教学大纲

0.1 行政信息

类名：线性代数 2(E)
上课时间：19：20-20：55
上课地点：4-4106
指导老师：杨义龙(YMSC)
邮箱：yy26@mail.tsinghua.edu.cn
办公室：金春园西 137
办公时间：下午 5 点至下午 6 点
TA：洛维・辛哈尔
助教办公室：TBD
助教办公时间：TBD
讨论会议时间：TBD
讨论会议地点：TBD
级微信组：TBD

0.2 先决条件

你应该掌握以下材料和技能：

1. 线性组合和线性依赖。
2. 高斯消除和 LU 分解。
3. 行和列操作，以找到减少的行 Echelon 形式，解决线性系统，并找到决定因素。
4. 矩阵反演与乘法。
5. 线性代数的基本定理(秩-空性定理和矩阵的四个基本子空间之间的正交性。)
6. 克-施密特正交化和 QR 分解。
7. 预测和正交预测。
8. 基的变化和基的正交变化。
9. 特征值和特征向量。
10. 对角化性的标准。
11. 实对称矩阵的谱定理。
12. 奇异值分解。

在上面列出的内容中，我想特别强调，即使我们不需要在这个类中进行奇异值分解，但您知道这一点可能是非常重要的。 它有大量的应用程序，可能会出现在您的未来。

如果你不知道奇异值分解，你可以阅读吉尔伯特·斯特朗关于线性代数的介绍，第七章。（如果你愿意的话，还有麻省理工学院开放课程的在线视频。 ）

0.3 课堂内容

教科书：

我的讲稿。 今年的课程将随着我们班的发展而更新，但请随时查看去年的笔记。

我的旧讲稿写在 2019 年春季。

[OV]2020 年春季的在线视频，在 COVID-19 大流行期间制作。

可选教材：

Gilbert Strang，第五版线性代数导论。 麻省理工学院使用的线性代数教科书。 （大学书店）这不是主要的教科书，但我们将使用其中的一些部分。

Sergei Treil，线性代数做错了。 布朗大学用于荣誉线性代数课的线性代数教科书，以及我大一时使用的线性代数教科书。 （作者在网上免费提供。） 我们将从其中使用一些部分。

谢尔顿·阿克斯勒，线性代数。 数学专业的大线性代数教科书。 有时候有点太硬了。

Nicholas J Higham，矩阵的函数：理论与计算。 前两章是我们所需要的。

雷·M·鲍文和 C·C·王，矢量和传感器概论。 对类的张量部分很好。

内容结构：

1. 复杂矩阵(GSCH9)
2. 约旦普通表格(ST CH9，SA CH8)
3. 矩阵分析(NHch1)
4. 双和张量(LADWCH8 和讲稿)
5. （可选）？？ 如果我们有时间的话。

0.4 级

30%的家庭作业，30%的中期，30%的期末，10%的项目。

家庭作业：家庭作业通常应该每周到期。 试着用英语写作，但我们并没有真正测试你的英语能力，如果你真的在努力表达自己，如果你让一些汉语滑动，那就完全好了。

所有的答案都必须用证据来证明，除非特别地被告知不要。 校对不需要严谨，但你的工作是让评分者清楚你的推理。 平地机不应该敲他/她的头试图破译你的逻辑。 欢迎您来找我或助教进行评分纠纷。

就截止日期而言，我通常很随和，但我保留拒绝任何迟交的权利。

期中：你把它带回家，做两个星期，然后把它们还给你。 有点像光荣的家庭作业，但你必须按时交。 问题当然会很难解决。 你可能会掉一些头发。

期末考试：我们上节课的开卷期末考试。 （这所大学没有为像我们这样的“特殊”班分配标准的期末考试时间。） 时间暂定为 7PM-10PM。 这将比中期更容易和更标准化。

项目：TBD。 大多数情况下，这将是一些销售学习项目。

合作：

我认为压力对所有的学习努力都是有害的，在课堂环境中，竞争是毫无意义的，因为我们都有相同的目标去学习。 作为一般原则，我鼓励各种合作。

理想情况下，我希望你在我提出这些问题时，尽快看待它们，并首先独立思考。 你不需要马上做。 先看看他们，稍微想想，也许睡一两天。 正如你从评分政策中看到的，我尽了最大的努力来尽量减少你的压力，这样你就可以花时间思考它们。 有些问题是设计的，所以你可能需要几天的时间来解决。 过了一两天，如果你还不知道答案，请随时向你的同学寻求合作。

我鼓励在家庭作业、专业考试甚至带回家的期中考试上进行合作。 然而，你必须遵守以下规则：

1. 你必须用你自己的话把每一只手放在你自己的工作中。
2. 你必须理解你写的一切。（如果你不假思索地抄袭了你朋友的错误答案，那很可能违反了这条规则。 ）
3. 你需要写下你的合作者的名字。
4. 不遵守规则 2 和规则 3 将被视为剽窃。
5. 与不在这个班的人（如数学研究生）的合作是不被禁止的，但不推荐。 如果你选择，那么也写下他们的名字。

0.5 课堂政策

1. 你可以在课堂上睡觉，吃饭，喝酒，只要没有其他同学对它视而不见。（除非学校官员前来观察。 那就请在你最好的行为眨眼眨眼眨眼。 ）
2. 我们不记录出勤情况，但来上课显然是强烈推荐的，特别是因为我一直做额外的事情，他们将被测试。
3. 上课时你可以不举手就说话或打断我。 如果我的写作、演讲或解释不知何故使你感到困惑，你说出来是非常令人钦佩的。
4. 尊重你的同学。 这意味着在课堂上把你的手机调成振动；当你的同学在课堂上提出问题时，钦佩他们，而不是评判他们；当被要求合作时，假设他们是称职的，想要学习，并耐心地与他们解释和讨论。 不要侮辱你的同学，只是把你的答案扔给他们，好像他们不值得你花时间，或者好像他们是无可救药地愚蠢地想办法解决问题。

0.6 级时间表

内容

第一部分

复杂矩阵理论

第 1 章

复杂矩阵的一些例子

1.1 什么是复线性组合？

我们正在进入你们线性代数教育的第二部分，我们将看到更多

说 1+i 2-我 但这对你来说不应该令人满意，因为这甚至意味着什么？

复杂矩阵。 在非常名义意义上，一个复杂的矩阵是一个可能包含复杂条目的矩阵，

我们走吧先做个小回顾。

1 1

回忆一下矩阵 A=1 0 表示线性映射。 特别是，它代表了一些过程

0 表示线性组合。 1

游戏“卡坦的定居者”。 如果你想修一条路，你需要花一根木头和一块砖。 如果你想建造一艘船，你需要花一根木头和一根羊毛。 所以如果你想建 x+y 树林

道路 y 船 那么你需要 A 道路 y 船 x 砖。 所以 A 是评估过程，告诉你 y 羊毛

你所需的建筑要花多少钱。 这个过程是线性的，因为“建筑物的线性组合”的总成本是每种类型建筑成本的线性组合。 它从 A(Sv+tw)=s(Av)+t(Aw)的意义上恢复线性组合)。

