赵晨阳 软01 2020012363 习题2.2 1~5

1. 可知 $f(x,a)=\sqrt{x^2+a^2}$ 在 $R\times R$ 上连续，故

$$\lim_{a\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+a^2}\,dx=\int_{-1}^{1}\lim_{a\to 0}\sqrt{x^2+a^2}\,dx=\int_{-1}^{1}|x|\,dx$$

$$=\int_{-1}^{0}-x\,dx+\int_{0}^{1}x\,dx=1$$

可知 $f(x,a)=x^2\cdot\cos ax$ 在 $R\times$ 上连续，故

$$\lim_{a\to 0}\int_0^3 x^2\cdot\cos ax\,dx=\int_0^3\lim_{a\to 0}x^2\cdot\cos ax\,dx$$

$$=\int_0^3 x^2dx=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^3=9$$

2. $f(x,y)=e^{-xy^2}$，$f_x'(x,y)=e^{-xy^2}(-y^2)$，可知 $f(x,y)$、$f_x'(x,y)$ 在 $R\times R$ 上均连续且 $\alpha(x)=x^2$，$\beta(x)=x$ 在 R 上均可微

故 $\dfrac{dF(x)}{dx}=\int_x^{x^2}e^{-xy^2}\cdot -y^2\cdot dy+e^{-x\cdot(x^2)^2}\cdot 2x-e^{-x\cdot x^2}=-\int_x^{x^2}e^{-xy^2}\cdot y^2dy+2x\cdot e^{-x^5}-e^{-x^3}$

(2) $a=b$ 时，$F(y)=0$，当 $a\neq b$ 时，

令 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin xy}{x} & (x\neq 0)\\ y & (x=0)\end{cases}$，则 $f_y'(x,y)=\cos xy$，$b+y$ 与 $a+y$ 在 R 上可微，$f(x,y)$ 与 $f_y'(x,y)$ 在定义域上连续

故 $F'(y)=\int_{a+y}^{b+y}\cos xy\,dx+\dfrac{\cos y(b+y)}{(b+y)}-\dfrac{\cos y(a+y)}{(a+y)}=\dfrac{1}{y}\int_{a+y}^{b+y}\cos xy\,dxy+\dfrac{\sin(y^2+by)}{b+y}-\dfrac{\sin(y^2+ay)}{a+y}$

$=\dfrac{1}{y}\sin xy\Big|_{a+y}^{b+y}+\dfrac{\sin(y^2+by)}{b+y}-\dfrac{\sin(y^2+ay)}{a+y}=\dfrac{\sin(y^2+by)-\sin(y^2+ay)}{y}+\dfrac{\sin(y^2+by)}{b+y}-\dfrac{\sin(y^2+ay)}{a+y}$

而函数 $F(y)$ 连续且 $F'(y)$ 在 $y=-a$ 与 $y=-b$ 处有极限，故 $F'(y)\big|_{y=-a}=\lim\limits_{y\to -a}F'(y)$，$F'(y)\big|_{y=-b}=\lim\limits_{y\to -b}F'(y)$

$\lim\limits_{y\to -a}F'(y)=\dfrac{\sin(a^2-ab)}{-a}+\dfrac{\sin(a^2-ab)}{b-a}+a$　　$\lim\limits_{y\to -b}F'(y)=\dfrac{\sin(b^2-ab)}{b}-b-\dfrac{\sin(b^2-ab)}{a-b}$

综上所述，$a=b$ 时，$F'(y)=0$；$a\neq b$ 时，$F'(y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(y^2+by)-\sin(y^2+ay)}{y}+\dfrac{\sin(y^2+by)}{b+y}-\dfrac{\sin(y^2+ay)}{a+y} & (y\neq -a \text{ 且 } y\neq -b)\\ \dfrac{\sin(a^2-ab)}{-a}+\dfrac{\sin(a^2-ab)}{b-a}+a & (y=-a)\\ \dfrac{\sin(b^2-ab)}{b}-b-\dfrac{\sin(b^2-ab)}{a-b} & (y=-b)\end{cases}$

(3) 可知 $f(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+tx)}{x} & (x\neq 0)\\ t & (x=0)\end{cases}$　$f_t'(x,t)=\dfrac{1}{1+tx}$，$f(x,t)$ 与 $f'(x,t)$ 在定义域上连续，0与 t 在 R 上可微

$\therefore F'(t)=\int_0^t f_t'(x,t)\,dx+f(t,t)=\int_0^t\dfrac{1}{1+tx}dx+\dfrac{\ln(1+t^2)}{t}=\dfrac{1}{t}\cdot\ln(1+tx)\Big|_0^t+\dfrac{\ln(t^2+1)}{t}=2\dfrac{\ln(t^2+1)}{t}\ (t\neq 0)$

而 $F(t)$ 连续且 $f_t'(x,t)$ 在 $t=0$ 处有极限，$\therefore F'(0)=\lim\limits_{t\to 0}F'(t)=0$

