



# Review

- Leibnitz判别法

$$a_n \searrow 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n \text{ 收敛.}$$

- Dirichlet判别法

$$\left. \begin{array}{l} \text{数列}\{a_n\}\text{单调趋于}0; \\ \left| \sum_{k=1}^n b_k \right| \leq M, \forall n; \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} a_n b_n \text{ 收敛.}$$



- Abel判别法

$$\left. \begin{array}{l} \text{数列}\{a_n\}\text{单调且有界,} \\ \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \text{收敛} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} a_n b_n \text{收敛.}$$

- Taylor展开在级数判敛中的应用
- 非负项级数的比较、比值判敛法不适用于一般项级数



- 无穷和运算的结合律

(1)  $\sum a_n$  收敛  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} & (a_1 + \cdots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2}) \\ & \quad + \cdots + (a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k}) + \cdots \end{aligned} \quad \text{收敛到同一和.}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & (a_1 + \cdots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2}) \\ & \quad + \cdots + (a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k}) + \cdots \end{aligned}$$

收敛, 且同一括号中各项有相同的正负号

$\Rightarrow \sum a_n$  也收敛到同一和.



## • 无穷和运算的交换律

**Thm**  $\sum a_n$  绝对收敛

$\Rightarrow$  任意重排  $\sum a'_n$  也绝对收敛到同一和.

**Thm** (Riemann定理)  $\sum a_n$  条件收敛, 则

$\forall \lambda \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}, \exists$  重排  $\sum a'_n, s.t., \sum a'_n = \lambda.$



## Chap6. 函数项级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots,$$

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x),$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \triangleq \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x).$$

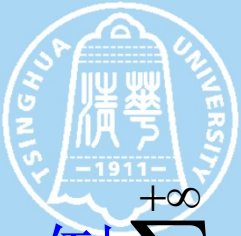


## § 1. 函数项级数的收敛性

### 1. 函数项级数的逐点收敛性

**Def.** 若  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x_0)$  收敛, 则称  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$  在  $x_0$  收敛, 称  $x_0$  为函数项级数的**收敛点**; 所有收敛点构成的集合称为函数项级数的**收敛域**.

**Def.** 若  $\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(x_0)|$  收敛, 则称  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$  在  $x_0$  绝对收敛.



例.  $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, x \in (-1, 1).$

例.  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x, x \in \mathbb{R}.$

**Proof.** 任意取定  $x \in \mathbb{R}$ , 存在  $\xi$  介于 0 与  $x$  之间, s.t.

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| = \left| \frac{e^{\xi} x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \frac{e^{|x|} |x|^{n+1}}{(n+1)!} \triangleq a_n.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0, \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ 收敛}, \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0, \text{ 故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = e^x. \square$$



## 2. 函数项级数的一致收敛性

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x_0) = S(x_0) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0) = S(x_0)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f_k(x_0) = S(x_0)$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon, x_0), s.t.,$$

$$\left| \sum_{k=1}^n f_k(x_0) - S(x_0) \right| < \varepsilon, \quad \forall n > N.$$





$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x_0) \text{ 收敛}$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon, x_0), s.t.,$$

$$\left| S_{n+p}(x_0) - S_n(x_0) \right| < \varepsilon, \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}.$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon, x_0), s.t.,$$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x_0) \right| < \varepsilon, \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}.$$

**Remark.** 若以上分析中  $N = N(\varepsilon)$ , 与  $x_0$  无关, 则得到函数列的一致收敛性和函数项级数的一致收敛性.



**Def.** 称函数列  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$  在  $x \in I$  上一致收敛, 若  $\exists f$ ,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon), s.t.,$$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall n > N, \forall x \in I.$$

此时, 也称  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$  在  $x \in I$  上一致收敛到  $f(x)$ .

**Thm (Cauchy准则)**  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$  在  $x \in I$  上一致收敛

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon), s.t.,$$

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in I.$$



**Remark.**  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$  在  $x \in I$  上一致收敛到  $f(x)$

$\Rightarrow \{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$  在  $x \in I$  上逐点收敛到  $f(x)$ .

