第五次习题课　条件极值

约束优化

例1 求原点到曲面$z^2 = xy + x - y + 4$的最短距离.

解：这个问题可看作条件极值问题：$\begin{cases} \min\{x^2+y^2+z^2\} \\ z^2 = xy + x - y + 4 \end{cases}$。

我们用 Lagrange 乘子法来直接求解这个问题。作 Lagrange 函数

$L(x,y,z,\lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(z^2 - xy - x + y - 4)$。令

$$\begin{cases} L'_x = 2x - \lambda(y+1) = 0 & ① \\ L'_y = 2y + \lambda(-x+1) = 0 & ② \\ L'_z = 2z + 2\lambda z = 0 & ③ \\ L'_\lambda = z^2 - xy - x + y - 4 = 0 & ④ \end{cases}$$

由上述第三个方程可知$\lambda = -1$或$z = 0$. 讨论如下：

情形$\lambda = -1$。 联立前两个方程得 $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$。不难解得唯一的解：$x = -1$，$y = 1$。

将 $x = -1$，$y = 1$ 代入第四个方程得 $z = \pm 1$。这就得到问题的两个驻点 $(-1,1,1)$ 和 $(-1,1,-1)$.

情形$z = 0$。 联立前两个方程得 $\begin{cases} 2x - \lambda y = \lambda \\ -\lambda x + 2y = -\lambda \end{cases}$。

(i) 当 $\lambda = 2$ 时，容易解得 $x = y + 1$。代入方程 $xy + x - y + 4 = 0$ 得 $y^2 + y + 5 = 0$。无实数解。

(ii) 当$\lambda \neq 2$时，由方程组 $\begin{cases} 2x - \lambda y = \lambda \\ -\lambda x + 2y = -\lambda \end{cases}$ 立刻得到 $(2-\lambda)x + (2-\lambda)y = 0$。即 $y = -x$。代入方程$xy + x - y + 4 = 0$ 得 $-x^2 + 2x + 4 = 0$。其解为 $x = 1 \pm \sqrt{5}$。由此得到两个驻点：$(x,y,z) = (1+\sqrt{5}, -1-\sqrt{5}, 0)$，$(1-\sqrt{5}, -1+\sqrt{5}, 0)$。

综上我们得到四个驻点：$(-1,1,1)$，$(-1,1,-1)$，$(1+\sqrt{5}, -1-\sqrt{5}, 0)$，$(1-\sqrt{5}, -1+\sqrt{5}, 0)$。

这四个点与原点的距离分别为$\sqrt{3}$，$\sqrt{3}$，$2\sqrt{3+\sqrt{5}}$，$2\sqrt{3-\sqrt{5}}$。容易验证，这四个之

的最小值是$\sqrt{3}$. 因此，曲面上的两个点$(-1,1,1)$和$(-1,1,-1)$与原点的距离$\sqrt{3}$是所求得最短距离。解答完毕。

例2 当x，y，$z>0$时，求函数$u=\ln x+2\ln y+3\ln z$在球面$x^2+y^2+z^2=6r^2$上的最大值，这里$r>0$. 由此进一步证明，对于任意正实数a,b,c，下述不等式成立

$$ab^2c^3 \le 108\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6.$$

xy^2z^3

$x^2y^4z^6 \le 108\cdot x^2\cdot \frac{1}{2}y^2\cdot \frac{1}{2}y^2\cdot \frac{1}{3}z^2\cdot \frac{1}{3}z^2\cdot \frac{1}{3}z^2 \le 108\cdot\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{6}\right)^6 = 108r^{12}$

解：令 $L(x,y,z,\lambda)=\ln(xy^2z^3)-\lambda(x^2+y^2+x^2-6r^2)$,

$x>0$, $y>0$, $z>0$, $\lambda\in R$.

