第三次习题课　空间曲线与曲面

一、向量函数的微分和导数

1． 计算极坐标、柱坐标、球坐标变换的 Jacobi 矩阵和 Jacobi 行列式：

（1）平面极坐标变换 $\vec{\mathbf{f}}(r,\theta)=\begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$，也即$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$；

（2）空间柱坐标变换$\vec{\mathbf{f}}(r,\theta,z)=\begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ z \end{pmatrix}$，也即$\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \\ z=z \end{cases}$；

（3）空间球坐标变换$\vec{\mathbf{f}}(r,\varphi,\theta)=\begin{pmatrix} r\sin\varphi\cos\theta \\ r\sin\varphi\sin\theta \\ r\cos\varphi \end{pmatrix}$，也即$\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta \\ y=r\sin\varphi\sin\theta \\ z=r\cos\varphi \end{cases}$。

2. 计算向量复合函数的 Jacobi 矩阵：

（1）$\mathbf{f}(x,y)=(x,y,x^2y)$， $x=s+t$， $y=s^2-t^2$，在 $s=2,t=1$；

（2）$\mathbf{f}(x,y,z)=(x^2+y+z,2x+y+z^2,0)$， $x=uv^2w^2, y=w^2\sin v, z=u^2e^v$。

二、切平面，切线，法平面，法线

[例1] 求曲线$L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ x^2+y^2=2x \end{cases}$

在点$M_0(1,1,\sqrt{2})$处的切线和法平面方程

[例2] 设函数f可微, 求证：曲面 $S: z=yf(\frac{x}{y})$ 的

所有切平面相交于一个公共点。

[例3] 过直线 $10x+2y-2z=27,\quad x+y-z=0$作曲面

$3x^2+y^2-z^2=27$的切平面, 求其方程.

[例4] 求证满足微分方程 $y\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial u}{\partial y}=0$ 的$u(x,y)$为$u(x,y)=f(x^2-y^2)$，其中,f为任意一元可微函数.