**Remark.**

$\left. \begin{array}{l} \{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty} \text{ 在 } x \in I \text{ 上逐点收敛到 } f(x) \\ \{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty} \text{ 在 } x \in I \text{ 上一致收敛} \end{array} \right\}$

$\Rightarrow \{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$  在  $x \in I$  上一致收敛到  $f(x)$ .



**Def.**  $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ , 若  $\{S_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$  在  $x \in I$  上一致收敛

(到  $S(x)$ ), 则称  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$  在  $x \in I$  上一致收敛(到  $S(x)$ ).

**Thm.**  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$  在  $x \in I$  上一致收敛

$\Leftrightarrow \exists S(x), \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon), s.t.,$

$$\left| \sum_{k=1}^n f_k(x) - S(x) \right| < \varepsilon, \quad \forall n > N, \forall x \in I.$$

$\Leftrightarrow$  (Cauchy准则)  $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon), s.t.,$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon, \quad \forall n > N, \forall p \geq 1, \forall x \in I.$$



例.  $f_n(x) = x^n$ , 证明  $\{f_n(x)\}$  在  $(0,1)$  上不一致收敛.

**Proof.** 取  $\varepsilon_0 = \frac{1}{4}$ ,  $\forall N \in \mathbb{N}$ ,  $\exists n = N + 1, \exists p = N + 1$ ,

$$\exists x_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{N+1}} \in (0,1), \text{ s.t.},$$

$$|f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)| = |x_0^{n+p} - x_0^n|$$

$$= x_0^n (1 - x_0^p) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \varepsilon_0. \square$$

**Remark.**  $f_n(x) = x^n$  在  $[0,1]$  上收敛到  $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1); \\ 1, & x = 1. \end{cases}$

清华大学



例.  $f_n(x) = nx^n(1-x)$ . 证明  $\{f_n(x)\}$  在  $[0,1]$  上不一致收敛.

**Proof.** 首先证  $\{f_n(x)\}$  在  $[0,1]$  上逐点收敛到 0. 事实上,

$$f_n(0) = f_n(1) = 0.$$

$$x \in (0,1) \text{ 时, } f_n(x) = \frac{n(1-x)}{(1/x)^n} \rightarrow 0, \text{ 当 } n \rightarrow +\infty \text{ 时.}$$

再证  $\{f_n(x)\}$  在  $[0,1]$  上非一致收敛. 若不然, 则  $\{f_n(x)\}$  在  $[0,1]$  上一致收敛到 0.

$$f_n(x) = x^n(n - nx) \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1},$$

当  $x = n - nx$ , 即  $x = \frac{n}{n+1}$  时等号成立.



$$\text{令 } g(n) = \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n+1} = \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right)^{n+1}, \text{ 则}$$

$$g(n) \rightarrow \frac{1}{e}, \text{ 当 } n \rightarrow +\infty \text{ 时.}$$

$$\text{取 } \varepsilon_0 = \frac{1}{2e}, \text{ 则 } \forall N \in \mathbb{N}, \exists n_0 > N, \text{ s.t. }, g(n_0) > \varepsilon_0.$$

$$\text{取 } x_0 = \frac{n_0}{n_0 + 1}, \text{ 则 } f_{n_0}(x_0) = g(n_0) > \varepsilon_0.$$

与  $\{f_n(x)\}$  在  $[0,1]$  上一致收敛到 0 矛盾.  $\square$



例.  $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$  在  $(-1,1)$  上非一致收敛.

Proof. 
$$\left| \sum_{k=0}^n x^k - \frac{1}{1-x} \right| = \left| \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - \frac{1}{1-x} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x}.$$

取  $\varepsilon_0 = 1, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n_0 = N+1, x_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{N+2}} \in (\frac{1}{2}, 1), s.t.,$

$$\left| \sum_{k=1}^{n_0} x_0^k - \frac{1}{1-x_0} \right| = \frac{|x_0|^{n_0+1}}{1-x_0} > \frac{1/2}{1/2} = 1. \square$$





例.  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + \sin x}$  在  $\mathbb{R}$  上一致收敛.

