第 12 周习题课 曲线曲面积分 2

本次习题课讨论题涉及以下四个问题。

一．曲线曲面积分续。
二．Green 定理的应用续。
三．积分关于路径的无关性

一．曲线曲面积分续。

1．记 L^+ 为圆周 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ y=x\tan\alpha \quad \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$，从 0x 轴的正向看去，圆周的正向为逆时针方向。写出 L^+ 的参数方程，并利用这个参数方程来计算线积分

$$I=\oint_{L^+}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz \text{。}$$

（注：我们将在第三部分的第 3 题，利用 Stokes 公式更简单地计算上述线积分。）

解：在球坐标下曲线的方程为 $r=a,\varphi=\alpha$，由此得到 L^+ 的参数方程

$$L^+:\begin{cases} x=a\cos\alpha\sin\theta \\ y=a\sin\alpha\sin\theta \\ z=a\cos\theta \end{cases} \qquad 0\le\theta\le 2\pi \text{，参数增加为曲线正向，}$$

代入曲线积分式，得

$$\begin{aligned} I&=\oint_{L^+}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz \\ &=\int_0^{2\pi}[a(\sin\alpha\sin\theta-\cos\theta)(a\cos\alpha\cos\theta)+a(\cos\theta-\cos\alpha\sin\theta)(a\sin\alpha\cos\theta) \\ &\qquad +a(\cos\alpha\sin\theta-\sin\alpha\sin\theta)(-a\sin\theta)]d\theta \\ &=\int_0^{2\pi}a^2(\cos\alpha-\sin\alpha)d\theta=2\pi a^2(\cos\alpha-\sin\alpha) \text{。} \end{aligned}$$

解答完毕。

2．求积分 $I=\iint_\Sigma f(x)dy\wedge dz+g(y)dz\wedge dx+h(z)dx\wedge dy$，其中 Σ 为长方体 $[0,a]\times[0,b]\times[0,c]$ 的边界，正法向朝外，函数 $f(x)$，$g(y)$ 和 $h(z)$ 均为连续函数。

解：边界面 Σ 由 6 个平面构成，其朝外的单位法向量分别为：

$x=0$：$\mathbf{n}=(-1,0,0)$，$x=a$：$\mathbf{n}=(1,0,0)$，

$y=0$：$\mathbf{n}=(0,-1,0)$，$y=b$：$\mathbf{n}=(0,1,0)$，

$z=0$：$\mathbf{n}=(0,0,-1)$，$z=c$：$\mathbf{n}=(0,0,1)$，

所以 $\iint\limits_{\Sigma} f(x)dy\wedge dz=\iint\limits_{\substack{0\le y\le b\\0\le z\le c}} f(a)dydz-\iint\limits_{\substack{0\le y\le b\\0\le z\le c}} f(0)dydz=bc[f(a)-f(0)]$。

同理 $\iint\limits_{\Sigma} g(y)dz\wedge dx=\iint\limits_{\substack{0\le z\le c\\0\le x\le a}} g(b)dzdx-\iint\limits_{\substack{0\le z\le c\\0\le x\le a}} g(0)dzdx=ac[g(b)-g(0)]$，

$\iint\limits_{\Sigma} h(z)dx\wedge dy=\iint\limits_{\substack{0\le x\le a\\0\le y\le b}} h(c)dxdy-\iint\limits_{\substack{0\le x\le a\\0\le y\le b}} h(0)dzdx=ab[h(c)-h(0)]$。

因此 $I=bc[f(a)-f(0)]+ca[g(b)-g(0)]+ab[h(c)-h(0)]$。解答完毕。

3．设 S 为锥面 $z^2=x^2+y^2$ 位于 $0\le z\le \mathrm{h}$ 的那一部分，正法向向下。设 $\mathbf{v}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ 为流体运动的速度场。求流体在单位时间里通过定向曲面 S 由内向外的流量 Q，即求曲面积分 $Q=\iint\limits_{S}\mathrm{v}\cdot d\mathrm{S}$。

解：简单计算可知曲面（锥面）S 的单位法向 $\mathbf{n}=\pm\dfrac{(x,y,-z)}{\sqrt{2}z}$。由于 S 的正法向向下，由此可知，S 的单位正法向为 $\mathbf{n}=\dfrac{(x,y,-z)}{\sqrt{2}z}$。于是所求流量为

