微积分A2第八周习题课：广义含参变量积分

第 1 部分 课堂内容回顾

1. 广义含参变量积分一致收敛

设函数f在$\Lambda\times[c,+\infty)$上定义。若对每一个$x\in\Lambda$，广义积分$\displaystyle\int_c^{+\infty} f(x,t)dt$ 都收敛，则此积分值可以看成是定义在Λ上的函数。

(1) **定义：**

若$\forall\varepsilon>0$, $\exists A(\varepsilon)>c$，当$A_2>A_1>A(\varepsilon)$时，$\forall x\in\Lambda$，有$\displaystyle\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,t)dt\right|<\varepsilon$, 则称广义含参变量积分$\displaystyle\int_c^{+\infty} f(x,t)dt$关于$x$在$\Lambda$上<u>一致收敛</u>。

(2) **Weierstrass 判别法 (也称比较判别法)：**

设有函数$F(t)$，使得

$$|f(x,t)|\le F(t)\quad (x\in\Lambda,\quad t\ge c)$$

且广义积分$\displaystyle\int_c^{+\infty} F(t)dt$收敛，则广义含参变量积分$\displaystyle\int_c^{+\infty} f(x,t)dt$关于$x$在$\Lambda$上一致收敛。

(3) **Dirichlet判别法:**

设$f(x,t)$, $g(x,t)$满足：

(i) 存在正常数M，当$x\in\Lambda$, $A>c$时，有$\displaystyle\left|\int_c^{A} f(x,t)dt\right|\le M$;

(ii) 对固定的$x\in\Lambda$，$g(x,t)$是t的单调函数，当$t\to+\infty$时，$g(x,t)$关于$x\in\Lambda$ 一致趋于零（即$\forall\varepsilon>0$, $\exists A(\varepsilon)>c$，当$t>A(\varepsilon)$ 时，$\forall x\in\Lambda$，有$|g(x,t)|<\varepsilon$).

则广义含参变量积分$\displaystyle\int_c^{+\infty} f(x,t)g(x,t)dt$关于$x$在$\Lambda$ 上一致收敛。

(4) **Abel判别法:**

设$f(x,t)$, $g(x,t)$满足：

(i) 广义含参变量积分$\displaystyle\int_c^{+\infty} f(x,t)dt$关于$x$在$\Lambda$上一致收敛;

(ii) 对固定的$x\in\Lambda$，$g(x,t)$是t的单调函数，存在正常数M，当$x\in\Lambda$, $t\ge c$时，有$|g(x,t)|\le M$.

则广义含参变量积分$\displaystyle\int_c^{+\infty} f(x,t)g(x,t)dt$关于$x$在$\Lambda$ 上一致收敛。

2. 广义含参变量积分性质

(1) **积分与积分次序可交换性:**

设$f \in C([a,b] \times [c,+\infty))$, 且广义含参变量积分$\int_c^{+\infty} f(x,t)dt$关于$x$在$[a,b]$上一致收敛. 记$I(x) = \int_c^{+\infty} f(x,t)dt$, 则$I \in C[a,b]$，且对任何$u \in [a,b]$

$$\int_a^u I(x)dx = \int_c^{+\infty} \left[\int_a^u f(x,t)dx\right] dt.$$

(2) **求导与积分次序可交换性:**

设f, $f_1' \in C([a,b] \times [c,+\infty))$，存在$x_0 \in [a,b]$使得广义积分$\int_c^{+\infty} f(x_0,t)dt$ 收敛，且广义含参变量积分$\int_c^{+\infty} f_1'(x,t)dt$ 关于x在$[a,b]$上一致收敛。则广义含参变量积分$I(x) = \int_c^{+\infty} f(x,t)dt$ 关于x在$[a,b]$上一致收敛，且

$$I'(x) = \int_c^{+\infty} f_1'(x,t)dt.$$

第 2 部分 习题课题目

1. 证明:广义含参变量积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x\sin(ax)}{a(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$ 在 $a \in [\alpha,+\infty)$ 上一致收敛; 在 $a \in (0,\beta)$ 上非一致收敛.其中 α, β 为任意正数。

2. 计算 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x^2}\,\mathrm{d}x$, 其中 $a,b>0$.

3. 计算 $\int_0^{+\infty} e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}\,\mathrm{d}x$, 其中 $a \geq 0$.

4. 计算 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xy)}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$, 其中 $y \geqslant 0$.

5. 计算 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{y^2+x^2}\,\mathrm{d}x$, 其中 $y>0$.

6. 计算 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\beta x)}{x^2+\alpha^2}\,\mathrm{d}x$, $\int_0^{+\infty} \frac{x\sin(\beta x)}{x^2+\alpha^2}\,\mathrm{d}x$, 其中 $\alpha>0$.

第 3 部分 期中考前答疑