第四次习题课　曲面，曲线，Taylor 公式，无条件极值

一、曲面，曲线

例1.　求曲面 $S: 2x^2-2y^2+2z=1$ 上切平面与直线 $L:\begin{cases}3x-2y-z=5\\ x+y+z=0\end{cases}$ 平行的切点的轨迹。

例2.　证明球面 $S_1: x^2+y^2+z^2=R^2$ 与锥面 $S_2: x^2+y^2=a^2z^2$ 正交.

例3.　通过曲面 $S: e^{xyz}+x-y+z=3$ 上点 $(1,0,1)$ 的切平面（　　）

（A）通过 y 轴；　　（B）平行于 y 轴；

（C）垂直于 y 轴；　　（D）A，B，C 都不对.

例4. S 由方程 $ax+by+cz=G\left(x^2+y^2+z^2\right)$ 确定，试证明：曲面 S 上任一点的法线与某定直线相交。

例5.　在椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 上求一点，使椭球面在此点的法线与三个坐标轴的正向成等角。

例6.　求螺线 $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=a\sin t\\ z=ct\end{cases}$；$(a>0,c>0)$，在点 $M(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\dfrac{a}{\sqrt{2}},\dfrac{\pi c}{4})$ 处的切线与法平面.

二、Taylor 公式

例7.　函数 x^y 在 $x=1,y=0$ 点的二阶 Taylor 多项式为 ____________________。

例8.　函数 $f(x,y)=\dfrac{\cos x}{y+1}$ 在点 $(0,0)$ 的带 Lagrange 余项的 Taylor 展开式为

____。

例9.　二元函数 $\sin(xy)$ 在点 $(1,1)$ 处的二阶 Taylor 多项式为____________________。

例10.　$x+y+z+xyz^3=0$ 在点 $(0,0,0)$ 邻域内确定隐函数 $z=z(x,y)$．求 $z(x,y)$ 在原点

的带Peano余项的二阶Taylor公式.

三、极值

例11. 设可微函数f(x, y)在(x_0,y_0)取得极小值，则下列结论正确的是？

(A) $f(x_0, y)$在$y = y_0$处导数大于零;(B) $f(x_0, y)$在$y = y_0$处导数等于零;

(C) $f(x_0, y)$在$y = y_0$处导数小于零;(D) $f(x_0, y)$在$y = y_0$处导数不存在.

答案：( )

例12. 已知函数f(x, y)在(0, 0)某个邻域内连续，且$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x, y) - xy}{(x^2 + y^2)^2} = 1$，

则

(A)点(0, 0)不是f(x, y)的极值点；(B)点(0, 0)是f(x, y)的极大值点；
(C)点(0, 0)是f(x, y)的极小值点；(D)根据所给条件无法判断(0, 0)是否f(x, y)的极值点；
答案( )

例13. 函数$z(x,y)$在有界闭区域D上连续，在D内部偏导数存在，$z(x,y)$在D的边界上的值为零，在D内部满足$\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=f(z)$，其中$f$是严格单调函数，且$f(0)=0$，

证明 $z(x,y)\equiv 0$，$((x,y)\in D)$.

例14. 求函数$z=\left(x^2+y^2\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}$的极值.

例15. (隐函数的极值)设$z=z(x,y)$由$2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$确定，求该函数的极值.