第15-16周习题课题目

第 1 部分 课堂内容回顾

1. 函数列与函数项级数的收敛性

(1) **函数列的收敛性:**

(a) **点态收敛:** 收敛点, 发散点, 收敛域, 极限函数.

(b) **一致收敛性:** 函数列 $\{v_n\}$ 在集合 J 上一致收敛到函数 v 当且仅当我们有

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in J}|v_n(x)-v(x)|=0.$$

(c) **极限函数的分析性质:** 内闭一致收敛的连续函数列的极限函数连续.

(2) **函数项级数的收敛性:**

(a) **点态收敛:** 收敛点, 发散点, 收敛域, 和函数.

(b) **一致收敛性:** 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 在集合 J 上一致收敛当且仅当我们有

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in J}\Big|\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)\Big|=0,$$

此时函数列 $\{u_n\}$ 在集合 J 上一致趋于 0.

(c) **函数项级数"和函数"的分析性质:**

(i) **极限与级数求和可交换性:** 通项连续且内闭一致收敛的函数项级数的和函数为连续函数.

(ii) **积分与级数求和可交换性:** 通项连续且内闭一致收敛的函数项级数, 求积分与求和可交换次序.

(iii) **求导与级数求和可交换性:** 若通项为连续可导的函数项级数在一点处收敛, 而对通项求导所得的函数项级数内闭一致收敛, 则最初的那个函数项级数的和函数连续可导, 且对该函数级数求导与求和可交换次序.

(3) 函数列、函数项级数、含参广义积分理论三者统一.

(4) **判断函数项级数一致收敛性的方法:**

(a) 定义, Cauchy 准则.

(b) **Weierstrass 判别法:** 若存在非负常数项收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}M_n$ 使得 $\forall n\geqslant 1$ 以及 $\forall x\in J$, 均有 $|u_n(x)|\leqslant M_n$, 则函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 在 J 上绝对收敛且一致收敛.

(c) **Dirichlet 判别准则:** 若函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和一致有界, 而函数列 $\{v_n\}$ 单调且一致趋于 0, 则函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nv_n$ 一致收敛.

(d) **Abel 判别准则:** 若函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 一致收敛, 而函数列 $\{v_n\}$ 单调并且一致有界, 则函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nv_n$ 一致收敛.

3. 幂级数

(1) **幂级数的收敛性:**

(a) **收敛半径的确定:** 根值判别法, 比率判别法.

(b) **Abel 定理:** 幂级数在其收敛域的内部绝对收敛且内闭一致收敛.

(c) **Abel 第二定理:** 幂级数在其收敛域的任意闭子区间上一致收敛.

(2) **幂级数的性质:**

(a) **四则运算性质:** 线性性, 乘法, 除法.

(b) **分析运算性质:** 幂级数在其收敛域上连续; 在其收敛域内部无穷可导; 对之积分或求导均可与求和交换次序, 所得依然为幂级数且收敛半径不变.

4. 幂级数展开–Taylor 级数

(1) **幂级数展开的条件:**

(a) **必要条件:** 函数在该点无穷可导.

(b) **唯一性:** 若展式存在, 则唯一.

(c) **充要条件:** 函数在该点的 Taylor 展式的余项趋于 0.

(d) **常用的充分条件:** 函数在该点某个邻域内的各阶导数一致有界.

(2) **幂级数展开:**

(a) **常用函数的 Taylor 级数展开.**

(b) **将函数展成幂级数的典型方法:** 直接法 (定义), 间接法 (从已知幂级数展式出发, 借助幂级数的四则运算与分析运算).

函数项级数：

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots$$

(1) 收敛域 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$是定义在$D$上的一个函数项级数，$x_0 \in D$, 若数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$收敛，则称$x_0$是$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的一个**收敛点**. 所有收敛点构成的集合称为级数的**收敛域**.

(2) “和函数”的概念 函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的收敛域为$I$，则任给$x \in I$, 存在惟一的实数$S(x)$，使得$S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$成立. 定义在$I$上的函数$S(x)$称为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的**和函数**.

