

(科目: ) 数 学 作 业 纸

编号: 2018013382

班级: 软件81

姓名: 陈衍德

第 / 页

1. 以工厂为结点, 在有业务联系的工厂结点间连边, 构成无向图.

无向图的奇度数结点个数一定为偶数. (性质 1.1.2)

若每座工厂都只与其他 3 座工厂有业务联系, 则奇度数结点有 9 个. 矛盾.

若只有 4 座工厂与偶数个工厂有业务联系, 则奇度数结点有 5 个. 矛盾.

2. 设  $G$  中存在孤立结点. 不妨设  $v_1$  为孤立结点.

取子图  $G'$ ,  $V(G') = V(G) - \{v_1\}$ .

由  $v_1$  孤立知  $(v_1, v_i) \notin E(G)$  ( $i=2, 3, \dots, n$ ).

由  $G$  为简单图知  $(v_i, v_j) \notin E(G)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ).

$\therefore E(G') = E(G)$

$E(G)$  中所有边的两个端点均在  $V(G')$  中, 即

$\therefore |V(G')| = n-1 \quad \therefore |E(G')| \leq \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$

$|E(G)| \leq \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ , 与  $m > \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$  矛盾.

$\therefore G$  不存在孤立结点.

3. 令  $S = \sum_{v_i \in V} ((d^+(v_i))^2 - (d^-(v_i))^2)$ . 即证  $S \equiv 0$ .

取特殊情况, 设图  $G=(V, E)$ ,  $V(G)=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ,  $E(G)=\{(v_i, v_j) | i < j\}$ .

则  $S = (n-1)^2 - 0^2 + (n-2)^2 - 1^2 + \dots + 0^2 - (n-1)^2 = 0$ .

对任一有向完全图, 若将一条边  $\langle v_i, v_j \rangle$  反向后,  $S$  的变化量为 (设  $x = d^+(v_i)$ ,  $y = d^+(v_j)$ )

$(x-1)^2 + (n-x)^2 - (y+1)^2 - (n-2-y)^2 - x^2 - (n-1-x)^2 + y^2 + (n-1-y)^2$

$= 2x-1 + 2(n-x)-1 - 2y-1 - 2(n-1-y)+1 = 2n-2(n-1)-2=0$ .

任一有向完全图可由  $G$  经过有限次反向边操作得到. 故  $S \equiv 0$ . 原式成立.