Proof.  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + \sin x}$  为交错级数,  $\frac{1}{n + \sin x} \downarrow 0$ ,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{(-1)^k}{k + \sin x} \right| \leq \frac{1}{n+1 + \sin x} \leq \frac{1}{n}.$$

于是,  $\forall \varepsilon > 0, \exists N = \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 1, \forall n > N, \forall x \in \mathbb{R}$ , 有

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{(-1)^k}{k + \sin x} \right| < \varepsilon. \text{ 故 } \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + \sin x} \text{ 在 } \mathbb{R} \text{ 上一致收敛. } \square$$



### 3. 函数项级数一致收敛的判别法

Thm(Weierstrass判别法) 若非负项级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$  收敛, 且

$$|f_n(x)| \leq M_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I,$$

则  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$  在  $I$  上一致收敛.

Proof.  $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| \leq \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} M_k \right|, \quad \forall x \in I, \forall n, p. \square$



Thm(Dirichlet判别法) 若

(1) 函数列  $\{a_n(x)\}$  对任意固定的  $x \in I$  都单调, 且在  $x \in I$  上**一致**收敛到0;

(2)  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n(x)$  的部分和函数列在  $x \in I$  上**一致**有界, 即

$$\exists M > 0, s.t. \left| \sum_{k=1}^n b_k(x) \right| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I;$$

则  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)b_n(x)$  在  $x \in I$  上一致收敛.



## Thm(Abel判别法) 若

(1) 函数列  $\{a_n(x)\}$  对任意固定的  $x \in I$  都单调, 且在  $x \in I$  上**一致**有界, 即存在  $M > 0, s.t.$

$$|a_n(x)| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I;$$

(2)  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n(x)$  在  $x \in I$  上**一致**收敛;

则  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)b_n(x)$  在  $x \in I$  上一致收敛.



例.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^2}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{1+n^4 x^2}$  在  $\mathbb{R}$  上一致收敛.

Proof.  $\forall x \in \mathbb{R},$

$$\left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}, \quad \left| \frac{x}{1+n^4 x^2} \right| \leq \frac{1}{2n^2},$$

由 Weierstrass 判别法知,  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$  与  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{1+n^4 x^2}$  在  $\mathbb{R}$  上一致收敛.  $\square$



例.  $\alpha > 2$ , 则  $\sum_{n=1}^{+\infty} x^\alpha e^{-nx^2}$  在  $[0, +\infty)$  上一致收敛.

**Proof.** 令  $f_n(x) = x^\alpha e^{-nx^2}$ , 则  $f_n(x) > 0, \forall x > 0$ , 且

$$f_n(0) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = 0, f'_n(x) = e^{-nx^2} (\alpha x^{\alpha-1} - 2nx^{\alpha+1}),$$

可知  $x = \sqrt{\alpha/2n}$  是  $f_n(x)$  在  $[0, +\infty)$  上的最大值点,

$$0 \leq f_n(x) \leq f_n(\sqrt{\alpha/2n}) = \left(\sqrt{\alpha/2}\right)^\alpha \frac{1}{n^{\alpha/2}} e^{-\alpha/2}, \forall x \geq 0.$$

$\alpha > 2$ , 故  $\sum_{n=1}^{+\infty} x^\alpha e^{-nx^2}$  在  $[0, +\infty)$  上一致收敛 (Weierstrass).  $\square$



例.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$  在  $[\delta, 2\pi - \delta]$  ( $0 < \delta < \pi$ ) 上一致收敛.

Proof.  $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$  与  $x$  无关,  $\downarrow 0$ .

$$\left| \sum_{n=1}^m \sin nx \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \leq \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}}, \quad \forall x \in [\delta, 2\pi - \delta], \forall m \in \mathbb{N}.$$

故  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$  在  $[\delta, 2\pi - \delta]$  ( $0 < \delta < \pi$ ) 上一致收敛 (Dirichlet).  $\square$

Question.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$  在  $[0, 2\pi]$  上是否一致收敛?



