第十二次习题课 级数

一．常数项级数

1. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则必收敛的级数为 [　　　　]. 　　[D]

$u_n=\frac{(-1)^n}{n}$　　$u_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$　　　　$2\sum u_n - u_1$

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{u_n}{n}$。（B）$\sum_{n=1}^{\infty}{u_n}^2$。（C）$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-u_{2n})$。（D）$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$。

2. 已知 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n=2$, $\sum_{n=1}^{\infty}u_{2n-1}=5$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=$ $\underline{5+3}$. 　　[8]

3. 设 $0<a_n<\frac{1}{n},$ 则下列级数中肯定收敛的是 [　　　　]. 　　[D]

$a_{m-1}=\frac{1}{m}$　$a_m=\frac{1}{a^n}$　$\frac{1}{m}$　　$a_n<\frac{1}{n}$

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$； $\frac{1}{2m}$　(B) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$；　(C) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$；　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^2\ln n$　$b_n=\frac{\ln n}{n^2}$

4. 设常数 $\lambda\neq 0$，$a_n>0$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n\tan\frac{\lambda}{n})a_{2n}$ [　　　　].　$\ln(1+\frac{\lambda}{n})$　$\ln(1+x)\sim x$　$x<$ _

（A）绝对收敛。（B）条件收敛。（C）发散。（D）收敛性与 λ 有关。　　[A]　$2x>\tan x>x$

5. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 [　　　　]　　　　[D]　　$(n\tan\frac{\lambda}{n})a_{2n}$　$\sum a_{2n}$　$\sim\frac{\lambda}{n}$

(A) 极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 小于 1；　　(B) 极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 小于等于 1；　$\left|n\cdot\tan\frac{\lambda}{n}\right|<2|\lambda|$

(C) 若极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在，其值小于 1；(D) 若极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在，其值小于等于 1；

6. 设参数 $a\neq 0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})$ 收敛性的结论是 [　　　]　　[B]

n足够大　　$\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})\sim\sin(n\pi)$　$\to 0$

（A）绝对收敛。（B）条件收敛。

（C）发散。　　（D）与参数 $\boldsymbol{a}$ 取值有关。　　$\left|\sin\left(\pi(\sqrt{n^2+a^2}-n)\right)\right|$　$\to 0$

7. （正常数项级数收敛的判定与其项趋于零阶的估计问题）

设 $a_n>0$, $p>0$, $\lim_{n\to\infty}\left[n^p(e^{\frac{1}{n}}-1)a_n\right]=1$, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 p 的取值范围

是______________________.

$\sin(\pi(\sqrt{n^2+a^2}-n))$ $\Updownarrow$ 不收敛

$|\pi(\sqrt{n^2+a^2}-n)|>0$

$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$

$\frac{a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}\sim\frac{a^2}{2n}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n^{p-1}}}=1$

解： $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\frac{1}{n^{p-1}}}=1$， $p>2$

8. 判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n n!}{n^n}$ 的收敛性.

$\dfrac{\frac{a^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{a^n\cdot n!}{n^n}} = \dfrac{a}{\frac{(n+1)^n}{n^n}}$

解： $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \dfrac{|a|}{e}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$ $\dfrac{|a|}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$ $<e$ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$

$|a|<e$，绝对收敛； $|a|>e$，发散；

$y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

$\ln y = x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$|a|=e$， $|u_{n+1}|>|u_n|$ （因为 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 单调上升趋于 e） 发散.

9. 设 $a_n>0$，单调减且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散，试问 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{a_n+1}\right)^n$ 是否收敛？证明结论。

［ 收敛 ］

$a_n\geq\varepsilon$ $\dfrac{1}{a_n+1}<1$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a^n=\dfrac{1}{1-a}$ $a<1$

10. 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^p}\right)$ 的收敛性 $(p>0)$.

$\ln(1+x)\sim x$

$\ln(1+x) = x\cdot\left.\dfrac{1}{x+1}\right|_{x=0}+\dfrac{1}{2}x^2\left(\left.-\dfrac{1}{(x+1)^2}\right|_{x=0}\right)+o(x^2)$

解：记 $a_n=\dfrac{(-1)^n}{n^p}$， $b_n=\ln(1+a_n)$， $c_n=a_n-b_n$

则 $c_n\sim\dfrac{1}{2n^{2p}}$ 当 $n\to\infty$ 时.

