第一讲 复数与复线性空间

为什么要用复数 / 复数的特点：

每个多项式在复数里都有根

$x^2+1=0$ 在实数里没有根

因为所有实数的平方都是非负的，所以 $x^2+1 \geq 0+1 \geq 1 \neq 0$

引入 $i=\sqrt{-1}$， $i^2=-1$

1. 复数的定义与基本运算

定义1.1 复数是形如 $a+bi$ 的数，其中 a,b 为实数

复数的加法：$(3+2i)+(1-i)=4-i$

复数的乘法：$(3+2i)\times(1-i)=3+2i-3i-2i^2$

$$=3+2i-3i+2=5-i$$

a 为 $(a+bi)$ 的实部，记作 $a=\underbrace{\mathrm{Re}}_{\text{Real part}}(a+bi)$

b 为 $(a+bi)$ 的虚部，记作 $b=\underbrace{\mathrm{Im}}_{\text{Imaginary part}}(a+bi)$

一个实数 a，可以看作 $a+0i$，即一个虚部为0的复数

记: $\mathbb{R} := \{$所有实数的集合$\}$

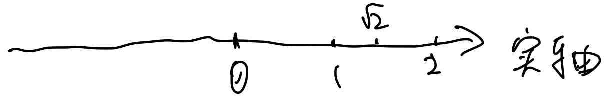
$\mathbb{C} := \{$所有复数的集合$\}$

我们有 $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

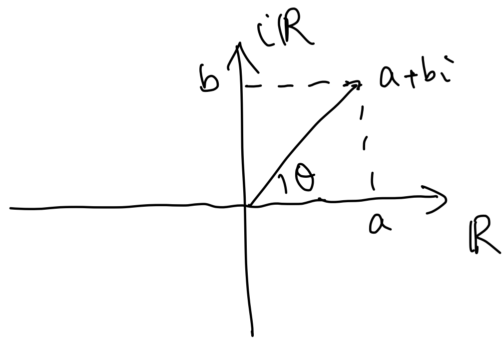
包含于

2. 复数的几何意义.

$\mathbb{R} \xleftrightarrow{1:1对应}$



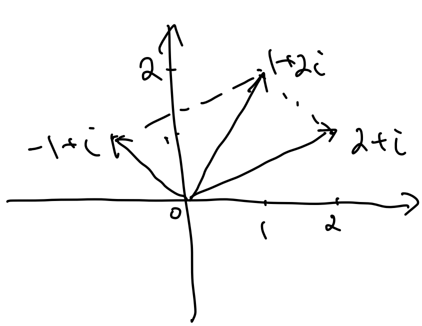
$\mathbb{C} \xleftrightarrow{1:1对应}$



加法的几何意义: 横坐标相加，纵坐标相加

= 向量的加法

例1.



$1+2i = (2+i) + (-1+i)$

极坐标（对应直角坐标 $z=a+bi$）

令 $r=$ 复数的模长 $|z|:=\sqrt{a^2+b^2}$,

$\theta=$ 复数的辐角。

如何用 r,θ 表示 $a+bi$？

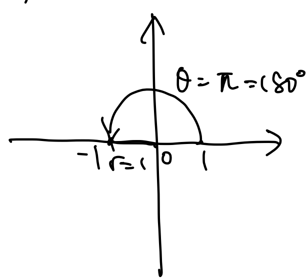
欧拉公式: $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

可由此得出复数 z 的极坐标形式:

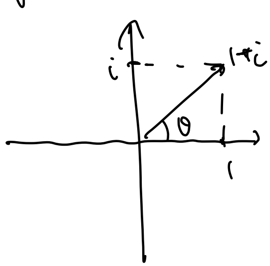
$$z=a+bi=r\left(\frac{a}{r}+i\frac{b}{r}\right)=r\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$=r\cos\theta+i\sin\theta=re^{i\theta}$$

例2: $r=1$, $\theta=\pi$, $e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$



例3: 将 $z=1+i$ 写成极坐标形式.



$r=\sqrt{1^2+1^2}=2$

$\theta=45=\frac{\pi}{4}$,

$z=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

乘法的几何意义：

若 $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$，$z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$，

那么 $z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

即两个复数相乘 ⇒ 模长相乘，辐角相加.

极坐标的应用：

和差角公式：

$\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta') = e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \cdot e^{i\theta'}$

$= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta')$

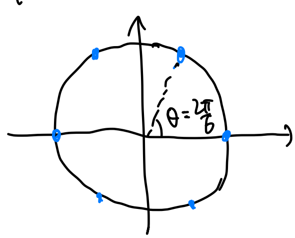
$= \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta')$

得： $\cos(\theta+\theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'$

$\sin(\theta+\theta') = \cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta'$

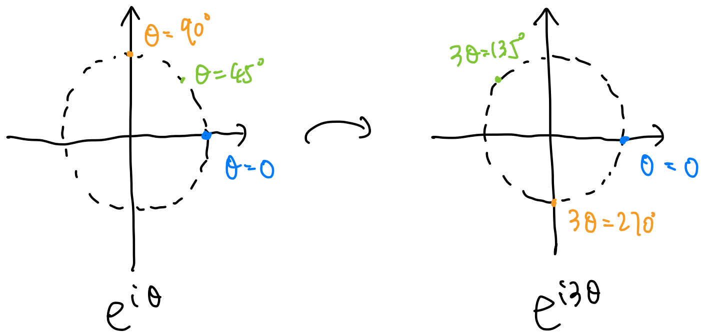
单位根：
- 单位圆上 n 等分的点 （几何上）
- $z^n = 1$ 的解 （代数上）

