第一章 多元函数微分

1. 求证: 任意多个开集之并为开集; 有限个开集之交为开集.

(A 习题 1.1-3(3), P7)

证明: 本题出现的所有 A_i 都是开集. 任取 $x \in \bigcup_i A_i$，则存在某个 i 使得 $x \in A_i$，而 A_i 是开集，故 $\exists\delta$ 使得 $B(x,\delta) \subset A_i \subset \bigcup_i A_i$，因此 $\bigcup_i A_i$ 是开集.

任取 $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$，则对每个 $1 \le i \le n$，都有 $x \in A_i$，由开集的定义，又 $\exists\delta_i$ 使得 $B(x,\delta_i) \subset A_i$.

取 $\delta = \min_{1\le i\le n} \delta_i$，则有 $B(x,\delta) \subset \bigcap_{i=1}^{n} A_i$，因此 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ 是开集.

注: 无穷多个开集之交未必是开集，如 $\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = \{0\}$ 就不是开集.

2. 求证: 若 $A, B \subset R^n$, 记 $S = A \cap B, T = A \cup B$, 则 $S^\circ = A^\circ \cap B^\circ, T^\circ \supset A^\circ \cup B^\circ$.

(A 习题 1.1-3(4), P7)

证明: 任取 $x \in S^\circ$，则 $\exists\delta$ 使得 $B(x,\delta) \subset S = A \cap B$，因此 $B(x,\delta) \subset A \Rightarrow x \in A^\circ$ 同理 $x \in B^\circ$，所以 $x \in A^\circ \cap B^\circ$；

又任取 $y \in A^\circ \cap B^\circ$，则 $\exists\delta_1, \delta_2$ 使得 $B(y,\delta_1) \subset A, B(y,\delta_2) \subset B$. 取 $\delta = \min(\delta_1,\delta_2)$，则 $B(y,\delta) \subset A \cap B = S$，有 $y \in S^\circ$，因此 $S^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

任取 $z \in A^\circ \cup B^\circ$，则 $z \in A^\circ$ 或 $z \in B^\circ$，不妨设为前者，则 $\exists\delta$ 使得 $B(z,\delta) \subset A \subset T$，有 $z \in T^\circ$，因此 $T^\circ \supset A^\circ \cup B^\circ$.

3. 若 $A \subset R^n$，则集合 A° 的内部等于 A°.

(A 习题 1.1-3(5), P7)

证明: 只需证明 $A^\circ \subset (A^\circ)^\circ$. 任取 $x \in A^\circ$，则 $\exists\delta$ 使得 $B(x,\delta) \subset A$. 在 $B(x,\delta/2)$ 中任取一点 y，都有 $B(y,\delta/2) \subset B(x,\delta) \subset A$，因此 $y \in A^\circ$. 这说明 $B(x,\delta/2) \subset A^\circ$，故有 $x \in (A^\circ)^\circ$.

4. 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3 - y^3}{x + y}$ 是否存在? (A 习题 1.3-1(7), P23)

解：不存在．令 $y=0, x\to 0, \dfrac{x^3-y^3}{x+y}\to 0$；考虑方程 $x^3-y^3=x+y$，它可以写作 $y^3+y=x^3-x$．注意到 y^3+y 是从 R 到 R 的严格增函数，因此对于每一个 x，都存在唯一的 y 使得 $y^3+y=x^3-x$，也即上述方程确定隐函数 $y=y(x)$．沿这个函数图像趋于原点，$\dfrac{x^3-y^3}{x+y}\to 1$．因此，原极限不存在.

评注：判定多元函数极限不存在，常见的情形是取一条路径(或点列)使得沿这条路径的极限不存在，或者沿某两条路径的极限不等.

5. 设 $f(x,y)=|x-y|\varphi(x,y)$，其中 $\varphi(x,y)$ 在原点取 0 值且连续. f 在原点是否可微? (A 习题 1.4-2(4), P42)

解：当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，$\left|\dfrac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le|\varphi(x,y)|\dfrac{|x|+|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\to 0$，即 $f(x,y)=o(\sqrt{x^2+y^2})$．因此 f 在原点可微，且 $df(0,0)=0$．

评注：判定函数是否可微通常有以下准则:
第一，检查连续性以及可导性. 若在某个点处函数不连续，或者某个偏导数不存在，则函数在这点一定不可微. 对于上题的函数，可以验证它在原点连续，且两个偏导数都是 0.
第二，在连续性和可导性都满足的条件下，再看函数与它的线性主部之差是否为自变量改变量的高阶无穷小. 这时通常转化为另一个极限的存在性问题.

