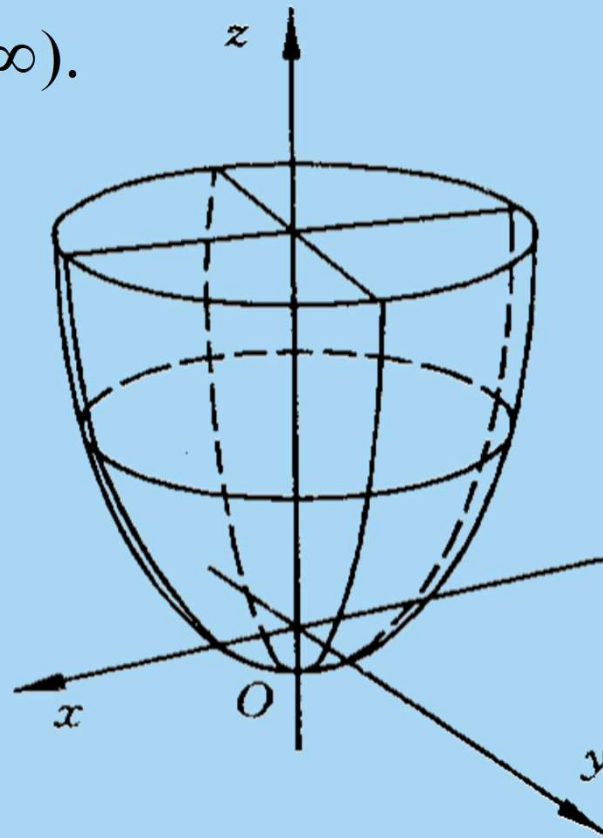
$f(\Omega) \triangleq \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \Omega, s.t. y = f(x)\}$ 称为 f 的值域



例. 旋转抛物面 $z = x^2 + y^2, (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

这是一个2元函数.

定义域: \mathbb{R}^2 . 值域: $[0, +\infty)$.





例. 马鞍面 $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, (x, y) \in \mathbb{R}^2, (a, b > 0 \text{ 为给定参数}).$

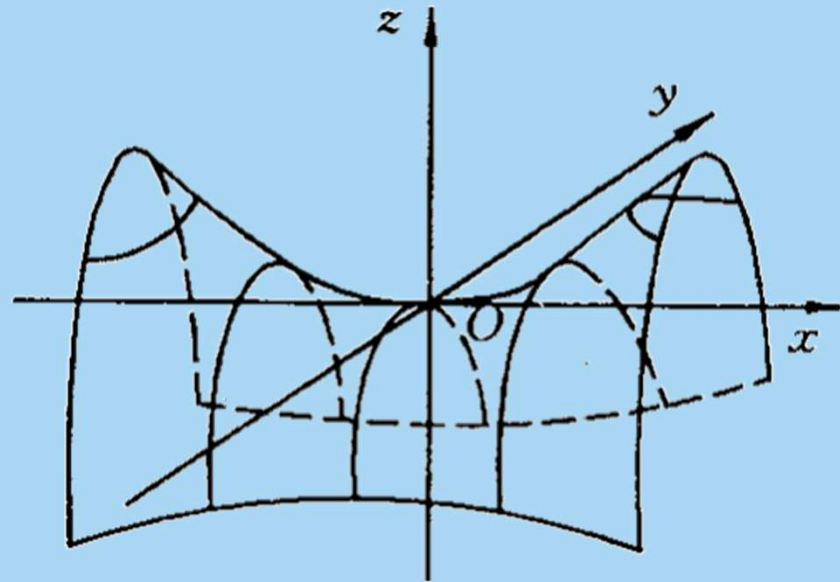
- 用 $x = x_0$ 截曲面, 得

$$z = -\frac{y^2}{b^2} + \frac{x_0^2}{a^2},$$

- 用 $y = y_0$ 截曲面

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2},$$

- 用 $z = z_0$ 截曲面, 得 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z_0, z_0 > 0, z_0 < 0, z_0 = 0?$



Question. $z = xy, (x, y) \in \mathbb{R}^2$ 也是马鞍面, 为什么?



