微积分 A2 第六周习题课　　高阶（偏）导数，泰勒公式，极值

一．高阶（偏）导数

显函数，隐函数，反函数，参数函数

例1. 设 $z=f(x,\varphi(x^2))$，其中函数 f 与 φ 的二阶偏导数连续，求 $\dfrac{d^2z}{dx^2}$

解：$z=f(u,v)$，其中 $\begin{cases}u=x\\ v=\varphi(x^2)\end{cases}$。

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\cdot\frac{dv}{dx}=\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\cdot 1+\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\cdot 2x\varphi'(x^2),$$

其中 $\begin{cases}u=x\\ v=\varphi(x^2)\end{cases}$。

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left\{\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)+\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\cdot 2x\varphi'(x^2)\right\}$$

$$=\frac{d}{dx}\left\{\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\right\}+\frac{d}{dx}\left\{\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\cdot 2x\varphi'(x^2)\right\}=I+II\text{ 。}$$

$$I=\frac{d}{dx}\left\{\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\right\}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot 1+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot 2x\varphi'(x^2)\text{ 。}$$

$$II=\frac{d}{dx}\left\{\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\cdot 2x\varphi'(x^2)\right\}$$

$$=\frac{d}{dx}\left\{\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\right\}\cdot 2x\varphi'(x^2)+\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\cdot\frac{d}{dx}\left[2x\varphi'(x^2)\right]=II_1+II_2$$

$$II_1=\frac{d}{dx}\left\{\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\right\}\cdot 2x\varphi'(x^2)=\left[\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{dv}{dx}\right]\cdot 2x\varphi'(x^2)$$

$$=\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\cdot 1+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot 2x\varphi'(x^2)\right\}\cdot 2x\varphi'(x^2);$$

$$II_2=\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\cdot\frac{d}{dx}\left[2x\varphi'(x^2)\right]=\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\left\{2\varphi'(x^2)+4x^2\varphi''(x^2)\right\}$$

代入即可。

例2.　设 $z=z(x,y)$ 二阶连续可微，并且满足方程

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

若令 $\begin{cases}u=x+\alpha y\\ v=x+\beta y\end{cases}$，试确定 α,β 为何值时能变原方程为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$.

解　将 x,y 看成自变量，u,v 看成中间变量，利用链式法则得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=\left(\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}\right)z$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\alpha\frac{\partial z}{\partial u}+\beta\frac{\partial z}{\partial v}=\left(\alpha\frac{\partial}{\partial u}+\beta\frac{\partial}{\partial v}\right)z$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\left(\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}\right)^2 z$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha\frac{\partial z}{\partial u}+\beta\frac{\partial z}{\partial v}\right)=\alpha^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\alpha\beta\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\beta^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\left(\alpha\frac{\partial}{\partial u}+\beta\frac{\partial}{\partial v}\right)^2 z$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha\frac{\partial z}{\partial u}+\beta\frac{\partial z}{\partial v}\right)=\alpha\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(\alpha+\beta)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\beta\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\alpha\frac{\partial}{\partial u}+\beta\frac{\partial}{\partial v}\right)z$$

由此可得， $0=A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=$

$$=\left(A+2B\alpha+C\alpha^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\left(A+B(\alpha+\beta)+C\alpha\beta\right)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\left(A+2B\beta+C\beta^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0$$

只要选取α,β使得 $\begin{cases}A+2B\alpha+C\alpha^2=0\\A+2B\beta+C\beta^2=0\end{cases}$，可得 $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$.

问题成为方程$A+2Bt+Ct^2=0$有两不同实根，即要求： $B^2-AC>0$.

令$\alpha=-B+\sqrt{B^2-AC}$，$\beta=-B-\sqrt{B^2-AC}$，即可。

此时， $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0\Rightarrow\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0\Rightarrow\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)=0\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial v}=\varphi(v)\Rightarrow z=\int\varphi(v)dv+f(u)$.

$$z=f(u)+g(v)=f(x+\alpha y)+g(x+\beta y).$$

例3. 设$u(x,y)\in C^2$，又$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，$u(x,2x)=x$，$u'_x(x,2x)=x^2$，求 $u''_{xx}(x,2x)$，

$u''_{xy}(x,2x)$ $u''_{yy}(x,2x)$

解: $$\frac{\partial u}{\partial x}(x,2x)=x^2,$$

两边对x求导,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,2x)+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(x,2x)\cdot 2=2x. \qquad (1)$$

$$u(x,2x)=x,$$

两边对x求导,

$\frac{\partial u}{\partial x}(x,2x)+\frac{\partial u}{\partial y}(x,2x)\cdot 2=1$， $\frac{\partial u}{\partial y}(x,2x)=\frac{1-x^2}{2}$.

