令$g(n)=\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}$,则

$$g(n)\to\frac{1}{e},\text{当}\to+\infty\text{时}.$$

取$\varepsilon_0=\dfrac{1}{2e}$, 则$\forall N\in\mathbb{N},\exists n_0>N, s.t., g(n_0)>\varepsilon_0$.

取$x_0=\dfrac{n_0}{n_0+1}$,则

$$f_{n_0}(x_0)=g(n_0)>\varepsilon_0.$$

与$\{f_n(x)\}$在[0,1]上一致收敛到0矛盾.□

Review

- Leibnitz判别法

$$a_n \searrow 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n\text{收敛.}$$

- Dirichlet判别法

$$\left.\begin{array}{l}\text{数列}\{a_n\}\text{单调趋于}0;\\ \left|\sum_{k=1}^{n}b_k\right|\le M,\forall n;\end{array}\right\}\Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty}a_nb_n\text{收敛.}$$

清華大學

- Abel判别法

$$\left.\begin{array}{l} \text{数列}\{a_n\}\text{单调且有界,} \\ \sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_k\text{收敛} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} a_n b_n\text{收敛.}$$

- Taylor展开在级数判敛中的应用

- 非负项级数的比较、比值判敛法不适用于一般项级数

只适于

- 无穷和运算的结合律　若 ∑an 可

(1) $\sum a_n$ 收敛 $\Rightarrow$

$$(a_1+\cdots+a_{n_1})+(a_{n_1+1}+\cdots+a_{n_2}) +\cdots+(a_{n_{k-1}+1}+\cdots+a_{n_k})+\cdots$$

收敛到同一和.

(2) $$(a_1+\cdots+a_{n_1})+(a_{n_1+1}+\cdots+a_{n_2}) +\cdots+(a_{n_{k-1}+1}+\cdots+a_{n_k})+\cdots$$

收敛,且同一括号中各项有相同的正负号

$\Rightarrow \sum a_n$ 也收敛到同一和.

- 无穷和运算的交换律

Thm $\sum a_n$绝对收敛

$\Rightarrow$ 任意重排$\sum a_n'$也绝对收敛到同一和.

Thm (Riemann定理) $\sum a_n$条件收敛, 则

$\forall \lambda \in \mathbb{R} \bigcup \{+\infty\} \bigcup \{-\infty\}, \exists$重排$\sum a_n', s.t., \sum a_n' = \lambda.$

Chap6. 函数项级数

增加 variable x

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots,$$

部分和函数

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x),$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \triangleq \lim_{n\to+\infty} S_n(x).$$

和函数

this is 收敛域.

例. $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, x \in (-1,1).$

几何级数

例. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x, x \in \mathbb{R}.$

证明对 $\forall$ fix $= x$, $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^n}{n!} - e^x = 0$.

Proof. 任意取定 $x \in \mathbb{R}$, 存在 ξ 介于0与 x 之间, $s.t.$

对 e^x 进行taylor exp

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| = \left| \frac{e^{\xi} x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \le \frac{e^{|x|} |x|^{n+1}}{(n+1)!} \triangleq a_n.$$

取 Langrage 余项.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0, \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ 收敛}, \lim_{n\to+\infty} a_n = 0, \text{ 故} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x. \square$$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{(n+2)} = 0$, 由 D'Alembert 判别法得 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

2. 函数项级数的一致收敛性

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x_0) = S(x_0) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n(x_0) = S(x_0)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(x_0) = S(x_0)$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon, x_0), s.t,$$

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x_0) - S(x_0) \right| < \varepsilon, \ \forall n > N.$$

清華大學

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x_0) \text{ 收敛}$$

Cauchy 收敛准则

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon, x_0), s.t,$$

$$\left|S_{n+p}(x_0) - S_n(x_0)\right| < \varepsilon, \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}.$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon, x_0), s.t,$$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x_0)\right| < \varepsilon, \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}.$$

Remark. 若以上分析中$N = N(\varepsilon)$, 与x_0无关, 则得到函数列的一致收敛性和函数项级数的一致收敛性.