6. 设 $f_x(x_0,y_0)$ 存在，f_y 在 (x_0,y_0) 连续，则 f 在 (x_0,y_0) 可微. (A 习题 1.4-7, P43)

证明：$\Delta f=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=\Delta_1+\Delta_2$，这里

$$\Delta_1=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0),\Delta_2=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0).$$

由于 $f_x(x_0,y_0)$ 存在，按导数定义有 $\Delta_2=f_x(x_0,y_0)\Delta x+o(\Delta x)$；由一元微分中值定理，有 $\Delta_1=f(x_0+\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\Delta y$，其中 $0\le\theta\le 1$．当 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$ 时，由 f_y 在 (x_0,y_0) 的连续性有 $f_y(x_0+\Delta x,y_0+\theta\Delta y)=f_y(x_0,y_0)+o(1)$．综合以上分析，有

$$\Delta f=\left(f_y(x_0,y_0)+o(1)\right)\Delta y+f_x(x_0,y_0)\Delta x+o(\Delta x)=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y+o(\rho)$$

因此 f 在 (x_0,y_0) 可微.

7. 对 $n>2$，设 $u=(x_1^2+\ldots+x_n^2)^{\frac{2-n}{2}}$．求证：$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\ldots+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}=0$. (A 习题 1.4-15(4), P44)

证明：记 $r=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$，有 $\frac{\partial r}{\partial x_i}=\frac{x_i}{r},\frac{\partial u}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}(r^{2-n})=(2-n)r^{1-n}\cdot\frac{x_i}{r}=(2-n)r^{-n}x_i$，

$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=(2-n)\frac{\partial}{\partial x_i}(r^{-n}x_i)=(2-n)(-nr^{-n-1}\cdot\frac{x_i}{r}\cdot x_i+r^{-n})=(2-n)r^{-n}\left(1-n\frac{x_i^2}{r^2}\right)$. 因此，

$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}=(2-n)r^{-n}\left(n-\frac{n}{r^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)=0$.

8. 已知变换 $\begin{cases} w=x+y+z \\ u=x \\ v=x+y \end{cases}$，化简方程 $z_{xx}-2z_{xy}+z_{yy}+z_x-z_y=0$，以 w 为因变量, u, v 为自变量. (A 习题 1.5-8, P54)

解：先将自变量化成 u 和 v. 由题设 $x=u, y=v-u$，有 $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial y}$. 原方程可化为 $\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z+\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\right)z=0$，即 $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial z}{\partial u}=0$.

注意到 $w=z+v$，因此 $\frac{\partial w}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial u}$，原方程最终变成 $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial w}{\partial u}=0$.

9. 设 f 可微. 求证：曲面 $f(y-az, x-bz)=0$ 的任一点的切平面都与一定直线平行. (A 习题 1.7-4(4), P79)

证明：$f(y-az, x-bz)=0$ 在 (x,y,z) 的法向量为 $\vec{n}=(f_2, f_1, -af_1-bf_2)$，这里 f_1, f_2 分别表示 f 对两个自变量的偏导数. 令 $\vec{u}=(b,a,1)$ 为固定方向，则恒有 $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$. 因此, f 的切平面都与以 $\vec{u}$ 为方向向量的定直线平行.

10. 设 f 可微. 求证：曲面 $z=yf\left(\frac{x}{y}\right)$ 的所有切平面相交于一个公共点. (A 习题 1.7-4(5), P79; B 习题 11.2-5, P115)

证明：曲面 $z=yf\left(\frac{x}{y}\right)$ 在 (x_0, y_0, z_0) 处的切平面方程为

$z=z_0+f'\left(\frac{x_0}{y_0}\right)(x-x_0)+\left(f\left(\frac{x_0}{y_0}\right)-\frac{x_0}{y_0}f'\left(\frac{x_0}{y_0}\right)\right)(y-y_0)$，代入 $z_0=y_0 f\left(\frac{x_0}{y_0}\right)$ 整理得

$z=xf'\left(\frac{x_0}{y_0}\right)+y\left(f\left(\frac{x_0}{y_0}\right)-\frac{x_0}{y_0}f'\left(\frac{x_0}{y_0}\right)\right)$，恒过原点.