两再边对x求导,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(x,2x)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,2x)\cdot 2=-x. \qquad (2)$$

由已知 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,2x)-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,2x)=0, \qquad (3)$$

(1), (2), (3) 联立可解得:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,2x)=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,2x)=-\frac{4}{3}x,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(x,2x)=\frac{5}{3}x$$

例4. 已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $ax+by=f\left(x^2+y^2\right), a,b$ 是常数，求二阶导函数。

解：1. 求一阶导数

方法一。

方程 $ax+by=f\left(x^2+y^2\right)$ 两边对 x 求导，

$$a+b\frac{dy}{dx}=f'(x^2+y^2)\left(2x+2y\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2xf'(x^2+y^2)-a}{b-2yf'(x^2+y^2)}$$

方法二。

$$F(x,y)=ax+by-f\left(x^2+y^2\right),$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=a-2xf'\left(x^2+y^2\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=b-2yf'\left(x^2+y^2\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{2xf'(x^2+y^2)-a}{b-2yf'(x^2+y^2)}。$$

2. 求二阶导数

方法一

$$ax+by(x)=f(x^2+y^2(x)),$$

两边对 x 求导，$$\frac{d}{dx}\left[ax+by(x)\right]=\frac{d}{dx}\left[f(x^2+y^2(x))\right],$$

$$a+b\frac{dy}{dx}(x)=f'(x^2+y^2(x))\cdot\left[2x+2y(x)\frac{dy}{dx}(x)\right],$$

两边再对 x 求导，$$\frac{d}{dx}\left[a+b\frac{dy}{dx}(x)\right]=\frac{d}{dx}\left\{f'(x^2+y^2(x))\cdot\left[2x+2y(x)\frac{dy}{dx}(x)\right]\right\},$$

$$b\frac{d^2y}{dx^2}=f''(x^2+y^2)\cdot\left[2x+2y(x)\frac{dy}{dx}(x)\right]^2+f'(x^2+y^2)\cdot\left[2+2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2y\frac{d^2y}{dx^2}\right]$$

所以$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\cdots$（略）

方法二

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2xf'(x^2+y^2(x))-a}{b-2y(x)f'(x^2+y^2(x))},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{2xf'(x^2+y^2(x))-a}{b-2y(x)f'(x^2+y^2(x))}\right)$$

$$=\frac{1}{\left[b-2yf'(x^2+y^2)\right]^2}\left\{\frac{d}{dx}\left[2xf'(x^2+y^2(x))-a\right]\cdot\left[b-2yf'(x^2+y^2)\right]\right.$$
$$\left.+\left[2xf'(x^2+y^2(x))-a\right]\cdot\frac{d}{dx}\left[b-2y(x)f'(x^2+y^2(x))\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{\left[b-2yf'(x^2+y^2)\right]^2}\left\{\left[2f'(x^2+y^2)+2xf''(x^2+y^2)\left(2x+2y\frac{dy}{dx}\right)\right]\right.$$
$$\cdot\left[b-2yf'(x^2+y^2)\right]$$
$$+\left[2xf'(x^2+y^2(x))-a\right]$$
$$\left.\cdot\left[-2\frac{dy}{dx}\cdot f'(x^2+y^2)-2yf''(x^2+y^2)\left(2x+2y\frac{dy}{dx}\right)\right]\right\}$$

其中$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2xf'(x^2+y^2(x))-a}{b-2y(x)f'(x^2+y^2(x))}$。