$Q=\iint\limits_{S}\mathbf{v}\cdot d\mathbf{S}=\iint\limits_{S}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}dS=\iint\limits_{\mathrm{S}}(x,y,z)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}z}(x,y,-z)dS==\dfrac{1}{\sqrt{2}}\iint\limits_{S}\dfrac{x^2+y^2-z^2}{z}dS=0$。

解答完毕。

4．记 S^+ 为园柱面 $S:x^2+y^2=1$ 位于 $0\le z\le 2$ 的部分，外法向为正，计算曲面积分 $I=\iint_{S^+}x(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

解法 1：记向量场 $\vec{V}=(x(y-z),0,x-y)$。由假设 S^+ 的单位正法向量 $\vec{n}=(x,y,0)$，当 $(x,y,z)\in S^+$。曲面 S 在柱面坐标下的方程为 $x=\cos\varphi$，$y=\sin\varphi$，$z=z$，$0\le\varphi\le 2\pi$，$0\le z\le 2$。记 $\vec{r}=(x,y,z)$。则 $\vec{r}_{\varphi}=(-\sin\varphi,\cos\varphi,0)$，$\vec{r}_z=(0,0,1)$。于是 $\vec{r}_{\varphi}\times\vec{r}_z=(\cos\varphi,\sin\varphi,0)$。这表明 $\vec{r}_{\varphi}\times\vec{r}_z$ 与 S^+ 的单位正法向量 $\vec{n}=(x,y,0)$ 一致。因此

$$I=\iint\limits_{S^+}\vec{V}\cdot d\vec{S}=\iint\limits_{0\le\varphi\le 2\pi,0\le z\le 2}\vec{V}(r(\varphi,z))\cdot\vec{r}_{\varphi}\times\vec{r}_z(\varphi,z)d\varphi dz=$$

$$=\iint\limits_{0\le\varphi\le 2\pi,0\le z\le 2}(\cos\varphi(\sin\varphi-z),0,\cos\varphi-\sin\varphi)\cdot(\cos\varphi,\sin\varphi,0)d\varphi dz=$$

$$= \iint\limits_{0\le\varphi\le 2\varphi, 0\le z\le 2} (\cos^2\varphi\sin\varphi - z\cos^2\varphi)d\varphi dz = -2\pi$$ 。

解法 2：记立体 $\Omega: x^2+y^2\le 1, 0\le z\le 2$ ， $S_1^+: x^2+y^2\le 1$ ， $z=0$ ，正法向向下，$S_2^+: x^2+y^2\le 1$ ， $z=2$ ，正法向向上。根据 Gauss 公式得

$$\iint_{\partial\Omega}\vec{V}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S = \iiint_{\Omega}\nabla\cdot\vec{V}\mathrm{dxdydz} = \iiint_{\Omega}[(y-z)\mathrm{dxdydz} = -\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^2\mathrm{d}z = -2\pi$$

$\iint_S\vec{V}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S = -2\pi - \iint_{S_1}\vec{V}\cdot\vec{n}\mathrm{dS} - \iint_{S_2}\vec{V}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S$. 简单计算得到 $\iint_{S_1}\vec{V}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S = 0$ ， $\iint_{S_2}\vec{V}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S = 0$ 。因此原积分 $I=-2\pi$ 。解答完毕。

二．Green 定理的应用。

1．（利用 Green 定理证明平面面积变换公式）回忆平面面积变换定理:
设 φ 是平面域上的微分同胚，即 φ 是 1-1 映射且其逆也是连续可微的. 假设开区域 D_0 及其边界 ∂D_0 均属于 φ 的定义域。记开区域 D_0 在映射 φ 下的象为 D_1 ，即 $D_1=\varphi(D_0)$ 。根据曲面面积公式知 D_1 的面积公式为 $|D_1| = \iint\limits_{D_0}\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$, 这里 $x=x(u,v)$ ， $y=y(u,v)$ 表示映射 φ 的两个分量函数。试利用 Green 公式来证明上述面积变换公式。

证明：设开域 D_0 的边界 $\partial\mathrm{D}_0$ 有正则的参数表示 $\mathrm{u}=u(t)$ ， $\mathrm{v}=v(t)$ ， $a\le t\le b$ ，并且 $\partial\mathrm{D}_0$ 的正向（逆时针）与参数 t 增加的方向一致，那么区域 D_1 的边界 $\partial\mathrm{D}_1$ 有相应的参数表示