11. 已知函数f可微，若 T 为曲面$S: f(x,y,z)=0$在点$P(x_0,y_0,z_0)$处的切平面，l为 T 上任意一条过 P 的直线. 求证：在 S 上存在一条曲线，该曲线在 P 处的切线恰好为l. (A 习题 1.7-7, P79)

证明：过l作 T 的垂面 K，与曲面 S 的交线记做 C. 注意到 S 在 P 点的法向$\vec{n}_1 // K$，而 K 的法向$\vec{n}_2 // T$，而且有$\vec{n}_1,\vec{n}_2,l$两两垂直，因此l是 C 在 P 处的切线.

12. 求函数$f(x,y)=x^3-4x^2+2xy-y^2$的极值.

解：令$0=f_x(x,y)=3x^2-8x+2y, 0=f_y(x,y)=2x-2y$，可解得两个驻点(0,0), (2,2)；而$H(0,0)=\begin{pmatrix}-8 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}$负定，因此有极大值$f(0,0)=0$；$H(2,2)=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}$不定，(2,2)不是极值点.

评注：对本题的函数而言，虽然(0,0)是f的唯一的极大值点，但由于$f(+\infty,0)=+\infty$，因此这个唯一的极大值并不是最大值，这与一元函数的唯一极值必为最值不同.

13. 求$z(x,y)=xy$在条件$(x-1)^2+y^2=1$下的最大值和最小值.

解：（法一）记$L(x,y,\lambda)=xy+\lambda\left((x-1)^2+y^2-1\right)$，令$\begin{aligned}L_x&=y+2\lambda(x-1)=0,\\ L_y&=x+2\lambda y=0,\\ L_\lambda&=x^2+y^2-2x=0\end{aligned}$，可以得到

$$2x=x^2+y^2=4\lambda^2\left((x-1)^2+y^2\right)=4\lambda^2，\text{因此 } x=2\lambda^2, \lambda y=-\lambda^2.$$

若$\lambda\neq 0$，有$y=-\lambda, x=2y^2$，可解得$(x,y)=\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$或$(x,y)=\left(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

若$\lambda=0$，则$x=y=0$. 但 z 在第一象限取正值，第四象限取负值，因此 0 不是极值.

由于连续函数 z 在有界闭集$(x-1)^2+y^2=1$上必有最大值和最小值，因此，当$(x,y)=\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$时，z 取到最大值$\frac{3\sqrt{3}}{4}$；当$(x,y)=\left(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$时，z 取到最小值$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

（法二）令$x=1+\cos\theta, y=\sin\theta, -\pi\le\theta\le\pi$，有$z=(1+\cos\theta)\sin\theta=\sin\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta$，记右端为$f(\theta)$. 令$0=f'(\theta)=\cos\theta+\cos 2\theta=2\cos^2\theta+\cos\theta-1$，解得$\theta=\pm\frac{\pi}{3}$.

而$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}, f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{4}, f(-\pi)=f(\pi)=0$，因此 z 的最大值和最小值分别为

$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ 和 $-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

(法三) 题设条件即 $y^2=2x-x^2$, 有 $0\le x\le 2$. 而 $z^2=x^2y^2=x^2(2x-x^2)=\dfrac{1}{3}x^3(6-3x)$.

由均值不等式有 $x^3(6-3x)=x\cdot x\cdot x(6-3x)\le\left(\dfrac{x+x+x+6-3x}{4}\right)^4=\dfrac{81}{16}$, 因此

$-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\le z\le\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$. 当 $(x,y)=\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 时, z 取到最大值 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$; 当 $(x,y)=\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 时, z

取到最小值 $-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

评注: 此题为典型的条件最值的问题. 法一采用最常规也最通用的拉格朗日乘子法, 但同时也最繁琐; 法二借助三角代换, 化为一元最值问题处理, 相对容易些; 法三应用均值不等式来的最快, 但变形技巧巧妙. 实际操作时, 针对不同的题目要善于灵活运用各种手段.
必须注意的是, 不等式放缩方法对于极值问题不适用, 因为极值是局部概念, 而不等式放缩是整体进行的, 只能用来求最值.

14. 设 $u(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 在 D 内部满足 $u_x+u_y=ku$, 这里 $k>0$ 为常数. 若 u 在 ∂D 上恒为 0, 求证: u 在 D 上恒为 0. (A 习题 1.9-5(1), P94)
证明: 若不然, 则 u 在 D 上有正的最大值或者负的最小值(不妨设为前者). 这个最大值必在某个内点 (x_0,y_0) 取到, 也是极大值, 有 $0=u_x(x_0,y_0)+u_y(x_0,y_0)=ku(x_0,y_0)>0$, 矛盾.