如果你忘了上个季度我们班的一切，至少我希望你能记住这些。 向量表示线性组合，矩阵表示线性映射，是保留线性组合的映射。 (我个人认为线性组合和线性映射的观点是我们在大学里学习线性代数的原因。 没有其他东西不重要。)

现在，在这种观点下，一个复杂矩阵的想法就像 1+我 2-i3 非常令人不安。 似乎是这样

关于 COMPLEX 线性组合，相反，我们使用的真实线性组合。 很容易想象“两个苹果和三个香蕉”之类的东西，但是想象中的苹果有什么意义呢？ 所以在我们继续之前，我们需要一些关于复数和复线性组合的额外视角。

首先，为什么我们甚至需要复数？ 答案很明显：我们希望一个 n 次多项式有一个 n 次根。 这很简单。 在雷达上，$x^2+1=0$ 无解，12

这太烦人了。 例如，没有复数， 1 1 没有特征向量，也没有

特征值，这很烦人。 但在复数上，它将有不同的特征值士 i，实际上它将是对角化的。 万岁！

所以这就确立了复数的必要性。 但我们去哪找这个？ 正如你在高中复数课上回忆的那样，要想拥有复数，我们所需要的只是找到虚数

我，这是-1 的平方根。 用这个负一的平方根，我们就可以得到所有的复数。

所以复数的意义最终取决于虚单位 i 的意义。 这个 I 的意思是什么？

例 1.1.1。 我们正在搜索 x，这样 x^2 =—1. 但要开阔我们的视野。 我们能找到一个矩阵 A 吗 ^{2}=—*我?*

是的，我们可以。 考虑 2x2 实矩阵，它们是 R 上的线性变换 ^{2}，飞机。 在飞机上，什么是-我？ 这基本上反映了关于起源的一切，即旋转 180 度。 那么我们能找到什么操作 A，这样 A^2旋转是 180 度吗？ 答案是旋转 90 度，容易。

我希望你还记得如何找到这个矩阵。 答案是（如果我们逆时针旋转）当然，-A 也满足$(-A)^2$ =—我，所以我们

0 —1 至少有两个解决方案，士 A，

10 就像 x 一样 ^{2} =—1 有两个解决方案，±I。 (我们实际上对矩阵方程 A 有无穷多个解 ^{2}=——。 你能找到一种方法来描述它们吗？)

现在是见证魔法的时候了。 看看代数的奇迹。

$$(2+3i)(4+i)=5+14i。$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -14 \\ 14 & 5 \end{bmatrix}.$$

为什么这是真的？ 让我重写第二个方程来解释这一点，然后我将把想法留给你。

=(2i+3a)(4i+a)=5i 和 14a。 2 —3 4 —1

3214

让我以一个让你思考的问题结束这次探索。 假设一些 nxn 矩阵 A 满足 A^2=—我，那么我们会有类似的结构吗？ ©

例 1.1.2。 为你的思想提供额外的食物。 计算以下两个矩阵乘法。 你会得到什么？ 以下两种计算是如何相关的？

$$\begin{vmatrix} 1 & i & i & 1 & i \\ 2 & 1+i & 2 & i & \end{vmatrix} ?$$

1	0	0	—	0	—	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1
0	—	1	—	2	0	0	—
2	0	1	1	0	2	1	0

假设一些 nxn 矩阵 A 满足 A^2=—我，那么你能构造类似的巧合吗？

例 1.1.3。 我们已经暗示，每当 A^2=—I，那么你可以选择 I 作为表示 A，并使用复数。 其他可能的 A 是什么？ 这里有一个异国情调（但有用）的例子。

设 V 是形式 asin(X)+bcos(X)的函数空间)。 设 A：VTV 为取导数线性图。 然后注意 A^2=—我在这个空间。 ©

上面的内容可以指出，想象单位 I 有非常真实的含义，可能有许多含义，您应该根据手头的应用程序选择您自己的含义。 幸运的是， 大多数时候，当人们使用复数时，他们通常把想象中的 i 解释为某种旋转，即。，

根据这种解释，复数 $\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}$ a+bi 可以解释为 。 所以为纯实数

就像平面上的膨胀运算，而纯虚数就像平面上的旋转运算。 这里有一个例子， a-bba

从书“一二三. . . 无限”。

例 1.1.4。 宝藏埋在岛上。 为了找到宝藏，我们从一个带有标志的位置(位置 Z)开始)。 然后我们先走到一栋建筑(A 地点)，比如说总距离为 x，然后我们向右拐，然后走 x。 让我们把这个位置叫做 A‘。

接下来我们回到标志(位置 Z)。 然后我们先走到一个雕像(位置 B)，说总距离为 y，然后我们左转，然后走 y。我们叫这个位置 B‘。

宝藏在 A‘和 B’之间的中点‘。

现在有个坏人来拿走了旗子(所以 Z 是未知的)。 你还能找到宝藏吗？ 是的，我们可以。

注意，A‘-A 是 A-Z 顺时针旋转，所以 A‘-A=-I(A-Z)。 同样，B‘-B 是 B-Z 逆时针旋转，所以 B’-B=I(B-Z)。所以宝藏 2(A‘+B’)=2(A+B)+2i(B-A)，没有 Z 参与其中。 所以旗号位置根本不重要。 我将把最终宝藏位置的解释留给自己。

这不是向你展示复数的力量。 相反，这显示了线性代数的能力。 在整个计算的中心是旋转是线性的事实。 像我这样的复数只是我们在旋转等操作上的名字。

所以.线性代数规则，复数只是名称和标签，以方便。

因此，当我们处理可以“旋转”的对象时，谈论 i 次对象是有意义的。 在这个意义上，我们可以做复线性组合。 难怪量子力学中使用复数。

R1 一

总之，对于像 v=i 这样的复杂向量，最好把每个坐标看作是 1-i

平面上的一个点。 如果我们执行一个复杂的标量乘法(2+i)v，请将其视为应用-2-1]

平面操作 1 2 到 v 的每个坐标。

. 例 1.1.5（复杂浪漫关系）假设/‘=kf，那么我相信你知道解是 f(x)=e 克克斯 f（0）。 这是这个应用程序的先决条件知识。

假设两个人 A，B 是浪漫关系。 他们对彼此的爱是时间的函数，比如 A(T)和 B(T)。 现在 A 是一个正常人。 对于正常人来说，你被爱得越多，你就越爱回来。 特别是 A‘(t)=B(t)。 然而，B 是一个不值得欣赏的人。 如果你爱 B，那么 B 认为你是理所当然的，把你当作垃圾。 然而，如果你对 B 不好，那么 B 会突然想到

