Review

- $f(x)$以$2l$ 为周期,在$[-l,l]$上可积或广义绝对可积,则

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right).$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x,\ n = 0,1,2,\cdots$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x,\ n = 1,2,\cdots$$

• 定义内积$(f,g) \triangleq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$,则

$$\{\varphi_n\} = \left\{\sqrt{2}/2, \cos x, \sin x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots\right\}$$

为$\Re[-\pi,\pi]$中标准正交函数系.

• $$\left\| f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\right)\right\|$$

$$= \min_{\lambda_k,\mu_k\in\mathbb{R}} \left\| f(x) - \left(\frac{\lambda_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\lambda_k \cos kx + \mu_k \sin kx)\right)\right\|$$

•Bessel不等式

$$f(x) \sim \frac{a_0}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) \le \|f\|^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\bullet\ f \in \Re[-\pi,\pi] \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = 0, \\ \lim\limits_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = 0. \end{cases}$$

§2. Fourier级数的收敛性

1. Riemann-Lebesgue引理

设f在$[a,b]$上可积或广义绝对可积,记为$f \in \Re[a,b]$.

上一节我们证明,若$f \in \Re[-\pi,\pi]$,则Fourier系数$a_n \to 0$, $b_n \to 0$,即

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = 0.$$

这一结论可以推广为更一般的情形.

Lemma (Riemann-Lebesgue). $f\in\Re[a,b]$, 则

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x=0,\quad \lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x=0.$$

例. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}.$

解：由广义积分的Dirichlet判别法, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ 收敛. 于是

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^{\lambda\pi}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin\lambda t}{t}\mathrm{d}t=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+1/2)t}{t}\mathrm{d}t.$$

恒等式 $\displaystyle\frac{\sin\left(n+1/2\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt$ 两边在$[0,\pi]$上积分, 得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+1/2\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

令$g(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{2\sin\frac{t}{2}}$，往证 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\pi} g(t)\sin(n+1/2)t\mathrm{d}t = 0.$

$$\lim_{t\to0} g(t) = \lim_{t\to0}\frac{2\sin\frac{t}{2}-t}{2t\sin\frac{t}{2}} = \lim_{t\to0}\frac{\sin t - t}{2t\sin t} = 0.$$

故$t=0$是$g(t)$的可去间断点. 由Riemann-Lebesgue引理,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi} g(t)\sin(n+1/2)t\mathrm{d}t = 0. \square$$

2. Fourier级数逐点收敛的判别法

Thm (Dini判别法) f以2π为周期,且$f\in\Re[-\pi,\pi]$,

$x_0\in[-\pi,\pi]$,若$\exists s\in\mathbb{R},\exists\delta>0,s.t.$

$$\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2s}{t}\in\Re[0,\delta],$$

则f的Fourier级数在x_0点收敛于s.

Proof. 略。

Def. 记f在x_0的左、右极限为$f(x_0-0), f(x_0+0)$,若$\exists\delta>0$, $L>0, \alpha>0, s.t.$

$$\left.\begin{aligned}\left|f(x_0+t)-f(x_0+0)\right|\le Lt^{\alpha},\\ \left|f(x_0-t)-f(x_0-0)\right|\le Lt^{\alpha},\end{aligned}\right.\quad \forall t\in(0,\delta),$$

则称f在x_0附近满足广义α阶Lipschitz条件.

Remark. 令$s=\left[f(x_0+0)+f(x_0-0)\right]/2$,

$$g(t)=\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2s}{t},\quad \forall t\in(0,\delta).$$

则$$\left|g(t)\right|\le\frac{\left|f(x_0+t)-f(x_0+0)\right|}{t}+\frac{\left|f(x_0-t)-f(x_0-0)\right|}{t}.$$

f在x_0附近满足广义α阶Lipschitz条件, 则$\exists\delta>0, L>0, s.t.$

$$|g(t)|\le Lt^{\alpha-1}, \forall t\in(0,\delta).$$

从而 $$\int_0^\delta |g(t)|\,\mathrm{d}t \le \int_0^\delta Lt^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t = \frac{L}{\alpha}t^\alpha\Big|_{t=0}^{\delta} < +\infty, \quad (\alpha>0)$$

$g(t)\in\Re[0,\delta]$. 由Dini判别法得以下定理:

Thm (Lipschitz判别法) f以2π为周期, 且$f\in\Re[-\pi,\pi]$, $x_0\in[-\pi,\pi]$, f在x_0附近满足广义α阶Lipschitz条件, 则f的Fourier级数在x_0收敛于$\frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)]$.

