第一次作业

1

证明:

以工厂为点，有业务联系关系为边，建立无向图。若每个点都与其它 3 个边相连，则图的总度数将为 27，与图的总度数为偶数矛盾；若仅有 4 个点的度数为偶数，则剩余 5 个点的度数均为奇数，那么图的总度数也将为奇数，与图的总度数为偶数矛盾。

2

证明：

用反证法，假设存在一个孤立节点，则根据简单图的定义，刨去这个孤立节点后的图仍然是简单图。而对节点数为 n-1 的简单图存在不等式：

$$m \le \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

而题目中的条件为：$m > \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$

矛盾，所以假设不成立，G 中不存在孤立节点。

3

证明：

在有向完全图中，任意一个结点的总度数 $d^+(v_i) + d^-(v_i) = n-1$

所以，

$$\begin{aligned}
&\sum_{v_i \in V}(d^+(v_i))^2 - \sum_{v_i \in V}(d^-(v_i))^2 = \sum_{v_i \in V}(d^+(v_i) + d^-(v_i))(d^+(v_i) - d^-(v_i)) \\
&= \sum_{v_i \in V}(n-1)(d^+(v_i) - d^-(v_i)) = (n-1)\sum_{v_i \in V}(d^+(v_i) - d^-(v_i)) \\
&= (n-1)(\sum_{v_i \in V} d^+(v_i) - \sum_{v_i \in V} d^-(v_i)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

所以，等式两边相等。

证毕。

第二次作业

1

答：a 图的出度序列是 22a，11a，22b，03，11b，30；b 图的序列是 11c，22c，22d，11d，03，30，两图可能同构，但是还需要看具体能否找到映射。为了利用上面的信息，这里把节点的名字改写（实际上上面已经是改写后的节点名称了）。然后我们对左图写出每个节点的出边的入射点，如果我们存在一个映射使得这种列表是同构的，那么原图就同构。列表如下，注意左图是按照原始的节点顺序，右图不是，而是为了方便找到映射，改变了节点在列表中

的顺序。

左图	右图
22a->11a、03	22c->11c, 03
11a->11b	11c->11d
22b->22a, 03	22d->22c, 03
03	03
11b->22b	11d->22d
30->22a, 22b, 03	30->22c, 22d, 03

比较显然的是，存在这样的映射，对应到原图这个映射是（1，b），（2，a），（3，c），（4，e），（5，d），（6，f）。

2

2.1 邻接矩阵

0	1	0	1	0	0
0	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
1	0	1	1	0	0

2.2 关联矩阵

为了写出关联矩阵，我们需要对边进行排序，排序要有个规则，规则是首先按照节点顺序，对于同一个节点，按照顺时针的方向排序，这样比较有规律，需要说明的是，课本上貌似是按照节点顺序的，但是对于同一个节点，其排边的顺序不是很统一。

1	-1	1	-1	0	0	0	0	0
-1	0	0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	-1	-1	0
0	0	-1	0	0	-1	0	0	-1
0	0	0	0	-1	0	1	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1	1

2.3 边列表

1	3	1	6	2	3	5	6	6
2	1	4	1	5	4	3	3	4

2.4 正向表

1	3	4	6	6	7	10	null	null
2	4	5	1	4	3	1	3	4

3

证明：若 G 为非连通图，设 G 有 k 个连通分支，则 G 中某连通支内任意点与其余（k-1）各连通支的点无连线，那么在 $\overline{G}$ 中这个点与其余（k-1）个连通支的点都有连线。