你是超级迷人和迷人的。 总之，B 喜欢很难得到的东西，对容易得到的东西想得很少。 在汉语中，我们说 B 是健仁。 无论如何，我们看到 B‘(T)=-A(T)。

e R^2 现在，考虑实向量 v(t) 则对于矩阵 J= 。 bs，我们看到了

v‘=-jv。 现在，想想 R^2 简单地说，C 和 v 就像一些复数，J 是

逆时针旋转 90 度，即乘 i。 我们有 v‘=-iv。 所以解得

v(t)=e 它 v（0）=(cos(t)-i sin(t)v（0）。

那么解应该是(cos(T)I-sin(T)J) a（0） b（0） 答(0)cos(t)+B(0)sin(t) B(0)cos(t)-A(0)sin(t) 这确实是

收集我们系统的所有可能的解决方案。 我们有 求解了微分方程。

注意，A 和 B 的浪漫关系必然是周期性的。 如果你曾经陷入一种周期性的关系（即快乐一周，然后战斗一周，重复），那么也许你应该多考虑一下这个模型。

下面是复数的一些其他有趣的应用。

1.2 复杂正交

在程序方面，复线性代数的工作方式与实线性代数相同。 高斯消去也是如此。 矩阵乘法公式，迹算式和行列式

都是一样的。 一点都不新鲜。 然而，有一件事是非常不同的：内在的产品，并延伸到转置。

为两个实向量 $^{1}{}_{2}$ 还有

很容易理解它们是正交的。 我们可以画它，或者在我们的脑海中想象它，等等。 但是对于两个复杂向量，彼此正交意味着什么？ 例 1.2.1。 考虑一下 ^{1} . 如果我们在这些上执行“真正的点积^会发生什么还有两个向量？ 我们会有一个 ²+（一）²=1+（—1）=0. 嗯，这个向量与自己“正交？ 怎么可能？

根本不可能。 引用福尔摩斯的话，当你消除了不可能的东西，不管剩下的东西，无论多么不可能，都必须是事实：我们使用了错误的“点积”！

我们可以从中吸取教训。 盲目地应用类似的程序通常会使你误入歧途。 它总是用正确的直觉来指导你的科学探索。

$^{1}{}_{i}$ ？ 回想一下以前，我们已经讨论过+bi 和 bi 之间的关系 *a-bba*

用这种解释，让我们想到 $^{1}{}_{i}$ 作为 $\begin{matrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & —\\ & 1\end{matrix}$ 。 所以不是一个向量，实际上是两个向量！

所以什么是正交的 $^{1}{}_{i}$ ？ 好吧，让我来 我们 考虑一下 $-^{1}{}_{i}$ 。 那么这两个向量可以被认为是

$\begin{vmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & —\\1 & 0\end{vmatrix}$ 还有 $\begin{vmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & 1\\— & 0\end{vmatrix}$ 。 你看到了吗？ 所有四列向量都是相互正交的其他。 所以我们得出结论 $\begin{matrix}1\\i\end{matrix}$ 还有 $-^{1}{}_{i}$ 是正交的。

这是什么意思？ 这意味着，如果 n 维复向量 v，w 对应于 2nx2 实矩阵 A，B，那么我们说 v ⊥ w 当且仅当 Aᵗ乙有四个条目 零。

这里发生了一些有趣的事情。 请注意，通过解释我为 $\begin{matrix} & —1\\0 & 0\end{matrix}$ 我们正在解释

作为 A $\begin{matrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & —\\ & 1\end{matrix}$ 。 然后 Aᵗ $\begin{matrix}10 & 0 & 1\\01 & 10 & \end{matrix}$ 它不代表 vᵗ。 相反，它代表 vᵗ.

什么是

在这里，这条线意味着每个坐标上的复杂共轭。

尤其是 A 的事实ᵗ乙是 2x2 零的肉线对应于 v 的事实ᵗw 是复数零。

*定义 1.2.2。 对于两个复杂向量 v，wE，C 然后，我们将它们的复点积定义为 v，W=vᵗ*w.

一个通用的准则是，每当你对一个真实的矩阵进行转置时，在相应的复杂矩阵世界中，你可能想要一个转置共轭。 把这看作是对以下事实的概括：if

代表一个+的 bi，那么它的转置实际上代表了一个-bi。 为了方便起见，

a-bba

我们将使用“星”作为共轭转置的速记，即我们将 A*定义为 Aᵗ.

例如，我们有以下结果。

定理 1.2.3。对于复 m xn 矩阵 A，则 Ran(A)和 Ker(A)是正交补，Ran(A*)和 Ker(A)是正交补。哦，冉(A)和冉(A*)*

和冉(A^t)具有相同的复维度，即 A 的秩。

家人是吗？ 我们这里有很多类似的结果。 请注意，最终，这里的一切都涉及一个正交结构，这就是为什么共轭转置始终使用。 如果需要的话，复习或阅读他们真正的内容。

1. 一个复杂的矩阵是厄米，如果 A=A*。 在这种情况下，它是对角化的实特征值，底层空间有一个正交的基础，由 A 的特征向量组成。
2. 一个复杂的矩阵是倾斜的-Hermitian，如果-A=A*。 在这种情况下，它是对角化的纯二进制特征值，底层空间有一个正交的基础，由 A 的特征向量组成。
3. 复矩阵若 A 是酉矩阵$^{-1}$ =a*。 在这种情况下，它是对角化的单位复特征值（复数与绝对值之一），底层空间有一个正交的基础，由特征向量的 A。请注意，特别是，这样的映射将保留复杂的点积，即(v，w}=(av，Aw)。
4. 如果 AA*=A*A，则复杂矩阵是正常的。 在这种情况下，它是可对角化的，底层空间有一个由 A 的特征向量构成的正交基础。

1.3 傅里叶矩阵

这里是一个矩阵族，它既是超级酷的，在实践中非常有用，也说明了上面提到的一些有趣的情况。 是著名的傅里叶矩阵。

对于任何 n，让 a 是统一的原始 n-根，即它是复数 a=cos(2n/n)+is in(2n/n)。 然后你可以检查，1，a，...，a^{n-1}都是不同的复数，和 a^n=1. 事实上，通过把复数看作扩张和旋转，很容易看到 1，a，...，a^{n-1} 是方程 x 的所有解 ^{n} =1 过复数。

我们首先看傅里叶矩阵 F_n 其(i，j)条目是 $a^{(i-1)(j-1)}$。 作为一个典型的例子，我们

有 F4 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & a^2 & a^4 & a^6 \\ 1 & a^3 & a^6 & a^9 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & —1 & -我 \\ 1 & — & 1 & \\ & 1 & —1 & i \end{vmatrix}$ —1 .

