

## 第 2 次习题课题目解答

### 第 1 部分 课堂内容回顾

#### 1. 多元数量值函数的微分与偏导数

##### (1) 多元数量值函数的微分:

- (a) 函数在一点的微分为函数在该点处的最佳线性逼近, 因此是一个线性函数.
- (b) 可微蕴含连续, 但反之不对.
- (c) 微分若存在, 则唯一.
- (d) 线性函数在每点的微分均等于其本身.
- (e) 记号  $dx_j$  的定义以及线性函数的微分表示.
- (f) 多元数量值函数求微分的四则运算法则.

##### (2) 多元数量值函数的偏导数:

- (a) 偏导数的定义及其几何意义.
- (b) 若  $f$  在点  $X_0$  处可微, 则它在该点可导且  $df(X_0) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0) dx_j$ .
- (c) 计算二元函数的微分的典型方法.
- (d) **连续、可导、可微与连续可导的关系:** 连续可导蕴含可微, 可微蕴含可导, 但反过来不对; 连续与可导之间一般没有蕴含关系.
- (e) 连续可导函数空间微  $\mathcal{C}^{(1)}(\Omega)$ ; 初等函数在其定义区域的内部连续可导.

#### 2. 多元数量值函数的方向导数与梯度

##### (1) 多元数量值函数的方向导数:

- (a) **方向导数的定义:** 方向导数为单侧极限, 所取的方向为单位向量. 因此沿着坐标轴的方向导数存在并不意味着偏导数存在.
- (b) 若沿某坐标轴的偏导数存在, 则沿该轴正、反两方向的方向导数存在且互负.
- (c) 函数在一点处沿任意方向均有方向导数, 并不意味着函数在该点可微.
- (d) 若  $f$  在点  $X_0$  处可微, 则沿  $\vec{\ell} = (\cos \alpha_1, \dots, \cos \alpha_n)^T$  的方向导数存在且

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}}(X_0) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0) \cos \alpha_j.$$

##### (2) 多元数量值函数的梯度:

- (a) **梯度的定义:** 称向量  $\vec{e}$  为多元数量值函数  $f$  在点  $X_0$  处的梯度, 如果  $f$  在点  $X_0$  处沿  $\vec{e}$  的方向导数的值最大, 并且该值等于  $\|\vec{e}\|$ , 此时将  $\vec{e}$  记作  $\text{grad}f(X_0)$  或  $\vec{\nabla}f(X_0)$ , 也将之记作  $\overrightarrow{\text{grad}}f(X_0)$ .

- (b) 若多元数量值函数  $f$  在点  $X_0$  处可微, 则  $f$  在该点的梯度为

$$\text{grad}f(X_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0) \right)^T,$$

沿向量  $\vec{\ell}$  的方向导数为  $\frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}}(X_0) = \text{grad}f(X_0) \cdot \vec{\ell}$ .

- (c) 梯度运算满足与单变量函数求导类似的四则运算及复合法则.
- (d) **典型问题:** 求函数在一点的梯度与最大方向导数以及沿某向量的方向导数.

### 3. 高阶偏导数

(1) 二阶偏导数可交换次序的充分条件:

设  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  为开集. 若  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  在  $\Omega$  上有二阶偏导函数  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ , 且当中的一个在点  $X_0 \in \Omega$  连续, 则  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(X_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_0)$ .

(2) 设  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  为开集, 而  $k \geq 0$  为整数. 记  $\mathcal{C}^{(k)}(\Omega)$  为  $\Omega$  上具有  $k$  阶连续偏导数的所有函数的集合.

(3) 设  $k \geq 2$  为整数. 若  $f \in \mathcal{C}^{(k)}(\Omega)$ , 则对任意整数  $r$  ( $1 \leq r \leq k$ ), 均有  $f \in \mathcal{C}^{(r)}(\Omega)$  并且  $f$  的任意  $r$  阶偏导数均与求偏导的次序无关.

## 第2部分 习题课题目解答

## 1. 选择题:

(1) 能推出函数  $f$  在点  $(x_0, y_0)$  可微且全微分  $df(x_0, y_0) = 0$  的条件是 ( ):

A.  $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$ ;

B. 函数  $f$  在点  $(x_0, y_0)$  处的增量  $\Delta f(x_0, y_0) = \frac{\Delta x \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$ ;

C. 函数  $f$  在点  $(x_0, y_0)$  处的增量  $\Delta f(x_0, y_0) = \frac{\sin((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$ ;

D. 函数  $f$  在点  $(x_0, y_0)$  处的增量  $\Delta f(x_0, y_0) = ((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2) \sin \frac{1}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ .

(2)  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , 令  $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ . 则函数  $f$  在点  $(0, 0)$  处 ( ):

A. 连续但偏导数不存在;

B. 偏导数存在, 但函数  $f$  不可微;

C. 可微;

D. 连续可导.

(3) 若函数  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  不可微, 则下列命题中一定不成立的是 ( ):

A. 函数  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处不连续;

B. 函数  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处沿任何方向  $\vec{v}$  的方向导数不存在;

C. 函数  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处的两个偏导数都存在且连续;

D. 函数  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处的两个偏导数存在且至少有一个不连续.

(4) 设函数  $f(x, y)$  连续可导且在点  $(1, -2)$  处的两个偏导数分别为

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, -2) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, -2) = -1,$$

则函数  $f$  在点  $(1, -2)$  处增加最快的方向是 ( ):

A.  $\vec{i}$ ; B.  $\vec{j}$ ; C.  $\vec{i} + \vec{j}$ ; D.  $\vec{i} - \vec{j}$ .

(5) 若函数  $f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  处可导, 则 ( ):

A. 函数  $f$  在点  $P_0$  处连续;

B. 一元函数  $f(x, y_0)$  和  $f(x_0, y)$  分别在点  $x_0$  和  $y_0$  处连续;

C. 函数  $f$  在点  $P_0$  处的微分为  $df(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)dy$ ;

D. 函数  $f$  在点  $P_0$  处的梯度为  $\text{grad}f(P_0) = (\frac{\partial f}{\partial x}(P_0), \frac{\partial f}{\partial y}(P_0))^T$ .

解: (1) 可导并不蕴含着可微. 故不能选 A. 又  $df(x_0, y_0) = 0$  当且仅当

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta f(x_0, y_0)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0.$$

故只能选 D.

(2) 由偏导数的定义得  $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ . 若  $f$  在点  $(0,0)$  处可微, 由微分的定义可知  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ , 于是由复合函数的极限法则可得

$$0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|x \cdot x|}}{\sqrt{x^2 + x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

故  $f$  在点  $(0,0)$  可导但不可微. 因此仅 B 成立.

(3) 由于连续可导蕴含着可微, 故选 C.

(4) 函数  $f$  在点  $(1, -2)$  处增加最快的方向就是梯度方向, 而由题设可知

$$\text{grad} f(1, -2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{i} - \vec{j}.$$

因此只能选 D.

(5) 由可导性与连续性, 可微性以及梯度的关系知, A, C, D 不一定成立, 而由偏导数的定义以及单变量函数的可导性蕴含连续性可知 B 成立.

2. 设  $f(x, y) = (x+y)\varphi(x, y)$ , 其中  $\varphi$  在点  $(0,0)$  处连续, 则

$$df(x, y) = (\varphi(x, y) + (x+y)\varphi'_x(x, y))dx + (\varphi(x, y) + (x+y)\varphi'_y(x, y))dy.$$

令  $x=0, y=0$ , 那么  $df(0,0) = \varphi(0,0)(dx+dy)$ .

(1) 指出上述推理当中的错误, (2) 写出正确的解法.

解: (1) 题目当中并没有假设函数  $\varphi$  可微.

(2) 由题设可知, 当  $(x, y) \rightarrow (0,0)$  时,  $\varphi(x, y) = \varphi(0,0) + o(1)$ , 于是

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(0,0) &= (x+y)\varphi(x, y) \\ &= \varphi(0,0)x + \varphi(0,0)y + (x+y)o(1) \\ &= \varphi(0,0)x + \varphi(0,0)y + \sqrt{x^2+y^2}o(1). \end{aligned}$$

由此可知  $f$  在点  $(0,0)$  处可微且  $df(0,0) = \varphi(0,0)(dx+dy)$ .

3. 设函数  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处可微, 而  $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$ ,  $\vec{u} = -\vec{i} + 2\vec{j}$ . 如果

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = -2, \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = 1,$$

求函数  $f$  在点  $(x_0, y_0)$  处的微分, 其中  $\vec{i}, \vec{j}$  分别表示沿  $x, y$  轴的单位向量.