(3) 幂级数及其收敛半径、收敛区间（指开区间）和收敛域

幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$

- 若$R \geq 0$满足：(1) 当$|x| < R$时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$绝对收敛；
(2) 当$|x| > R$时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$发散，则称$R$为幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的**收敛半径**，开区间$(-R, R)$称为$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的**收敛区间**.
- **收敛域**：考虑$x = \pm R$的两个端点的收敛性;
- 设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的系数$a_n$满足$a_n \neq 0$, 若$\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$, 则其收敛半径为$R = \dfrac{1}{\rho}$.
- 设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的系数$a_n$满足$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$, 则其收敛半径为$R = \dfrac{1}{\rho}$.

(4) 幂级数的和函数

(5) 幂级数在其收敛区间内的基本性质

- **两级数和的收敛半径**： 若幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径为$R_1$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$的收敛半径为$R_2$，一般情况下，幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$的收敛半径为
$R \geq \min\{R_1, R_2\}$, 且
$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad x \in (-R, R).$$
- **和函数的连续性**：幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数$S(x)$在其收敛域$I$上连续，即任给$x_0 \in I$，有
$$\lim_{x\to x_0} S(x) = \lim_{x\to x_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\lim_{x\to x_0} a_n x^n) = S(x_0).$$
- **和函数的可积性与逐项积分性质** 幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数$S(x)$在其收敛域$I$上可积，且可逐项积分，即任给$x \in I$，有
$$\int_0^x S(t)dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} (\int_0^x a_n t^n dt) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1},$$
若记$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径为$R$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$的收敛半径为$R_1$, 可证明收敛半径相同，但收敛域可能改变.
- **和函数的可导性与逐项求导公式**：幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数$S(x)$在其收敛区间$(-R, R)$内可导，且可逐项求导，即任给$x \in (-R, R)$, 有
$$S'(x) = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

(6) 初等幂级数展开式

- **直接展开法** 直接展开法指的是：利用泰勒级数的定义及泰勒级数收敛的充要条件，将函数在某个区间上直接展开成指定点的泰勒级数的方法.

  由直接展开法易知函数$e^x, \cos x, \sin x, \ln(1+x), (1+x)^\alpha$的麦克劳林级数展开式为：

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots, \ x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \cdots, \ x \in (-1, 1],$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + ...,$$

  其中，当$\alpha \leq -1$时，$x \in (-1,1)$; 当$-1 < \alpha < 0$时，$x \in (-1,1]$; 当$\alpha > 0$时，$x \in [-1,1]$.

  特别地，当$\alpha = -1$时，有$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad x \in (-1,1).$

- **间接展开法** 间接展开法指的是：通过一定运算将函数转化为其他函数，进而利用新函数的幂级数展开将原来函数展开为幂级数的方法. 所用的运算主要是加法运算，数乘运算，(逐项) 积分运算和 (逐项) 求导运算. 利用的幂级数展开公式主要是一些简单函数的麦克劳林展开公式，上述几个简单函数就是常用的几个. 间接展开法是将函数展开成幂级数的主要方法.

(7) Fourier级数

- $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots\}$ **是**$C[-\pi,\pi]$**中的一个正交向量组：**$\forall n, m \in \mathbb{N}^+$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \cos mx dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos mx dx = \begin{cases} \pi, \ n = m, \\ 0, \ n \neq m, \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx dx = \begin{cases} \pi, \ n = m, \\ 0, \ n \neq m, \end{cases}$$

- 设$f \in R[-\pi,\pi]$, 则$f(x)$的形式**Fourier级数**为:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}[a_n \cos nx + b_n \sin nx],$$

  其中

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx, \quad n = 0,1,2,\cdots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx, \quad n = 1,2,\cdots$$

- 设$f(x)$以2π为周期，**奇函数**, 则$f(x)$的形式**正弦Fourier级数**为:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx,$$

