第 9 次习题课：　第一型曲线曲面积分

1.　求 $\oint_L xydl$，其中 L 是正方形 $|x|+|y|=a,\quad (a>0)$.

解法一：设 $A(0,-a),B(a,0),C(0,a),D(-a,0)$，

$$\oint_L xydl=\left(\int_{AB}+\int_{BC}+\int_{CD}+\int_{DA}\right)xydl$$

$$=\int_0^a x(x-a)\sqrt{2}dx+\int_0^a x(x-a)\sqrt{2}dx$$

$$+\int_{-a}^0 x(x+a)\sqrt{2}dx+\int_{-a}^0 -x(x+a)\sqrt{2}dx=0$$

解法二（对称性）：积分曲线关于 y 轴对称，被积函数关于 x 为偶函数，因此 $\oint_L xydl=0.$

2.　设 L 为椭圆 $\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{3}y^2=1$，周长为 a，求 $\oint_L(2xy+3x^2+4y^2)dl$

解法一：由 L 的方程，$3x^2+4y^2=12$，

$$\oint_L(2xy+3x^2+4y^2)dl=\oint_L(12+2xy)dl=12a+\oint_L 2xydl$$

由对称性，$\oint_L 2xydl=0$，故 $\oint_L(2xy+3x^2+4y^2)dl=12a$.

解法二：　L：$\begin{cases}x=2\cos\theta\\ y=\sqrt{3}\sin\theta\end{cases}$，　$\theta\in[0,2\pi]$

$$\oint_L xydl=\int_0^{2\pi}\left[2\cos\theta\sqrt{3}\sin\theta\right]\sqrt{4\sin^2\theta+3\cos^2\theta}d\theta=0.$$

$$\oint_L(2xy+3x^2+4y^2)dl=12a+2\oint_L xydl=12a.$$

3.　计算 $\iint_S(x^2+y^2)\mathrm{d}S$．其中 S 是锥体 $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1$ 的边界.

解：设 S_1 和 S_2 为锥体的侧面和上底面，则

$$\iint_S(x^2+y^2)\mathrm{d}S=\iint_{S_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}S+\iint_{S_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}S$$

在 S_1 上，$z=x^2+y^2\ (x^2+y^2\le 1),\ \mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

$$\iint_{S_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}S=\iint_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)\cdot\sqrt{2}dxdy=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cdot\sqrt{2}r\mathrm{d}r=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$$

在 S_2 上，$z=1\ (x^2+y^2\le 1),\ \mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

$$\iint_{S_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}S=\iint_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)dxdy=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cdot r\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\pi.$$

故 $\iint_S (x^2+y^2)\mathrm{d}S = \frac{1+\sqrt{2}}{2}\pi.$

4. 计算均匀半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2\ (z\ge 0)$ 关于 z 轴的转动惯量，设密度为 1 .

解：对于该曲面上任意一点 (x,y,z) 处的面积微元 $\mathrm{d}S$，其质量等于 $\mathrm{d}S$，关于 z 轴的转动惯量为 $(x^2+y^2)\mathrm{d}S$. 于是整个曲面的转动惯量为

$$\iint_S (x^2+y^2)\mathrm{d}S = 2a\iint_{x^2+y^2\le a^2} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a \frac{r^3}{\sqrt{a^2-r^2}}\mathrm{d}r = 2a\pi(r^2\sqrt{a^2-r^2})\Big|_a^0 + 2\int_0^a r\sqrt{a^2-r^2}\mathrm{d}r)$$

$$= \frac{4}{3}\pi a(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_a^0 = \frac{4}{3}\pi a^4 .$$

Question: 整个球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 关于 z 轴的转动惯量？

5. 求 $I=\iint\limits_S (x+y+z)^2 dS$，其中 S 为单位球面.

解：$I=\iint\limits_S (x+y+z)^2 dS = \iint\limits_S (x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx)dS$

$$= \iint\limits_S (1+2xy+2yz+2zx)dS = 4\pi + 2\iint\limits_S (xy+yz+zx)dS$$

其中 4π 是球的表面积. 由对称性可知，$\iint\limits_S xydS = \iint\limits_S yzdS = \iint\limits_S zxdS = 0$, 故 $I=4\pi$

6. 计算螺旋面 $S: x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，$z=r\varphi$（$0\le r\le R, 0\le\varphi\le 2\pi$）的面积。

解：$\vec{r}=(r\cos\varphi, r\sin\varphi, r\varphi), \frac{\partial\vec{r}}{\partial r}=(\cos\varphi,\sin\varphi,\varphi), \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}=(-r\sin\varphi, r\cos\varphi, r),$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = \det\begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \cos\varphi & \sin\varphi & \varphi\\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & r\end{pmatrix} = (r\sin\varphi - r\varphi\cos\varphi, -r\cos\varphi - r\varphi\sin\varphi, r)$$

$$\left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right\| = (r\sin\varphi - r\varphi\cos\varphi, -r\cos\varphi - r\varphi\sin\varphi, r) = r\sqrt{2+\varphi^2}$$

$$S=\iint_S ds=\iint_{0\le r\le R,\ 0\le\varphi\le 2\pi}\sqrt{2+\varphi^2}\,drd\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{2+\varphi^2}\,d\varphi\int_0^R rdr=\frac{R^2}{2}[\pi\sqrt{2+4\pi^2}+\ln(\sqrt{2}\pi+\sqrt{1+2\pi^2})]\cdot$$

7. 求圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 被抛物面 $z=R^2-x^2$ 及 $z=0$ 所截成的一段的侧面积。

解：解法一：（第一类曲线积分）

侧面积 $A=\int_L (R^2-x^2)dl$，其中 L 为曲线 $\begin{cases} z=R^2-x^2 \\ x^2+y^2=R^2 \end{cases}$ 在 XOY 平面上的投影.

L 的参数方程为 $\begin{cases} x=R\cos t \\ y=R\sin t \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$. $dl=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt=Rdt$.

$$A=\int_L (R^2-x^2)dl=\int_0^{2\pi}\left(R^2-R^2\cos^2 t\right)Rdt=\pi R^3$$

解法二：（第一类曲面积分）

$$S=\iint_S dS=2\iint_{D_{xz}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\,dxdz$$

其中 $D_{xz}=\{-R\le x\le R,0\le z\le R^2-x^2\}$，$S$ 的方程（$y\ge 0$）部分为 $y=\sqrt{R^2-x^2}$，

$$S=2\int_{-R}^{R}dx\int_0^{R^2-x^2}\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}\,dz=4R\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\,dx=4R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 tdt=\pi R^3 .$$