所以，不同连通支中的任意两个点之间在 $\overline{G}$ 中都有连线。

在 G 中位于同一连通支内的任两点，在 $\overline{G}$ 中可以通过与其余（k-1）个连通支的某一点相连而形成通路。

所以，$\overline{G}$ 为连通图。

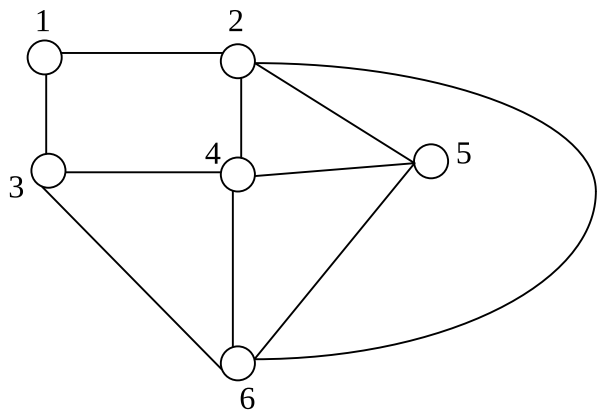
同理，若 $\overline{G}$ 非连通，则 G 连通。

证毕。

4
证明思路：
设 L1，L2 是连通图 G 的两条最长路，且 L1，L2 无公共结点。设 L1，L2 的长度（边数）为 p。
由于 G 是连通的，故 L1 上必有一结点 V1 与 L2 上一结点 V2 有道路 L’相通。
结点 V1 将 L1 分为两部分，其中一部分的长度≥p/2，记此部分道路为 L3。同样，结点 V2 将 L2 分为两部分，其中一部分 L4 的长度≥p/2。且 L’除 V1 和 V2 外不与 L1 或 L2 有交集。
这样，L3+L’+L4 就是 G 的一条新的道路，且其长度大于 p，这与 G 的最长路(L1)的长度是 p 的假设矛盾。

第三次作业

1
解: 将所有的状态(x,y,8-x-y),x=0,1,2,3,4,5,y=0,1,2,3 枚举出来，每个状态都作为图 G 中的结点，如果从一个结点通过一次倒水操作达到另一个结点，则在它们之间连接一条无向边。目标则变为寻找一条从结点(8,0,0)到结点(4,4,0)的道路，可以使用 BFS、DFS 等技术找到这条道路。这里给出其中一条正确道路（不唯一）：
(8,0,0)→(3,5,0)→(3,2,3)→(6,2,0)→(6,0,2)→(1,5,2)→(1,4,3)→(4,4,0)
2 当 m 和 n 为何值时，二分图 Km,n 欧拉图？
解： 当 m 和 n 均为偶数时，Km,n 为欧拉图
3
解： 将 5 个房间和房间外区域看成是 6 个节点，两个房间之间有门则用边连接。该问题被转化为图中是否存在一条欧拉道路。
经过转换的图：



在上图中，只有节点 3 和 5 的度为奇数，所以，存在一条路过各门一次。

第四次作业

1

证明：假设存在两结点v_i, v_j，使得$d(v_i)+d(v_j)<n$，由于与任两点连结的边最多有$n-1+n-2=2n-3$条，又$d(v_i)+d(v_j)\le n-1$，至多有 n-1 条边与这两点相连，故至少有$2n-3-(n-1)=n-2$条边不与这两点相连。所以$m\le C_n^2-(n-2)=\frac{1}{2}(n-1)n-(n-2)=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1$，而$m>\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2$，矛盾。故$\forall v_1, v_2, d(v_1)+d(v_2)\ge n$，故存在H回路。

2

解：不可以。将这 27 个小立方体分成四类：角点（称作 C1，共 8 个）、面中心点（称作 C2，共 6 个）、边中心点（称作 C3，共 12 个）、体中心点（称作 C4，共 1 个）。将每个小立方体看作无向图的结点，如果能从一个小立方体通过一步转移至另一个小立方体，则将它们之间连接上无向边，这就建立起了图 G。经过观察发现，边只有可能在(C1,C3)、(C3,C2)、(C2,C4)结点间建立，所以图 G 是一个二分图（C1C2 一组，C3C4 一组）。所以从 C1 出发遍历所有结点最终停止于 C4 中的结点无论如何都是不可能的，因为$|C1|+|C2|\ne|C3|+|C4|$。