你 看来是这样

尽你所能 然而，它不是厄米特。 （例如，它的对角线不是真实的。） 事实上，它与厄米的相反：它是一个酉矩阵的倍数。 请随时执行 F4F4，以验证情况时，n=4。 特别是，您还可以检查-Fn=F^{-1}.

傅里叶矩阵与傅里叶级数和傅里叶变换密切相关。 在微积分中，我们了解到傅里叶级数是非常重要的。 对于周期为 2n 的周期函数/(x)，可以尝试通过傅里叶级数将其分解成不同的频率，并将其写成正弦和余弦的线性组合。 假设我们有可能/(X)=Ecke^{KLX}。 这里请注意 e 成=cosx+isinx，所以 e 成只是一种同时写入正弦和余弦的懒惰方法。

假设我们有一个分解/(X)=co+c=e 戚 c？ e^{21x} +C3e^{31x}。 给定 Co，C1，C2，C3，我们做什么

知道函数/(X)吗)？ 嗯，如果你把 F4 应用于向量，那么你可以验证你有 c2

c3

/ (0)

/(n/2)

/$^{(n)}$

/(3n/2)

。 如你所见，在/(x)的图形上得 4 分)。 通过使用更多的 Fourier 系数和更大的 Fourier 矩阵，您将在您的图上得到更详细的/(X)点)。 这是前进的方向。

但也要考虑后向。 在实际情况下，我们通常通过一些数据收集得到/(X)的图。 如何计算傅里叶系数？ 假设我们有/(x)=共同+

切 ^{ix} +C2e^{2i倍} +C3e^{3i倍} 其中 q 是未知的。 如何求 f(x)的傅里叶系数)? 我们可以（0） - f(n/2)= $^{f(n)}$ f(3n/2)_
f（0）、f(n/2) $^{f(n)}$

对 f（0）、f(N/2)、正如你所看到的进行验证或验证你，然后用 F_{n-1} 我们可以方便地 f(3n/2)获得(近似)傅里叶系数。当我们使用更多的数据点和更大的傅里叶矩阵时，近似会变得更好。

假设你想计算前 1000 个傅里叶系数（说你知道剩下的可能是噪声或测量误差）。实际上，您希望快速将 F1000 乘以到已知向量。 哇，太大了！ 你应该怎么做？ 通过蛮四 ce，这是一个 1000 乘 1000 的矩阵，用它计算需要数百万的计算。 会花很长时间。 因此，一个更好的方法是快速傅里叶变换。 我们_1 1 ’

1 —1

首先看 F1024，把它减少到 F512，然后把它减少到 F256，等等，直到我们达到 F2 因此，在 10 个步骤中，我们将问题减少到一个小得多的问题。 最后，100 万次计算将减少到仅 5000 次计算。 想象信号处理中速度的增益等。 这被 IEEE 杂志《科学与工

例 1.3.1。 考虑 F4

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & — & - \\ & — & 1 & — \\ 1 & - & — & i \end{vmatrix}$$

观察它的第一个和第三个之间的关系

一列，在它的第二和之间 四 列。 可以看到对应列的第一坐标和第三坐标相同,第二坐标和第四坐标被否定。

现在让我们交换列，将原始的第一列和第三列带到 ehter，和原始的

第二列和第四列在一起。 然后我们有 F4P23

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & — & i & - \\ 1 & 1 & — & — \\ 1 & — & - & i \end{vmatrix}$$

程计算》列为 20 世纪的前 10 位算法。

左边角落和左下角 完全正确 11,3.1. 11 f2！ 在事实上，让 D2=diag(1，i)，我们有 F4P23

$$\begin{matrix} f2 & d2f2 & i2 & d2]f2 & & 0 \\ f2 & d2f2 & i2 & -d2] & 0 & f2。 \end{matrix}$$

所以一步一步，我们提取了 F_2 离开 F_4!

定理 1.3.2（快速傅里叶变换），其中 3=cos(n/n)+iSin(n/n)，P 是向右的 a。. *我们有以下分解，其中 Dn=(1*，...，w^{n-1} 矩阵将所有奇数列排列在左边，所有偶数列*

$$f_{2n} \quad \begin{matrix} 在 & dn] \\ /n & -d_{n\_|} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \backslash fn & 0 \\ 0 & f_n \end{matrix} \quad p.$$

。 嘿，注意上面

证明。 你自己做吧。 和范例一样

$$f_{4n} \quad \begin{vmatrix} \sim & Dn & 0 & 0 \\ 在 & -d_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 在 & Dn \\ 0 & 0 & 在 & -d_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} F & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Fn & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Fn & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Fn \end{vmatrix} p.$$

例 1.3.3。 递归之后会发生什么。 你会的

这里 P 是一个置换矩阵，它将所有(1Mod4)列放在左边，后面是(3Mod4)列，后面是(2Mod4)列，后面是(4Mod4)列。 *I2n* *D2n* *[范例* $-d_{2n}$ ©

证明。 你自己做吧。 □

例 1.3.4。 会发生什么 $_n$? 你能做类似的事情吗？ 我把这个留给你自己。 ©

第 2 章

约旦经典形式

2.1 通用特征

我们正朝着约旦的标准形态前进。 对于正方形矩阵 A，有时它是可对角化的。 通过这样做，我们将找到所有的特征值和特征向量等等，这样我们就可以完全理解这个矩阵的行为。 但是如果我们不能对矩阵进行对角化呢？

好吧，首先让我们争取块对角化。

2.1.1（复习）块矩阵在 R^n 或 C^n

我们经常使用块矩阵，我们知道它们可以像规则矩阵一样相乘，等等。 但让我们在这里记住它们的含义。 块矩阵不仅仅是分组条目的形式。 每个单独的块实际上在某种意义上是一个线性的“子图。

例 2.1.1。 考虑一张地图，把食物送到营养物质。 说我们有食物：苹果，香蕉，肉。 我们有营养物质：纤维，

I 纤维，蛋白质和苏格。 显然 A 是 3 乘 3 矩阵。

x

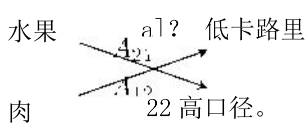
y.^{z} *a b*

现在考虑块形式 A　　*d e g h*　　a11a12 a21 a22　其中 Aj 表示相应的

街区。

蛋白质，猪。 然后这个地图是一个矩阵 A，如果我们有 IyI

^是做什么的？ 它把水果送到它们所含的低热量营养物质。 A12 是做什么的？ 它把水果送到它们所含的高热量养分中。 A21 是做什么的？ 它把肉送到它所含的低热量营养物质。 A22 是做什么的？ 它把肉送到它所含的高



