第 10 次习题课题目

第 1 部分 课堂内容回顾

1. 定积分的计算

(1) **利用计算不定积分的方法:** 分段, 线性性, 降低三角函数的幂, 换元法, 分部积分法, 有理函数的定积分 (有理函数标准分解), 三角有理函数 (转化为有理函数) 的定积分, 两特殊无理函数的定积分.

(2) **定积分的换元公式:** 若 $f \in \mathscr{C}[a,b]$, 而 $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ 连续可导, 则

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

注: 若 $f \in \mathscr{R}[a,b]$ 而 $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ 连续可导且严格单调, 上述公式依然成立.

(3) **分部积分公式:** 若 $u, v \in \mathscr{C}^{(1)}[a,b]$, 则 $\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}v(x) = uv|_a^b - \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}u(x)$.

(4) **对称性:** 设 $a > 0$, 而 $f \in \mathscr{R}[-a,a]$.

(a) 若 f 为奇函数, 则 $\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

(b) 若 f 为偶函数, 则 $\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

(5) **周期性:** 若 $f \in (\mathbb{R})$ 以 $T > 0$ 为周期, 则 $\forall a \in \mathbb{R}$, 均有 $\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x$.

(6) **定积分与数列极限:** 设 $f \in \mathscr{R}[a,b]$, 而 $\{P_n\}$ 为 $[a,b]$ 的一列分割使 $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda(P_n) = 0$. 记 $P_n = (x_i^{(n)})_{0\leqslant i\leqslant k_n}$. 则对任意的点 $\xi_i^{(n)} \in [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$ $(1 \leqslant i \leqslant k_n)$, 均有

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^{(n)})(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

特别地, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i^{(n)}) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, 其中 $\xi_i^{(n)} \in [a + \frac{b-a}{n}(i-1), a + \frac{b-a}{n}i]$.

(7) **Jensen 不等式:** 设 $f \in \mathscr{R}[a,b]$, $m, M \in \mathbb{R}$ 使得 $\forall x \in [a,b]$, 均有 $m \leqslant f(x) \leqslant M$. 若 $\varphi \in \mathscr{C}[m,M]$ 为凸函数, 则

$$\varphi\Big(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\Big) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(f(x))\,\mathrm{d}x.$$

注: 若 φ 为凹函数, 上述不等式依然成立, 只是此时应该将“$\leqslant$”改为“$\geqslant$”.

(8) **带积分余项的 Taylor 公式:** 设 $n \geqslant 1$ 为整数. 若 $f \in \mathscr{C}^{(n+1)}[a,b]$, 而 $x_0 \in [a,b]$, 则 $\forall x \in [a,b]$, 我们有

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-u)^n f^{(n+1)}(u)\,\mathrm{d}u.$$

通常称 $R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^x (x-u)^n f^{(n+1)}(u)\,\mathrm{d}u$ 为积分余项. 令 $u = x_0 + t(x-x_0)$, 则

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(x_0 + t(x-x_0))\,\mathrm{d}t.$$

(a) **Cauchy 余项:** $\exists\theta \in (0,1)$ 使 $R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!}(1-\theta)^n f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))$.

(b) **Lagrange 余项:** $\exists\theta \in [0,1]$ 使得 $R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))$.

2. 定积分的应用

(1) **平面区域的面积:**

(a) **直角坐标系下平面区域的面积:** 设 $f, g \in \mathscr{C}[a,b]$. 则由曲线 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 与直线 $x=a$, $x=b$ 所围平面区域的面积等于

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x.$$

(b) **直角坐标系下由参数表示的曲线所围平面区域的面积:** 设曲线 Γ 的参数方程为

$$\begin{cases} x &= & x(t), \\ y &= & y(t), \end{cases} \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta),$$