3

解：

将边按权值由小到大排列

R_{ij}:	e_{23}	e_{35}	e_{15}	e_{13}	e_{34}	e_{45}	e_{24}	e_{12}	e_{25}	e_{14}
l_{ij}:	26	27	29	33	34	35	38	42	49	52

取出前 5 条边：

$$d(1)=d(e_{23}\quad,e_{35}\quad,e_{15}\quad,e_{13}\quad,e_{34})$$

由于$e_{23}\quad,e_{35}\quad,e_{15}\quad,e_{13}$中结点 3 出现了 3 次，所以

$d(e_{23}\quad,e_{35}\quad,e_{15}\quad,e_{13}\quad,*)$均不满足要求

同样，将e_{13}改为e_{34}后

$d(2)=d(e_{23}\quad,e_{35}\quad,e_{15}\quad,e_{34}\quad,*)$均不满足要求

将e_{34}改为e_{45}后

$d(3)=d(e_{23}\quad,e_{35}\quad,e_{15}\quad,e_{45}\quad,*)$均不满足要求

将e_{45}改为e_{24}后

$d(4) = d(e_{23}\quad, e_{35}\quad, e_{15}\quad, e_{24}\quad, e_{12})$不满足要求

$d(5) = d(e_{23}\quad, e_{35}\quad, e_{15}\quad, e_{24}\quad, e_{25})$不满足要求

将e_{25}改为e_{14}后

$d(6) = d(e_{23}\quad, e_{35}\quad, e_{15}\quad, e_{24}\quad, e_{14}) = 172*$

但同时

$d(7) = d(e_{23}\quad, e_{35}\quad, e_{13}\quad, *\quad, *)$和

$d(8) = d(e_{23}\quad, e_{35}\quad, e_{34}\quad, *\quad, *)$均不满足要求

而

$d(9) = d(e_{23}\quad, e_{35}\quad, e_{45}\quad, e_{24}\quad, e_{12})$不满足要求

且

$d(e_{23}\quad, e_{35}\quad, e_{45}\quad, e_{24}\quad, e_{25}) > 172$不满足要求

将e_{35}改为e_{15}后

$d(10) = d(e_{23}\quad, e_{15}\quad, e_{13}\quad, e_{34}\quad, *)$均不满足要求

将e_{34}改为e_{45}后

$d(11) = d(e_{23}\quad, e_{15}\quad, e_{13}\quad, e_{45}\quad, e_{24}) = 161*$

将e_{15}改为e_{13}后

$d(12) = d(e_{23}\quad, e_{13}\quad, e_{34}\quad, *\quad, *)$不满足要求

且

$d(e_{23}\quad, e_{13}\quad, *\quad, *\quad, *) > d(11)$

$d(e_{35}\quad, e_{15}\quad, *\quad, *\quad, *) > d(11)$

因此，G 的旅行商问题解的最短路径为$(e_{23}\quad, e_{15}\quad, e_{13}\quad, e_{45}\quad, e_{24})$

切最短路径长度为 161

4

解：即判断是否具有欧拉道/回路。将棋盘抽象成有向图 G，每个网格抽象为结点而能通过一次跳动到达的结点则连接有向边。所以图 G 是连通的，且其中每个结点的出入度相等，所以图 G 存在欧拉回路。

第五次作业

1

解：

设结点为$v_1(0,\ 0)\ \ v_2(2,\ 5)\ \ v_3(9,\ 3)\ \ v_4(8,\ 9)\ \ v_5(6,\ 6)$

利用分支与界法，将边权由小到大进行排列

$\mathrm{R_{ij}}$:	e_{25}	e_{45}	e_{35}	e_{12}	e_{34}	e_{23}	e_{24}	e_{13}	e_{15}	e_{14}
$\mathrm{l_{ij}}$:	5	5	6	7	7	9	10	12	12	17