$xy^2z^3 \le \sqrt{108}\, r^6$

解方程组 $L_x=0$, $L_y=0$, $L_z=0$ 得$x^2=\frac{1}{2\lambda}, y^2=\frac{2}{2\lambda}, z^2=\frac{3}{2\lambda}$。

$\boxed{x^2=\frac{6a}{a+b+c},\quad y^2=\frac{6b}{a+b+c},\quad z^2=\frac{6c}{a+b+c}}$

将它们代入球面方程得$\lambda=\frac{1}{2r^2}$。

这就得到函数$L(x,y,z,\lambda)$的唯一驻点$(x,y,z,\lambda)=(r,r\sqrt{2},r\sqrt{3},\ 1/(2r^2))$。

可以证明函数$u=\ln x+2\ln y+3\ln z$在球面$x^2+y^2+z^2=6r^2$上的最大值在点$(x,y,z)=(r,r\sqrt{2},r\sqrt{3})$处取得。(严格证明有点麻烦，已超出了本课程对同学们的要求。可类似于课本第 90 页中例 1.9.4，作个直观的说明。)

所以函数$u=\ln x+2\ln y+3\ln z$在球面$x^2+y^2+z^2=6r^2$上的最大值为

$$u_{\max}=\ln r+\ln 2r^2+3\ln(\sqrt{3}r)=6\ln r+\frac{3}{2}\ln 3+\ln 2。$$

$$\ln xy^2z^3=\ln x+2\ln y+3\ln z\le 6\ln r+\ln\sqrt{108}=\ln[\sqrt{108}(\frac{x^2+y^2+z^2}{6})^3].$$

$$xy^2z^3\le\sqrt{108}(\frac{x^2+y^2+z^2}{6})^3,$$

两边平方得$x^2y^4z^6\le 108(\frac{x^2+y^2+z^2}{6})^6$

所以对任意正数a,b,c有$ab^2c^3\le 108(\frac{a+b+c}{6})^6$。证毕。

例3 求抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $x+y+z=1$ 的交线（椭圆）的长轴、短轴的长.

解：设(x_1,y_1,z_1)，(x_2,y_2,z_2)为椭圆上的两点,

$$\begin{cases} \text{max}\ \cancel{\min}\left[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2\right] & ① \\ z_1=x_1^2+y_1^2 & ② \\ x_1+y_1+z_1=1 & ③ \\ z_2=x_2^2+y_2^2 & ④ \\ x_2+y_2+z_2=1 & ⑤ \end{cases}$$

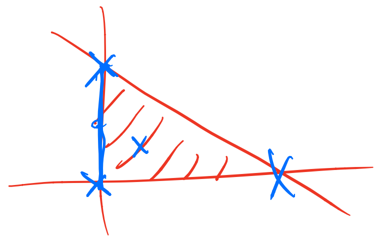
这是条件极值问题,

$$L=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2$$
$$+\lambda_1\left(z_1-x_1^2-y_1^2\right)+\lambda_2\left(x_1+y_1+z_1-1\right)+\lambda_3\left(z_2-x_2^2-y_2^2\right)+\lambda_4\left(x_2+y_2+z_2-1\right)$$

求出驻点，由几何意义可知存在最小值．　太多的约束条件，具体就不解了。

例4 求 $z=xy(4-x-y)$ 在 $x=1,y=0,x+y=6$ 所围闭区域 $\overline{D}$ 上的最大值．

解：（1）先求开区域 D^0 内的最大值．



$$z'_x=4y-2xy-y^2=0$$
$$z'_y=4x-x^2-2xy=0$$

驻点 $(0,0),\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right),(0,4),(4,0)$，在 D^0 内的驻点为 $\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$．

$$\begin{cases} z=xy(4-x-y) \\ x=1 \end{cases}$$

$xy(4-x-y)+\lambda(x-1)$

① 内部. $\frac{\partial z}{\partial x}=0$ $\frac{\partial z}{\partial y}=0$

② 边界上. $\frac{\partial z}{\partial x}=0$. $\frac{\partial z}{\partial y}=0$ $\frac{\partial z}{\partial x}=0$

③ 边界点.