Corollary. f以2π为周期, 且

(1) f在$[-\pi,\pi]$上的不连续点和不可微点至多有限多个;

(2)在每一不连续点ξ处具有第一类间断, 即左、右极限

$f(\xi-0)$与$f(\xi+0)$都存在;

(3)在每一不可微点(包括不连续点)η,以下两极限存在

$$\lim_{t\to0+}\frac{f(\eta+t)-f(\eta+0)}{t},\ \lim_{t\to0+}\frac{f(\eta-t)-f(\eta-0)}{-t},$$

则f在每一点x_0的Fourier级数收敛于

$$\frac{1}{2}\left[f(x_0+0)+f(x_0-0)\right].$$

Proof. 在所给条件下, $\forall x_0$, 不论x_0是否为f的可微点,以下两极限存在

$$\lim_{t\to 0+}\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t},$$

$$\lim_{t\to 0+}\frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{-t}.$$

因而f在x_0点满足$\alpha=1$的Lipschitz条件

$$\left|f(x_0\pm t)-f(x_0\pm 0)\right|\le Lt, \forall t\in(0,\delta).$$

由Lipschitz判别法,命题得证.□

Remark. 两极限

$$\lim_{t\to 0+}\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t},$$

$$\lim_{t\to 0+}\frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{-t}$$

也称为广义单侧导数. 若x_0是f的连续点,则广义单侧导数就是单侧导数.

Def. 称f在$[a,b]$上分段可微,若$\exists[a,b]$的一个分割

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

使得$\forall i=1,2,\cdots,n,$

(1) f在(x_{i-1},x_i)内可微;

(2) f在端点x_{i-1},x_i处右、左极限分别存在;

(3) f在端点x_{i-1},x_i处右、左广义导数分别存在.

前面的推论可以等价地描述为:

Corollary. f以2π为周期,且在$[-\pi,\pi]$上分段可微,则f在每一点x_0的Fourier级数收敛于

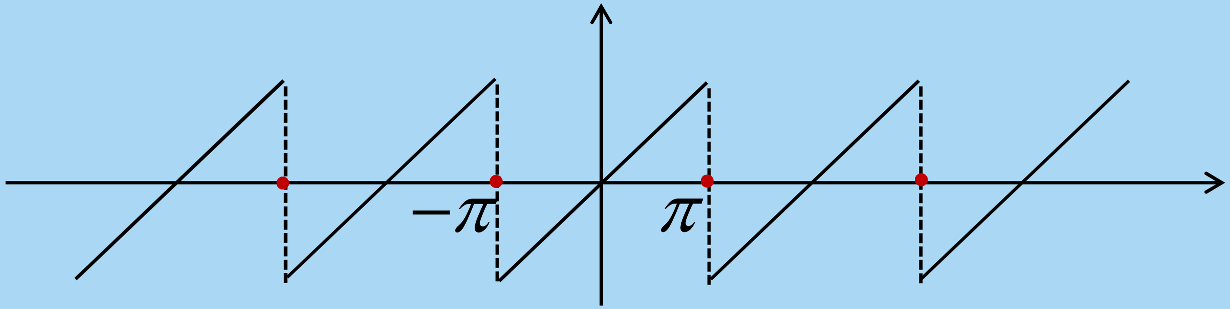
$$\frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)].$$

特别地,若f在x_0连续,则f在x_0的Fourier级数收敛于$f(x_0)$.

例. 将$f(x)=\cos^2 x$展开成2π周期的Fourier级数.