$=x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$

(1) $p>1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 绝对收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛.

$\boxed{a_n=\frac{(-1)^n}{n^p}}$ $b_n=\ln(1+a_n)$

(2) $0<p\leq\dfrac{1}{2}$ 时， $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 发散， $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散.

$c_n=a_n-b_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^{2p}}+o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)$

$b_n=a_n-c_n$

(3) $\dfrac{1}{2}<p\leq 1$ 时， $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 绝对收敛， $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 条件收敛.

条件 绝对

（不能用 Leibnize 方法）

11. 常数项级数和积分的估值

设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx$，讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^p}$ 的收敛性.

$t=\tan x$

$x=\arctan t$

$\dfrac{1}{2(n+1)}=\int_0^1\dfrac{t^n}{2}dt\leq a_n=\int_0^1 t^n\,d\arctan t=\int_0^1\dfrac{t^n}{t^2+1}dt\leq\int_0^1 t^n dt=\dfrac{1}{n+1}$

$1 \le t^2+1 \le 2$

解：令 $\tan x = t$， $\dfrac{1}{2(n+1)} = \int_0^1 \dfrac{t^n}{2}dt < a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx = \int_0^1 \dfrac{t^n}{1+t^2} < \int_0^1 t^n dt = \dfrac{1}{n+1}$，

$$\frac{1}{n^p(n+1)} < \frac{a_n}{n^p} < \frac{1}{n^{p+1}}.$$

$\dfrac{a_n}{n^p} \sim \dfrac{1}{n^{p+1}}$

所以当且仅当 $p>0$ 时，原级数收敛.

12. 设两条抛物线 $y = nx^2 + \dfrac{1}{n}$ 和 $y=(n+1)x^2 + \dfrac{1}{n+1}$，

横坐标

记他们交点坐标的绝对值为 a_n。

（1）求这两条抛物线所围成的平面图形的面积 S_n.

（2）求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{S_n}{a_n}$ 的和。

$S_n = \int_{-\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}}^{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}} \left[nx^2 + \frac{1}{n} - (n+1)x^2 - \frac{1}{n+1}\right] dx$

$= \frac{4}{3}a_n^3$

解：（1） $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

$$S_n = 2\int_0^{a_n}\left[nx^2 + \frac{1}{n} - (n+1)x^2 - \frac{1}{n+1}\right]dx = \frac{4}{3}a_n^3$$

（2） $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{S_n}{a_n} = \dfrac{4}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{4}{3}$

$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n+x}$ （ $x \neq -n$ ）

$\frac{1}{n+x} \sim \frac{1}{n}$

解：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n+x}$ （ $x \neq -n$ ）当 n 充分大（即 $n+x>0$ ）时是交错级数，且 $\left\{\dfrac{1}{n+x}\right\}$ 单调减少趋于零，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n+x}$ （ $x \neq -n$ ）收敛；又由于 $\left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{n+x}\right| \sim \dfrac{1}{n}\ (n\to\infty)$， $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n+x}$ （ $x \neq -n$ ）条件收敛。

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\dfrac{x}{n}$;

$\sin\frac{x}{n} \sim \frac{x}{n}$ $\quad a\frac{x}{n} \le \sin\frac{x}{n} \le b\frac{x}{n}$

解：当 $x=0$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\dfrac{x}{n}$ 的一般项都为零，所以级数绝对收敛。

设 $x \neq 0$，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{x}{n}$ 当 n 充分大（即 $n > \frac{2|x|}{\pi}$）时是交错级数，且 $\left|\sin\frac{x}{n}\right|$ 单调减少趋于零，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{x}{n}$ 收敛；又由于 $\left|(-1)^{n+1}\sin\frac{x}{n}\right| \sim \frac{|x|}{n}\ (n\to\infty)$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|}{n}$ 发散，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{x}{n}$ 条件收敛。

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}$

$n^{\frac{1}{n}} > 1$　$y = x^{\frac{1}{x}}$　$\ln y = \frac{1}{x}\ln x$　$x > e$　$y' < 0$

