微积分 A2 期中考试样题参考解答

一．填空题（每空 3 分，共 15 空）（请将答案直接填写在横线上！）

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,+\infty)}\dfrac{xy}{x^2+y}=\underline{0}$。

2. 函数 $f(x,y)=\begin{cases} y\ln(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点是否连续？$\underline{是}$。（填“是”或“否”）。

注：为求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y\ln(x^2+y^2)$，我们需要知道一个重要的一元函数极限：$\lim\limits_{t\to0^+} t\ln t=0$。

在极坐标下 $|y\ln(x^2+y^2)|=|r\cos\theta\|\ln r^2|\le 2r\ln r\to0=f(0,0)$，当 $r\to0^+$。注毕。

3. 设 $f(x,y)=(x+y)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$，$(x^2+y^2\neq0)$，则 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0)=\underline{\sin1-2\cos1}$。

4. 函数 $f(x,y)$ 可微，且在点 P_0 处沿 $\mathbf{l}_1=(\dfrac{\sqrt2}{2},\dfrac{\sqrt2}{2})$ 的方向导数为 $\dfrac{\sqrt2}{2}$，沿 $\mathbf{l}_2=(\dfrac35,\dfrac45)$ 的方向导数为 $\dfrac15$，则 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}=\underline{3}$。

5. 二元函数 x^2+xy+y^2 在点 $(-1,1)$ 处增长最快的方向为 $\underline{(-1,1)}$。

6. 设 $z(x,y)=e^{x^2y}$，则 $dz=\underline{e^{x^2y}(2xydx+x^2dy)}$。

7. 设 $y(x)=f(2x,x^2)$，其中 f 为可微函数，则 $y'(x)=\underline{2f_1(2x,x^2)+2xf_2(2x,x^2)}$。

8. 设 $\begin{cases} f(u,v)=u+v, \\ g(u,v)=uv, \end{cases}$ $\begin{cases} u=x+y, \\ v=x-y \end{cases}$，则 $\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}=\underline{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2x & -2y \end{pmatrix}}$。

评注：若将所求 Jacob 矩阵写作 $\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ v+u & v-u \end{pmatrix}$，不扣分。

9. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+y+z=\mathrm{e}^{-z}$ 所确定的隐函数，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,\mathrm{e})=\underline{-\dfrac{2}{e+1}}$。

评注：本题不像看上去那样简单。在方程 $x^2+y+z=e^{-z}$ 中关于 x 求导得

$2x+z_x=e^{-z}(-z_x)$。由此得 $z_x=\dfrac{-2x}{1+e^{-z}}$。于是 $z_x(1,e)=\dfrac{-2}{1+e^{-z(1,e)}}$。

上式中涉及到隐函数 $z(x,y)$ 在点 $(1,e)$ 的值 $z(1,e)$ 可如下求出。在方程 $x^2+y+z=e^{-z}$ 中令 $x=1$，$y=e$ 得 $1+e+z(1,e)=e^{-z(1,e)}$。由此可以断言 $z(1,e)=-1$。这是因为方程 $1+e=u+e^u$ 关于 u 有且仅有唯一解 $u=1$。

一点说明，如果给出了 $z_x(1,e)=\dfrac{-2}{1+e^{-z(1,e)}}$，但没有进一步求出 $z(1,e)=-1$，不扣分，仍得 3 分。注毕。

10. 函数 $f(x,y)=\dfrac{1}{x+y}$ 在点 $(1,0)$ 处带 Peano 余项的二阶 Taylor 展式为

$\underline{1-[(x-1)+y]+[(x-1)^2+2(x-1)y+y^2]+o((x-1)^2+y^2)}$

注：可将函数 $\dfrac{1}{x+y}$ 表为

$$\frac{1}{x+y}=\frac{1}{1+(x-1)+y}=1-[(x-1)+y]+[(x-1)+y]^2+o(\rho^2)。$$

注毕。

11. 曲面 $(x+y+z)\mathrm{e}^{xyz}=3\mathrm{e}$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切平面方程为 $\underline{x+y+z=3}$。

12. 曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\ x^2+y^2-z^2=4\end{cases}$ 在点 $(2,1,1)$ 处的切向量为 $\underline{(-2,4,0)}$。

13. 曲线 $x=3t,y=3t^2,z=t^3$ 上一点 P_0 的切线与平面 $x+y+z=3$ 平行，则 P_0 的坐标为 $\underline{(-3,3,-1)}$。