Def. 称函数列$\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$在$x\in I$上一致收敛,若$\exists f$,

$\forall \varepsilon>0, \exists N(\varepsilon), s.t.,$ 和x无关.

$$\left|f_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon, \forall n>N, \forall x\in I.$$

此时,也称$\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$在$x\in I$上一致收敛到$f(x)$.

Thm (Cauchy准则) $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$在$x\in I$上一致收敛

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists N(\varepsilon), s.t.,$

$$\left|f_{n+p}(x)-f_n(x)\right|<\varepsilon, \forall n>N, \forall p\in\mathbb{N}, \forall x\in I.$$

清华大学

Remark. $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ 在 $x\in I$ 上一致收敛到 $f(x)$

$$\Rightarrow \{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty} \text{在} x\in I \text{上逐点收敛到} f(x).$$

Remark.

$$\left.\begin{array}{l} \{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty} \text{在} x\in I \text{上逐点收敛到} f(x) \\ \{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty} \text{在} x\in I \text{上一致收敛} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty} \text{在} x\in I \text{上一致收敛到} f(x).$$

(而不可能一致收敛到其他函数)

清华大学

Def. $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$, 若 $\{S_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ 在 $x\in I$ 上一致收敛 (到 $S(x)$), 则称 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ 在 $x\in I$ 上一致收敛 (到 $S(x)$).

Thm. $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ 在 $x\in I$ 上一致收敛

$\Leftrightarrow \exists S(x), \forall \varepsilon>0, \exists N(\varepsilon), s.t.,$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)-S(x)\right|<\varepsilon,\quad \forall n>N, \forall x\in I.$$

$\Leftrightarrow$ (Cauchy准则) $\forall \varepsilon>0, \exists N(\varepsilon), s.t.,$

T1需要提前知道极限

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right|<\varepsilon,\quad \forall n>N, \forall p\geq 1, \forall x\in I.$$

足够远处任意长度区分无穷小，

例. $f_n(x)=x^n$,证明$\{f_n(x)\}$在$(0,1)$上不一致收敛.

Proof. 取$\varepsilon_0=\dfrac{1}{4}, \forall N\in\mathbb{N},\ \exists n=N+1, \exists p=N+1,$

用Cauchy来证"非一致收敛": $\exists \varepsilon>0$, s.t. $\forall N\in\mathbb{N}$, $\exists x\in I$, $\exists n>N$, $\exists p\in\mathbb{R}$, s.t. $\left|\sum_{k=n}^{k=n+p} f_n(x)\right|\geq\varepsilon$.

$\exists x_0=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{N+1}}\in(0,1),\ s.t.,$

$$\left|f_{n+p}(x_0)-f_n(x_0)\right|=\left|x_0^{n+p}-x_0^n\right|$$

$$=x_0^n(1-x_0^p)=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})=\varepsilon_0. \square$$

Remark. $f_n(x)=x^n$在$[0,1]$上收敛到$f(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,1);\\ 1, & x=1.\end{cases}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum f_n(x)=\frac{1}{1-x}$

证明非一致收敛：先由个别点求出极限函数，再证明

例. $f_n(x)=nx^n(1-x)$.证明$\{f_n(x)\}$在$[0,1]$上不一致收敛.

Proof. 首先证$\{f_n(x)\}$在$[0,1]$上逐点收敛到0. 事实上,

$$f_n(0)=f_n(1)=0.$$

∴ $\{f_n(x)\}$ 在 $x=0$，$x=1$ 处收敛到0。

$$x\in(0,1)\text{时}, f_n(x)=\frac{n(1-x)}{(1/x)^n}\to 0, \text{当} n\to+\infty\text{时}.$$

证明$\{f_n(x)\}$不一致收敛到0

再证$\{f_n(x)\}$在$[0,1]$上非一致收敛. 若不然, 则$\{f_n(x)\}$在$[0,1]$上一致收敛到0.