解: $f(x)=\cos^2 x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 2x,\quad x\in\mathbb{R}.$

例. $f(x)=x$在$(0,\pi)$上的2π-周期的正弦Fourier级数为



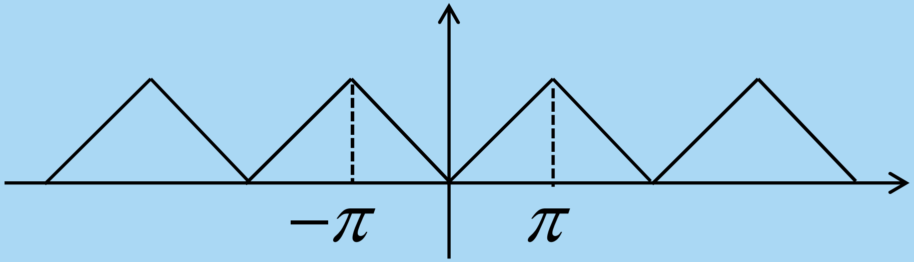
$$f(x)\sim\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{2}{k}\sin kx,$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{2}{k}\sin kx=\begin{cases}x, & x\in(-\pi,\pi),\\ 0, & x=\pm\pi.\end{cases}$$

令$x=\dfrac{\pi}{2}$,得

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}+\cdots=\frac{\pi}{4}.\square$$

例. $f(x)=x$在$(0,\pi)$上的2π-周期的余弦Fourier级数为



$$f(x)\sim\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}.$$

$$x=f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2},\qquad \forall x\in[-\pi,\pi].$$

令$x=\pi/4$,得

$$1-\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}\right)+\left(\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}\right)+\cdots$$

$$+(-1)^n\left(\frac{1}{(4n-1)^2}+\frac{1}{(4n+1)^2}\right)+\cdots=\frac{\sqrt{2}}{16}\pi^2.\square$$

例. $f(x)=x^2, \forall x\in[-1,1], f$以$T=2$为周期.

$$f(x)\sim\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi x.$$

$$x^2=f(x)=\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi x,\quad \forall x\in[-1,1].$$

令$x=1$,得

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$$

令$x=0$,得

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{12}.\square$$

Thm (Dirichlet判别法) 周期为2π的函数f在$[-\pi,\pi]$上分段单调且有界, 则f的Fourier级数在任意一点x_0收敛于

$$\frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)].$$

Proof. 略。

3. Fourier级数的均方收敛性,Parseval等式

$$(f,g)\triangleq\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x,\quad \forall f,g\in R[-\pi,\pi].$$

$$\varphi_0(x)=1\big/\sqrt{2}\,,$$

$$\varphi_{2n-1}(x)=\cos nx,\quad n=1,2,\cdots$$

$$\varphi_{2n}(x)=\sin nx,\qquad n=1,2,\cdots$$

$\{\varphi_k(x)\}$为$R[-\pi,\pi]$中标准正交函数系.

Thm. f以2π为周期, 在$[-\pi,\pi]$上可积,$\{\varphi_k\}$如前,

$c_k=(f,\varphi_k)$,则

(1) f的Fourier级数在$[-\pi,\pi]$上均方收敛到$f(x)$,即

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-\sum_{k=0}^{n}c_k\varphi_k(x)\right)^2\mathrm{d}x=0$$

(此时称$\{\varphi_k\}$在$R[-\pi,\pi]$中完备);

(2) $\sum_{k=0}^{\infty}c_k^2=\|f\|^2$.(Parseval等式)

这个定理可以翻译为:

Thm. f以2π为周期, 在$[-\pi,\pi]$上可积,

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right).$$

(1) f的Fourier级数在$[-\pi,\pi]$上均方收敛到$f(x)$,即

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-S_n(x)\right)^2\mathrm{d}x=0,$$

其中$S_n(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=0}^{n}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)$;

(2) $\dfrac{a_0^2}{2}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x$.(Parseval等式)

作业:习题7.1 No.3.

习题7.2 No.1-4.