15. 设 $u(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 在 D 内部满足 $u_{xx}+u_{yy}=u$. 求证: (1)若 u 在 ∂D 上非负, 则 u 在 D 上非负. (2)若 u 在 ∂D 上恒正, 则 u 在 D 上恒正. (A 习题 1.9-5(2), P94)

证明: (1) 若不然, 则 u 的最小值在某个内点 (x_0,y_0) 处取到. 这个最小值也是极小值, 因此 u 在 (x_0,y_0) 处的 Hesse 矩阵半正定, 在这一点有 $0\le u_{xx}+u_{yy}=u<0$, 矛盾.

(2) 取 $u_\varepsilon(x,y)=u(x,y)-\varepsilon e^x$, 题设方程对 u_ε 仍然成立. 记 $m=\min\limits_{\partial D}u, M=\max\limits_{\partial D}e^x$, 可取 $\varepsilon<\dfrac{m}{M}$ 使得 u_ε 在边界上仍然恒正. 由 (1) 所证, 在 D 上有 $u_\varepsilon(x,y)\ge 0$, 因此 $u(x,y)=u_\varepsilon(x,y)+\varepsilon e^x>0$.

16. 设 $\Omega\subset R^n$, 求证: (1) $\partial\Omega$ 是闭集; (2) $\partial\overline{\Omega}\subseteq\partial\Omega$. (A 第一章总复习题 3, P96)

证明: (1) $\partial\Omega=\partial(\Omega^c)=\overline{\Omega}\cap\overline{\Omega^c}$ 为两个闭集之交.

(2) 任意取定 $X_0\in\partial\overline{\Omega}$, 要证 $X_0\in\partial\Omega$, 即在 X_0 的任意邻域内都能同时找到在 Ω 中的点和

不在 Ω 中的点. 由于 $X_0 \in \partial\overline{\Omega}$，因此对于任给的 ε，存在 $X_1, X_2 \in B(X_0, \varepsilon)$ 使得 $X_1 \in \overline{\Omega}, X_2 \notin \overline{\Omega}$. 由于 $\Omega \subseteq \overline{\Omega}$，当然有 $X_2 \notin \Omega$. 若 $X_1 \in \Omega$，则结论已经得证；否则必有 $X_1 \in \partial\Omega$，因此存在 $X_3 \in B(X_1, \varepsilon) \subset B(X_0, 2\varepsilon)$，使得 $X_3 \in \Omega$，结论也成立.

17. 设函数 $f: R^n \to R^m$，求证：f 在 R^n 上连续的充要条件是对任意 R^m 中的开集 A，$f^{-1}(A)$ 都是 R^n 中的开集，这里 $f^{-1}(A) = \{x : f(x) \in A\}$.（A 第一章总复习题 4, P96）

证明：必要性，设 A 是开集，不妨设 $f^{-1}(A)$ 非空. 任取 $x_0 \in f^{-1}(A)$，记 $y_0 = f(x_0) \in A$. 由开集的定义知存在 $\varepsilon_0 > 0$， 使得 $B(y_0, \varepsilon_0) \subset A$. 由 f 的连续性， 对上述 $\varepsilon_0 > 0$， 存在 $\delta_0 > 0$，使得当 $\| x - x_0 \| < \delta_0$ 时 $\| f(x) - y_0 \| < \varepsilon_0$，因此 $B(x_0, \delta_0) \subset f^{-1}(A)$，有 $f^{-1}(A)$ 是开集.

充分性，任取 $x_0 \in R^n$. $\forall \varepsilon > 0$，有 $A = B(f(x_0), \varepsilon)$ 是开集，由条件 $f^{-1}(A)$ 是开集. 而 $x_0 \in f^{-1}(A)$，因此存在 $\delta > 0$ 使得 $B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(A)$，也即当 $\| x - x_0 \| < \delta$ 时有 $\| f(x) - y_0 \| < \varepsilon$，因此 f 在 x_0 连续，由 x_0 的任意性得 f 在 R^n 上连续.