采用 DFS 与分支判断如下：

$d(1) = d(e_{25}\quad, e_{45}\quad, e_{35}\quad, *\quad, *)$　　不满足要求

$d(2) = d(e_{25}\quad, e_{45}\quad, e_{12}\quad, e_{34}\quad, e_{23})$不满足要求

$d(3) = d(e_{25}\quad, e_{45}\quad, e_{12}\quad, e_{34}\quad, e_{24})$不满足要求

$d(4) = d(e_{25}\quad, e_{45}\quad, e_{12}\quad, e_{34}\quad, e_{13}) = 36*$

$d(5) = d(e_{25}\quad, e_{45}\quad, e_{34}\quad, e_{23}\quad, e_{24})$不满足要求

$d(6) = d(e_{25}\quad, e_{45}\quad, e_{34}\quad, e_{23}\quad, *) > d_{min}$不满足要求

$d(7) = d(e_{25}\quad, e_{45}\quad, *\quad, *\quad, *) > d_{min}$不满足要求

同理，$d(8)$，$d(9)$，$d(10)$，$d(11)$均不满足要求

$d(11) = d(e_{45}\quad, e_{35}\quad, e_{12}\quad, e_{34}\quad, e_{15}) = 42 *> d_{min}$

而$d(12)$，$d(13)$，$d(14)$，$d(15)$，$d(16)$，$d(17)$也均不满足回路

$d(18) = d(e_{25}\quad, e_{35}\quad, e_{34}\quad, e_{24}\quad, e_{15}) = 40 *> d_{min}$

同样$d(19)$，$d(20)$不符合要求

由于接下来的$d_{min} = \ d(e_{25}\quad, e_{45}\quad, e_{12}\quad, e_{34}\quad, e_{13})$而之后的均大于$d_{min}$

所以最短的路线为$(0, 0) \to (2, 5) \to (6, 6) \to (8, 9) \to (9, 3) \to (0, 0)$

最短路线长度为 36

2

解：

以第 i 年为节点，第 i 年购入设备用至第 j 年所需的花费作为节点 i 到节点 j 的单向边的权值，则原问题转化为求第 0 年至第 5 年对应节点间的最短路径。

采用 Dijkstra 算法，可以求得最短路径为 $0 \to 2 \to 5$，开销为 20。

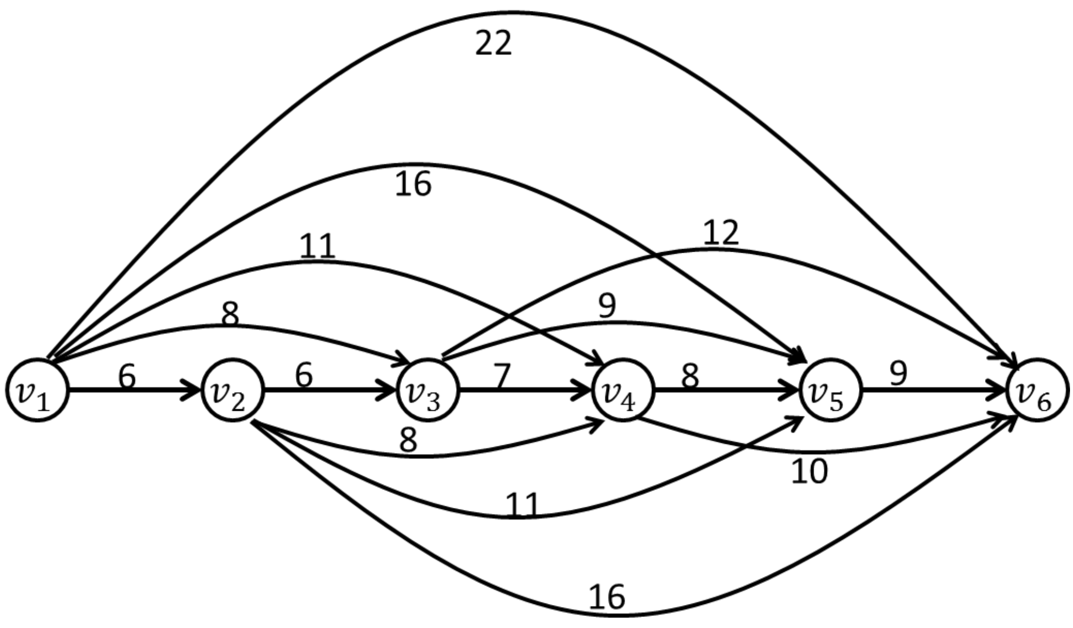
设 b_i 表示设备在第 i 年年初的购买费,c_i 表示设备使用 i 年后的维修费, $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_6\}$,点 v_i 表示第 i 年年初购进一台新设备,虚设一个点 v_6 表示第 5 年年底. $E=\{v_iv_j \mid 1\leq i < j\leq 6\}$.