$\therefore$

$$F'(t)=\begin{cases}2\cdot\dfrac{\ln(t^2+1)}{t} & (t\neq 0)\\ 0 & (t=0)\end{cases}$$

(4) $\dfrac{\partial f(x+t,x-t)}{\partial t}=f_1'(x+t,x-t)-f_2'(x+t,x-t)$　可知 $f(x+t,x-t)$，$\dfrac{\partial f(x+t,x-t)}{\partial t}$ 在定义域上连续且 t 与 0 在 R 上可微，故

$$F'(t)=\int_0^t\left(f_1'(x+t,x-t)-f_2'(x+t,x-t)\right)dx+f(2t,0)$$

3. 可知 $g(x,y)=(x+y)f(y)$ 与 $g'_x(x,y)=f(y)$ 均在定义域内连续.

$\therefore F'(x)=\int_0^x f(y)dy+2x\cdot f(x)$

$F''(x)=\int_0^x 0dy+f(x)\cdot\frac{dx}{dx}+2x\cdot f'(x)+f(x)\cdot 2$

$F''(x)=3f(x)+2x\cdot f'(x)$

4. 由题设函数连续性可知:

$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}\cdot(\varphi'(x+at)\cdot a-\varphi'(x-at)\cdot a)+\frac{1}{2a}(\psi(x+at)\cdot a-\psi(x-at)\cdot(-a))$

$=\frac{a}{2}\cdot(\varphi'(x+at)-\varphi'(x-at))+\frac{1}{2}(\psi(x+at)+\psi(x-at))$

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{a^2}{2}(\varphi''(x+at)+\varphi''(x+at))+\frac{a}{2}(\psi'(x+at)-\psi'(x-at))$

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2}(\varphi'(x+at)+\varphi'(x-at))+\frac{1}{2a}(\psi(x+at)-\psi(x-at))$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{2}(\varphi''(x+at)+\varphi''(x-at))+\frac{1}{2a}(\psi'(x+at)-\psi'(x-at))$

$\therefore \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=(\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{2})\cdot(\varphi''(x+at)+\varphi''(x+at))+(\frac{a}{2}-\frac{a^2}{2a})(\psi'(x+at)-\psi'(x-at))=0$

故 $u(x)$ 为 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 的解

5. $\int_0^1\frac{dy}{1+x^2y^2}\overset{xy=t}{=\!=}\frac{1}{x}\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\arctan x}{x}$ 故

$\int_0^1\frac{\arctan x}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^1\left(\int_0^1\frac{1}{1+x^2y^2}dy\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^1 dx\int_0^1\frac{1}{1+x^2y^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dy=\lim_{t\to1^-}\int_0^t dx\int_0^1\frac{1}{1+x^2y^2}\cdot\frac{dy}{\sqrt{1-x^2}}$

$\frac{1}{1+x^2y^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 在 $[0,t]\times[0,1]$ 上连续.故原式 $=\int_0^1 dy\int_0^1\frac{1}{1+x^2y^2}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$\overset{x=\sin t}{=\!=}\int_0^1 dy\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{1+y^2\sin^2 t}=\int_0^1 dy\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{(y^2+1)\sin^2 t+\cos^2 t}dt$

$=\lim_{b\to\frac{\pi}{2}^-}\int_0^1 dy\int_0^b\frac{\sec^2 t}{(y^2+1)\tan^2 t+1}dt=\lim_{b\to\frac{\pi}{2}}\int_0^1 dy\int_0^b\frac{d\tan t}{(y^2+1)\tan^2 t+1}=\lim_{b\to+\infty}\int_0^1\int_0^b\frac{dm}{(y^2+1)m^2+1}=\lim_{b\to+\infty}\int_0^1 dy\frac{1}{\sqrt{y^2+1}}\arctan(\sqrt{y^2+1}\,m)\Big|_0^b$

$=\int_0^1\frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{y^2+1}}dy=\frac{\pi}{2}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{y^2+1}}dy=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\tan t}{\sqrt{\tan^2 t+1}}=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec t\cdot dt=\frac{\pi}{2}\ln|\sec t+\tan t|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2}\ln(\sqrt{2}+1)$

$\ln x$ 行为与 $\sin x$ 有界　　　　这个连续不是交换律要求的连续而是可积性,可去瑕点

5.(2): 设 $g(x)=\frac{x^b-x^a}{\ln x}\cdot\sin(\ln\frac{1}{x})$. 则 $\lim_{x\to0^+}g(x)=0$　$\lim_{x\to1^-}g(x)=0$　令 $g(0)=g(1)=0$, 则 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续

故 $\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1\int_a^b x^y dy\,\sin(\ln\frac{1}{x})dx$ 令 $x^y\cdot\sin(\ln\frac{1}{x})=f(x,y)$. 则 $\lim_{x\to0^+}f(x,y)=0$. 设 $f(0,y)=0$, 则

$f(x,y)$ 在 $[0,1]\times[a,b]$ 上连续 $\int_0^1 g(x)dx=\int_a^b\int_0^1 x^y\cdot\sin(\ln\frac{1}{x})dxdy$ 设 $\ln\frac{1}{x}=u$ 则 $x=e^{-u}$

