第二次习题课：

方向导数,链式法则(高阶导),隐函数偏导

方向导数,链式法则

例1. 求函数 $f(x,y)=x^2-y^2$ 在 $P(1,1)$ 点沿与 x 轴成 $\frac{\pi}{3}$ 角方向的方向导数。

例2. 求函数 $f(x,y)=1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$ 在 $P(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}})$ 点沿曲线 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在该点的内法方向的方向导数。

例3. 设函数 $z=\arctan\frac{x-y}{x+y}$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$， $\frac{\partial z}{\partial y}$， dz， $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

例4. 若函数 $f(u)$ 有二阶导数，设函数 $z=\frac{1}{x}f(xy)+yf(x+y)$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

例5. 已知 $y=(\frac{1}{x})^{-\frac{1}{x}}$，求 $\frac{dy}{dx}$.

例6. 设 $f(x,y)$ 定义在 R^2 上, 若它对 x 连续,对 y 的偏导数在 R^2 上有界, 证明 $f(x,y)$ 连续.

例7. 设 $g(x)=f\left(x,\varphi\left(x^2,x^2\right)\right)$，其中函数 f 于 φ 的二阶偏导数连续，求 $\frac{d^2 g(x)}{dx^2}$

例8. 设 $z=f(xy,\frac{x}{y})$，f 二阶连续可微，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

例9. 设 $z=z(x,y)$ 二阶连续可微，并且满足方程

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

若令 $\begin{cases}u=x+\alpha y\\ v=x+\beta y\end{cases}$, 试确定 α,β 为何值时能变原方程为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$.

例10. 设 $u(x,y)\in C^2$, 又 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, $u(x,2x)=x$, $u'_x(x,2x)=x^2$, 求 $u''_{xx}(x,2x)$, $u''_{xy}(x,2x)$, $u''_{yy}(x,2x)$.

隐函数的求导法

隐函数　　若函数 $y=y(x)$，由方程 $F(x,y)=0$ 确定，求导函数？

按隐函数定义有恒等式：$F(x,y(x))\equiv 0 \Rightarrow \dfrac{d}{dx}F(x,y(x))=0$，

$$\Rightarrow F_x'(x,y(x))+F_y'(x,y(x))\cdot y'(x)=0 \Rightarrow y'(x)=-\frac{F_x'(x,y(x))}{F_y'(x,y(x))}。$$

由此可见：函数 $y=y(x)$ 可导有一个充分条件是，$F_y'(x,y)\neq 0$.

例11. 已知函数 $y=f(x)$ 由方程 $ax+by=f\left(x^2+y^2\right), a,b$ 是常数，$f'\left(x^2+y^2\right)$ 已知，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

例12.　设 $F\in C^{(1)}$，证明：方程 $F\left(x+\dfrac{z}{y}, y+\dfrac{z}{x}\right)=0$ 所确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 满足 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z-xy$。

例13.　设函数 $x=x(z),\ y=y(z)$ 由方程组 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-1=0 \\ x^2+2y^2-z^2-1=0 \end{cases}$ 确定，　求 $\dfrac{dx}{dz}$，$\dfrac{dy}{dz}$.

例14.　　已知函数 $z=z(x,y)$ 由参数方程: $\begin{cases} x=u\cos v \\ y=u\sin v \\ z=uv \end{cases}$，给定，试求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ (用 u,v 表示).

例 15. 函数 $u=u(x,y)$ 由方程 $\begin{cases} u=f(x,y,z,t) \\ g(y,z,t)=0 \\ h(z,t)=0 \end{cases}$ 确定，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y}$