热量营养物中。

什么是 A? 作为线性映射，A 只是这四个线性映射的集合。

1

直观地说，当我们有一个块矩阵时，我们对输入坐标和输出坐标进行分组。 块 AIJ 记录输入坐标的第一组如何影响输出坐标的第 j 组。

.1.2. 考虑[11|1]。 不|IJ

注意左下块为零。 这意味着前两个输入

协调不影响第三输出协调。

我们确实有 $\left[\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ \hline 0 & 0 & 1\end{array}\right]\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = $ x+y+z x+y+2z z

$$\begin{array}{ccc} r^2 & \xrightarrow{A_{11}} & r^2 \\ & \nearrow_{A_{12}} & \\ r & \xrightarrow{A_{22}} & r \end{array}$$

这是一个块上三角形矩阵。

特别是，块对角线意味着每组坐标只影响自己。 尤其是，

是一张照片 $\left|\begin{array}{cc|c} \circ\perp\ \frac{}{v2} & —\ \frac{I}{v2} & 0 \\ 1刁 & \frac{1}{v2} & 0 \\ \hline o & o & 2 \end{array}\right|$ ***它是一个块对角线矩阵。*** 而不是一个系统，它更像许多独立的系统，每个对角线块一个。 给你

r²—>r²

r------ a22->r

正如你所看到的，当两个“线性子映射”相互独立时，块对角线矩阵就会发生。

A 在哪里

$$\begin{array}{ccc} r^n & & r^n\,\text{i} \\ & \searrow_{B} & \\ & & r^{m2} \end{array}$$

下面是如何思考块矩阵。 例如，对于块矩阵 mixn 和 B 是 m2xn，我们可以把它看作：

a

$$\begin{array}{cc} r^n\,\text{i} & \\ & \nearrow_{B} \\ r^{m2} & \end{array}$$

对于块矩阵[AB]，其中 A 是 mxni，B 是 mxn2，我们可以把它看作：

a>r

现在，为什么块矩阵要与正则矩阵相乘？ 让我们通过更多的艾比+A2B2 来

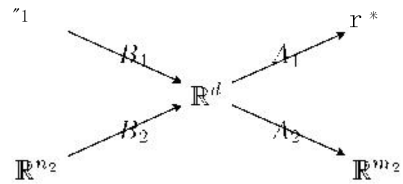
图表。 我们有艾 A2 比 b2

$$r^n \xrightarrow{B_1} \mathbb{R}^a \oplus \mathbb{R}^b \xrightarrow{A_2} \mathbb{R}^m$$

（B_2, A_1）

我们有 啊 a2 比 B_2] 艾比 A2Bi Ai B2 a2b2 因为这个：

谴责这一点，因为：

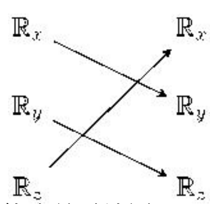


例 2.1.3。 考虑 R 中的旋转³ 围绕 x=y=z 线，将正 x 轴发送到正 y 轴，正 y 轴发送到正 z 轴，正 z 轴发送到正 x 轴。
如何求这个线性图的矩阵 R？

0 0 1

通过看标准基础，我们显然有 R= 100. 如果我们把域名和 010 分开坐标轴，然后我们有一个图表：

协域作为三个一维子空间的总和，即。，



这里的箭头是身份地图。 而不是 DRWAN 的箭头是零地图。

让我们尝试对域和共域进行不同的分解。 如果我们把域和 RR 共域看作 XY 平面和 z 轴的和呢？ 然后我们将有一个块结构 R=n

9 卩 |R3r4_

其中 Ri 是一个 2x2 矩阵，R2 是 1x2，R3 是 2x1，R4 是 1x1。

为了找到 Ri，我们想了解 R 在 XY 平面上的作用，忽略 z 轴。 所以我们 想要
要查看 Rei 的投影，Re2 返回到 XY 平面。由于正的 x 轴转到正的 y 轴，而正的 y 轴转到正的 z 轴（它投射到原点），我们看到了这一 卩⁰円

Ri 你可以同样地计算出其他的，你应该有 R=110|0。

0 10

我们主要使用 Rⁿ 在这里，但这并不重要。 将它们全部替换为 Cⁿ如果你愿意的话。

2.1.2（综述）空间分解和不变分解

我们现在将以抽象的方式重新制定最后一节中的所有内容。

例 2.1.4。 回想一下，我们说 V 是它的子空间 Vi，V2 的直接和，如果 ViCV2={0}，Vi+V2=V。我们还编写 V=Vi⊕V2，并将其称为 V 分解为子空间。 现在，有四个线性映射涉及到这个结构。

首先，我们有一个包含图 II：VITV 和 12：V2TV。这些地图根本不改变输入，但它们的共域大于域。 他们告诉我们如何将较小的空间（域)包含在较大的空间(协域)中）。

现在，由于 V=Vi⊕V2，根据我们在上学期的知识，每个向量 vev 都有一个 UN IQ UE 分解 v=vi+V2，使得 Vievi。因此，我们还有两个投影映射 pi：VTVi 和 P2：VTV2，使得 pi(V)=Vi。 这些是 INDEED 投影图。 例如，请注意，对于任何 vi 吃那么 vi=vi+0 必须是根据 V=Vi⊕峋的唯一分解。因此 pi(vi)=vi。 尤其是，p²=圆周率。 （这是任何数学背景下投影的定义代数性质。） 然而，这些不一定是正交投影。 它们可能是斜射的。 最后见

学期的斜投影笔记。（当 Vi ⊥ V2 时，它们只是正交投影。 否则，它们是斜投影，其中 pi 保存 Vi，并杀死 VJ 为 j=i。 ）

现在，如果我们有一个线性映射 L：VTW，分解 V=Vi⊕V2 和 W=Wi⊕W2。 然后有四个可能的线性映射从这些结构。 我们可以将将代码投影到 WJ，并获得 LJ=PJOLO&：VITWJ。 然后，我们可以为每个 vev 写 L，如果根据 V=Vi L 的域限制为 Vi ⊕V2 的唯一分解是 v=vi+V2 和 二 2i. i2 22 那就让我们写吧

六

v2

作为 然后我们在 W 做类似的事情，然后我们就会看到这一点

利 2i 六 （吕

i2 22 v （吕

这些整个冒险纯粹是哲学的，你需要感觉到没有压力来掌握这些抽象的计算。 我的目标是解决以下问题：块矩阵背后的思想是什么？ 这意味着，当我们将域和协域分解成子空间时，线性映射被分解成子映射。 “块”实际上是“子映射”，或者原始线性映射对相应子空间的限制。