18. 设 $\Omega \subset R^n, X \in R^n$，定义 $\rho(X, \Omega) = \inf\limits_{Y \in \Omega} \| X - Y \|$. 求证：(1) $\rho(X, \Omega)$ 关于 X 一致连续；(2) 若 Ω 为有界闭集， 则存在 $X_0 \in \Omega$ 使得 $\rho(X, \Omega) = \| X - X_0 \|$. (3) 对 $\Omega_1, \Omega_2 \in R^n$ 定义 $\rho(\Omega_1, \Omega_2) = \inf\limits_{X \in \Omega_1, Y \in \Omega_2} \| X - Y \|$. 若 Ω_1, Ω_2 都是有界闭集， 则存在 $X_i \in \Omega_i$ 使得 $\rho(\Omega_1, \Omega_2) = \| X_1 - X_2 \|$.（A 第一章总复习题 6, P96）

证明：(1) 任取 $X_1, X_2 \in R^n$ 及 $Y \in \Omega$，有 $\rho(X_1, \Omega) \le \| X_1 - Y \| \le \| X_1 - X_2 \| + \| X_2 - Y \|$. 对 $Y \in \Omega$ 取下确界，得到 $\rho(X_1, \Omega) \le \| X_1 - X_2 \| + \rho(X_2, \Omega)$. 同理，

$\rho(X_2, \Omega) \le \| X_1 - X_2 \| + \rho(X_1, \Omega)$. 由此 $| \rho(X_1, \Omega) - \rho(X_2, \Omega) | \le \| X_1 - X_2 \|$， 立即得到一致连续性.

(2) 对于固定的 X，$f(Y) = \| X - Y \|$ 关于 Y 是连续函数，在有界闭集 Ω 上必有最小值，取其最小值点为 X_0 即得.

评注：此小题 Ω 的有界性事实上可以去掉.（如何证明?）

(3) 注意到 $\rho(\Omega_1, \Omega_2) = \inf\limits_{X \in \Omega_1} \inf\limits_{Y \in \Omega_2} \| X - Y \| = \inf\limits_{X \in \Omega_1} \rho(X, \Omega_2)$， 由 (1)，$\rho(X, \Omega_2)$ 是 X 的连续

函数, 在有界闭集Ω_1上必取到最小值$\rho(X_1,\Omega_2)$，再由(2)得X_2的存在性.

19. 设$f(x,y,z)$可微, I_1,I_2,I_3为R^3中相互垂直的三个单位向量. 求证:

$\left(\frac{\partial f}{\partial I_1}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial I_2}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial I_3}\right)^2=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2$.(A 第 1 章总复习题 9, P96)

证明: 记$P=(I_1,I_2,I_3)$, 则P为标准正交基I_1,I_2,I_3到标准基的过渡矩阵, 是正交阵. 由链锁法则有$\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial I_1},\frac{\partial f}{\partial I_2},\frac{\partial f}{\partial I_3}\right)\frac{\partial(I_1,I_2,I_3)}{\partial(x,y,z)}=\left(\frac{\partial f}{\partial I_1},\frac{\partial f}{\partial I_2},\frac{\partial f}{\partial I_3}\right)P$. 由正交变换保长度即得结论.

评注: 这是应用复合函数求导链锁法则的矩阵形式的经典例子, 无需繁琐的偏导数计算.

20. 设$f(x,y)$可微, 且满足$\lim\limits_{x^2+y^2\to\infty}\frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}}=+\infty$, 求证: 对于任意的$v=(v_1,v_2)$, 都存在$(x_0,y_0)$使得$\mathrm{grad}f(x_0,y_0)=v$.(A 第 1 章总复习题 15, P97; B 第 11 章补充题 2, P141)

证明: 首先断言: 当$x^2+y^2\to\infty$时(下同), $\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\to+\infty$或$-\infty$.

由条件, 对任意 M, 存在$R>0$, 使得当$(x,y)\in D=\{x^2+y^2>R\}$时有, $\frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}}>M$.

若存在$(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in D$, 使得$\frac{f(x_1,y_1)}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}>M,\frac{f(x_2,y_2)}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}<-M$, 则由介值定理, 存在$(x_3,y_3)\in D$使得$\frac{f(x_3,y_3)}{\sqrt{x_3^2+y_3^2}}=0$, 矛盾. 因此只能$\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$在D中恒大于M或恒小于—M, 对应$\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\to+\infty$或$-\infty$. 下面的讨论不妨假设前者成立.

记$g(x,y)=f(x,y)-v_1x-v_2y$. 则$\frac{g(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{v_1x+v_2y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

而$\left|\frac{v_1x+v_2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le|v_1|+|v_2|$有界, 因此也有$\frac{g(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\to+\infty$, 所以$g(x,y)\to+\infty$.

g 的最小值一定在内点(x_0,y_0)取到, 这个最小值点也是极小值点, 有$\mathrm{grad}g(x_0,y_0)=0$, 因此$\mathrm{grad}f(x_0,y_0)=v$.