评注：不少同学没有仔细看题，不是求点的坐标，而是求曲线的切向量。亏得很！

14. 设函数 $F(x,y)=\int_1^{\infty}t^{x-1}e^{-yt}dt,\quad (x,y>0)$，则 $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\underline{-\int_1^{\infty}t^x e^{-yt}\ln t dt}$。

15. 设 $\varphi(t)=\int_{2t}^{t^2}\dfrac{\sin tx}{x}dx$ ，$t>0$，则 $\varphi'(t)=\underline{\dfrac{3\sin t^3-2\sin 2t^2}{t}}$。

评注：将所求导数写作 $\varphi'(t)=\int_{2t}^{t^2}\cos(tx)dx+\dfrac{2\sin t^3}{t}-\dfrac{\sin(2t^2)}{t}$，不扣分。

二．计算题（每题 10 分，共 40 分）

1. 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点连续性，偏导数的存在性以及可微性。

解：(i) 由于 $\dfrac{|\sin(x^2y)|}{x^2+y^2}\le\dfrac{|x^2y|}{x^2+y^2}\le\dfrac{|x|}{2}\to 0=f(0,0)$，故函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续。

(ii) 由于 $\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\dfrac{0}{x}\to 0$，故函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处，关于 x 的偏导数存在且 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$。同理可证 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处，关于 y 的偏导数存在且 $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$。

(iii)如果函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处可微，则下式

$$\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-0\cdot\Delta x-0\cdot\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\frac{\sin(\Delta x^2\Delta y)}{\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)^3}$$

当 $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$ 时极限存在且为零。但易见当 $\Delta y=\Delta x$ 时，上述极限不存在。因此 $f(x,y)$在 $(0,0)$ 点不可微。解答完毕。

2. 设 $\varphi\in C^{(2)}(R)$，函数 $z=z(x,y)$ 由 $x+y-z=\varphi(x+y+z)$ 给出，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

解：在式 $x+y-z=\varphi(x+y+z)$ 中关于 x 求导得 $1-z_x=\varphi'(x+y+z)(1+z_x)$。由此解得

$z_x=\dfrac{1-\varphi'(x+y+z)}{1+\varphi'(x+y+z)}$。于该式两边关于 x 再次求导得

$$z_{xx}=\frac{[(1+\varphi')(-\varphi''(1+z_x)]-[(1-\varphi')\varphi''(1+z_x)]}{[1+\varphi']^2}=\frac{-2\varphi''(1+z_x)}{[1+\varphi']^2}。$$

这里我们为了简洁，将导函数 φ' 和 φ'' 的变元省去。再将刚刚求得的 z_x 的表达式代入上式就得到 $z_{xx}=\dfrac{-4\varphi''}{[1+\varphi']^3}$。解答完毕。

评注：在继续对 z_x 关于 x 再次求导时，有些同学如下求导错误：

$$\frac{\partial}{\partial x}\varphi'(x+y+z)=\varphi''(x+y+z)。$$

正确的做法是 $\frac{\partial}{\partial x}\varphi'(x+y+z)=\varphi''(x+y+z)(1+z_x)$。注毕。

3. 求函数 $f(x,y)=x^2-xy+y^2-x-y$ 在闭单位圆盘 $x^2+y^2\le 1$ 上的最大值和最小值。

解：先求函数 $f(x,y)$ 在开单位圆盘 $x^2+y^2<1$ 上的驻点。令 $f_x=0$， $f_y=0$，即 $2x-y-1=0$，$-x+2y-1=0$。解之得函数 $f(x,y)$ 的唯一驻点 $(x,y)=(1,1)$。该驻点位于闭单位圆盘 $x^2+y^2\le 1$ 之外。故不予考虑。

再考虑函数在边界单位圆周 $x^2+y^2=1$ 上的极值。我们考虑条件极值问题 $\begin{cases}\max(\min)x^2-xy+y^2-x-y\\ x^2+y^2=1\end{cases}$。为此我们作 Lagrange 函数 $L(x,y,\lambda)=x^2-xy+y^2-x-y+\lambda(x^2+y^2-1)$。并令 $L_x=0$，$L_y=0$，$L_\lambda=0$，即

$$\begin{cases}2x-y-1+2\lambda x=0\\ 2y-x-1+2\lambda y=0\\ \quad x^2+y^2-1=0\end{cases}。$$