现在我们回到块对角化矩阵的任务。

为什么对角线矩阵是整齐的？ 考虑矩阵，作为线性映射，它独立地作用于每个坐标。 输出的 $\begin{vmatrix} di & & \\ & d2 & \\ & & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 艾 \\ a \\ a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_ia_i \\ 我 \\ d3a \end{vmatrix}$ 。 正如你所看到的，对角线第 i 个坐标只取决于输入的第 i 个坐标，反之亦然，输入的第 i 个坐标只会影响输出的第 i 个坐标。 坐标不会相互交叉影响，他们只是在这个线性地图上做自己的事情。

给定一个可对角矩阵，我们将如何对角化它？ 我们需要找到特征向量。 每个特征向量就像矩阵必须保留的不变方向。 现在我们的矩阵独立地作用于每个入侵方向，所以如果我们选择一个由特征向量组成的基，那么我们的矩阵在基的相应变化后将是对角的。

现在，不变方向就像一维不变子空间。 一般来说，我们可以定义如下：

定义 2.1.5。 我们说一个空间 V 的子空间 W 是线性变换 L：VTV 的不变子空间，如果 L(W)CW。(我们不要求他们平等。 点是这样的，L 可以限制在 W 上的线性变换。）

我们说，如果 Vi 和 V2 都是不变子空间，则分解 V=Vi⊕V2 是线性变换 L：VTV 的不变分解。

命题 2.1.6。 给定线性变换 L：VTV 的不变分解 V=Vi⊕V2，则 L 的相应块结构为块对角线。 （这里我只使用了两个子空间，但是更多子空间的情况是相同的。 ）

证明。 由于 L(Vi)C Vi，因此对于我=j，PJOL 将杀死 Vi。 So Lj=pj o L o“=0.

本征方向本质上是矩阵的一维不变子空间。 由于一维子空间由单个向量跨越，我们有时只研究特征向量。 找到一个由特征向量构成的基础本质上与找到一个将 V 分解为内隐的一维子空间相同。 特别地，阻塞对角化矩阵与找到域的不变分解完全相同。

让我们看到一个具体的例子，使用与以前相同的例子。

例 2.1.7。 考虑 R 中的旋转³ 围绕 x=y=z 线，将正 x 轴发送到正 y 轴，正 y 轴发送到正 z 轴，正 z 轴发送到正 x 轴。

我们知道它的线性映射有矩阵 R $\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$ 。这个矩阵有非实特征

真正的对角线化。 然而，也许我们 可 找到一个真正的块对角化？

值，所以有 NO

有两个不变子空间，R 必须作用。 一是旋转轴，直线 x=y=z。

円

这是一个一维子空间 Vi 跨度为 111。 通过简单地固定每个人，即通过 the，R 对 Vi 起作用

1

1x1 矩阵 R11=[1]。

x

假设我们选择基 $\begin{vmatrix}1\\—\\0\end{vmatrix}$ 还有 $\begin{vmatrix}1\\0\\—\end{vmatrix}$。 我们的线性地图作用于 V2 作为盘的旋转，即通过大约 2x2

矩阵 R22。要找到矩阵 R22：V2TV2，请注意，这取决于我们为 V2 选择的基础！！！ 所以这不会是标准的旋转矩阵，因为我们忘了选择一个正交基。 噢。 没关系，让我们继续前进吧。

$\begin{vmatrix}1\\—\\0\end{vmatrix}$ 和 V2= $\begin{vmatrix}1\\0\\—\end{vmatrix}$ 对于 V2，请注意 RVI= $\begin{vmatrix}0\\1\\—\end{vmatrix}$ -vi 和 Rv2

$\begin{vmatrix}—\\1\\0\end{vmatrix}$ =-vi。 所以 R22= $\begin{vmatrix}-1\\0\end{vmatrix}$

所以，在基础之下 i $\begin{vmatrix}1\\1\\1\end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix}1\\—\\0\end{vmatrix}$ 还有 $\begin{vmatrix}1\\0\\—\end{vmatrix}$ Rii r22 1 —1 —1 10

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&-1&-1\\&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{bmatrix}^{-1}$$

当然，尽我们所能 也找到了 V2 的正交基， 说焉 $\begin{matrix}1\\-1\\0\end{matrix}$ 还有

$\begin{matrix}1\\1\\2\end{matrix}$。 然后 R22 将是标准旋转矩阵 - 2n cos 弩 • . 23r 士 $\begin{vmatrix}i & \_v3\\ —_2 & 2\\ v3 & i\\ 2 & -2\end{vmatrix}$

所以我们有 R i 1 豆 f 習0 1 =一 2 一 匹 v3 2 1 豆 f 0 q— i 。我们 得 数

但数字是 更丑。 还要注意逆 这里也很容易计算，因为该矩阵现在是一个正交矩阵，通过选择一个正交基。 所以这里的逆是转置。 在实践中，这一单独将使这比以前的计算更好，尽管丑陋的条目。

另一种是 Vi 的正交补，所有向量的子空间 V2，i，yi，使得 x+y+z=0。

现在，在我们继续之前，让我们考虑具有两个以上子空间的分解。 这些主要引用于我上学期的线性代数笔记。

命题 2.1.8。 对于向量空间 V 的子空间 V1，...，V；，以下是等价的：

1. 为每个 i，然后 Vi，v 选择任何非零 v^Evi。是线性无关的。

2dim(E Vi)^2dim Vi。

证明。 为每个子空间选择一个基础，并将它们放在一起。 这个集合显然是跨越的。 所以如果 dim(EVi)=EdimV，那么这个集合也有正好正确的向量数，所以是基础。 所以是线性无关的，第一个语句为真。

使用基础 v1 v2

相反，如果第一个语句是正确的，那么通过标准参数很容易验证这个集合是线性无关的。 因此，这个集合是

1

我们的矩阵会变成

这是块对角线。

所以我们有 R

一个基础，我们有 DIM(EV)=EDIM□

如果这两个条件中的任何一个都满足，那么我们说子空间 是线性无关的。请记住，两两独立并不意味着集体独立。 考虑下面的例子。

例 2.1.9。 设 U，V，W 为 R 的三个子空间² 这样，U 是 x 轴，V 是 y 轴，W 是由方程 x=y 定义的线。 然后注意，U，V，W 是成对独立的，但总的来说，它们不是线性独立的。

这个反例很重要。 例如，子集代数满足分布定律。 （即在集合论中，SiO(&US3)=(SiO&)U(SiOS3) 和 SiU(S2CS3)=(SiU&)C(SiUS3) 对任意三个子集。）然而，子空间代数没有分布规律。 您可以验证，在我们的示例中，UO(V+W)=(U+V)O(U) 和类似的 U+(VOW)=(U、V)O(U+W)。