21. 设 $f\in C^1(R^3)$，且在 R^3 上处处有 $f_x=f_y=f_z$. 若 $f(x,0,0)>0$ 对所有的 x 成立. 求证: f 在 R^3 上处处为正.

证明: 取 R^3 一组正交向量 (u,v,w), $u=(1,1,1), v=(1,1,-2), w=(1,-1,0)$. 转换坐标系, 视 f 为 u,v,w 的函数, 有 $\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial w}=0$, 因此 f 只是 $u=x+y+z$ 的函数, 有 $f(x,y,z)=\varphi(x+y+z)=f(x+y+z,0,0)>0$.

22. 设 $f(x,y)=\cos(x^2+y^5)$，求 $\frac{\partial^{18}f}{\partial x^8\partial y^{10}}(0,0)$.

解: 考虑 f 在原点处泰勒展开的 x^8y^{10} 项系数,

它应该是 $\frac{1}{8!10!}\frac{\partial^{18}f}{\partial x^8\partial y^{10}}(0,0)$；另一方面,

由 $f(x,y)=1-\frac{(x^2+y^5)^2}{2!}+\frac{(x^2+y^5)^4}{4!}-\frac{(x^2+y^5)^6}{6!}+\dots$,

其中 $x^8y^{10}=(x^2)^4(y^5)^2$ 项系数为 $-\frac{C_6^4}{6!}=-\frac{1}{4!2!}$.

因此, $\frac{\partial^{18}f}{\partial x^8\partial y^{10}}(0,0)=-\frac{8!10!}{4!2!}$.

第二章 含参积分

1. 判断下列积分在所给区间上的一致收敛性.

$$(1)\int_1^{+\infty} e^{-tx}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx, t\ge 0;(2)\int_0^{+\infty}\sqrt{t}e^{-tx^2}dx, t\ge 0;(3)\int_1^{+\infty}\frac{\sin x^2}{x^p}, p\ge 0$$

(习题 2.1-4(7)(8)(10), P103)

解: (1) $\left|\int_1^{+\infty}\cos x dx\right|\le 2$, 对 t 一致有界; $\frac{e^{-tx}}{\sqrt{x}}\le\frac{1}{\sqrt{x}}$ 对 x 单调, 且关于 t 一致趋于 0, 由狄利克雷判别法得到一致收敛.

(2) $\sup\limits_{t\ge 0}\int_A^{+\infty}\sqrt{t}e^{-tx^2}dx=\sup\limits_{t\ge 0}\int_{A\sqrt{t}}^{+\infty}e^{-u^2}du=\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du>0$, 不一致收敛.

(3) $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x^2}{x^p}dx=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\sin u}{u^{(p+1)/2}}du$, $\int_1^{+\infty}\sin u du$ 关于 p 一致有界, $\frac{1}{u^{(p+1)/2}}\le\frac{1}{\sqrt{u}}$ 对 x 单调, 且关于 p 一致趋于 0, 由狄利克雷判别法得到一致收敛.

评注: 一致收敛性有一种很常用的等价刻画:

$\int_a^{+\infty}f(x,t)dx$ 关于 $t\in I$ 一致收敛 $\Leftrightarrow\lim\limits_{A\to+\infty}\sup\limits_{t\in I}\int_A^{+\infty}f(x,t)dx=0$.

只需注意到为使 $\left|\int_A^{+\infty}f(x,t)dx\right|<\varepsilon$ 对所有 $t\in I$ 成立, 当且仅当左边的上确界也要 $\le\varepsilon$.

必须强调是先对 $t\in I$ 取上确界, 后对 A 取极限, 这里的次序不可交换. 这里"取上确界"的操作正是对"一致"的刻画.

一般来说, 判断不一致收敛的工具很少. 上面的方法与定义等价, 但用起来很方便, 无需像原始定义那样对任给的 ε 去煞费苦心寻找符合要求的 A.