解: 由题设, 我们立刻可知

$$\begin{aligned} -2 = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) &= \text{grad} f(x_0, y_0) \cdot \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), \\ 1 = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) &= \text{grad} f(x_0, y_0) \cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{5}} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{2}{\sqrt{5}} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), \end{aligned}$$

由此可得  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \sqrt{5} - 2\sqrt{2}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \sqrt{5} - 4\sqrt{2}$ . 于是

$$df(x_0, y_0) = (\sqrt{5} - 4\sqrt{2}) dx + (\sqrt{5} - 2\sqrt{2}) dy.$$

4. 设  $D = [0, a] \times [0, b]$ ,  $F: D \rightarrow \mathbb{R}$  为函数. 求证: 存在函数  $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  使得  $\forall (x, y) \in D$ , 均有  $F(x, y) = f(y)$  当且仅当  $\forall (x, y) \in D$ , 均有  $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 0$ .

证明: 必要性. 若存在  $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  使得  $\forall (x, y) \in D$ , 均有  $F(x, y) = f(y)$ , 则由偏导数的定义立刻可知  $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 0$ .

充分性.  $\forall (x, y) \in D$ , 由 Lagrange 中值定理, 存在  $\xi$  介于  $0, x$  之间使得

$$F(x, y) - F(0, y) = x \frac{\partial F}{\partial x}(\xi, y) = 0,$$

也即  $F(x, y) = F(0, y)$ . 故所证成立.

5. 设  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  为开集, 而  $(x_0, y_0) \in \Omega$ . 如果  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  在点  $(x_0, y_0)$  的某个邻域内可导且偏导数有界, 求证: 函数  $f$  在点  $(x_0, y_0)$  处连续.

证明: 由题设  $\exists r, M > 0$  使得  $B((x_0, y_0), \sqrt{2}r) \subseteq \Omega$  且  $f$  在  $B((x_0, y_0), \sqrt{2}r)$  上可导, 并且  $\forall (x, y) \in B((x_0, y_0), \sqrt{2}r)$ , 我们均有

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| \leq M, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq M.$$

$\forall (x, y) \in B((x_0, y_0), r)$ , 由 Lagrange 中值定理可知, 存在  $\xi$  介于  $x_0, x$  之间, 存在  $\eta$  介于  $y_0, y$  之间使得

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x_0, y) &= (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y), \\ f(x_0, y) - f(x_0, y_0) &= (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \eta). \end{aligned}$$

因  $|\xi - x_0| < r$ ,  $|y - y_0| < r$ ,  $|\eta - y_0| < r$ , 则  $(\xi, y), (x_0, \eta) \in B((x_0, y_0), \sqrt{2}r)$ , 故

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(x_0, y_0)| &\leq |f(x, y) - f(x_0, y)| + |f(x_0, y) - f(x_0, y_0)| \\ &= \left| (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y) \right| + \left| (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \eta) \right| \\ &\leq M|x - x_0| + M|y - y_0|. \end{aligned}$$

于是由夹逼原理可知函数  $f$  在点  $(x_0, y_0)$  处连续.

6. 设  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  为开集,  $(x_0, y_0) \in \Omega$ , 而  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  为函数. 若  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  存在且  $f$  在点  $(x_0, y_0)$  的某邻域内关于  $y$  有偏导数, 该偏导函数在点  $(x_0, y_0)$  处连续, 求证: 函数  $f$  在点  $(x_0, y_0)$  处可微.

证明: 由题设可知  $\exists r > 0$  使得  $B((x_0, y_0), r) \subseteq \Omega$ , 且  $f$  在  $B((x_0, y_0), r)$  上有偏导函数  $\frac{\partial f}{\partial y}$ , 后者还在点  $(x_0, y_0)$  连续. 由偏导数的定义、Lagrange 中值定理、夹逼原理以及  $\frac{\partial f}{\partial y}$  在点  $(x_0, y_0)$  处的连续性可知, 当  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ ,

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x_0, y_0) &= (f(x, y_0) - f(x_0, y_0)) + (f(x, y) - f(x, y_0)) \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + o(1) \right) (x - x_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0 + \theta(y - y_0)) \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + o(1) \right) (x - x_0) + \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o(1) \right) (y - y_0) \\ &= (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + (o(x - x_0) + o(y - y_0)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + o(1)\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \end{aligned}$$

其中  $\theta \in (0, 1)$ . 因此函数  $f$  在点  $(x_0, y_0)$  处可微.