$$F(v_iv_j) = b_i + \sum_{k=1}^{j-i} c_k$$

这样上述设备更新问题就变为:

图论模型

在有向赋权图 $G = (V, E, F)$(图解如下)中求 v_1 到 v_6 的最短路问题.



由 dijkstra，迭代更新到 v1 的最近距离

（下表灰色表示到v_1最短距离已确定，红色表示当前到v_1的最短距离 或 到v_1的距离发生改变）

顶点	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	
长度≤1	0	6	8	11	16	22	确定 d(v_2)=6，前驱为v_1

长度≤2	0	6	8	11	16	20	确定 d(v_3)=8，前驱为v_1；v_6前驱变为v_3
长度≤3	0	6	8	11	16	20	确定 d(v_4)=11，前驱为v_1
长度≤4	0	6	8	11	16	20	确定 d(v_5)=16，前驱为v_1
长度≤5	0	6	8	11	16	20	确定 d(v_6)=20，前驱为v_3

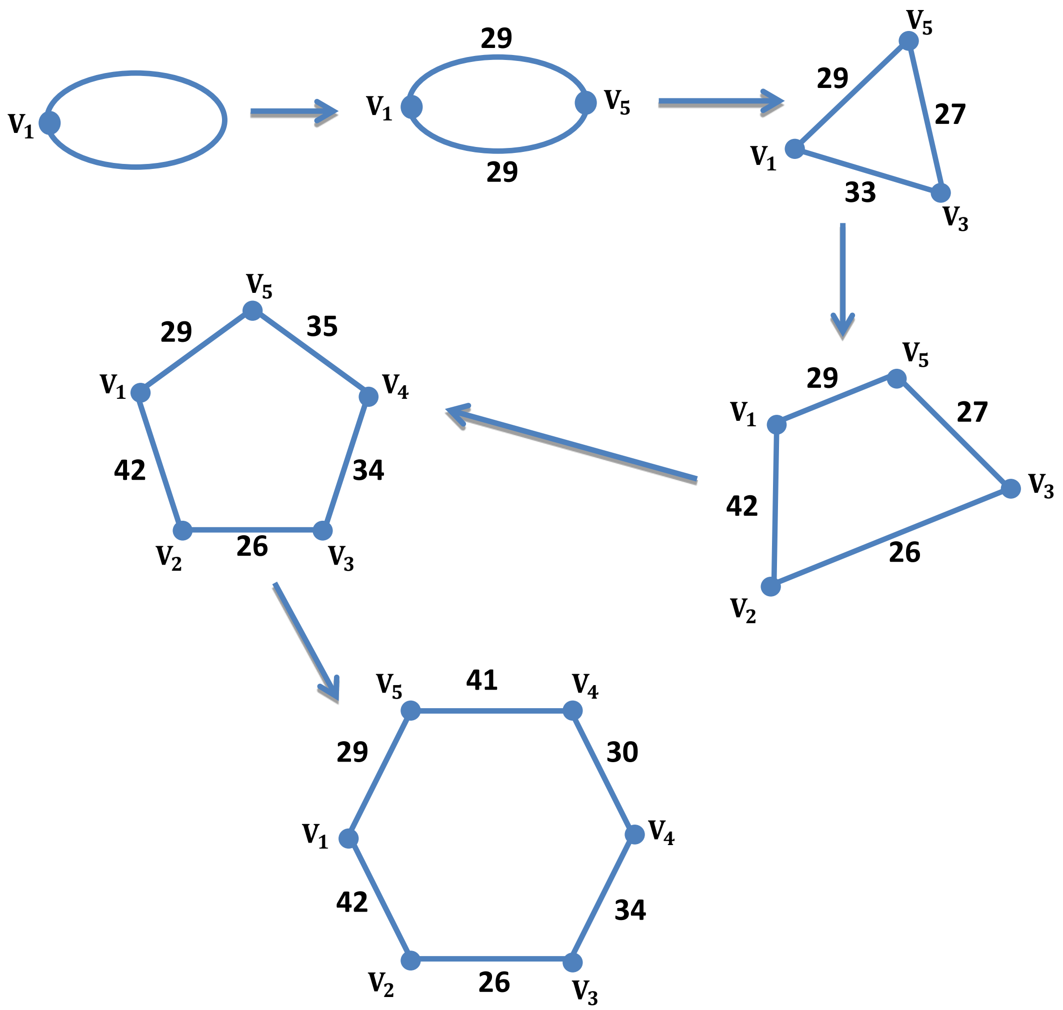
故可以得到 v_1 到 v_6 的最短路为：$v_1v_3v_6$.