由前两个方程得 $2x(1+\lambda)=1+y$，$2y(1+\lambda)=1+x$。两式相减得 $2(x-y)(1+\lambda)=y-x$。当 $x\ne y$ 时，解的 $\lambda=-3/2$。此时这两个方程均变为 $x+y=-1$。由此我们得到有驻点 $(x,y)=(0,-1)$，$(-1,0)$。而当 $x=y$ 时，我们立刻得到另外两个驻点 $(x,y)=(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$，$(-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$。函数 $f(x,y)$ 在前两个驻点的值为 2，而在后两个驻点的值为 $1/2-\sqrt{2}$。由此可以断言：函数 $f(x,y)=x^2-xy+y^2-x-y$ 在闭单位圆盘 $x^2+y^2\le 1$ 上的最大值为 2，在边界点 $(0,-1)$ 和点 $(-1,0)$ 处达到；而最小值为 $1/2-\sqrt{2}$，也在边界点 $(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ 和 $(-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$ 处取得。解答完毕。

4. 设 $b>a>0$ 为任意实数，计算广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\cos xdx$。

解：将式 $\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}$ 表为 $\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}=\int_a^b e^{-ux}du$ 我们就得到

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\cos xdx=\int_0^{+\infty}dx\int_a^b e^{-ux}\cos xdu。$$

利用 Weierstrass 判别法可知广义积分 $\int_0^{+\infty}\int_a^b e^{-ux}\cos xdx$ 关于 $u\in[a,b]$ 一致收敛。因此我们可以交换上述积分次序得到

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\cos xdx=\int_0^{+\infty}dx\int_a^b e^{-ux}\cos xdu=\int_a^b du\int_0^{+\infty}e^{-ux}\cos xdx$$

$$=\int_a^b\frac{udu}{u^2+1}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+b^2}{1+a^2}$$ 。解答完毕。

三．证明题

1.（6 分）设 $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)=a$， $a\in R$， $\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=0$， 且 $|f(x,y)-\varphi(y)|\le\psi(y)$，

$\forall(x,y)\in R^2$。证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=a$。

证明：由假设 $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)=a$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=0$ 可知，对 $\forall\varepsilon>0$， $\exists\delta>0$，使得

$|\varphi(y)-a|<\varepsilon$， $|\psi(x)|<\varepsilon$，只要 $0<|y-y_0|<\delta$， $0<|x-x_0|<\delta$。另一方面，

$|f(x,y)-a|\le|f(x,y)-\varphi(y)|+|\varphi(y)-a|\le|\psi(x)|+|\varphi(y)-a|<2\varepsilon$，

只要 $0<|y-y_0|<\delta$， $0<|x-x_0|<\delta$。

这就证明了证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=a$。证毕。

2.（9 分）设 $f(x,y)\in C^{(2)}(R^2)$，且 $\forall(x,y)\in R^2$， $f(x,y)>0$，

$$f''_{xy}(x,y)f(x,y)\equiv f'_x(x,y)f'_y(x,y)$$

证明：（I） $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{f'_x}{f}\right)\equiv 0$；

（II） $\exists\varphi$， $\psi\in C^{(2)}(R)$，使得 $f(x,y)=\varphi(x)\psi(y)$， $\forall(x,y)\in R^2$。

证明：（I）由假设条件可知 $\left(\dfrac{f_x}{f}\right)_y=\dfrac{f_{xy}f-f_xf_y}{f^2}\equiv 0$。这表明函数 $\dfrac{f_x}{f}$ 与变量 y 无关，即

函数 $\dfrac{f_x}{f}$ 可写作 $\dfrac{f_x}{f}=\xi(x)$，这里函数 $\xi(x)$ 是 C^1 的，因为函数 $f(x,y)$ 是 C^2 的。而式

$\frac{f_x}{f}=\xi(x)$又可写作$(\ln f)_x=\xi(x)$。对该式两边作积分得$\ln f(x,y)=\int\xi(x)dx+\eta(y)$，其中函数$\eta(y)$是$C^2$的。这是因为$\eta(y)=\ln f(x,y)-\int\xi(x)dx$。于是$f(x,y)=\varphi(x)\psi(y)$，其中$\varphi(x)=e^{\int\xi(x)dx}$，$\psi(y)=e^{\int\eta(y)dy}$。易见它们都是$C^2$的。证毕。