2. n 元函数的隐函数表示法与参数表示法

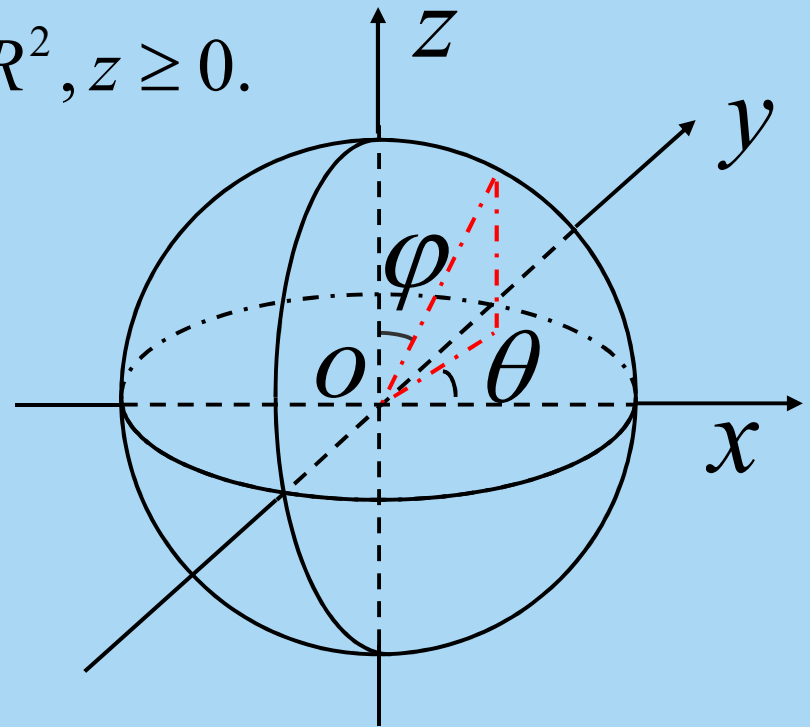
例. 半球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, ($R > 0$)

隐函数表示法: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0$.

参数表示法:

$$\begin{cases} x = R \sin \varphi \cos \theta, \\ y = R \sin \varphi \sin \theta, \\ z = R \cos \varphi, \end{cases}$$

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta < 2\pi$$



Question. 椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的参数方程?



3. $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 的向量值函数 f

$$\begin{aligned} f: \Omega \subset \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^m & x &= (x_1, x_2, \dots, x_n), \\ x &\mapsto y & y &= (y_1, y_2, \dots, y_m) \end{aligned}$$

Ω : f 的定义域

$f(\Omega) \triangleq \{y \in \mathbb{R}^m \mid \exists x \in \Omega, s.t. y = f(x)\}$ 称为 f 的值域

f 可以看成 m 个 n 元函数构成的向量 $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T$, 即

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \vdots \\ y_m = f_m(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases}$$



