第 8 次习题课 三重积分

1. （三重积分）设是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 所围成的区域，积分

$$\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz=$$

答案： $\underline{\dfrac{\pi R^5}{5}(2-\sqrt{2})}$ 。原式=$2\pi\int_0^R \rho^4 d\rho\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi$。

2. 求 $\iiint\limits_{\Omega}(1+x^2+y^2)zdxdydz$, 其中 $\Omega=\left\{(x,y,z)\,|\,\sqrt{x^2+y^2}\le z\le H\right\}$.

解：用柱坐标系, $\Omega=\left\{(\rho,\varphi,z)\,|\,0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\rho\le H,\ \rho\le z\le H\right\}$,

$$\iiint\limits_{\Omega}(1+x^2+y^2)zdxdydz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^H d\rho\int_\rho^H(1+\rho^2)z\rho dz=\pi\left(\frac{H^4}{4}+\frac{H^6}{12}\right).$$

3. 设 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, $F(t)=\iiint\limits_{\Omega}\left(z^2+f(x^2+y^2)\right)dxdydz$ ，其中

$\Omega=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le h, x^2+y^2\le t^2\right\}$ $(t>0)$. 求 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{F(t)}{t^2}$.

解:用柱坐标系,

$$F(t)=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^t d\rho\int_0^h\left[z^2+f(\rho^2)\right]\rho dz=\frac{\pi h^3}{3}t^2+2\pi h\int_0^t\rho f(\rho^2)d\rho,$$

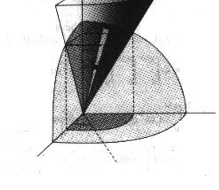
用 L′Hosptial 法则,

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{F(t)}{t^2}=\frac{\pi h^3}{3}+2\pi h\lim_{t\to 0^+}\frac{\int_0^t\rho f(\rho^2)d\rho}{t^2}=\frac{\pi h^3}{3}+\pi hf(0).$$

4. 求三重积分: $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\,dv$ ，其中 $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|\begin{cases}0\le z\le\sqrt{1-y^2-x^2}\\ z\ge\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}\right\}$.

解：由函数与域的对称性； $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)dv=\iiint\limits_{\Omega}z\,dv$

球坐标系： $I=\iiint\limits_{\Omega}z\,dv=\int_0^{\pi/4}d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 r\cos\theta\, r^2\sin\theta\, dr=\dfrac{\pi}{8}$；



柱坐标系： $I=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}/2}\rho\, d\rho\int_\rho^{\sqrt{1-\rho^2}}zdz=\dfrac{\pi}{8}$；

直角坐标系： $I=\int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2}dx\int_{-\sqrt{1/2-x^2}}^{\sqrt{1/2-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}}zdz=\dfrac{\pi}{8}$

先对 xy 积分： $$I=\int_0^1 dz\iint_{D(z)}dxdy=\int_1^{\sqrt{2}/2} z\pi z^2dz+\int_{\sqrt{2}/2}^1 z\cdot\pi\left(1-z^2\right)dz=\frac{\pi}{8}$$

5. 求由曲面 $S:(x^2+y^2)^2+z^4=z$ 所围立体 Ω 的体积。

解：记立体 Ω 的体积为 $|\Omega|$。由观察可知平面 $z=z\in[0,1]$ 截立体 Ω 所得的截面为圆盘 D_z 圆心位于 $(0,0,z)$，半径为 $r_z=(z-z^4)^{1/4}$，其面积为 $\pi(z-z^4)^{1/2}$。于是

$$|\Omega|=\iiint_\Omega dxdydz=\int_0^1 dz\iint_{D_z}dxdy=\int_0^1\pi(z-z^4)^{1/2}dz=\frac{2\pi}{3}\int_0^1(1-u^2)^{1/2}du=\frac{\pi^2}{6}\text{。}$$

6. 令曲面 S 在球坐标下方程为 $\rho=a(1+\cos\varphi)$，Ω 是 S 围成的有界区域，计算 Ω 在直角坐标系下的形心坐标。

解： Ω 的体积 $V=\iiint_\Omega dV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^\pi\sin\varphi d\varphi\int_0^{a(1+\cos\varphi)}\rho^2d\rho=\frac{8}{3}\pi a^3$，

Ω 关于 z=0 平面的静力矩

$$\mathrm{V}_{xy}=\iiint_\Omega z\mathrm{dV}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^\pi\cos\varphi\sin\varphi d\varphi\int_0^{a(1+\cos\varphi)}r^3dr=\frac{32}{15}\pi a^4,$$

Ω 的形心坐标为 $\bar{x}=\bar{y}=0,\bar{z}=\frac{4}{5}a$；

7. 求由六个平面 $3x-y-z=\pm1,-x+3y-z=\pm1,-x-y+3z=\pm1$ 所围立体的体积.

