

习题一.

1. (1) 证明: 假设存在建立图 $G(V, E)$ $V = \{v_1, \dots, v_9\}$ 表示九个工厂.
而 $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 表示工厂之间有业务联系.

可知 $\sum_{i=1}^9 d(v_i) = 27$. 这与性质 1.1.1 矛盾.
故假设不成立

1. (2) 证明: 假设存在建立图 $G(V, E)$ $V = \{v_1, \dots, v_9\}$ 表示九个工厂.
而 $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 表示工厂之间有业务联系.

假设仅有 4 个工厂与偶数个工厂有联系, 则其余 5 个工厂与奇数个工厂有联系.

则这与性质 1.1.2 矛盾.

故假设不成立

2. Def: 简单图. 任两结点间仅存在一条边且无自环的无向图

故假设 G 中存在孤立结点, 则 $m_{\max} = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$.

即 $m_{\max} \leq \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$

这与假设矛盾

故 G 中不存在孤立结点

3. Def: 完全图. 任意两节点间都有边的简单图.

在完全有向图中

$$d(v_i) = d^+(v_i) + d^-(v_i) = n-1 \quad \sum d(v_i) = \sum d^+(v_i) = \frac{1}{2}n(n-1)$$

$$\text{即 } d^+(v_1) + d^-(v_1) = \dots = d^+(v_n) + d^-(v_n) = n-1$$

$$\sum_{v_i \in V} (d^+(v_i))^2 = \sum_{v_i \in V} (n-1-d^-(v_i))^2 = n \cdot (n-1)^2 - 2(n-1) \cdot \sum_{v_i \in V} d^-(v_i) + \sum_{v_i \in V} d^-(v_i)^2$$

$$= n \cdot (n-1)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}n(n-1)(n-1) + \sum_{v_i \in V} d^-(v_i)^2$$

$$= \sum_{v_i \in V} d^-(v_i)^2$$

证毕

