

一. 含参积分

例.1 设 $f(x) = \int_0^x \left[\int_t^x e^{-s^2} ds \right] dt$, 求 $f'(x)$ 与 $f(x)$.

例.2 求 $f'(x)$, 其中 $f(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} e^{x\sqrt{1-y^2}} dy$.

例.3 求 $\lim_{a \rightarrow 0} \int_a^{1+a} \frac{dx}{1+x^2+a^2}$

例.4 能否交换顺序? $\lim_{y \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y^2}} dx$

两个公式:

$$1. \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$2. \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

例.5 求两个 Laplace 积分: $I(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \beta x}{x^2 + \alpha^2} dx$, $J(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \beta x}{x^2 + \alpha^2} dx$, $\alpha > 0$.

例.6

计算积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2\beta x dx$ 。

例.7 设 $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$, $(x, y) \in D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 < y \leq 1\}$, $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy$

与 $\int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx$ 是否相等?

例.8 计算积分 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1 + a \cos x}{1 - a \cos x} \frac{dx}{\cos x}$, ($|a| < 1$)

例.9 设 $f(t) = \int_0^1 \ln \sqrt{x^2 + t^2} dx$, $(0 \leq t \leq 1)$, 求 $f'_+(0)$ 。

思考: 若将 t 的范围改为 $-1 \leq t \leq 1$, $f'(0)$ 是否存在?

例.10 证明积分 $I(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{x} dx$ 在区间 $[-a, a]$ 上非一致连续, 其中 $a > 0$ 。(注: 这是习题 2.1 第 8 题, 第 104 页)(提示: 利用 Dirichlet 积分公式 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2}$)。

例.11 利用积分号下求导方法, 计算积分 $I(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{\arctan(a \tan x)}{\tan x} dx$ 。(课本第二章总复习题第 4 题 (2), page 115)。

例.12 设 $f(x, t)$ 在区域 $[a, +\infty) \times [\alpha, \beta]$ 上连续。假设积分 $I(t) = \int_a^{+\infty} f(x, t) dx$ 对任意

$t \in [\alpha, \beta]$ 均收敛, 但积分 $\int_a^{+\infty} f(x, \beta) dx$ 发散。证明积分 $I(t)$ 关于 $t \in [\alpha, \beta]$ 非一致收敛。(课本习题 2.1 题 6, page 103-104)。