几何平均 ≤ 算术平均

$$\underbrace{x\cdot x\cdot\dots\cdot x\cdot(n-nx)}_{n+1\text{项}}\le\left(\frac{x+x+\dots+x+(n-nx)}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$f_n(x)=x^n(n-nx)\le\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1},$$

$$\therefore x^n(n-nx)\le\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$$

当$x=n-nx$,即$x=\dfrac{n}{n+1}$时等号成立.

令 $g(n)=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\frac{1}{e}$. ∴

已给出极限函数，(这也说明点点收敛) 常作差后证明

例. $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ 在$(-1,1)$上非一致收敛. $x \to 1$ 时

Proof. $$\left|\sum_{k=0}^{n} x^k - \frac{1}{1-x}\right| = \left|\frac{1-x^{n+1}}{1-x} - \frac{1}{1-x}\right| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x}.$$

取$\varepsilon_0 = 1, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n_0 = N+1,\ x_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{N+2}} \in (\frac{1}{2}, 1), s.t.,$ ($\frac{1}{N+2} \to 0^+$)

$N \to \infty, x_0 \to 1$ 且 $x_0 > \frac{1}{2}$.

$$\left|\sum_{k=1}^{n_0} x_0^k - \frac{1}{1-x_0}\right| = \frac{|x_0|^{n_0+1}}{1-x_0} > \frac{1/2}{1/2} = 1. \square$$

§1. 函数项级数的收敛性

1. 函数项级数的逐点收敛性

取定 x_0，函数项级数 ⇒ 数项级数

Def. 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x_0)$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ 在 x_0 收敛，称 x_0 为函数项级数的收敛点；所有收敛点构成的集合称为函数项级数的收敛域.

Def. 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(x_0)|$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ 在 x_0 绝对收敛.

清华大学

例. $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+\sin x}$ 在$\mathbb{R}$上一致收敛.

Proof. $\forall x\in\mathbb{R}$, $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+\sin x}$为交错级数, $\frac{1}{n+\sin x}\downarrow 0$,

交错级数满足

$|S_n|\leq a_1$

k=n+1 时, $f_n=\frac{1}{n+1+\sin x}$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{(-1)^k}{k+\sin x}\right|\leq\frac{1}{n+\underbrace{1+\sin x}_{\geq 0}}\leq\frac{1}{n}.$$

$<\varepsilon$ $\Rightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}$. 令 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]$

把从k=n+1到k=n+p的部分和放缩成

于是, $\forall\varepsilon>0,\exists N=\lfloor 1/\varepsilon\rfloor+1,\forall n>N,\forall x\in\mathbb{R}$, 有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{(-1)^k}{k+\sin x}\right|<\varepsilon.$$ 故$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+\sin x}$ 在$\mathbb{R}$上一致收敛.□

3. 函数项级数一致收敛的判别法

（只能判别一致收敛）

数项级数

Thm(Weierstrass判别法) 若$\boxed{\text{非负项}}$级数$\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$收敛，且

$$|f_n(x)| \le M_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I,$$

则$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$在$I$上一致收敛.

$<\varepsilon.$

Proof. $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| \le \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} M_k\right|, \forall x \in I, \forall n, p.$ □

这个≤和x的选取无关。

（∵ $\sum M_n$收敛）

清華大學

Thm(Dirichlet判别法) 若

$\forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}^*, s.t. \boxed{\forall n>N,}$ $\forall x\in I, |a_n(x)|<\varepsilon.$

(1) 函数列$\{a_n(x)\}$对任意固定的$x\in I$都单调, 且在

$x\in I$上一致收敛到0;

(2) $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n(x)$ 的部分和函数列在$x\in I$上一致有界, 即

$$\exists M>0, s.t. \left|\sum_{k=1}^{n} b_k(x)\right|\le M,\ \forall n\in\mathbb{N}, \forall x\in I;$$

则$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在$x\in I$上一致收敛.

单调一致收敛到0.

部分和

一致有界

Thm(Abel判别法) 若

(1) 函数列$\{a_n(x)\}$对任意固定的$x\in I$都单调,且在$x\in I$上一致有界,即存在$M>0, s.t.$

$$|a_n(x)|\le M,\quad \forall n\in\mathbb{N}, \forall x\in I;$$

(2) $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n(x)$ 在$x\in I$上一致收敛;

则$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)b_n(x)$在$x\in I$上一致收敛.