7. 假设  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  在点  $X_0 \in \mathbb{R}^3$  可微, 而  $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3$  为  $\mathbb{R}^3$  中互相垂直的单位向量, 求证: 在点  $X_0$  处, 我们有

$$\left( \frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}_3} \right)^2 = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2.$$

证明: 对任意整数  $1 \leq j \leq 3$ , 记  $\vec{\ell}_j = (a_{1j}, a_{2j}, a_{3j})^T$ , 则在点  $X_0$  处,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}_1} &= a_{11} \frac{\partial f}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial f}{\partial y} + a_{13} \frac{\partial f}{\partial z}, \\ \frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}_2} &= a_{21} \frac{\partial f}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial f}{\partial y} + a_{23} \frac{\partial f}{\partial z}, \\ \frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}_3} &= a_{31} \frac{\partial f}{\partial x} + a_{32} \frac{\partial f}{\partial y} + a_{33} \frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned}$$

令  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$ . 因  $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3$  为正交的单位向量, 则  $A$  为正交矩阵, 故

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}_3} \right)^2 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}_1} \\ \frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}_2} \\ \frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}_3} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}_1} \\ \frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}_2} \\ \frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}_3} \end{pmatrix} = \left( A \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \right)^T A \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}^T A^T A \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2. \end{aligned}$$

8.  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , 定义

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & \text{若 } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{其余.} \end{cases}$$

问  $f$  是否有二阶偏导数?

解: 由于  $f$  在  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  上为初等函数, 故它在该集合上有二阶偏导数.

另外,  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , 我们有

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

又由偏导数的定义可得  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ . 注意到极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( 2 \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^2} \cos \frac{1}{x^2} \right)$$

不存在, 因此  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)$  不存在.

9. 设  $D = [0, a] \times [0, b]$ , 而函数  $F: D \rightarrow \mathbb{R}$  关于第二个变量的偏导数  $\frac{\partial F}{\partial y}$  存在. 求证: 存在函数  $g: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  使得  $\forall (x, y) \in D$ , 我们均有  $F(x, y) = g(x) + h(y)$  当且仅当  $\forall (x, y) \in D$ , 均有  $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$ .

证明: 必要性. 假设存在两个  $g: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  使得  $\forall (x, y) \in D$ , 均有  $F(x, y) = g(x) + h(y)$ , 则  $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = h'(y)$ , 进而可得  $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$ .

充分性.  $\forall (x, y) \in D$ , 定义  $\varphi(x, y) = F(x, y) - F(0, y)$ . 由 Lagrange 中值定理可知, 存在  $\xi$  介于  $0, x$  之间使得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial F}{\partial y}(0, y) = x \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(\xi, y) = 0.$$

同样由 Lagrange 中值定理可知, 存在  $\eta$  介于  $0, y$  之间使得

$$(F(x, y) - F(0, y)) - (F(x, 0) - F(0, 0)) = \varphi(x, y) - \varphi(x, 0) = y \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, \eta) = 0,$$

于是  $F(x, y) = (F(x, 0) - F(0, 0)) + F(0, y)$ . 故所证结论成立.

10. 假设  $D = [0, a] \times [0, b]$ , 而  $u \in \mathcal{C}^{(2)}(D)$  使得  $\forall (x, y) \in D$ , 均有  $u(x, y) \neq 0$ . 求证: 存在  $f: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  使  $\forall (x, y) \in D$ ,  $u(x, y) = f(x)g(y)$  当且仅当在  $D$  上, 成立  $\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} = u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ .

证明: 由于  $D$  为连通集, 而  $u$  在  $D$  上连续且恒不为零, 则由连续函数介值定理可知  $u$  在  $D$  上恒为正或恒为负. 不失一般性, 我们可假设  $u$  在  $D$  上恒为正, 否则可以考虑  $-u$ .