$\int_0^1 g(x)dx=\lim_{c\to+\infty}\int_a^b\int_0^c e^{-u(y+1)}\sin u\,du\,dy$　　$I=\int_0^{+\infty}e^{-u(y+1)}\sin u\,du=-\frac{1}{y+1}\int_0^{+\infty}\sin u\,de^{-u(y+1)}$

$=-\frac{1}{y+1}\left(\sin u\cdot e^{-u(y+1)}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-u(y+1)}\cos u\,du\right)=\frac{1}{y+1}\cdot\int_0^{+\infty}e^{-u(y+1)}\cos u\,du=\frac{J}{y+1}$

$J=\int_0^{+\infty}e^{-u(y+1)}\cos u\,du=-\frac{1}{y+1}\int_0^{+\infty}\cos u\,de^{-u(y+1)}=-\frac{1}{y+1}\left(\cos u\cdot e^{-u(y+1)}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-u(y+1)}\sin u\,du\right)$

$=-\frac{1}{y+1}(I-1)$ 即 $I=\frac{1-I}{(y+1)^2}\Rightarrow I=\frac{1}{(y+1)^2+1}$

$\int_a^b\frac{dy}{(y+1)^2+1}=\arctan(y+1)\Big|_a^b=\arctan(b+1)-\arctan(a+1)$

2.1.4奇.

(1) $\int_1^{+\infty} x^s\cdot e^{-x}dx$. $[a\le s\le b]$ 设 $c=\max\{|a|,|b|\}$. 则 $x^s\le x^c$

故 $|f(s,x)|=|x^s\cdot e^{-x}|\le g(x)=x^c\cdot e^{-x}$

又 $\int_1^{+\infty}\frac{x^c}{e^x}dx$ 收敛. 故 $\int_1^{+\infty} f(s,x)\,dx$ 关于t一致收敛

(3) $t\in[t_0,+\infty)$时. $e^{-tx^2}\le e^{-t_0x^2}$ 而 $|g(t,x)|=|x^{2n}\cdot e^{-tx^2}|\le f(x)=\frac{x^{2n}}{e^{t_0x^2}}$

且 $\int_0^{+\infty}\frac{x^{2n}}{e^{t_0x^2}}dx$ 收敛 ($f(0)=0$, 故0不为 $f(x)$瑕点)

∴ $\int_0^{+\infty}x^{2n}e^{-tx^2}dx$ 关于t一致收敛

(5) $\int_{-\infty}^{0}\frac{x^2\cos tx}{1+x^4}dx+\int_0^{+\infty}\frac{x^2\cos tx}{1+x^4}dx$

可知对于 $\forall t$, $\left|\frac{x^2\cos tx}{1+x^4}\right|\le\frac{x^2}{1+x^4}=f(x)$ 且 $\int_0^{+\infty}f(x)=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^{+\infty}f(x)dx$. $\int_0^1 f(x)dx$无瑕点.

$\int_1^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx$与$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$同敛散, 而后者收敛, 故前者收敛 故 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$收敛.

故$\int_0^{+\infty}\frac{x^2\cos tx}{1+x^4}dx$收敛.

同理. $\int_{-\infty}^{0}f(x)dx=\int_{-\infty}^{-1}f(x)dx+\int_{-1}^{0}f(x)dx$ $\int_{-1}^{0}f(x)dx$无瑕点

$\int_{-\infty}^{-1}\frac{x^2}{1+x^4}dx$与$\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{x^2}dx$同敛散, 而后者收敛, 故前者收敛 故 $\int_{-\infty}^{0}f(x)dx$收敛.

实际上 $f(x)$为偶函数, 这个收敛显然

故$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2\cos t}{1+x^4}dx$ 关于t一致收敛

(7) $f(t,x)=\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$ 对$\int_1^{+\infty}f(t,x)dx$而言. $\int_0^A\cos x\,dx$ 对 $\forall A>0$均有界. 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$ 且 $\frac{1}{\sqrt{x}}$关于x单调递减. 故 $\int_1^{+\infty}f(t,x)dx$ 收敛且关于t一致收敛

又 $g(x,t)=e^{-tx}$ 关于x单调递减且关于t一致有界.

∴ $\int_1^{+\infty}e^{-tx}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$关于t一致收敛 (Abel)

(9) 取$y=\frac{1}{2}$. 则 $x^{1-y}=\sqrt{x}$. 关于x单调递增且无界. $\int_0^{+\infty}\sqrt{x}\,dx$不收敛

故 $\int_1^{+\infty}x^{1-y}dx$ 关于y不一致收敛

用δ-ε语言则:

$\exists\varepsilon=1$, $\forall M$, $\exists A=M$. $B=M+1$. $y=1$

$\int_A^B x^{1-y}dx=\int_M^{M+1}dx=1>0$. 则 $\int_1^{+\infty}x^{1-y}dx$ 关于y不一致收敛