二．Taylor 公式

例5. 函数 x^y 在 $x=1,y=0$ 点的二阶 Taylor 多项式为 ____________________。

【答案】$1+(x-1)y$

例6. 函数 $f(x,y)=\dfrac{\cos x}{y+1}$ 在点$(0,0)$的带 Lagrange 余项的 Taylor 展开式为

____。

【答案】 $f(x,y)=1-y+\dfrac{1}{2}(x,y)\begin{pmatrix}-\dfrac{\cos\theta x}{1+\theta y} & \dfrac{\sin\theta x}{(1+\theta y)^2}\\ \dfrac{\sin\theta x}{(1+\theta y)^2} & \dfrac{2\cos\theta x}{(1+\theta y)^3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\quad \theta\in(0,1)$

例7. 二元函数 $\sin(xy)$ 在点 $(1,1)$ 处的二阶 Taylor 多项式为____________________。

【答案】

$$\sin 1+(\cos 1)(x-1)+(\sin 1)(y-1)-\tfrac{1}{2}(\sin 1)((x-1)^2+(y-1)^2)$$
$$+(\cos 1-\sin 1)(x-1)(y-1)$$

例8. $x+y+z+xyz^3=0$ 在点 $(0,0,0)$ 邻域内确定隐函数 $z=z(x,y)$ ．求 $z(x,y)$ 在原点的带 Peano 余项的二阶 Taylor 公式．

【解】 $z(0,0)=0$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)=-1$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(0,0)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0,0)=0$$

$z(x,y)$ 在原点的带 Peano 余项的二阶 Taylor 公式为 $z=-x-y+o\left(\rho^3\right)$

三．极值

例9. 求函数 $f(x,y)=2x^4+y^4-2x^2-2y^2$ 的所有局部极值.

解　求偏导数得 $\frac{\partial f}{\partial x}=8x^3-4x,\frac{\partial f}{\partial y}=4y^3-4y$，解 $\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=8x^3-4x=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=4y^3-4y=0\end{cases}$，

得到 9 个驻点：

$$(x_1,y_1)=(0,0),\quad (x_2,y_2)=(0,1),\quad (x_3,y_3)=(0,-1),$$
$$(x_4,y_4)=(\frac{1}{\sqrt2},0),\quad (x_5,y_5)=(\frac{1}{\sqrt2},1),\quad (x_6,y_6)=(\frac{1}{\sqrt2},-1),$$
$$(x_7,y_7)=(-\frac{1}{\sqrt2},0),\quad (x_8,y_8)=(-\frac{1}{\sqrt2},1),\quad (x_9,y_9)=(-\frac{1}{\sqrt2},-1)$$

求二阶偏导数得

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=24x^2-4,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=12x^2-4,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0$$

在上述每个点计算 A,B,C 得到下表：

(x_i,y_i)	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,-1)$	$(\frac{1}{\sqrt2},0)$	$(\frac{1}{\sqrt2},1)$	$(\frac{1}{\sqrt2},-1)$	$(-\frac{1}{\sqrt2},0)$	$(-\frac{1}{\sqrt2},1)$	$(-\frac{1}{\sqrt2},-1)$
A_i	-4	-4	-4	8	8	8	8	8	8
B_i	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C_i	-4	8	8	-4	8	8	-4	8	8
$A_iC_i-B_i^2$	16	-32	-32	-32	64	64	-32	64	64

由极值的充分条件可知，函数 f 在 (x_1,y_1) 点取局部极小值，

$$(x_5, y_5),(x_6, y_6)(x_8, y_8)(x_9, y_9)$$

取局部极大值，其它点均为鞍点（非极值点）.

例10. 求函数 $z=\left(x^2+y^2\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}$ 的极值.

解：
$$z'_x=\left(2x-2x(x^2+y^2)\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}=0$$

$$z'_y=\left(2y-2y(x^2+y^2)\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}=0$$

驻点为 $(0,0)$ 与曲线 $x^2+y^2=1$ 上的所有的点．在 $(0,0)$ 点，

$$z''_{xx}(0,0)=2,\quad z''_{xy}(0,0)=0,\quad z''_{yy}(0,0)=2$$

$(0,0)$ 点是极小值点，极小值为 0 .

设 $t=x^2+y^2$， $z=te^t$， $t=1$ 是其驻点，且 $z''(1)<0$，函数 $z=\left(x^2+y^2\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}$ 在曲线 $x^2+y^2=1$ 上取到极大值 e^{-1} .