  其中

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx, \quad n = 1,2,\cdots$$

- 设$f(x)$以2π为周期，**偶函数**, 则$f(x)$的形式**余弦Fourier级数**为:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx,$$

  其中

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx, \quad n = 0,1,2,\cdots$$

- 设$f(x)$以$2l$为周期，f在$[-l,l]$上可积，则$f(x)$的形式**Fourier级数**为:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}[a_n \cos \frac{n\pi}{l}x + b_n \sin \frac{n\pi}{l}x],$$

  其中

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos \frac{n\pi}{l}xdx, \quad n = 0,1,2,\cdots$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin \frac{n\pi}{l}xdx, \quad n = 1,2,\cdots$$

- 设以2π为周期的函数$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上逐段可微，则$\forall x_0 \in \mathbb{R}$, f的形式Fourier级数在x_0点收敛于$\frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)]$. 特别地，若$f$在$x_0$点连续，则$f$的形式Fourier级数在$x_0$点收敛于$f(x_0)$.

  应用到具体函数，可得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

第 2 部分 习题课题目

1. 假设 I 为非空集合并且 $\forall n \geqslant 1$, 函数 f_n 均在 I 上有界. 若函数列 $\{f_n\}$ 在 I 上一致收敛到函数 f, 则 f 在 I 上有界且函数列 $\{f_n\}$ 在 I 上一致有界.

2. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}$ 在 $[0,+\infty)$ 上是否为一致收敛?

3. 求证: 和函数 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}x^2e^{-nx}$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续且有界.

4. 求证: $\sum\limits_{n=2}^{\infty} x^{n-1}(x-1)^2$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

5. 设 $f\in\mathscr{C}^{(1)}(\mathbb{R})$. $\forall n\geqslant 1$ 及 $\forall x\in\mathbb{R}$, 令 $g_n(x)=n\big(f(x+\frac{1}{n})-f(x)\big)$. 求证:

(1) $\forall a,b\in\mathbb{R}$ $(b>a)$, 函数列 $\{g_n\}$ 在任意闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛到 f'.

(2) $\forall a,b\in\mathbb{R}$ $(b>a)$, 均有 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b g_n(x)\,\mathrm{d}x=f(b)-f(a)$.

6. 设 $a,b\in\mathbb{R}$ 使得 $a<b$. 若 $\forall n\geqslant 1$, 均有 $u_n\in\mathscr{C}[a,b]$ 且函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 在 (a,b) 内一致收敛, 求证:

(1) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(a)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(b)$ 均收敛;

(2) 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

7. 求证: 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+nx)}{nx^n}$ 在 $(1,+\infty)$ 上不为一致收敛.

8. 请问函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是否一致收敛?

9. 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ $(x>0)$, 求 $\int_{\log 2}^{\log 3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

10. 请问函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(x+n)^n}{n^{n+1}}$ 在 $[0,1]$ 上是否一致收敛?

11. $\forall x>1$, 令 $\zeta(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$. 求证: $\zeta\in\mathscr{C}^{(\infty)}(1,+\infty)$.

12. 求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ 的收敛域 D, 并证明该函数项级数的和函数 S 在 D 上连续, 在 $\mathrm{Int}D$ 内 *(即 "D的内部")* 连续可导.

13. 考虑函数项级数 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}\cos(n\pi x^2)$. 求证: 当 $0<L<3$ 时, 函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}\cos(n\pi x^2)$ 在 $(-L,L)$ 上一致收敛; 随后计算 $\lim\limits_{x\to 1} S(x)$.

14. 讨论下述函数项级数的收敛域:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\sin^n x}{n^2}$, (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^2}$, (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{200}}x^n$,
(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!e^{nx}$, (5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n+(-3)^n}x^{2n}$, (6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$.

15. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 1, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+1)x^n$ 的收敛半径为 r, 则 [ ]

(A) $r=1$, (B) $r\leqslant 1$, (C) $r\geqslant 1$, (D) 不能确定.