**必要性.** 假设存在两个函数  $f: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  使得  $\forall (x, y) \in D$ , 均有  $u(x, y) = f(x)g(y)$ . 由于  $u \in \mathcal{C}^{(2)}(D)$ , 则  $f, g$  可导且  $\forall (x, y) \in D$ , 成立

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = f'(x)g(y)f(x)g'(y) = u(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y).$$

**充分性.** 假设  $\forall (x, y) \in D$ , 均有  $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = u(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y)$ .  $\forall (x, y) \in D$ , 定义  $F(x, y) = \log u(x, y)$ . 则  $F \in \mathcal{C}^{(2)}(D)$  且  $\forall (x, y) \in D$ , 均有

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{u(x, y)} \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right) \\ &= \frac{1}{(u(x, y))^2} \left( u(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right) = 0. \end{aligned}$$

故存在  $p: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $q: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  使得  $\forall (x, y) \in D$ ,  $F(x, y) = p(x) + q(y)$ . 此时令  $f(x) = e^{p(x)}$ ,  $g(y) = e^{q(y)}$ , 则  $u(x, y) = e^{F(x, y)} = f(x)g(y)$ .

11.  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , 定义  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x}(1 - e^{-xy}), & \text{若 } x \neq 0, \\ y, & \text{若 } x = 0. \end{cases}$  考察函数  $f$  的连续性、可微性以及连续可导性, 并给出理由.

**解:** 令  $D = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ , 则  $D$  为开集, 并且  $f$  在  $D$  上为初等函数, 于是  $f$  在  $D$  上连续可导, 从而可微. 另外,  $\forall (x, y) \in D$ , 我们有

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{x^2}((1 + xy)e^{-xy} - 1), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = e^{-xy}.$$

固定  $y_0 \in \mathbb{R}$ . 下面我们将证明  $f$  在点  $(0, y_0)$  处连续可导.

由偏导数的定义以及 L'Hospital 法则可知

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, y_0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, y_0) - f(0, y_0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-xy_0} - xy_0}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y_0 e^{-xy_0} - y_0}{2x} = -\frac{1}{2}y_0^2, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, y_0) &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(0, y) - f(0, y_0)}{y - y_0} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{y - y_0}{y - y_0} = 1. \end{aligned}$$

由此可知,  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , 我们有  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = e^{-xy}$ , 因此  $\frac{\partial f}{\partial y}$  在点  $(0, y_0)$  处连续. 下证  $\frac{\partial f}{\partial x}$  亦在点  $(0, y_0)$  处连续.

当  $(x, y) \rightarrow (0, y_0)$  且  $x \neq 0$  时, 由带 Peano 余项的 Taylor 公式可知,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{1}{x^2}((1 + xy)e^{-xy} - 1) = \frac{y(e^{-xy} - 1)}{x} + \frac{1}{x^2}(e^{-xy} - 1 + xy) \\ &= \frac{y(-xy + o(xy))}{x} + \frac{1}{x^2}(\frac{1}{2}(xy)^2 + o((xy)^2)) \\ &= -y^2 + y^2 o(1) + \frac{1}{2}y^2 + y^2 o(1) = -\frac{1}{2}y^2 + o(1) \\ &= -\frac{1}{2}y_0^2 + o(1) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, y_0) + o(1). \end{aligned}$$



而当  $(x, y) \rightarrow (0, y_0)$  且  $x = 0$  时, 则我们有

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}y_0^2 + o(1) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, y_0) + o(1),$$

于是当  $(x, y) \rightarrow (0, y_0)$ , 我们有  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, y_0) + o(1)$ , 即  $f$  在点  $(0, y_0)$  连续可导, 进而可知  $f$  在  $\mathbb{R}^2$  上连续可导, 从而可微, 因此连续.

注: 也可直接证明连续性. 由于  $f$  在  $D$  上为初等函数, 因此  $f$  在  $D$  上连续.

下面固定  $y_0 \in \mathbb{R}$ , 并证明  $f$  在点  $(0, y_0)$  处连续.

当  $(x, y) \rightarrow (0, y_0)$  且  $x \neq 0$  时, 由带 Peano 余项的 Taylor 公式可知,

$$f(x, y) = \frac{xy + o(xy)}{x} = y + yo(1) = y_0 + o(1) = f(0, y_0) + o(1).$$

而当  $(x, y) \rightarrow (0, y_0)$  且  $x = 0$  时, 则有  $f(x, y) = y = y_0 + o(1) = f(0, y_0) + o(1)$ .

于是函数  $f$  在点  $(0, y_0)$  处连续, 进而可知  $f$  在  $\mathbb{R}^2$  上连续.