第一次习题课解答（多元函数极限、连续、可微及偏导）

一．　累次极限与二重极限

1．讨论 $f(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}, & x\cdot y\neq 0 \\ 0, & x\cdot y=0 \end{cases}$ 在 $(0,0)$ 的累次极限与二重极限是否存在，若存在求其值。

解：任意固定 $x\neq 0$，$\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{y\to 0} x\sin\frac{1}{y}$ 不存在，从而 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ 不存在，

同理可得 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ 不存在。

下面讨论函数在坐标原点的二重极限。当 $xy=0$ 时，$f(x,y)=0$，因此 $|f(x,y)-0|=0$；若 $xy\neq 0$，则

$|f(x,y)-0|=|x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}|\leq|x|+|y|\leq\sqrt{2}(x^2+y^2)\to 0\ \ ((x,y)\to(0,0))$．所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

2．讨论 $f(x,y)=\begin{cases} \frac{3xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & x^2+y^2=0 \end{cases}$ 在 $(0,0)$ 的累次极限与二重极限是否存在，若存在求其值。

解：$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=0$.

令 $y=kx$，则 $f(x,kx)=\frac{3}{2}k$，因此取 $k_1\neq k_2,\ k_1k_2\neq 1$，则 $\frac{k_1}{1+k_1^{\ 2}}\neq\frac{k_2}{1+k_2^{\ 2}}$，从而

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,k_1x)\neq\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,k_2x)$，故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在。

3．设 $f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$，证明：$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=0$，而二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 不存在。

证明：$\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0$，故 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0$；同理，$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=0$。

沿直线 $y=x$ 趋于 $(0,0)$ 点，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x}} f(x,y)=1$；沿直线 $y=0$ 趋于 $(0,0)$ 点，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=0}} f(x,y)=0$，故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 不存在。

4. 记 $D=\{(x,y)\,|\,x+y\neq 0\}$， $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y},(x,y)\in D$ 。证明：

$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f\left(x,y\right)=1,\ \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f\left(x,y\right)=-1$，但是 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in D}} f(x,y)$ 不存在。

证明：$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f\left(x,y\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=1$，同理可求 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f\left(x,y\right)=-1$ 。

取 $(x_n,y_n)=(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}),\quad (x_n',y_n')=(\dfrac{2}{n},\dfrac{1}{n})$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n,y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(x_n',y_n')=(0,0)$，但是

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,y_n)=0\neq\dfrac{1}{3}=\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n',y_n')$，所以 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in D}} f(x,y)$ 不存在。

二． 多元函数的极限与连续，连续函数性质

5. 求下列极限：

（1） $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}(x+y)^{\frac{x+y+1}{x+y-1}}$； （2） $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\ln(x^2+y^2)$；

（3） $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(xy)}{x}$； （4） $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$；

（5） $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$ 。

解：（1） $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}(x+y)^{\frac{x+y+1}{x+y-1}}=\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}(1+(x+y-1))^{\frac{1}{x+y-1}\bullet(x+y+1)}=e^2$；

（2）设 $x^2+y^2<1$，则 $|\ln(x^2+y^2)|\le|\ln x^2|,\quad |\ln(x^2+y^2)|\le|\ln y^2|$，

$|(x+y)\ln(x^2+y^2)|\le|x\ln x^2|+|y\ln y^2|$，所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\ln(x^2+y^2)=0\,.$$

（3）写成 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in D}}\dfrac{\sin(xy)}{x}$ 更好，其中 $D=\{(x,y)\,|\,x\neq 0\}$ 。

当 $y=0$ 时， $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in D}}\dfrac{\sin(xy)}{x}=\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in D}}\dfrac{0}{x}=0=y$；

当 $y\neq 0$ 时， $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in D}}\dfrac{\sin(xy)}{x}=\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in D}}\dfrac{\sin(xy)}{xy}\bullet y=y$，所以 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in D}}\dfrac{\sin(xy)}{x}=y$ 。

（4） $\left|\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right| \le \left|\dfrac{x}{x^2-xy+y^2}\right| + \left|\dfrac{y}{x^2-xy+y^2}\right| \le \left|\dfrac{x}{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\right| + \left|\dfrac{y}{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\right|$

$$\le \left|\frac{2}{x}\right| + \left|\frac{2}{y}\right|$$

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2} = 0$ 。

思考：$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{x+y}{x^2-2xy+y^2}$ 是否存在？若存在，极限值是什么？

（5） $(x^2+y^2)e^{-(x+y)} = \dfrac{x^2}{e^{x+y}} + \dfrac{y^2}{e^{x+y}} \le \dfrac{x^2}{e^x} + \dfrac{y^2}{e^y}$，所以 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} (x^2+y^2)e^{-(x+y)} = 0$ 。

6. 证明：极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \left(\dfrac{|xy|}{x^2+y^2}\right)^{x^2} = 0$.