例4： $n=6$ 的单位根：



$e^{\frac{2\pi i}{6}}$， $i = 0, 1, \ldots, 5$

例5：当θ从0变至2π时，画出$e^{i3\theta}$的轨迹：



$e^{i3\theta}$沿单位圆绕3圈。

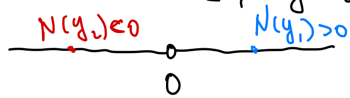
3. 代数基本定理。

性质1.2：令 $p(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 为一实系数多项式，且n为奇数。那么$p(x)$有一实根。

证明：(1) 对于任意 $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 中的点y，定义

(复杂版)

$$N(y)=\begin{cases}1, & y>0\\ -1, & y<0\end{cases}$$



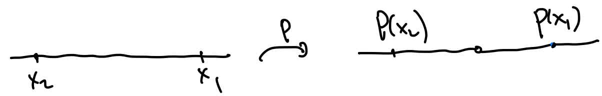
(2) 令两点 $y_1,y_2\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$，满足 $N(y_1)\neq N(y_2)$

那么任意在$\mathbb{R}$中将y_1变为y_2的连续变换必经过原点。(中值定理)

(3) 当 $|x|\gg 0$，$|x^n|>|a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0|$，$p(x)\sim x^n$

n为奇数，那么 $x_1 >> 0$ 时，$p(x_1) > 0$

当 $x_2 << 0$ 时，$P(x_2) < 0$

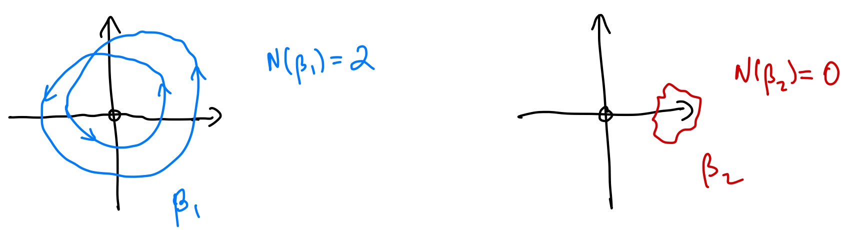
(4) 

当 $x_2 \to x_1$ 时 $p(x_2) \to p(x_1)$，$N(p(x_1)) = 1 \neq N(p(x_2)) = -1$

由(2)可知：存在 x_0，使得 $p(x_0) = 0$.

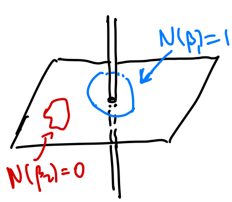
定理1.3（代数基本定理）令 $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ 为一复系数多项式，那么 $p(z)$ 在复数中有一个根.

"证明"：(1) 对于任意 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 中的闭合曲线 β，定义绕圈数 $N(\beta)$ 为该曲线(逆时针)绕原点的圈数



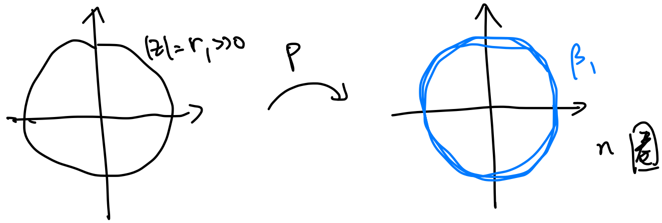
(2) 定理：令 β_1, β_2 为 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 中的闭合曲线，满足 $N(\beta_1) \neq N(\beta_2)$，那么任意在 $\mathbb{C}$ 中将 β_1 变为 β_2 的连续变换必经过原点.

"证明"：



(3) 当 $|z|=r_1 \gg 0$ 时，$|z^n| \gg |a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0|$，

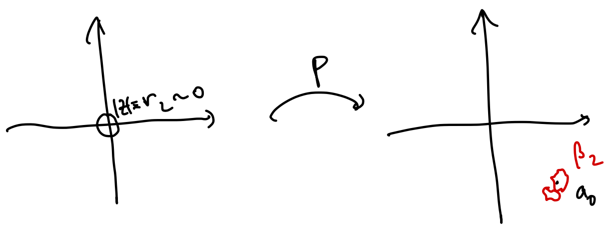
$P(z)\sim z^n$，所以 $\beta_1 := P(|z|=r_1)$ 的绕圈数 $N(\beta_1)=n$.（见例5）



当 $|z|=r_2\sim 0$ 时，$|a_0| \gg |z^n+\cdots+a_1z|$

$P(z)\sim a_0$（可以假设 $a_0\neq 0$，若 $a_0=0$，那么 $z=0$ 为一个根）

所以 $\beta_2 := P(|z|=r_2)$ 的绕圈数 $N(\beta_2)=0$



(4) 当 r_1 连续变至 r_2 时，β_1 连续变至 β_2，且 $N(\beta_1)\neq N(\beta_2)$

由(2)可知，存在 $r\in[r_1,r_2]$，$|z_0|=r$，使得 $P(z_0)=0$.