$\frac{1}{n^2}$ $\frac{1}{n^4}$，用 weierstrass 放缩.

例. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n^2}, \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$ 在$\mathbb{R}$上一致收敛.

$\frac{1}{x}+x\cdot n^4 \geq 2\sqrt{n^4}=2n^2$

Proof. $\forall x\in\mathbb{R}$, $= \frac{1}{\frac{1}{x}+x\cdot n^4}$ $\therefore \frac{1}{\frac{1}{x}+x\cdot n^4}\leq\frac{1}{2n^2}$.

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right|\leq\frac{1}{n^2},\quad \left|\frac{x}{1+n^4x^2}\right|\leq\frac{1}{2n^2},$$

由Weierstrass判别法知, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$与$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$在$\mathbb{R}$上一致收敛.□

清華大學

例. $\alpha>2$,则$\sum_{n=1}^{+\infty} x^{\alpha} e^{-nx^2}$在$[0,+\infty)$上一致收敛.

$\Rightarrow x=\sqrt{\frac{\alpha}{2n}}$

Proof. 令$f_n(x)=x^{\alpha}e^{-nx^2}$,则 $f_n(x)>0, \forall x>0$, 且

$= e^{-x^2}\cdot x^{\alpha-1}(\alpha-2nx^2)$

$$f_n(0)=0,\ \lim_{x\to\infty} f_n(x)=0,\ f_n'(x)=e^{-nx^2}(\alpha x^{\alpha-1}-2nx^{\alpha+1}),$$

对 $f_1(x), f_2(x) \dots f_n(x) \dots$ 都是在 $x=\sqrt{\frac{\alpha}{2n}}$ 上取得最大值.

可知$x=\sqrt{\alpha/2n}$是$f_n(x)$在$[0,+\infty)$上的最大值点,

$-n\cdot\frac{\alpha}{2n}=-\frac{\alpha}{2}$ $\quad \in \mathbb{R}$

$$0\le f_n(x)\le \boxed{f_n(\sqrt{\alpha/2n})}=\left(\sqrt{\alpha/2}\right)^{\alpha}\frac{1}{n^{\alpha/2}}e^{-\alpha/2}, \forall x\ge 0.$$

这就是个数项级数

$\alpha>2$,故$\sum_{n=1}^{+\infty} x^{\alpha}e^{-nx^2}$在$[0,+\infty)$上一致收敛(Weierstrass).□

由p-判别法

清華大學

$\frac{\sin n}{n^p}$, $\frac{\cos n}{n^p}$ 条件收敛

例. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 在 $[\delta, 2\pi-\delta](0<\delta<\pi)$ 上一致收敛.

$\sum_{k=1}^{n}\cos k = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})-\sin\frac{1}{2}}{2\sin\frac{1}{2}}$

$\sum_{k=1}^{n}\sin k = \frac{\quad}{2\sin\frac{1}{2}}$

Proof. $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 与 x 无关, $\downarrow 0$.

$$\left|\sum_{n=1}^{m}\sin nx\right| \le \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \le \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}, \forall x\in[\delta, 2\pi-\delta], \forall m\in\mathbb{N}.$$

$(\sin x+\sin 2x+\dots+\sin(mx))\sin\frac{x}{2}$

$-\frac{1}{2}(\cos(x+y)-\cos(x-y))$

故 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 在 $[\delta, 2\pi-\delta](0<\delta<\pi)$ 上一致收敛(Dirichlet).□

$=$

Question. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 在 $[0, 2\pi]$ 上是否一致收敛? 不成立

$2\sin 1\sin\frac{1}{2}+2\sin 2\sin\frac{1}{2}+2\sin 3\sin\frac{1}{2}+\dots+2\sin n\sin\frac{1}{2}$

$=\cos\frac{1}{2}-\cancel{\cos\frac{3}{2}}+\cancel{\cos\frac{3}{2}}-\cancel{\cos\frac{5}{2}}+\cancel{\dots}+\cos(n-\frac{1}{2})-\cos(n+\frac{1}{2}) = \cos\frac{1}{2}-$

清华大学

例. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 在$[0,2\pi]$上非一致收敛.