其中 x, y 均为连续函数, $y \geqslant 0$, 而函数 x 为严格递增, 则存在连续反函数 $t=t(x)$. 定义 $a=x(\alpha)$, $b=x(\beta)$. 由 Γ, $x=a$, $x=b$ 及 x 轴所围区域的面积等于

$$S=\int_a^b y(t(x))\,\mathrm{d}x \overset{x=x(t)}{=} \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)\,\mathrm{d}t.$$

(c) **极坐标系下平面区域的面积:** 设曲线 Γ 的极坐标方程为 $\rho=\rho(\theta)$ $(\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta)$, 其中 $\rho \in \mathscr{C}[\alpha,\beta]$. 则曲线 Γ 与射线 $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ 所围成的区域的面积为

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (\rho(\theta))^2\,\mathrm{d}\theta.$$

(2) **光滑曲线的弧长公式:**

(a) **参数方程:** $L=\int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,\mathrm{d}t$.

(b) **函数图像:** $L=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$.

(c) **极坐标方程:** $L=\int_\alpha^\beta \sqrt{(\rho(\theta))^2+(\rho'(\theta))^2}\,\mathrm{d}\theta$.

(d) **空间曲线参数方程:** $L=\int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,\mathrm{d}t$.

(3) **曲线的曲率:** 设 Γ 为二阶连续可导曲线. 它在点 (x,y) 处的切线与 x 轴正向的夹角被记为 α, 在该点处的曲率被定义为 $\kappa := |\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\ell}|$, 曲率半径被定义为 $R := \frac{1}{\kappa}$.

(a) **参数方程:** 设曲线 Γ 的参数方程为

$$\begin{cases} x &= & x(t), \\ y &= & y(t), \end{cases} \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta),$$

其中 $x, y \in \mathscr{C}^{(2)}[\alpha,\beta]$. 则 $\kappa = |\frac{\alpha'(t)}{\ell'(t)}| = \frac{|x'y''-x''y'|}{((x')^2+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}$.

(b) **函数图像:** 设 $f \in \mathscr{C}^{(2)}[a,b]$, 而曲线 Γ 在直角坐标系下由方程 $y=f(x)$ 定义, 则 $\kappa = \frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}$.

(c) **极坐标方程:** 设 $\rho \in \mathscr{C}^{(2)}[\alpha,\beta]$, 而曲线 Γ 的在极坐标系下的方程为 $\rho=\rho(\theta)$, 则 $\kappa = \frac{|\rho^2+2(\rho')^2-\rho\rho''|}{(\rho^2+(\rho')^2)^{\frac{3}{2}}}$.

(4) **空间物体的体积:**

(a) **由平面截面积求立体体积:** 将一个物体置于平面 $x=a$ 与 $x=b$ 之间 $(a<b)$. $\forall x\in[a,b]$, 用垂直于 x 轴的平面去截此物体所得到的截面的面积记为 $S(x)$, 并且假设 $S\in\mathscr{R}[a,b]$, 则该物体的体积为

$$V=\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x.$$

(b) **旋转体的体积:** 设 $f\in\mathscr{C}[a,b]$ 且 $f\geqslant 0$. 由 $y=f(x)$, $x=a$, $x=b\,(b>a\geqslant 0)$ 以及 x 轴所围成的区域分别绕 x 轴 和 y 旋转所生成的旋转体体积为:

$$V_x=\pi\int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x,\ V_y=2\pi\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x.$$

注: 同样可求由 $x=g(y)\geqslant 0$ $(0\leqslant c\leqslant y\leqslant d)$, $y=c$, $y=d$ 以及 y 轴所围的区域绕 x 轴或 y 轴旋转得到的旋转体体积: 交换 x,y 的作用.

(c) **更一般的旋转体的体积:** 设 $f,g\in\mathscr{C}[a,b]$ 且 $f\geqslant g\geqslant 0$. 则由 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $x=a$, $x=b$ $(b>a\geqslant 0)$ 所围区域分别绕 x 轴与 y 轴旋转所得体积为:

$$V_x=\pi\int_a^b ((f(x))^2-(g(x))^2)\,\mathrm{d}x,\ V_y=2\pi\int_a^b x(f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x.$$

(5) **旋转面的侧面积:**

(a) **绕 x 轴旋转生成的曲面的侧面积的面积微元:** $\mathrm{d}\sigma=2\pi|y|\,\mathrm{d}\ell$.

