第 13 周　曲线曲面积分 3

例 1　设 $D_t=\{(x,y)\in R^2\,\big|\,x^2+y^2\le t^2, t>0\}$，$f(x,y)$ 在 D_t 上连续，在 D_t 内存在连续偏导数．$f(0,0)=1$．若 $f(x,y)$ 在 D_t 上满足方程 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\dfrac{1}{2}f(x,y)$．$\vec{n}$ 为有向曲线 ∂D_t 的外单位法向量，求极限 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{1-\cos t}\oint_{\partial D_t}\dfrac{\partial f}{\partial \vec{n}}\mathrm{d}l=$

例 2　设 $Q(x,y)$ 在全平面上连续可微, 已知曲线积分 $\int_L 2xydx+Q(x,y)dy$ 与路径无关, 并且对于任意的 t, 有 $\int_{(0,\,0)}^{(1,\,t)}2xydx+Q(x,y)dy=\int_{(0,\,0)}^{(t,\,1)}2xydx+Q(x,y)dy$. 求函数 $Q(x,y)$.

例 3　已知积分 $\int_L (x+xy\sin x)dx+\dfrac{f(x)}{x}dy$ 与路径无关，$f(x)$ 为可微函数, 且 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$,

（1）求 $f(x)$；

(2) 对(1)中求得的 $f(x)$, 求函数 $u=u(x,y)$ 使得 $du=(x+xy\sin x)dx+\dfrac{f(x)}{x}dy$；

(3)对(1)中求得的 $f(x)$, 求上述积分, 其中积分路径为从 $A(\pi,1)$ 到 $B(2\pi,0)$ 的任意路径.

例 4　计算积分：$\int\limits_{(1,\pi)}^{(2,\pi)}\left(1-\dfrac{y^2}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}\right)dx+\left(\sin\dfrac{y}{x}+\dfrac{y}{x}\cos\dfrac{y}{x}\right)ydx$,

路径为沿任一条不与轴相交的曲线。

例 5　设在上半平面 $D=\{(x,y)\,|\,y>0\}$ 内，函数 $f(x,y)$ 具有连续偏导数,且对任意的 $t>0$ 都有 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$，证明: 对 L 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L,都有 $\oint_L yf(x,y)dx-xf(x,y)dy=0$。

例 6　设 Ω 为由圆锥面 $S:x^2+y^2=z^2$ 和平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 所围成的圆锥体。

(i) 证明设此圆锥体的体积 V 可以表示为 $V=\dfrac{1}{3}\iint\limits_{\partial\Omega}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}^0)dS$，其中 $\partial\,\Omega$ 为 Ω 区域的边界曲面，$\mathbf{n}^0$ 为其单位外法向量，$\mathbf{r}=(x,y,z)$.

(ii) 圆锥体的体积 V 也可以表示为 $V=\dfrac{Ah}{3}$，其中 A 为圆锥的底面积，h 为圆锥的高.

例 7　设一元函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续可导, 且对于任何位于半空间

$R_x^+ = \{(x, y, z),\ \ x > 0\}$ 中

的光滑有向封闭曲面 $S \subset R_x^+$，有 $\oiint\limits_S xf(x)dydz - xyf(x)dzdx - e^{2x}zdxdy = 0$。进一步假设 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$。求 $f(x)$。

例 8 利用 Stokes 公式计算积分 $I = \oint\limits_{L^+}(y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$，其中 L^+ 为圆周

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ y = x\tan\alpha \quad \left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

从 0x 轴的正向看去，圆周的正向为逆时针方向.

例 9 设有向曲线 L^+ 是平面 $x + y + z = 0$ 与球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的交线，从 z 轴正向看去为逆时针为正向。求第二类曲线积分 $I = \int\limits_{L^+} \dfrac{(y+1)\,dx + (z+2)\,dy + (x+3)\,dz}{x^2 + y^2 + z^2}$。

例 10 设 Σ^+ 是锥面的一个部分：$z = \sqrt{x^2 + y^2}$，$0 \le z \le 1$，规定其正法线向下，求面积分 $I = \iint\limits_{\Sigma^+} xdydz + 2ydzdx + 3(z-1)dxdy$。

例 11 计算高斯积分 $I = \oiint\limits_S \dfrac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} \mathrm{d}S$，其中 S 为一个不经过原点的光滑封闭曲面，其中 $\vec{n}$ 为 S 上点 (x, y, z) 处的单位外法线向量，$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$，$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

例 12 确定常数 α，使得积分 $\int_A^B (x^4 + 4xy^\alpha)dx + (6x^{\alpha-1}y^2 - 5y^4)dy$ 与路径无关， 并求原函数 $\varphi(x, y)$，使得 $d\varphi = (x^4 + 4xy^\alpha)dx + (6x^{\alpha-1}y^2 - 5y^4)dy$。

例 13 （P.229 9）设 $D \subset R^2$ 为开集，$u(x, y)$ 为调和函数 $\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, (x, y) \in D\right)$，证明

（1）$u(x_0, y_0) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{\partial D}\left(u\dfrac{\partial \ln r}{\partial \mathbf{n}} - \ln r\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)dl$，其中 $(x_0, y_0) \in D$，$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$，$\mathbf{n}$ 为 D 的外法向量；

（2）$u(x_0, y_0) = \dfrac{1}{2\pi R}\int_L u(x, y)dl$，其中 L 为以 (x_0, y_0) 为圆心，R 为半径的圆。

例 14 （P.230,10）