2. 设 $f(x,t)$ 在 $[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ 中连续, 如果 $\int_a^{+\infty}f(x,t)dx$ 对于每个 $t\in[\alpha,\beta)$ 都收敛而当 $t=\beta$ 时发散. 求证: $\int_a^{+\infty}f(x,t)dx$ 关于 $t\in[\alpha,\beta)$ 不一致收敛. (习题 2.1-6, P103)

证明: 若不然, 则 $\forall\varepsilon>0,\exists A>a$, 使得当 $A_2>A_1>A$ 时总有 $\left|\int_{A_1}^{A_2}f(x,t)dx\right|<\varepsilon$. 注意到 $f(x,t)$ 在有界闭集 $[A_1,A_2]\times[\alpha,\beta]$ 上一致连续, 因此对上述 ε, 存在 δ, 当 $|t-\beta|<\delta$ 时, 有 $|f(x,t)-f(x,\beta)|<\frac{\varepsilon}{A_2-A_1}$ 对所有的 $x\in[A_1,A_2]$ 成立. 取 $t_0\in(\beta-\delta,\beta)$, 有

$\left|\int_{A_1}^{A_2}f(x,\beta)dx\right|\le\left|\int_{A_1}^{A_2}f(x,t_0)dx\right|+\int_{A_1}^{A_2}|f(x,\beta)-f(x,t_0)|dx\le 2\varepsilon$, 因此 $\int_a^{+\infty}f(x,\beta)dx$ 收敛, 矛盾.

3. 求证积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin tx}{x}dx$ 在包含 $t=0$ 的区间上不一致收敛. (习题 2.1-8, P104)

证明: 由 $\sup_t\left|\int_A^{+\infty}\frac{\sin tx}{x}dx\right|=\sup_t\left|\int_{At}^{+\infty}\frac{\sin u}{u}du\right|\geq\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}du>0$ 即得.

评注: 也可由 $I(t)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin tx}{x}dx=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(t)$ 在 $t=0$ 处不连续得到不一致收敛.

4. 计算 $\int_0^1\frac{\arctan x}{x\sqrt{1-x^2}}dx$. (习题 2.2-5(1), P110, 利用 $\frac{\arctan x}{x}=\int_0^1\frac{dy}{1+x^2y^2}$)

解: 原式 $=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\int_0^1\frac{dy}{1+x^2y^2}=\int_0^1 dy\int_0^1\frac{dx}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}$. 而

$$\int_0^1\frac{dx}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{1+y^2\sin^2\theta}=\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+\frac{y^2u^2}{1+u^2}}\frac{1}{1+u^2}=\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+(y^2+1)u^2}$$

$=\frac{\pi}{2\sqrt{y^2+1}}$ (以上两处代换分别令 $x=\sin\theta,u=\tan\theta$)

因此原式 $=\frac{\pi}{2}\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{y^2+1}}=\frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2})$.

5. 计算 $\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx$, 其中 $a,b>0$. (习题 2.2-5(2), P110)

解: 原式 $=\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx\int_a^b x^y dy=\int_a^b dy\int_0^1 x^y\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx$. 令 $x=e^{-t}$ 有

$$\int_0^1 x^y\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx=\int_0^{+\infty}e^{-yt}(\sin t)(e^{-t})dt=\operatorname{Im}\left(\int_0^{+\infty}e^{(-(y+1)+i)t}dt\right)$$

$$=\operatorname{Im}\left(\frac{-1}{-(y+1)+i}\right)=\frac{1}{(y+1)^2+1}$$

因此原式 $=\int_a^b\frac{dy}{(y+1)^2+1}=\arctan(b+1)-\arctan(a+1)$.

6. 计算 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x}dx$, 其中 $a,b>0$. (习题 2.3-1(1), P115)

解: 原式 $=\int_0^{+\infty}dx\int_a^b xe^{-yx^2}dy=\int_a^b dy\int_0^{+\infty}xe^{-yx^2}dx=\int_a^b\frac{dy}{2y}=\frac{1}{2}(\ln b-\ln a)$.

其中积分换序的合理性由 $0\leq xe^{-yx^2}\leq xe^{-ax^2}$ 得到.

7. 计算$\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}dx$，其中$a,b>0$. (习题 2.3-1(3), P115)

解：原式$=\int_0^{+\infty}dx\int_a^b\frac{\sin yx}{x}dy=\int_a^b dy\int_0^{+\infty}\frac{\sin yx}{x}dx=\frac{\pi}{2}(b-a)$.

这里令$u=yx$有$\int_0^{+\infty}\frac{\sin yx}{x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}du=\frac{\pi}{2}$与$y$无关，当然可以换序积分.

8. 计算$I_n=\int_0^{+\infty}e^{-tx^2}x^{2n}dx$，其中$t>0,n\in N^*$. (习题 2.3-2(1), P115)

解：分部积分有$I_n=\left.\frac{x^{2n+1}e^{-tx^2}}{2n+1}\right|_0^{+\infty}+\frac{2t}{2n+1}\int_0^{+\infty}x^{2n+2}e^{-tx^2}dx=\frac{2t}{2n+1}I_{n+1}$,即$I_{n+1}=\frac{2n+1}{2t}I_n$.