1) **参数方程:** $S=2\pi\int_\alpha^\beta|y(t)|\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,\mathrm{d}t$.

2) **函数图像:** $S=2\pi\int_a^b|f(x)|\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$.

3) **极坐标方程:** $S=2\pi\int_\alpha^\beta|\rho(\theta)\sin\theta|\sqrt{(\rho(\theta))^2+(\rho'(\theta))^2}\,\mathrm{d}\theta$.

(b) **绕 y 轴旋转生成的曲面的侧面积的面积微元:** $\mathrm{d}\sigma=2\pi|x|\mathrm{d}\ell$.

1) **参数方程:** $S=2\pi\int_\alpha^\beta|x(t)|\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,\mathrm{d}t$.

2) **函数图像:** $S=2\pi\int_a^b|x|\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$.

3) **极坐标方程:** $S=2\pi\int_\alpha^\beta|\rho(\theta)\cos\theta|\sqrt{(\rho(\theta))^2+(\rho'(\theta))^2}\,\mathrm{d}\theta$.

(6) **平面光滑曲线的质心:**

(a) **参数方程:** 设曲线 Γ 的的线密度为 $\mu(t)$, 则质心 $(\overline{x},\overline{y})$ 的坐标公式为:

$$\overline{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\int_\alpha^\beta x(t)\mu(t)\,\mathrm{d}\ell(t)}{\int_\alpha^\beta \mu(t)\,\mathrm{d}\ell(t)},\ \overline{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\int_\alpha^\beta y(t)\mu(t)\,\mathrm{d}\ell(t)}{\int_\alpha^\beta \mu(t)\,\mathrm{d}\ell(t)}.$$

(a) **函数图像:** 设曲线 Γ 的方程为 $y=f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$, 线密度为 $\mu(x)$, 则

$$\overline{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\int_a^b x\mu(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x}{\int_a^b \mu(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x},$$

$$\overline{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\int_a^b f(x)\mu(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x}{\int_a^b \mu(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x}.$$

第 2 部分 习题课题目

1. (Young 不等式) 假设 $f \in \mathscr{C}^{(1)}[0,+\infty)$ 为严格递增、无上界且 $f(0)=0$. 求证: $\forall a, b \geqslant 0$, 我们均有

$$ab \leqslant \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^b f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y,$$

且等号成立当且仅当 $b = f(a)$.

2. 若 $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ 单调递减, 求证: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, 均有

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

3. 假设 $T > 0$, 而 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是以 T 为周期的周期函数并且在每个有限闭区间上可积. $\forall x \in \mathbb{R}$, 定义 $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. 求证: 函数 F 可以表示成一个周期为 T 的周期函数与一个线性函数之和.

4. 设 $a > 0$. 若 f 在 $[0, a]$ 上二阶可导且 $\forall x \in [0, a]$, 均有 $f''(x) \geqslant 0$, 求证:

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant a f\Big(\frac{a}{2}\Big).$$

5. 若 f 在 $[0, 1]$ 上二阶可导且 $\forall x \in [0, 1]$, 均有 $f''(x) \leqslant 0$, 求证:

$$\int_0^1 f(x^2)\,\mathrm{d}x \leqslant f\Big(\frac{1}{3}\Big).$$

6. 若 $f \in \mathscr{C}[0, \frac{\pi}{2}]$, 求证: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x$.