证明：$\left|\dfrac{|xy|}{x^2+y^2}\right| \le \dfrac{1}{2}$，故 $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \left(\dfrac{|xy|}{x^2+y^2}\right)^{x^2} = 0$ 。

7. 若 $z = f(x,y)$ 在 R^2 上连续，且 $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty} f(x,y) = +\infty$，证明：函数 f 在 R^2 上一定有最小值点。

证明：任取 $P \in R^2$，设 $f(P) = M$；

则 $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty} f(x,y) = +\infty \Rightarrow \exists d>0, \forall \rho = \sqrt{u^2+v^2} > d : f(u,v) > M$；

故存在 $Q \in B = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le d^2\}$ 使得 $f(Q) = \min\limits_{(x,y)\in B} f(x,y)$.

显然，$f(Q) = \min\limits_{(x,y)\in R^2} f(x,y)$。

8. 设 $f(\mathbf{x})$ 在 R^n 上连续, 且

（1） $\mathbf{x} \ne \mathbf{0}$ 时， $f(\mathbf{x}) > 0$

（2） $\forall c > 0$, $f(c\mathbf{x}) = cf(\mathbf{x})$

证明：存在 $a>0, b>0$, 使 $a|\mathbf{x}| \le f(\mathbf{x}) \le b|\mathbf{x}|$.

证明:因为 $f(\mathbf{x})$ 在 R^n 上连续，因此 $f(\mathbf{x})$ 在有界闭集上有界，故存在 $a>0$, $b>0$

使得对任意的 $\mathbf{x} \ne \mathbf{0}$ 时，有 $a \le f\left(\dfrac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\right) \le b$，从而条件(2)表明结论成立。

9. 若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的某个邻域内有定义，$f(0,0)=0$，且

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=a$，其中$a$为常数。证明：

（1） $f(x,y)$在$(0,0)$点连续；

（2）若$a\neq -1$，则$f(x,y)$在$(0,0)$点连续，但不可微；

（3）若$a=-1$，则$f(x,y)$在$(0,0)$点可微。

证明： 因为$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=a$，因此$\dfrac{f(x,y)-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=a+o(1)$，

（$(x,y)\to 0$）

故$f(x,y)=(a+1)\sqrt{x^2+y^2}+o(\sqrt{x^2+y^2})$.

（1）显然。

（2）若$a\neq -1$，因为$f_x^{'}(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a+1)|x|+o(|x|)}{x}$不存在，

同理$f_y^{'}(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}$不存在，因此$f(x,y)$在$(0,0)$点不可微。

（3）若$a=-1$，则$f_x^{'}(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a+1)|x|+o(|x|)}{x}=0$，同理可求$f_y^{'}(0,0)=0$，这样

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x^{'}(0,0)x-f_y^{'}(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{o(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$，故$f(x,y)$

在$(0,0)$点可微且$df(0,0)=0$.

10. 函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在$(0,0)$点是否连续？在$(0,0)$点是否可微?

解：（1）因为$\left|\dfrac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2)\right|\le\sqrt{|xy|}\to 0,\quad (x,y)\to 0$，故$f(x,y)$在$(0,0)$点连续。

（2）因为$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(\Delta y,0)-f(0,0)}{\Delta y}=0$

故 $\dfrac{f\left(\Delta x,\Delta y\right)-f(0,0)-\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\Delta x+\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\Delta y\right)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\dfrac{\sqrt{\left|\Delta x\cdot\Delta y\right|}}{\left(\Delta x^2+\Delta y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\sin(\Delta x^2+\Delta y^2)$ 不是无穷小（当 $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$ 时）. 所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不可微。