$x=x(t)=x(u(t),v(t))$ ， $y=y(t)=y(u(t),v(t))$ ， $a\le t\le b$ 。

这是因为微分同胚映内点为内点，映边界点为边界点。因此 $\partial\mathrm{D}_1=\varphi$（$\partial\mathrm{D}_0$）。假设映射 φ 保持定向，即它的 Jacobian 行列式在其定义域上恒大于零，即 $\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}>0$ ，$\forall(u,v)\in D_0$ ，则 $\partial\mathrm{D}_1$ 的正向与参数 t 增加的方向一致. 于是根据 Green 公式提供的面积公式得 D_1 的面积为

$$|\mathrm{D}_1| = \oint\limits_{\partial\mathrm{D}_1} xdy = \int\limits_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} x(t)y'(t)dt = \int\limits_a^b x(t)[y_u u'(t)+y_v v'(t)]dt = \oint\limits_{\partial D_0} xy_u du + xy_v dv$$ 。

对上式最后一个积分应用 Green 公式得

$$|D_1| = \iint_{D_0} \left([xy_v]_u - [xy_u]_v\right) dudv = \iint_{D_0} (x_u y_v - x_v y_u) dudv = \iint_{D_0} \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} dudv 。$$

注意这里我们要求微分同胚φ为二阶连续可微。证毕.

2．计算线积分 $I = \oint_{L^+} \dfrac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2}$，其中$L^+$为$|x| + |y| = 1$，逆时针为正向。

解：记$P(x,y) = \dfrac{-y}{4x^2 + y^2}$，$Q(x,y) = \dfrac{x}{4x^2 + y^2}$。不难验证$Q_x = \dfrac{y^2 - 4x^2}{4x^2 + y^2} = P_y$。因此向量场$(P,Q)$是无旋场。记$L_\varepsilon^+ : 4x^2 + y^2 = \varepsilon^2$，逆时针为正向。在由正方形$L^+$和椭圆$L_\varepsilon^+$所围成的有界域上，应用 Green 公式的旋度形式得

$\oint_{L^+} \dfrac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2} = \oint_{L_\varepsilon^+} \dfrac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2} = \dfrac{1}{\varepsilon^2} \oint_{L_\varepsilon} xdy - ydx$。对线积分$\oint_{L_\varepsilon} xdy - ydx$再应用 Green 公式的旋度形式得$I = \dfrac{1}{\varepsilon^2} \oint_{L_\varepsilon} xdy - ydx = \dfrac{1}{\varepsilon^2} \iint_{4x^2 + y^2 \le \varepsilon^2} 2dxdy = \pi$。解答完毕。

3．设$D \subseteq R^2$为有界开区域，它的边界∂D是逐段光滑曲线，$\vec{n}$是∂D的外单位法向量，设函数$f(x,y) \in C^1(\overline{D})$，且$f(x,y)$在$D$内为调和函数，即$\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \equiv 0$，$\forall (x,y) \in D$。求证：

(i) $\oint_{\partial D} \dfrac{\partial f}{\partial n} dl = 0$；

(ii) $\oint_{\partial D} f \dfrac{\partial f}{\partial n} dl = \iint_D |\nabla f|^2 dxdy$；

(iii) 若在边界∂D上，$f(x,y) \equiv 0$，求证$f(x,y) \equiv 0$，$\forall (x,y) \in D$。

解：(i)由于$\Delta f = 0$, $\oint_{\partial D} \dfrac{\partial f}{\partial n} dl = \oint_{\partial D} \nabla f \cdot ndl = \iint_D \Delta f \, dxdy = 0$。（应用 Green 公式散度形式）。

(ii) $\oint_{\partial D} f \dfrac{\partial f}{\partial n} dl = \oint_{\partial D} f \nabla f \cdot ndl = \iint_D [(ff_x)_x + (ff_y)_y] dxdy = \iint_D \left[f(f_{xx} + f_{yy}) + f_x^2 + f_y^2\right] dxdy$

$= \iint_D |\nabla f|^2 dxdy$。（这里用到了假设$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = 0$。）

(iii) 由(ii)的结论可知，若 $f(x,y)\equiv 0$，$\forall(x,y)\in\partial D$，则 $\nabla f\equiv 0$，$\forall(x,y)\in D$。

即 $\dfrac{\partial f}{\partial x}\equiv 0$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}\equiv 0$，$\forall(x,y)\in D$，所以 $f(x,y)\equiv const$，从而 $f(x,y)\equiv 0$，