7. 计算下列定积分:

(1)	$\int_{-1}^1 \frac{(x+1)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+5)^2}$,	(2)	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin^2 x\,\mathrm{d}x$,
(3)	$\int_1^e \sin(\log x)\,\mathrm{d}x$,	(4)	$\int_0^1 e^{2\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$,
(5)	$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$,	(6)	$\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$,
(7)	$\int_0^\pi \cos^n x\,\mathrm{d}x$,	(8)	$\int_0^1 x^n (\log x)^m\,\mathrm{d}x$,
(9)	$\int_0^n x^2[x]\,\mathrm{d}x$,	(10)	$\int_0^{\log n} [e^x]\,\mathrm{d}x$,
(11)	$\int_0^\pi \sqrt{\sin x - \sin^3 x}\,\mathrm{d}x$,	(12)	$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x}}$.

8. 计算下列极限:

(1)	$\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^n (1+\frac{k}{n})^{\frac{2}{n}}$,	(2)	$\lim\limits_{n\to\infty} n^{-\frac{3}{2}} \sum\limits_{k=1}^n \sqrt{k}$,
(3)	$\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^n \frac{n}{(n+k)(n+2k)}$,	(4)	$\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2}$,
(5)	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \prod\limits_{k=1}^{2n} (n^2+k^2)^{\frac{1}{n}}$,	(6)	$\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k^2+n^2}}$,
(7)	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\Big(\prod\limits_{k=1}^n (n+k)\Big)^{\frac{1}{n}}$,	(8)	$\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 x^2 \sin^2(n\pi x)\,\mathrm{d}x$.

9. 求下列曲线所围图形的面积:

(1) 叶形线 $\begin{cases} x(t) = 2t - t^2, \\ y(t) = 2t^2 - t^3, \end{cases}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2)$ 所围成的图形的面积,

(2) 由阿基米德螺线 $\rho = a\theta$, $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$ 所围成的图形的面积,

(3) 由曲线 $y = e^x$, $y = -\cos \pi x$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$ 所围成的图形的面积,

(4) 由曲线 $y = \frac{x^2}{2}$, $y = x + \frac{3}{2}$ 所围成的图形的面积,

(5) 由曲线 $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$ 所围图形的面积.

10. 求星形线 $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi,\ a > 0)$ 的弧长.

11. 求悬链线 $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ $(|x| \leqslant 1)$ 的弧长.

12. 过原点作曲线 $y = \sqrt{x-1}$ 的切线, 求由该曲线, 上述切线以及 x 轴所围区域绕 x 旋转而成的旋转体的表面积.

13. 求星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ $(a > 0)$ 绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积.

14. 求曲线 $\begin{cases} x = 1 + \sqrt{2}\cos t, \\ y = -1 + \sqrt{2}\sin t, \end{cases}$ $(\frac{\pi}{4} \leqslant t \leqslant \frac{3}{4}\pi)$ 绕 x 轴旋转得到的旋转体的体积与侧面积.

15. 求曲线 $\begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 1 + \cos t, \end{cases}$ $(t \in [0, \pi])$ 绕 y 轴旋转而成的旋转面的侧面积.

16. 设 $a \in \mathbb{R}$, 而 $f \in \mathscr{C}[0,1]$ 在 $(0,1)$ 内可导使得 $\forall x \in (0,1)$, 均有 $f(x) > 0$ 且 $xf'(x) = f(x) + \frac{3}{2}ax^2$. 设曲线 $y = f(x)$ 与直线 $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ 所围区域 D 的面积为 2.

(1) 求函数 f 的表达式.

(2) 问 a 取何值时, 区域 D 绕 x 旋转而成的旋转体的体积最小?

17. 设 $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \pi$, 而 $\rho_0 \in \mathscr{C}[\alpha, \beta]$. 求证: 极坐标下的区域

$$D = \big\{(\rho, \theta) \mid \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta,\ 0 \leqslant \rho \leqslant \rho_0(\theta)\big\}$$

绕极轴旋转而成的旋转体的体积为 $V = \frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta (\rho_0(\theta))^3 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta$.

18. 求心脏线 $\rho = a(1 + \cos\theta)$ 所围的区域绕极轴旋转而成的旋转体的体积, 其中 $a > 0$.