第六次作业

P37.17

关键路径：1 → 3 → 2 → 5 → 9 → 11

3，5，10 的允许延误时间为：0，0，5



第七次作业

P66.1

解： 图中顶点总数n $= n_1 + n_2 + \cdots + n_k$

边数 m = n-1

由握手定理 $2m = n_1 + 2n_2 + \cdots + kn_k$

所以，$2(n_1 + n_2 + \cdots + n_k - 1) = n_1 + 2n_2 + \cdots + kn_k$

所以， $n_1 = n_3 + 2n_4 + \cdots + (k-2)n_k + 2$

P66.4

解：

（a） 树的数目= $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ = 101

（b） 树的数目= $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}$ = 44

（c） 树的数目= $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ = 60

（d） 9

P67.5

解：

（e） 树的数目= $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ = 24

（f） 树的数目= $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ = 8

（g） 树的数目= $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ = 9

P67.8

基本关联矩阵

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 & & & & & & \\ & & & & \cdots & & & & \\ & & & & & & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & & & & & & 1 & & \\ & \ddots & & & \cdots & & & \ddots & \\ & & 1 & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

前 m-1 行形如$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$，后 n 行形如$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}$。

$$\det(\mathbf{BB}^{T})=\begin{vmatrix} \boldsymbol{n} & & & & & \\ & \ddots & & & -\mathbf{1} & \\ & & \boldsymbol{n} & & & \\ & & & \boldsymbol{m} & & \\ & -\mathbf{1} & & & \ddots & \\ & & & & & \boldsymbol{m} \end{vmatrix}$$

$\begin{matrix} \boldsymbol{n} & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{n} \end{matrix}$ 有 m-1 行，$\begin{matrix} \boldsymbol{m} & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{m} \end{matrix}$ 有 n 行。

将行列式除最后一列外的列全部加到最后一列，再将最后一列加回前 m-1 列可得

$$\det(\mathbf{BB}^{T})=\begin{vmatrix} \boldsymbol{n} & & & & -\mathbf{1} & \cdots & -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ & \ddots & & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & \boldsymbol{n} & -\mathbf{1} & \cdots & -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ & & & & \boldsymbol{m} & & & \mathbf{1} \\ & \mathbf{0} & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & & \boldsymbol{m} & \vdots \\ & & & & & & & \mathbf{1} \end{vmatrix}$$

此时矩阵变换为三角矩阵，行列式为对角线元素的积，故$\det(\mathbf{BB}^{T})=\ \boldsymbol{m}^{\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{m}-\mathbf{1}}$。