例.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$  在  $[0, 2\pi]$  上非一致收敛.

Proof. 用Cauchy准则.

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sin kx}{k} \right|_{x=1/2n} &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sin(k/2n)}{k} \\ &\geq \sin \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

故  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$  在  $[0, 2\pi]$  上不一致收敛.  $\square$





例.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{\sqrt{n(n+x)}}$  在  $x \in [0, +\infty)$  上一致收敛.

Proof. 
$$\frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{\sqrt{n(n+x)}} = \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n} \cdot \left( 1 / \sqrt{1 + \frac{x}{n}} \right) \triangleq a_n \cdot b_n(x).$$

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  收敛,  $a_n$  与  $x$  无关, 于是  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  关于  $x$  一致收敛.

$x \in (0, +\infty), |b_n(x)| \leq 1, \{b_n(x)\}$  一致有界, 关于  $n$  单调.

由 Abel 判别法,  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{\sqrt{n(n+x)}}$  在  $x \in [0, +\infty)$  上一致收敛.  $\square$



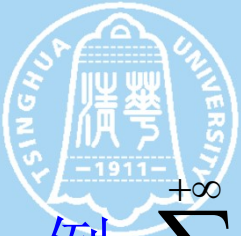
例.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{1}{2^n x}$  在  $x \in (0, +\infty)$  上绝对收敛性与一致收敛性?

解:  $\forall x \in (0, +\infty), \left| \sin \frac{1}{2^n x} \right| \leq \frac{1}{2^n x}$ , 因此  $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{1}{2^n x}$  在  $x \in (0, +\infty)$  上绝对收敛.

取  $\varepsilon_0 = 1, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n_0 = N + 1, x_0 = \frac{1}{2^N \pi}, s.t.,$

$$\left| \sin \frac{1}{2^{n_0} x_0} \right| = \left| \sin \frac{\pi}{2} \right| = 1 = \varepsilon_0.$$

故  $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{1}{2^n x}$  在  $x \in (0, +\infty)$  上非一致收敛 (Cauchy).  $\square$



例.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x^2 + n}$  在  $x \in (-\infty, +\infty)$  上绝对收敛性与一致收敛性?

解: 给定  $x$ ,  $\left| \frac{(-1)^n}{x^2 + n} \right| = \frac{1}{x^2 + n} \sim \frac{1}{n}, n \rightarrow +\infty$  时. 故  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x^2 + n}$

在  $\mathbb{R}$  上点点非绝对收敛.

$\{(-1)^n\}$  的部分和关于  $x \in \mathbb{R}$  一致有界;  $\left\{ \frac{1}{x^2 + n} \right\}$  在  $x \in \mathbb{R}$

上关于  $n$  单调, 一致收敛到 0; 故  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x^2 + n}$  在  $x \in (-\infty, +\infty)$  上

一致收敛 (Dirichlet).  $\square$



**Remark.** 以上两个例子说明:绝对收敛性与一致收敛性没有必然的联系.



## 作业：习题6.1

No. 2 (单), 3 (单), 6, 9, 10



附录.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \ln 2.$

Proof. Step1.  $1/(n+1) < \ln(1+1/n) < 1/n.$

Step2. 令  $x_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n - \ln n$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在.

事实上,  $x_{n+1} - x_n = 1/(n+1) - \ln(1+1/n) < 0$ ,  $x_n \downarrow$ ,

$$\begin{aligned} x_n &> \ln(1+1) + \ln(1+1/2) + \cdots + \ln(1+1/n) - \ln n \\ &= \ln(n+1) - \ln n > 0. \end{aligned}$$

Step3.  $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = (x_{2n} + \ln 2n) - (x_n + \ln n) = x_{2n} - x_n + \ln 2 \rightarrow \ln 2.$