$\forall(x,y)\in D$。证毕。

4．已知函数 $f(x)$ 在整个实轴 R 上二次连续可微，满足 $f'(0)=0$，且使得微分式

$[f(x)+y(e^x+x-f(x))]dx+f'(x)dy$ 是全微分，求 $f(x)$，并使由 $A(-1,1)$ 到 $B(1,0)$ 逐段光滑曲线 L 上积分的值为 $\dfrac{\pi^2}{8}$。

解：由假设微分式 $[f(x)+y(x-f(x))]dx+f'(x)dy$ 是全微分，故

$f''(x)=[f(x)+y(x-f(x))]_y$，即 $f''(x)+f(x)=x$。这是关于未知函数 $f(x)$ 的二阶常系数线性常微分方程。根据线性 ODE 一般理论知，对应的齐次方程 $f''(x)+f(x)=0$ 通解为 $c_1\cos x+c_2\sin x$。另一方面不难看出方程 $f''(x)+f(x)=x$ 有一个特解 x。因此原方程的通解为 $f(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+x$。关于函数 $f(x)$ 的两个条件，条件 $f'(0)=0$，以及条件由 $A(-1,1)$ 到 $B(1,0)$ 逐段光滑曲线 L 上积分的值为 $\dfrac{\pi^2}{8}$，可以唯一确定两个常数 c_1，c_2。对 $f(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+x$ 求导得

$f'(x)=-c_1\sin x+c_2\cos x+1$，$f'(0)=c_2+1=0$，$c_2=-1$。于是

$f(x)=c_1\cos x-\sin x+x$，$f'(x)=-c_1\sin x-\cos x+1$。

$$[f(x)+y(x-f(x))]dx+f'(x)dy=d[c_1\sin x+\cos x+\frac{1}{2}x^2+y(-c_1\sin x-\cos x+1)]$$

由 $A(0,0)$ 到 $B(\dfrac{\pi}{2},\pi)$ 积分得 $[c_1+\dfrac{\pi^2}{8}+\pi(-c_1+1)]-1=c_1(1-\pi)+\dfrac{\pi^2}{8}+\pi-1=\dfrac{\pi^2}{8}$

得 $c_1=1$。于是 $f(x)=\cos x-\sin x+x$。解答完毕。

5. 设 $f(x)$ 是实轴上处处为正的连续函数，D 为圆心在原点的单位开圆盘。

证明：(i) $\int\limits_{\partial D^+} xf(y)dy - \dfrac{y}{f(x)}dx = \int\limits_{\partial D^+} -yf(x)dx + \dfrac{x}{f(y)}dy$；

(ii) $\int\limits_{\partial D^+} xf(y)dy - \dfrac{y}{f(x)}dx \ge 2\pi$ 。

证明：对等式(i)的两边线积分，分别应用 Green 公式的旋度形式得

$$\text{左边} = \iint\limits_{D}\left[f(y) + \frac{1}{f(x)}\right]dxdy\text{，右边} = \iint\limits_{D}\left[f(x) + \frac{1}{f(y)}\right]dxdy\text{。}$$

由于积分区域为单位圆盘，故上述两个二重积分相等。因此等式(i)成立。

注：对上任何一个二重积分中，作变量代换 $x = v$， $y = u$ 就得到另一个二重积分。

(ii) 类似，我们不难看出 $\iint\limits_{D} f(x)dxdy = \iint\limits_{D} f(y)dxdy$，$\iint\limits_{D} \dfrac{dxdy}{f(x)}dxdy = \iint\limits_{D} \dfrac{dxdy}{f(y)}$。

这表明，在如下两个二重积分中，

$$\iint\limits_{D}\left[f(y) + \frac{1}{f(x)}\right]dxdy \quad \text{和} \quad \iint\limits_{D}\left[f(x) + \frac{1}{f(y)}\right]dxdy\text{。}$$

将被积函数中的变元 x 换为 y，并不改变积分的值。因此

$$\int\limits_{\partial D} xf(y)dy - \frac{y}{f(x)}dx = \iint\limits_{D}\left[f(y) + \frac{1}{f(x)}\right]dxdy = \iint\limits_{D}\left[f(y) + \frac{1}{f(y)}\right]dxdy\text{。}$$

由于 $f(y) + \dfrac{1}{f(y)} \ge 2$。 因此 $\int\limits_{\partial D} xf(y)dy - \dfrac{y}{f(x)}dx \ge \iint\limits_{D} 2dxdy = 2\pi$ 。证毕。