$\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}^*$, s.t. $\forall p\geq 1, n\geq N$, $\forall x\in I$, $\left|\sum_{k=n}^{n+p}\frac{\sin nx}{n}\right|<\varepsilon$.

Proof. 用Cauchy准则.

证明非一致收敛:

$\exists\varepsilon>0$,

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\sin kx}{k}\bigg|_{x=1/2n}=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\sin(k/2n)}{k}$$

$\sin\frac{k}{2n}\geq\sin\frac{n+1}{2n}\geq\sin\frac{1}{2}$.

$$\geq\sin\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\geq\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}.$$

故 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 在$[0,2\pi]$上不一致收敛.□

$$\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{n}}}$$

例. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{\sqrt{n(n+x)}}$在$x\in[0,+\infty)$上一致收敛.

Proof. $\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{\sqrt{n(n+x)}}=\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}\cdot\left(1\Big/\sqrt{1+\frac{x}{n}}\right)\triangleq a_n\cdot b_n(x).$

$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$收敛, a_n与x无关, 于是$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$关于x一致收敛.

$x\in(0,+\infty), |b_n(x)|\le 1, \{b_n(x)\}$一致有界, 关于$n$单调.

由Abel判别法, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{\sqrt{n(n+x)}}$在$x\in[0,+\infty)$上一致收敛.□

例. $\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\frac{1}{2^n x}$在$x\in(0,+\infty)$上绝对收敛性与一致收敛性？

解：$\forall x\in(0,+\infty),\left|\sin\frac{1}{2^n x}\right|\le\frac{1}{2^n x}$，因此$\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\frac{1}{2^n x}$ 在

$x\in(0,+\infty)$上绝对收敛.

取$\varepsilon_0=1,\forall N\in\mathbb{N},\exists n_0=N+1,\ \boxed{x_0=\frac{1}{2^N\pi}},s.t.,$

另一种证明非一致收敛的办法：通项不$\to 0$.

$$\left|\sin\frac{1}{2^{n_0}x_0}\right|=\left|\sin\frac{\pi}{2}\right|=1=\varepsilon_0.$$

发现

故$\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\frac{1}{2^n x}$在$x\in(0,+\infty)$上非一致收敛（Cauchy）.□

例. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x^2+n}$在$x\in(-\infty,+\infty)$上绝对收敛性与一致收敛性？

解：给定x，$\left|\frac{(-1)^n}{x^2+n}\right|=\frac{1}{x^2+n}\sim\frac{1}{n}$，$n\to+\infty$时. 故$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x^2+n}$在$\mathbb{R}$上点点非绝对收敛.

$\{(-1)^n\}$的部分和关于$x\in\mathbb{R}$一致有界；$\left\{\frac{1}{x^2+n}\right\}$在$x\in\mathbb{R}$上关于$n$单调，一致收敛到0；故$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x^2+n}$在$x\in(-\infty,+\infty)$上一致收敛(Dirichlet).□

Remark. 以上两个例子说明:绝对收敛性与一致收敛性没有必然的联系.

作业:习题6.1

No.2(单),3(单),6,9,10

附录. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}=\ln 2.$

Proof. Step1. $1/(n+1)<\ln\left(1+1/n\right)<1/n.$

Step2. 令$x_n=1+1/2+1/3+\cdots+1/n-\ln n$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

事实上,$x_{n+1}-x_n=1/(n+1)-\ln(1+1/n)<0,\ x_n\downarrow,$

$$x_n>\ln(1+1)+\ln(1+1/2)+\cdots+\ln(1+1/n)-\ln n$$

$$=\ln(n+1)-\ln n>0.$$

Step3. $\sum\limits_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}=(x_{2n}+\ln 2n)-(x_n+\ln n)=x_{2n}-x_n+\ln 2\to\ln 2.$