P67.10

（1） 基本回路矩阵 =

1	0	-1	-1	0	1	1	0
0	1	0	0	0	-1	-1	0
0	0	-1	-1	1	0	1	0
0	0	1	0	0	0	-1	1
E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8

1	0	0	0		-1	-1	1	1
0	1	0	0		0	0	-1	-1
0	0	1	0		-1	-1	0	1
0	0	0	1		1	0	0	-1
E1	E2	E5	E8		E3	E4	E6	E7

第八次作业

P67.10

（2）　基本割集矩阵 =

0	1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	1	0	0	0
-1	0	-1	0	0	1	-1	0
0	0	-1	1	0	0	0	1
E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8

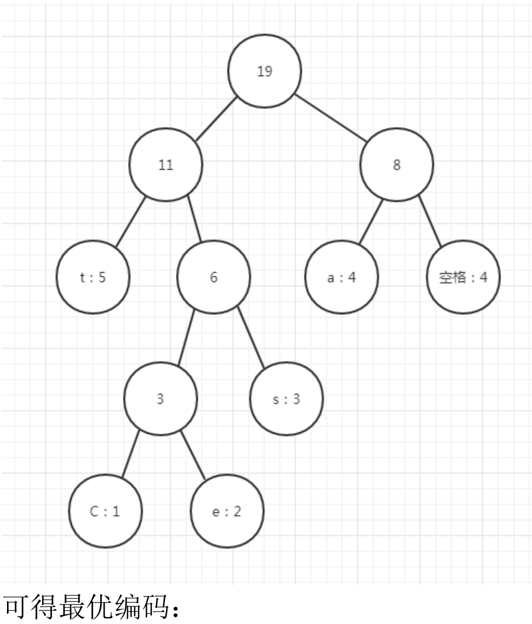
1	0	0	0		0	1	0	1
0	1	0	0		1	0	1	0
0	0	1	0		0	-1	-1	-1
0	0	0	1		1	0	0	-1
E2	E5	E6	E8		E4	E7	E1	E3

P67.14

统计字符串中各字母出现频率：

s:3、t:4、a:5、e:2、c:1、空格:4

可构造哈夫曼树：



可得最优编码：

t：00、a：10、空格：11、s：011、c：0100、e：0101

P67.16

G 的最短树 $T=\{(v_1,v_8),(v_8,v_7),(v_7,v_6),(v_8,v_4),(v_4,v_3),(v_2,v_4),(v_7,v_5)\}$

或$\{(v_1, v_8), (v_8, v_7), (v_7, v_6), (v_1, v_4), (v_4, v_3), (v_2, v_4), (v_7, v_5)\}$
总长为22