例. 给定常数 $a > 0$,

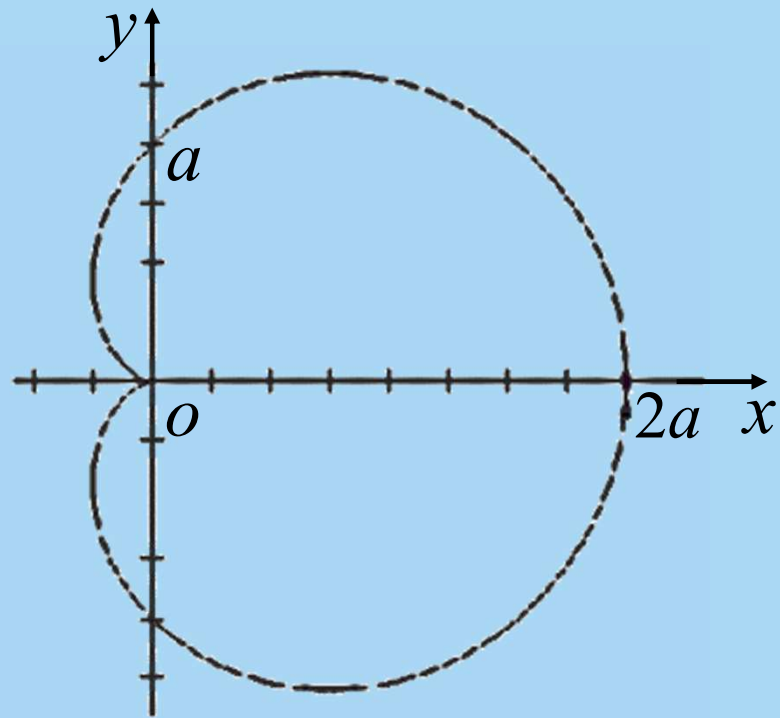
$$\begin{cases} x = a(1 + \cos \theta) \cos \theta \\ y = a(1 + \cos \theta) \sin \theta \end{cases}, \quad \theta \in [-\pi, \pi)$$

表示一条平面曲线,

称为心脏线.

此曲线的极坐标表达式为

$$\rho = a(1 + \cos \theta).$$





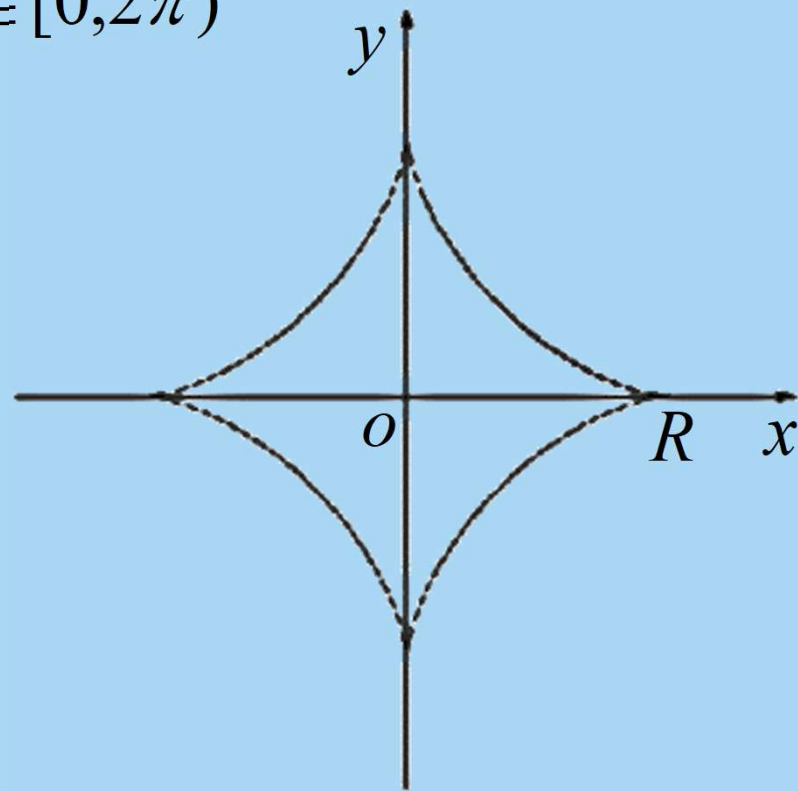
例. 给定常数 $R > 0$,

$$\begin{cases} x = R \cos^3 t \\ y = R \sin^3 t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi)$$

为星型线.

该曲线的隐函数表达式为

$$x^{2/3} + y^{2/3} = R^{2/3}.$$





例. 给定常数 $r, w, v > 0$,

$$\begin{cases} x = r \cos wt \\ y = r \sin wt, & t \in \mathbb{R} \\ z = vt \end{cases}$$

为空间螺线.