解：$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$，因此 $\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}$ 不存在，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}$ 发散。

$1^n = 1$

1, −1, 1, −1.　　$1.001^n \to \infty$

16. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4^n\sin^{2n}x}{n}$

$4\sin^2 x$　$\begin{cases} >1 & 发散 \\ =1 & 条件 \\ <1 & 绝对收敛 \end{cases}$

解：当 $x \in (k\pi - \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{6})$ 时，由于 $\left|(-1)^{n+1}\frac{4^n\sin^{2n}x}{n}\right| = \frac{1}{n}(4\sin^2 x)^n$，$0 \le 4\sin^2 x < 1$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(4\sin^2 x)^n$ 收敛，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4^n\sin^{2n}x}{n}$ 绝对收敛。

当 $x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ 时，$\sin^2 x = \frac{1}{4}$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4^n\sin^{2n}x}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 是条件收敛级数。

在其他情况下，由于 $\left|(-1)^{n+1}\frac{4^n\sin^{2n}x}{n}\right| = \frac{1}{n}(4\sin^2 x)^n$，$4\sin^2 x > 1$，级数的一般项趋于无穷大，所以级数发散。

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n+1)x\cos(n-1)x}{n^p}$ $= \frac{|\sin 2nx + \sin 2x|}{2n^p} \le 2$

收敛 $\frac{\sin 2nx}{2n^p}$　$\frac{\sin 2x}{2n^p}$　$0 < p \le 1$ 发散

解：当 $x = \frac{k\pi}{2}$ 时，级数的一般项都为零，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n+1)x\cos(n-1)x}{n^p}$ 绝对收敛。

设 $x \neq \frac{k\pi}{2}$。当 $p > 1$ 时，由于 $\left|\frac{\sin(n+1)x\cos(n-1)x}{n^p}\right| \le \frac{1}{n^p}$，所以级数

$\sum \sin 2nx$ 有界

$\frac{1}{2n^p} \searrow \to 0$

$\sum e^{inx} = \sum(\cos nx + i\sin nx)$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(n+1)x\cos(n-1)x}{n^p}$ 绝对收敛。

当 $0 < p \le 1$ 时，由于

$$\frac{\sin(n+1)x\cos(n-1)x}{n^p} = \frac{\sin 2nx}{2n^p} + \frac{\sin 2x}{2n^p},$$

由 Dirichlet 判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin 2nx}{2n^p}$ 收敛，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin 2x}{2n^p}$ 发散，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(n+1)x\cos(n-1)x}{n^p}$ 发散。

当 $p \le 0$ 时，由于级数的一般项不趋于零，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(n+1)x\cos(n-1)x}{n^p}$ 发散。

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} \dfrac{a}{1+a^n}$ $(a > 0)$.

$\sim \dfrac{1}{na^{n-1}}$ $(a>1)$

解：设 $x_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} \dfrac{a}{1+a^n}$。

当 $a > 1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \dfrac{1}{a} < 1$，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} \dfrac{a}{1+a^n}$ 绝对收敛；

$\sum u_n v_n$ ① Dirichlet ② Abel

当 $a = 1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} \dfrac{a}{1+a^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n}$，级数条件收敛；

当 $0 < a < 1$ 时，由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ 收敛，$\left\{\dfrac{a}{1+a^n}\right\}$ 单调有界，由 Abel 判别法，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} \dfrac{a}{1+a^n}$ 收敛，但由于 $|x_n| \sim \dfrac{a}{n}$ $(n \to \infty)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a}{n}$ 发散，所以级数条件收敛。

$\dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{a}{1+a^n} \le a$

19. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，$\{x_n\}$ 单调减少，利用 Cauchy 收敛原理证明：$\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = 0$。

证 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在正整数 $N' > 0$，对一切 $m > n > N'$，成立

$$0<x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_m<\frac{\varepsilon}{2}。$$ → $nx_n<\varepsilon$

取 $N=2(N'+1)$，则当 $n>N$ 时，有 $\left[\frac{n}{2}\right]>N'$，于是成立

$$0<\frac{n}{2}x_n<x_{\left[\frac{n}{2}\right]}+x_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}+\cdots+x_n<\frac{\varepsilon}{2},$$

即

$$0<nx_n<\varepsilon。$$

20. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=1$，问级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$ 是否收敛?