第九次作业

P87.3

证明：假设 G 和 G 补均为平面图，G 中边数为 m1，G 补中边数为 m2

因为是简单图，所以有：

$m_1 <= 3n - 6$

$m_2 <= 3n - 6$

所以，$m_1 + m_2 <= 6n - 12$

所以，$n(n-1) <= 12n - 24$

求出，$n <= 10.77$　与 $n > 10$ 矛盾

所以，原命题成立。

P87.7

证明：如果存在这样的平面图，那么它有对偶图，并且对偶图的顶点间两两都有边相连，即 K5 子图。因为 K5 图不是平面图，与对偶图是平面图矛盾。

或利用性质 3：极大平面图每个面的次数均为 3。

第十次作业

P88.9

证明：反证法。

设 G 的域可二着色，则其对偶图 G*的顶点可二着色。

所以，G*为二分图。

因为，G 的域的边界数除一个外均可被 d 整除，对应的，设 G*的顶点数为 n，度数为 d1，d2……，dn。

令 dn 为特例，即 d1，d2……，dn-1 均可被 d 整除。

G*为二分图，设结点分为 I，II 两部分，顶点 vn 属于 I。

有 d（I）= d（II），由于等式两边，d（I）不可被 d 整除， d（II）可被 d 整除

所以，矛盾。等式不成立。

所以假设成立。

P88.11

证明：反证法。

15 个结点的极大平面图应有 3*15-6 = 39 条边

而图 G 共有（8*4+6*6+8*1）/2 = 38 条边。

所以，G 为 n=15 的某个极大平面图去掉一条边构成

且，G 的域的边界数除一个为 4 外均为 3，即均可被 3 整除，

根据 P88.9 题结论，G 不可域 2 着色。

而 G 中的结点度数均为偶数，存在欧拉回路，故可域 2 着色。矛盾。

所以，G 为非平面图。

P88.13

3

t(t-1)(t-2)^3

第十一次作业

13 讲

P114.3

方法 1：

证明：假设树 T 中存在两个完美匹配M_1, M_2

取$G' = G'[M_1 \oplus M_2]$。

若M_1, M_2为不同的两个匹配，则G'中有边。

对$M_1 \cap M_2$中所有边的端点，其在G'中度为0。

对$M_1 \oplus M_2$中所有边的端点，其在G'中度为2。

∵若G'中存在边，G'中必存在回路。

∵ $G' \subseteq T$，∴ T中存在回路。

与T为树矛盾，假设不成立。

∴ $2n$节点的树中最多存在一个完美匹配。

方法 2：

证明：若树存在完美匹配，一定包含每个叶子结点与它的父节点之间的边。将这样的边取出放在匹配中，然后在原图中删除它们关联的边。对剩下的图继续用这种方法构造匹配。因为每一步操作都是唯一的，因此构造出的完美匹配是唯一的。

P114.7

解：能找到。

证明如下：

1）当$k = 1$时，$A = P_1$，结论成立。

2）假设小于等于k时，结论均成立。

现考虑$k + 1$的情况。

假设A为$m \times n$矩阵，**依题意有** m≤n，以点集X中的点表示A的行，以点集Y中的点表示A的列。X, Y之间有边(x_i, y_j)表示$A_{ij} = 1$，

则对二分图$G(X, Y, E)$，有$|X| = m, |Y| = n$

且$d(x_i) = k + 1, d(y_j) \le k + 1 (x_i \in X, y_j \in Y)$。

∴ G中存在X到Y的完全匹配M。

假设Y中有p个顶点满足$d(y_j) = k + 1$。

若这p个点均为$M-$饱和点，则不做任何操作。

若这p个点中存在y_j为$M-$非饱和点，则总能找到一条从y_j开始的偶数边的交互道路P，作$M \leftarrow M \oplus P$，M仍为完全匹配。

∵ $p \le m$（若$p > m$，则A中1的个数$> m(k + 1)$，但A中只有$m(k + 1)$个1，矛盾）

∴考虑Y中这p个顶点与X的所有顶点构成的二分图$G'(X, Y', E')$。

由于$d(y_j) = k + 1 (y_j \in Y')$，$d(x_i) = k + 1 (x_i \in X)$且$|Y'| = p \le m = |X|$，

∴ G'中存在Y'到 X 的完全匹配。

∴对M重复上述变换，总能使Y中所有度为$k + 1$的点成为$M-$饱和点。

此时在G中去掉M的所有边，得到矩阵A'满足每行有k个 1，每列最多k个1。

∴ $A' = P_1 + P_2 + \cdots + P_k$。

以 M 构造对应的P_{k+1}，满足每行都有一个 1 元素，每列最多只有一个 1 元素，

则$A = \mathrm{P}_1 + P_2 + \cdots + P_k + P_{k+1}$
得证。

P114.8
解：最大利润 = 47
具体过程请参见书上的例子，在此不再赘述。

P114.10
解：
最小切割为$\{(\mathrm{s}, \mathrm{a}), (\mathrm{s}, \mathrm{b}), (\mathrm{s}, \mathrm{c})\}$
最大流 29

P114.11
解：最大流 21
下图。