这也与概率论密切相关。 对于许多随机变量，成对独立分布并不意味着集体独立分布。 这里的反例实际上是我们示例的一个修改版本。（只需将我们的字段 R 更改为任何有限字段，并构建变量 X、Y、Z，其分布是通过子空间 U、V、W 定义的。 ） ©

以类似的方式，块对角化与域 R 的不变分解有关ⁿ成线性无关子空间的直接和。

我们用一个快速引理来结束这个问题，供将来使用。

2.1.3 寻找良好的不变分解

就这样。 怎样才能找到一个好的不变分解？ 让我们先看看我们有什么样的不变子空间。

例 2.1.10。 给定任何矩阵 A，考虑零空间 Ker(A)。 完全 A(Ker(A)={0}CKer(A)。 所以这确实是一个不变子空间！

实际上，由于 A 按定义将所有的东西都发送到 Ran(A)，我们也有 A(Ran(A))C Ran(A。 万岁！ 另一个不变子空间！

事实上，对于 nxn 矩阵 A，我们也有 dimKer(A)+dimRan(A)=n。 这是一个非常好的预兆。 -1 2 3]

其实考虑说 A=4+5+6。 那么 Ker(A)和 Ran(A)都是 invaraint 子空间，实际上是 789_|

我们有 R³=Ker(A)⊕Ran(A)在这种情况下，完全分解为不变子空间！

不幸的是，我们并不总是有这个。 考虑 A=° ° ：。 则克(A)=冉(A)。 所以我们失败了。

实际上，Ker(A)的最佳补码子空间实际上是 Ran(Aᵗ在复杂的情况下，我们总是有 Rⁿ=克(A)⊕冉(Aᵗ)。 然而，再次考虑 A=° ° ：，你会看到的

冉(Aᵗ通常不是一个入侵子空间！ 不管怎样我们都完了。

那我们能做什么？ 好吧，回想一下我们做对角化的最初动机。 在这条关于特征量和对角化的道路上，我们是什么开始的？ 最初的动机是理解同一矩阵的迭代应用，即序列 v、Av、...、A 的最终行为ⁿ对角化给了我们一个快速的计算 A 的方法ⁿ对于大 n。

因此，也许我们不应该关注 A 的直接内核和范围。 相反，我们应该关注 A 的最终内核和范围。

例 2.1.11。 考虑 A

$$\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} \overset{A}{\longmapsto} \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} \overset{A}{\longmapsto} \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} \overset{A}{\longmapsto} 0$$

然后反复应用 A，我们有：

1

$\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}$ 最终被 A 杀死。 设为最终被 A 杀死的所有向量的子空间。

0 01 00

00 0

还请注意 A^2= 00 和 A^n 0 所有的 n>3。 所以最终，$A^n v$ 将是 a

我们说 0

倍数为 64，足够大的 n。 所以我们说 A 的最终范围是由 64 跨越的子空间。

看看你自己，其实是 R^4=Ng⊕是一个不变分解。

定义 2.1.12。 给定线性映射或矩阵 A，我们定义 N_∞(A)=0^=1Ker(A^k*)和* R_∞(A)1Ran(A^k). —

特别是，当且仅当 A 的某些权力将杀死 v 和 veR$_\infty$当且仅当 v 在 A 的所有幂的范围内。

事实证明，我们并不真正需要看 A 的所有力量。 不管 A 杀人，那么 A^2 也必须杀人。 所以随着 k 的增长，子空间 Ker(A^k)将不会减少。 然而，它的维数最多是 n（域的维数）。 所以它不能永远生长，最终必须稳定下来。 所以我们看到 Ng(A)=Ker(A^k我们实际上有更多的。 原来 k 不需要太大。

命题 2.1.13。对于任何 nxn 矩阵 A，我们都有 Ng(A)=Ker(A^n例如：我们总是有 Ng(A)=Ker(A^n).)

证明。 设 k 为最小整数，使 ^{A}v=0。 然后由下面的引理，v，Av，A^{k-1}v 是线性无关的。 但现在我们在 R 中有 k 个线性无关向量 ^{n}所以 k<n。 口

让我们在这里证明这个引理。 它声称，对于杀人链诉ム Av ム A... $^{k-1}$ム 0，在 v 最终被杀死之前，一切都将是独立的。

引理 2.1.14。 对于任何 nxn 矩阵 A 和任何 veNg(A)，让 k 是最小的整数，使得 A^k. v=然后 v，av，...，a^{k-1}*v 是线性无关的。*

证明。（举例说明，我们有 k=4，所以 A^4v=0。 假设对于矛盾，假设我们有一个线性关系 3Av+2A^2v+4A^3v=0。 然后乘 A^2 对双方来说，我们有 0=3A^3v+2A^4v+4A5v=3A^3v.所以 A^3v=0。 *矛盾确实存在。* ）

假设我们有一个非平凡关系 EA^A^v=0。 设 j 是最小的自然数，使 aj=0。 然后乘 A^{k-j-1} 在 EA 的两侧^A ‘v=0，并使用 A 的事实 ^{A}v=0，我们看到 AJ^{k-1}v=0。 然后，由于 AJ=0，我们看到了 A^{k-1}v=0。 *矛盾。*

所以 v，Av，...，A 之间的所有线性关系 $^{k-1}$v 是微不足道的。 这些向量是线性无关的。 口

正如你所看到的，向量应该是你的榜样。 我希望大学毕业后，你会成长为一个独立的人，直到你死，就像这里的这些载体一样。

对于 A 的“最终范围”，我们也有类似的结果。

命题 2.1.15。 n (A) Ker=(A 当且仅当 =冉(A).

证明。 注意，随着 k 的增加，Ran(A) 是一个不增加的子空间链。 但自从 DimRan(A)=n-dim Ker(A 我们看到那个昏暗的牧场一旦 DIMKER(A) 就必须稳定下来) 稳定下来，因此 Ran 一旦 Ker(A) 就必须稳定下来) 稳定下来。 口

现在让我们证明我们确实有不变子空间。

命题 2.1.16。 对于任何多项式，Ker(p(A) 和 Ran(p(A) 都是 A 不变的。

证明。 关键是 XP(X)=p(X)x 作为多项式。 因此，AP(A)=p(A)A 作为矩阵，因为它们是 A 的同一多项式。
假设 p(A)v=0。 然后 p(A)(Av)=p(A)av=Ap(A)v=A（0）和 0。 所以 Ker(p(A) 是 A 不变的。
假设 v=p(A)w 对一些 w。 然后 Av=Ap(A)w=p(A)(Aw)。 所以 Ran(p(A) 是 A 不变的。 口