16. 已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛域为 $[-8,8]$, 则 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{a_nx^n}{n(n-1)}$ 的收敛半径 R 为 [ ]

(A) $R\geqslant 8$, (B) $R\leqslant 8$, (C) $R=8$, (D) 不能确定.

17. 求下列级数之和:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$, (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$, (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a^n}$ $(a>1)$.

18. 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n$ 而 $g(x)=\frac{xf(x)}{1+x}$, 求 g 的 Maclaurin 级数展开.

19. 求 $f(x)=xe^x$ 在点 $x=1$ 处的幂级数展开, 并求收敛域.

20. $\forall n\geqslant 1$, 假设 $f_n\in\mathscr{C}^{(1)}(\mathbb{R})$ 使得 $\forall x\in\mathbb{R}$, 均有 $f_n'(x)=f_n(x)+x^{n-1}e^x$, $f_n(1)=\frac{e}{n}$. 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$.

21. 设 $R\in(0,+\infty)$ 而幂级数 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在开区间 $(-R,R)$ 上收敛. 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}R^{n+1}$ 收敛, 求证: $\int_0^R S(x)\,\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}R^{n+1}$.

22. 求 $f(x)=\frac{12-5x}{6-5x-x^2}$ 在原点的幂级数展开.

23. 将 $f(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ 在点 $x_0=0$ 处展开成幂级数, 并求其收敛域.

24. 问函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$ 在 $[-1,0]$ 是否为一致收敛?

25. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left((\frac{x}{2})^n+(4x)^n\right)$ 的收敛半径与收敛域.

26. 计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nn^2}{n!}$.

27. 求 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ 的收敛域与和函数.

28. 考察下列函数项级数是否在指定区间上一致收敛, 并给出理由:

(1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \log(1+\frac{x}{n\log^2 n})$, $x\in(-a,a)$, $a\in(0,+\infty)$;

(2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \log(1+\frac{x}{n\log^2 n})$, $x\in[1,+\infty)$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}$, $x\in(-\infty,+\infty)$;

(4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-\sin x}$, $x\in(-\infty,+\infty)$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n\sin\frac{1}{3^n x}$, $x\in(0,+\infty)$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

29. 求下列幂级数的收敛半径、收敛开区间、收敛域:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}(x-1)^{2n}$, (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2})x^n$ $(a,b>0)$,

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n}x^{n^2}$, (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1+\frac{1}{n})^{n^2}x^n$.

30. 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $r\in(0,+\infty)$, 求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}x^n$ 的收敛半径.

31. 求 $f(x)=\log\frac{1}{2+2x+x^2}$ 在点 $x=-1$ 处的幂级数展开.

32. 求 $f(x)=\sin^3 x$ 在点 $x=0$ 处的幂级数展开.

33. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n}{3^n(n+1)}x^{2n+1}$ 的收敛域与和函数.

34. 设 f 是以 2π 为周期的函数且在 $[-\pi,\pi]$ 上可积, $c\in\mathbb{R}$ 为常数. $\forall x\in\mathbb{R}$, 令 $F_c(x)=f(x+c)$. 请用 f 的 Fourier 系数表示 F_c 的 Fourier 系数.

35. 设 f 是以 2π 为周期的连续函数, 而 a_n, b_n 为其 Fourier 系数.

(1) 若 $\forall x\in[-\pi,\pi]$, $f(x+\pi)=f(x)$, 求证: $\forall n\geqslant 1$, 均有 $a_{2n-1}=b_{2n-1}=0$;

(2) 若 $\forall x\in[-\pi,\pi]$, $f(x+\pi)=-f(x)$, 求证: $\forall n\geqslant 1$, 均有 $a_{2n-2}=b_{2n}=0$.

36. 求 $f(x)=x\cos x$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 上的形式 Fourier 级数.

37. 求 $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$ 在 $[0,\pi]$ 上的形式余弦级数和形式正弦级数.

38. 求 $f(x)=\arcsin(\sin x)$ 的形式 Fourier 级数.

39. 求 $f(x)=x$, $g(x)=x^2$, $h(x)=x^3$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的形式 Fourier 级数.