解：作线性变换 $u=3x-y-z$，$v=-x+3y-z$，$w=-x-y+3z$，则

$$\det\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\begin{vmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{vmatrix}=16,$$

$(x,y,z)\in V$ 与 $(u,v,w)\in U$ 一一对应, 其中 U 为 $|u|\le1,|v|\le1,|w|\le1$. 于是所求体积为

$$|V|=\iiint_V dxdydz=\iiint_U\left|\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|dudvdw=\frac{1}{16}|U|=\frac{1}{2}.$$

8. 设 $V=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le1\}$，$h=\sqrt{a^2+b^2+c^2}>0$，$f(u)$ 在区间 $[-h,h]$ 上

连续，证明：$\iiint\limits_V f(ax+by+cz)dxdydz=\pi\int_{-1}^{1}(1-t^2)f(ht)dt$。

证明： 作变量代换

$$\begin{aligned}u&=\frac{1}{h}(ax+by+cz)\\ v&=a_2x+b_2y+c_2z\\ w&=a_3x+b_3y+c_3z\end{aligned}$$

其中系数矩阵为正交矩阵。则 $\det\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\pm1,\ u^2+v^2+w^2=x^2+y^2+z^2.$ 于是

$$\iiint\limits_V f(ax+by+cz)dxdydz=\int_{-1}^{1}du\iint\limits_{D_u}f(hu)dvdw$$

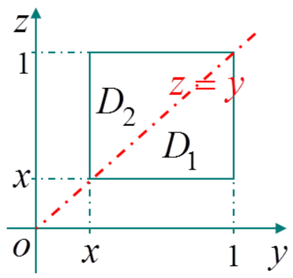
其中 $D_u=\left\{(v,w)\middle|v^2+w^2\le 1-u^2\right\}$。故

$$\iiint\limits_V f(ax+by+cz)dxdydz=\pi\int_{-1}^{1}(1-u^2)f(hu)du=\pi\int_{-1}^{1}(1-t^2)f(ht)dt.$$

9. 设 $f\in C([0,1])$, 证明: $\int_0^1dx\int_x^1dy\int_x^y f(x)f(y)f(z)dz=\frac{1}{6}\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^3$.

证明: $\forall x\in[0,1]$,

$$\begin{aligned}&\int_x^1dy\int_x^y f(y)f(z)dz=\iint_{D_1}f(y)f(z)dydz\\ &=\iint_{D_2}f(y)f(z)dydz=\frac{1}{2}\iint_{D_1\cup D_2}f(y)f(z)dydz\\ &=\frac{1}{2}\int_x^1dy\int_x^1 f(y)f(z)dz=\frac{1}{2}\left(\int_x^1 f(y)dy\right)^2.\end{aligned}$$



记 $F(x)=\int_x^1 f(y)dy$, 则 $F'(x)=-f(x)$. 于是

$$\begin{aligned}\int_0^1dx\int_x^1dy\int_x^y f(x)f(y)f(z)dz&=\int_0^1 f(x)dx\int_x^1dy\int_x^y f(y)f(z)dz\\ &=\int_0^1 f(x)\cdot\frac{1}{2}\left[\int_x^1 f(y)dy\right]^2dx=\frac{1}{2}\int_0^1-F'(x)F^2(x)dx\\ &=\frac{-1}{6}F^3(x)\Big|_0^1=\frac{1}{6}F^3(0)=\frac{1}{6}\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^3.\end{aligned}$$

10. 设$f \in C([a,b])$,证明:$\int_a^b dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \cdots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n)dx_n = \frac{1}{n!}\int_a^b (b-x)^n f(x)dx.$

证明: $n=2$时，由轮换不变性，有

$$\int_a^b dx_1 \int_a^{x_1} f(x_2)dx_2 = \int_a^b dx_1 \int_{x_1}^b f(x_1)dx_2 = \int_a^b (b-x_1) f(x_1)dx_1;$$

设$n=k$时，

$$\int_a^b dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \cdots \int_a^{x_{k-1}} f(x_k)dx_k = \frac{1}{k!}\int_a^b (b-x)^k f(x)dx,$$

则$n=k+1$时，有

$$\begin{aligned} &\int_a^b dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \cdots \int_a^{x_k} f(x_{k+1})dx_{k+1} \\ &= \frac{1}{k!}\int_a^b dx_1 \int_a^{x_1} (x_1-x)^k f(x)dx \qquad \text{(归纳假设)} \\ &= \frac{1}{k!}\int_a^b dx_1 \int_{x_1}^b (x-x_1)^k f(x_1)dx \qquad \text{(轮换不变性)} \\ &= \frac{1}{(k+1)!}\int_a^b (b-x_1)^{k+1} f(x_1)dx_1. \end{aligned}$$