例11. （隐函数的极值）设 $z=z(x,y)$ 由 $2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$ 确定，求该函数的极值.

解：
$$4xdx+4ydy+2zdz+8xdz+8zdx-dz=0$$

$$dz=-\frac{4x+8z}{2z+8x-1}dx-\frac{4y}{2z+8x-1}dy$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{4x+8z}{2z+8x-1}=0$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{4y}{2z+8x-1}=0$$

$$2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$$

三个方程联立，得驻点 $(-2,0)$, $\left(\frac{16}{7},0\right)$.

在 $(-2,0)$ 点

$$\left[z''_{xy}(-2,0)\right]^2-z''_{xx}(-2,0)z''_{yy}(-2,0)=-\frac{16}{15}<0$$

且 $z''_{xx}(-2,0)=\dfrac{4}{15}>$， $(-2,0)$ 点是极小值点；

在 $\left(\dfrac{16}{7},0\right)$ 点

$$\left[z''_{xy}\left(\frac{16}{7},0\right)\right]^2-z''_{xx}\left(\frac{16}{7},0\right)z''_{yy}\left(\frac{16}{7},0\right)=-\frac{16}{15}<0$$

且 $z''_{xx}\left(\dfrac{16}{7},0\right)=-\dfrac{4}{15}<0$， $\left(\dfrac{16}{7},0\right)$ 点是极大值点．

例12. 函数 $z(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，在 D 内部偏导数存在，$z(x,y)$ 在 D 的边界上的值为零，在 D 内部满足 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=f(z)$，其中 f 是严格单调函数，且 $f(0)=0$，证明 $z(x,y)\equiv 0$，$((x,y)\in D)$.

证明：假设 $z(x,y)$ 不恒为 0，则一定存在 $(x_0,y_0)\in D, f(x_0,y_0)\neq 0$。不妨设 $f(x_0,y_0)>0$。

因为函数 $z(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，所以 $z(x,y)$ 在 D 上存在最大值 $f(x_1,y_1)\geq f(x_0,y_0)>0$。

而 $z(x,y)$ 在 D 的边界上的值为零，所以 $(x_1,y_1)\in \overset{o}{D}$。$(x_1,y_1)$ 为极大值点，$\dfrac{\partial z}{\partial x}(x_1,y_1)=\dfrac{\partial z}{\partial y}(x_1,y_1)=0$。

由条件 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=f(z)$，其中 f 是严格单调函数，且 $f(0)=0$ 可知 $f(z(x_1,y_1))>0$，矛盾。

例13. 设 $f(x,y)$ 连续，且 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$，证明 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点。

证明：$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$ 可知 $f(0,0)=0$

设$\alpha(x,y)=\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}-1$，则$\alpha(x,y)=o(1),\quad (x,y)\to(0,0)$。

$f(x,y)-f(0,0)=xy+(x^2+y^2)(1+\alpha(x,y))$。

而$xy+(x^2+y^2)(1+\alpha(x,y))$在点的任意领域内都改变正负号，所以$(0,0)$不是$f(x,y)$的极值点。

思考：若$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}=1$，会发生什么情况？

例14. 设 $u(x,y)$ 在 $x^2+y^2\le 1$ 上有二阶连续偏导数，在 $x^2+y^2<1$ 内满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=u$，且在 $x^2+y^2=1$ 上，$u(x,y)\ge 0$，证明：当 $x^2+y^2\le 1$ 时，$u(x,y)\ge 0$。（提示：可用反证法证明）

【证明】反证法：假设存在点(x_0,y_0)满足${x_0}^2+{y_0}^2\le 1$且$u(x_0,y_0)<0$。

由条件：在$x^2+y^2=1$上，$u(x,y)\ge 0$可知，在$x^2+y^2\le 1$上的连续函数$u(x,y)$在区域$x^2+y^2\le 1$的最小值点(x_1,y_1)一定发生在区域$x^2+y^2\le 1$的内部，因此(x_1,y_1)一定是极小值点，矩阵$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\end{bmatrix}_{(x_1,y_1)}$正定或半正定，这与

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)(x_1,y_1)=u(x_1,y_1)<0$$

矛盾。假设不成立，即当$x^2+y^2\le 1$时，$u(x,y)\ge 0$。