推论 2.1.17。 (A) 和 R *(A) 是不变的。*

定理 2.1.18（最终不变分解）对于任何 nxn 矩阵 A，我们都有一个不变分解 R. = (a)⊕ (a)。

证明。 我们已经知道这两个是不变子空间。 此外，因为对于一些 k<n，我们有 Ng(A)=Ker(A) 和 R (A)=Ran(A 因此，我们有昏暗的 N (A)+暗 R =，所以我们只需要证明它们有零个交点。
（注：对于一个向量集合，具有 n 个向量，线性无关，跨越，这三个条件中的任何两个都将是我们有基础的。 以一种比较的方式，维度加起来是 n，零交点，和空间是整个空间，这三个条件中的任何两个都将使我们有一个直接的和。 ）
假设 veN c r (a)。 从越南开始 我们有一些 k<n 这样的 $A^k v=0$。 但自从 veR (A)C Ran(A 我们有 $v=A^n$ 为了一些 W。 然后 $A^{k+n}w=0$，so w e N (A) 以及。 但这意味着 weKer(A^n)，因此 $v=A^nW=0$。 噢。 我们就完了。
（本质上，关键是 N (A) 稳定在有限的多个步骤之后，而 ve R 意思是我们可以在任意多个步骤之后实现 v，这迫使 veN (A) 为零。 ） 口

2.1.4 广义的 Eigenspace

在我们前面的章节中，我们一直在 R 上做线性代数。但它在 C 上是一样的。对于本节的其余部分，我们将注意力限制在 C 上，因为我们需要这些特征值。

. 备注 2.1.19。 通常，在 R 中完成的事情在 C 上很容易是正确的（只要不涉及内积），但是在 C 中完成的事情在 RFOR 示例中可能不是正确的，在 C 上的任何 nxn 矩阵在 C 计数代数多重性中都有 n 个特征值。 但如果我们用 R 代替 C，则该说法是不正确的。

我们的目标如下。 对于任何矩阵 A，我们的目标是阻止对角化它，使每个对角线块是一个所有特征值相同的矩阵。 例如，类似这样的事情：

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{matrix}$$

。 给你有两个对角线块，第一个有所有特征值 1，第二个有所有特征值 2。
在本质上，我们正在寻找一个不变分解 C= ⊕•••⊕VK 使 A 收缩到每个 Vi 将是一个矩阵，所有特征值相同。
我们以前的极限不变分解已经在这个方向上了。 假设

$$\begin{matrix} A_N & O \\ O & A_R \end{matrix}$$

就像那个对应的块对角化 A 的不变分解 C 吴=(A)⊕R (a)。 现在，安是 A 对 Ng(A) 的线性变换的限制，它最终会杀死这里面的一切域，所以 An 只能有零特征值。

相反，因为Ker(A)CN_(A)和 丙={0}，原来A限于线性在R上的转换_将有零核，即Ar是一个可逆矩阵！ 所以它没有零特征值。

特别是不变分解C=n^(A)⊕r_成功地分离了A在Ng(A)中的所有零本征值行为，以及A到R的所有非零本征值行为_(a)。

回想一下，对于特征值入的矩阵A的eigenspace只是Ker(A-XI)。 我们现在定义如下。

定义2.1.20。 矩阵A对于特征值X的广义eigenspace是子空间N_(a-xi)。

让我们首先表现出两两独立

引理2.1.21。 n_(a-xi)cn_(A-诉I)={0}如果X=诉。

证明。 用A代替A-#I，如果需要，就足以证明N_(a-xi)cn_(A)每当X=0时={0。 要做到这一点，就足以证明N_(a-xi)cr_(a)。

选择任何veNg(A-XI)=Ker(A-XI)。 我们的目标是展示veRan(A我们有)v=0。 扩大这一点，因为X=0，在左手边，我们有像A（物）v+（非零常数）v=0，它可以重新排列成v=A（物）v，它的迭代将给我们结果。我们就完了。

更正式地，让(x-X) =XP(X)+(-X) 对于一些多项式p(X)。 所以0=(A-XI)五=Ap(A)诉+(-X)v.让B=-（_；）. 我们看到v=ABV，其中AB=BA。 那么很容易看出v=ABABv=A²b²等等。 所以v=A*b*ve Ran(A所有的k，所以veCRan(A)=Rg(A)。口

推论2.1.22。 如果veNg(A-XI)，那么对于任何诉=X，(A-#I)v=0，当且仅当v=0。

推论2.1.23。 如果veNg(A-XI)，那么对于没有X作为根的任何多项式p(X)，我们有p(A)v=0当且仅当v=0。

当然，两两独立是不够的。 我们需要集体独立。

命题2.1.24。 设xi，...，Xk是A的特征值（不计算代数多重性，即它们是不同的复数）。 让Vi=Ng(A-XiI)成为每个i的广义eigenspace。 然后Vi，...，Vk是线性无关的子空间，它们在A下是不变的。

证明。 请注意，对于每一个I，Vi=Ng(A-Xi)=Ker(A-Xi)所以它在A下确实是不变的。

我们通过给你一个例子来证明线性独立性，你可以自己把它变成一个正式的证明。假设A只有特征值1，2，3，不计算代数多重性。 为每个i选择非零vi。 假设AVI+BV？ *+cv^=0*。

现在申请(A-I)(a-2i)在两边。然后vi，v？ 会被定义为杀死。然而，v^术语将继续存在。(由于V3e Ng(A-3I)并且它是非零的，因此(A-I)(a-2i)v3是推论2.1.23的非零向量。) 所以我们有c(A-I)(a-2i)**v3=0。**

同样，a=b也=0。 我们就完了。 口

他们不仅是独立的。 它们实际上给了我们整个域的期望不变分解。

命题2.1.25(代数多重性的几何意义)设X是具有代数多重性m的方阵A的特征值，设V=Ng(A-XI)是广义eigenspace。

证明。 如果有必要，我们可以假设X=0。

现在让我们 安 O A O R 在基的变化之后，是A的相应块对角化

然后昏暗V=m。.

到不变分解C =Ng(A)⊕Rg(A)。 正如我们前面讨论过的，An将只有特征值为零，而Ar没有零特征值。 但它们的特征多项式必须满足pa(x)=Pa_N(X)PAR(X)。 所以pa中0的代数重数与pa的度数完全相同 N ，是什么)。 口

定理 2.1.26。 让入 i，...，入 k 是 A 的特征值（不计算代数多重性，即它们是不同的复数）。 设 Vi=N^(A-)是每个 i 的广义 eigenspace。 然后我们有一个不变分解 C= ⊕=1 冬。

回想一下，以前，我们看到 An 的所有特征值都必须是零，在块对角化中对应于不变分解 C=(a)⊕

一个 *0*

0 Ar r(a)。 同样，给定一个块啊 -

对角化的 A，比如说. 根据广义 eigenspaces，则每个 AI 都是

限制 A 到 Vi，所以 AI 的所有特征值都必须入私

2.2 无势矩阵

2.3 约旦经典形式

2.4 矩阵的函数

2.5 申请