解 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$ 不一定收敛。

y_n = 交 + 发

x_n = 交

反例：$x_n=\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$，$y_n=\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=1$，但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$ 发散。

21. 设正项数列 $\{x_n\}$ 单调减少，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n x_n$ 发散。问级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+x_n}\right)^n$ 是否收敛? 并说明理由。

解 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+x_n}\right)^n$ 收敛。

因为正项数列 $\{x_n\}$ 单调减少，所以必定收敛。如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n x_n$ 是 Leibniz 级数，因此收敛，与条件矛盾，所以必定有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\alpha>0$，于是当 n 充分大时，

$$\left(\frac{1}{1+x_n}\right)^n<\left(\frac{1}{1+\frac{\alpha}{2}}\right)^n，因此 \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+x_n}\right)^n 收敛。$$

22. 若 $\{nx_n\}$ 收敛，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(x_n-x_{n-1})$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛。

证明

证 令 $a_n=x_n, b_n=1$，则 $B_k=\sum\limits_{i=1}^{k}b_i=k$。利用 Abel 变换，得到

$$\sum_{k=1}^{n}x_k=nx_n-\sum_{k=1}^{n-1}k(x_{k+1}-x_k)。$$ $=\frac{n}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n}k(x_k-x_{k-1})$

由于

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(x_{n+1}-x_n)=\sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)(x_{n+1}-x_n)\cdot\frac{n}{n+1}],$$

因为数列$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$单调有界，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(x_{n+1}-x_n)=\sum_{n=2}^{\infty}n(x_n-x_{n-1})$收敛，由 Abel 判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}n(x_{n+1}-x_n)$收敛。再由数列｛$nx_n$｝的收敛性，即可知级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$收敛。

23. 设$f(x)$在$[-1,1]$上具有二阶连续导数，且

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0 。$$

$f(0)=0$

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0$

证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$绝对收敛。

有限

$f(\frac{1}{n})=\frac{1}{2n^2}f''(0)+o(\frac{1}{n^2})$

证 由$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$ 可知$f(0)=0$，$f'(0)=0$，于是

$$f\left(\frac{1}{n}\right)\sim\frac{f''(0)}{2}\cdot\frac{1}{n^2}\quad（n\to\infty），$$

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$绝对收敛。

24. 已知任意项级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$发散，证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)x_n$也发散。

证 采用反证法。令$y_n=(1+\frac{1}{n})x_n$，若$\sum_{n=1}^{\infty}y_n$收敛，因为$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$单调有界，则由 Abel 判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}x_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}y_n$收敛，与条件矛盾，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)x_n$发散。

$S \geq \sum\frac{n+1}{n}x_n > \sum x_n$

$\sum\frac{n+1}{n}x_n$ 收敛

$\Downarrow$

$\sum x_n$ 收敛

25. 利用

$$D_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\ \to\ \gamma\ （n\to\infty），$$

$a_n=1+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{4n-3}$

$b_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{4n-1}$

$c_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}$

其中γ是 Euler 常数，求下述$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$的更序级数的和：

$$S_n=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots。$$

$S_n=a_n+b_n-c_n$

$D_n=a_n+b_n+c_{2n}=\ln n+\gamma$

$c_n=\frac{1}{2}\cdot D_n$

解. 设$b_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$，设级数

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\ \cdots\ +\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}+\cdots$$

的部分和数列为$\{S_n\}$，则

$$S_{3n}+\frac{1}{2}(b_n+\ln n)=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1},$$

$$S_{3n}+\frac{1}{2}(b_n+\ln n)+\frac{1}{2}(b_{2n}+\ln 2n)=b_{4n}+\ln 4n,$$

于是

$$S_{3n}=b_{4n}-\frac{1}{2}b_n-\frac{1}{2}b_{2n}+\frac{3}{2}\ln 2。$$

由$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\gamma$，得到

$$\lim_{n\to\infty}S_{3n}=\frac{3}{2}\ln 2。$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}S_{3n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}S_{3n+2}=\lim\limits_{n\to\infty}S_{3n}$，所以

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{3}{2}\ln 2$。