（2）三条边界上的驻点

$$\begin{cases} \text{Max } xy(4-x-y) \\ x=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Max } xy(4-x-y) \\ y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Max } xy(4-x-y) \\ x+y=6 \end{cases}$$

将 $x=1$ 代入 $z=xy(4-x-y)$

$$z=y(4-1-y)$$
$$z'=3-2y=0$$
$$y=\frac{3}{2}$$

在边界 $x=1$ 上的驻点为 $\left(1,\frac{3}{2}\right)$，经检验，这个点在 $\overline{D}$ 的边界上．

将 $y=0$ 代入 $z=xy(4-x-y)$，

$$z=0$$

不必考虑.

作拉格伦日函数 $\qquad L=xy(4-x-y)+\lambda(x+y-6)$

$$\begin{aligned} L_x' &= 4y-2xy-y^2+\lambda=0 \\ L_y' &= 4x-x^2-2xy+\lambda=0 \\ L_\lambda' &= x+y-6=0 \end{aligned}$$

驻点 $(3,3)$ 在 $\overline{D}$ 的边界上.

[illegible]

现有驻点 $\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right),\left(1,\frac{3}{2}\right),(3,3)$，加上三个角点 $(1,0),(6,0),(1,5)$. 函数 $z=xy(4-x-y)$ 在有界闭区域 $\overline{D}$ 上连续，必有最大值，而且最大值必为上述六个点之一．计算函数 $z=xy(4-x-y)$ 在六个点上的值，

$$z\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)=\frac{64}{27}$$

最大；

$$z(3,3)=-18$$

最小.

例5 设 $u(x,y)$ 在 $x^2+y^2\le 1$ 上有二阶连续偏导数，在 $x^2+y^2<1$ 内满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=u$，且在 $x^2+y^2=1$ 上，$u(x,y)\ge 0$，证明：当 $x^2+y^2\le 1$ 时，$u(x,y)\ge 0$。（提示：可用反证法证明）

证明：反证法：假设存在点 (x_0,y_0) 满足 ${x_0}^2+{y_0}^2\le 1$ 且 $u(x_0,y_0)<0$。

由条件：在 $x^2+y^2=1$ 上，$u(x,y)\ge 0$ 可知，在 $x^2+y^2\le 1$ 上的连续函数 $u(x,y)$ 在区域 $x^2+y^2\le 1$ 的最小值点 (x_1,y_1) 一定发生在区域 $x^2+y^2\le 1$ 的内部，因此 (x_1,y_1) 一定是极小值点，矩阵 $\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{bmatrix}_{(x_1,y_1)}$ 正定或半正定，这与

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)(x_1,y_1)=u(x_1,y_1)<0$$

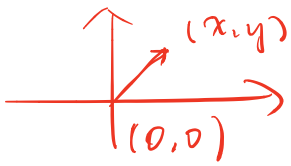
矛盾。假设不成立，即当$x^2+y^2\le 1$时， $u(x,y)\ge 0$。

例6 假设 $f(x,y)$ 有连续的偏导数，在全平面除原点之外处处满足等式

余

①原点以外不是极小值点

②原点是极小值点



$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}>0. \quad ①$$

x轴上 $(x,0)$

求证原点是 $f(x,y)$ 的唯一极小值点．并且满足 $\boxed{\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0}$. ②

$x>0$时，$\frac{\partial f}{\partial x}>0$.

$x<0$时，$\frac{\partial f}{\partial x}<0$.

$\Rightarrow$ 原点上，$\frac{\partial f}{\partial x}=0$

原点上，$\frac{\partial f}{\partial y}=0$

$f(0,0)\le f(x,y)$

证明：

①证明原点之外任意点 (x,y) 都不是驻点，从而不是极值点．

任意固定 $(x,y)\neq(0,0)$，由题目条件推出 $\dfrac{(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot \operatorname{grad} f(x,y)>0$．于是

$f(x,y)$ 在点 (x,y) 沿方向 $\dfrac{(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 的方向导数不等于零．从而 $(x,y)\neq(0,0)$ 不是驻点．

$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}>0$

②证明原点是驻点．

对于任意的 $x>0$，考察点 $(x,0)$．由题目条件推出 $x\dfrac{\partial f(x,0)}{\partial x}>0$，进而推出 $\dfrac{\partial f}{\partial x}>0$．令

$x\to 0^+$，因为偏导数连续，所以由极限保号性推出 $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\partial f(x,0)}{\partial x}\ge 0$

