

第 12 周习题课 曲线曲面积分 2

本次习题课讨论题涉及以下四个问题。

- 一. 曲线曲面积分续。
- 二. Green 定理的应用续。
- 三. 积分关于路径的无关性

一. 曲线曲面积分续。

1. 记 L^+ 为圆周
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ y = x \tan \alpha \end{cases} \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right),$$
 从 Ox 轴的正向看去, 圆周的正向为逆时针方

向。写出 L^+ 的参数方程, 并利用这个参数方程来计算线积分

$$I = \oint_{L^+} (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz.$$

(注: 我们将在第三部分的第 3 题, 利用 Stokes 公式更简单地计算上述线积分。)

2. 求积分 $I = \iint_{\Sigma} f(x)dy \wedge dz + g(y)dz \wedge dx + h(z)dx \wedge dy$, 其中 Σ 为长方体

$[0, a] \times [0, b] \times [0, c]$ 的边界, 正法向朝外, 函数 $f(x)$, $g(y)$ 和 $h(z)$ 均为连续函数。

3. 设 S 为锥面 $z^2 = x^2 + y^2$ 位于 $0 \leq z \leq h$ 的那一部分, 正法向向下。设 $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ 为流体运动的速度场。求流体在单位时间里通过定向曲面 S 由内向外的流量 Q , 即求曲面积分 $Q = \iint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$ 。

4. 记 S^+ 为圆柱面 $S: x^2 + y^2 = 1$ 位于 $0 \leq z \leq 2$ 的部分, 外法向为正, 计算曲面积分

$$I = \iint_{S^+} x(y-z)dydz + (x-y)dx dy.$$

二. Green 定理的应用。

1. (利用 Green 定理证明平面面积变换公式) 回忆平面面积变换定理:

设 φ 是平面域上的微分同胚, 即 φ 是 1-1 映射且其逆也是连续可微的. 假设开区域 D_0 及其边界 ∂D_0 均属于 φ 的定义域。记开区域 D_0 在映射 φ 下的象为 D_1 , 即 $D_1 = \varphi(D_0)$ 。根据曲

面面积公式知 D_1 的面积公式为 $|D_1| = \iint_{D_0} \left| \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du dv$, 这里 $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ 表示映射 φ 的两个分量函数。试利用 Green 公式来证明上述面积变换公式。

2. 计算线积分 $I = \oint_{L^+} \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2}$, 其中 L^+ 为 $|x| + |y| = 1$, 逆时针为正向。

3. 设 $D \subseteq R^2$ 为有界开区域, 它的边界 ∂D 是逐段光滑曲线, \bar{n} 是 ∂D 的外单位法向量,

设函数 $f(x,y) \in C^1(\bar{D})$, 且 $f(x,y)$ 在 D 内为调和函数, 即 $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \equiv 0$,

$\forall (x,y) \in D$ 。求证:

(i) $\oint_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial n} dl = 0$;

(ii) $\oint_{\partial D} f \frac{\partial f}{\partial n} dl = \iint_D |\nabla f|^2 dx dy$;

(iii) 若在边界 ∂D 上, $f(x,y) \equiv 0$, 求证 $f(x,y) \equiv 0$, $\forall (x,y) \in D$ 。

4. 已知函数 $f(x)$ 在整个实轴 R 上二次连续可微, 满足 $f'(0) = 0$, 且使得微分式

$$[f(x) + y(e^x + x - f(x))]dx + f'(x)dy \text{ 是全微分, 求 } f(x), \text{ 并使由 } A(-1,1) \text{ 到 } B(1,0)$$

逐段光滑曲线 L 上积分的值为 $\frac{\pi^2}{8}$ 。

5. 设 $f(x)$ 是实轴上处处为正的连续函数, D 为圆心在原点的单位开圆盘。

证明: (i) $\int_{\partial D^+} xf(y)dy - \frac{y}{f(x)}dx = \int_{\partial D^+} -yf(x)dx + \frac{x}{f(y)}dy$;

(ii) $\int_{\partial D^+} xf(y)dy - \frac{y}{f(x)}dx \geq 2\pi$ 。