由题目条件又可以推出在点 $(-x,0)$ 满足 $-x\dfrac{\partial f(-x,0)}{\partial x}>0$．进而推出 $\dfrac{\partial f(-x,0)}{\partial x}<0$．令

$x\to 0^-$，又得到 $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\partial f(x,0)}{\partial x}\le 0$．

由 $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}\ge 0$ 和 $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}\le 0$ 推出 $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}=0$．同样的方法又可以推出 $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}=0$．因此原点是驻点．

③证明 $f(0,0)$ 是极小值．

任取 $M(x_0,y_0)\neq(0,0)$，现在证明 $(x_0,y_0)>f(0,0)$．

考察线段 $\overrightarrow{OM}$．由题目条件又可以推出在 $\overrightarrow{OM}$ 上任意一点，$f(x,y)$ 沿 $\overrightarrow{OM}$ 方向的方向导

数大于零．从而 $f(x,y)$ 沿 $\overrightarrow{OM}$ 方向是单调增加的，从而 $f(M) > f(0,0)$.

证毕.

④证明 $\lim\limits_{x\to 0, y\to 0} \dfrac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.

注意到 $f(x,y)$ 有连续的偏导数，$\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0$ $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 0$. 所以 $\mathrm{d}f(0,0) = 0$.

函数增量与微分之差是 $\sqrt{x^2+y^2}$ 的高阶无穷小量，于是结论得证.

例7 设 $p>0$，$q>0$ 满足 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$。 求函数 $\dfrac{x^p}{p}+\dfrac{y^q}{q}$ 在平面第一象限 $x>0, y>0$ 里满足约束条件 $xy=1$ 的最小值。 由此进一步证明 Young 不等式 $\boxed{\dfrac{x^p}{p}+\dfrac{y^q}{q} \geq xy}$，$\forall x, y > 0$。

（注：这是课本第一章总复习题第 16 题，page 97。 在一元微分学里，我们已经学习过利用极值理论证明一些不等式。 利用多元极值理论，我们同样可以得到一些的不等式。本题就是一个很好的例子。）

解：考虑条件极值问题 $\min \dfrac{x^p}{p}+\dfrac{y^q}{q}$， $s.t.\ xy=1$， $x>0, y>0$。

作 Lagrange 函数 $L(x,y,\lambda) = \dfrac{x^p}{p}+\dfrac{y^q}{q} - \lambda(xy-1)$。解方程组 $L_x = 0$，$L_y = 0$，$L_\lambda = 0$，

即解方程组

$L_x = x^{p-1} - \lambda y = 0$

$L_y = y^{q-1} - \lambda x = 0$

$L_\lambda = -(xy-1) = 0$

在第一象限 $x>0, y>0$ 的解。不难解得方程组有唯一解 $x=1, y=1, \lambda=1$.

由于函数 $\dfrac{x^p}{p}+\dfrac{y^q}{q}$ 在双曲线 $xy=1$ 上的函数值趋于正无穷，当 $x\to 0^+$，或 $y\to 0^+$。

因此函数 $\dfrac{x^p}{p}+\dfrac{y^q}{q}$ 在双曲线 $xy=1$ 的最小值点就是 $x=1, y=1$,最小值为 1。

以下我们来证明 Young 不等式。要证 $\dfrac{x^p}{p}+\dfrac{y^q}{q} \geq xy$， $\forall x, y>0$，即要证

$$\frac{1}{p}\frac{x^p}{xy}+\frac{1}{q}\frac{y^q}{xy}\geq 1。$$

记 $a=\dfrac{x}{(xy)^{1/p}}$，$b=\dfrac{y}{(xy)^{1/q}}$，则 $\boxed{ab=\dfrac{xy}{(xy)^{(1/p)+(1/q)}}=1}$.

根据第一部分条件极值的结论得 $\dfrac{a^p}{p}+\dfrac{b^q}{q}\geq 1$。此即 $\dfrac{1}{p}\dfrac{x^p}{xy}+\dfrac{1}{q}\dfrac{y^q}{xy}\geq 1$。这表明 Young 不等式成立。证毕。