而$I_0=\int_0^{+\infty}e^{-tx^2}dx=\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}$，因此$I_n=\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}t^{n+1/2}}\sqrt{\pi}$.

9. 计算$I_n=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(y+x^2)^{n+1}}$. (习题 2.3-2(2), P115)

解：对任意正整数 n，注意到$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(y+x^2)^n}\right)=-\frac{n}{(y+x^2)^{n+1}}$，$\forall\delta>0$可证$I_n$关于$y\in[\delta,+\infty)$一致收敛，因此可从$I_0=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{y+x^2}=\frac{\pi}{2\sqrt{y}}$出发对 y 在积分号下求 n 阶导数，由此得到$(-1)^n n!I_n=\int_0^{+\infty}\left(\frac{\partial^n}{\partial y^n}\left(\frac{1}{y+x^2}\right)\right)dx=\frac{\pi}{2}\frac{d^n}{dy^n}(y^{-1/2})=(-1)^n\frac{\pi(2n-1)!!}{2^{n+1}}y^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}$，

因此$I_n=\frac{\pi}{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}y^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}$. (规定$(-1)!!=0!!=1$)

10. 计算$I(a,b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)dx$，其中$a,b>0$.(第二章总复习题 4(1), P115)

解：$\frac{\partial I}{\partial b}(a,b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2b}{a^2\tan^2x+b^2}dx=\frac{2b}{a^2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(t^2+1)\left(t^2+\frac{b^2}{a^2}\right)}dt$ (这里令$t=\tan x$)

$$=\frac{2b}{a^2}\frac{1}{\frac{b^2}{a^2}-1}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{t^2+1}-\frac{1}{t^2+\frac{b^2}{a^2}}\right)dt=\frac{2b}{b^2-a^2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi a}{2b}\right)=\frac{\pi}{a+b}.$$ 同理$\frac{\partial I}{\partial a}(a,b)=\frac{\pi}{a+b}$，

有$I(a,b)=\pi\ln(a+b)+C$. 而$I(t,t)=\pi\ln t$，因此$I(a,b)=\pi\ln\frac{a+b}{2}$.

11. 计算$I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}dx$，其中$a>0$. (第二章总复习题 4(2), P115)

解: $I'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+a^2\tan^2 x}=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^2a^2)}=\frac{1}{a^2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1-a^{-2}}\left(\frac{1}{x^2+a^{-2}}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx$

$=\frac{1}{a^2-1}\left(\frac{\pi a}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2(a+1)}$ (这里要求 $a\neq 1$,但由连续性 $a=1$ 也成立). 而 $I(0)=0$, 因此 $I(a)=\frac{\pi}{2}\ln(1+a)$.

12. 判断以下积分关于参数所给区间是否一致收敛?

$(1)\int_1^{+\infty}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},y\in R;(2)\int_0^1\ln(xy)dx,\frac{1}{2}<y<2;(3)\int_1^{+\infty}\frac{t}{x^3}e^{-\frac{t}{x^2}}dx,t>0;$

$(4)\int_1^{+\infty}e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}\sin ydx,0<y<1;(5)\int_1^{+\infty}e^{-yx^2}\sin ydx,y>0;(6)\int_1^{+\infty}e^{-yx^2}\sin ydy,x>0;$

(第二章总复习题 5, P116)

解: (1) $\left|\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right|\le\frac{1}{x^2+y^2}\le\frac{1}{x^2}$, $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ 收敛, 因此一致收敛.

(2)原式 $=\ln y+\int_0^1\ln xdx$, 而 $\int_0^1\ln xdx$ 收敛且与 y 无关, 当然一致收敛.

(3)令 $u=\frac{t}{2x^2}$, 有 $\sup\limits_{t>0}\int_A^{+\infty}\frac{t}{x^3}e^{-\frac{t}{2x^2}}dx=\sup\limits_{t>0}\int_0^{\frac{t}{2A^2}}e^{-u}du=\int_0^{+\infty}e^{-u}du>0$, 因此不一致收敛.

(4) $I(A,y)=\left|\int_A^{+\infty}e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}\sin ydx\right|\le\int_A^{+\infty}e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}dx=y\int_{\frac{A}{y}-\frac{1}{y^2}}^{+\infty}e^{-u^2}du$. 当 $0\le y\le\frac{1}{2A}$ 时,

有 $I(A,y)\le\frac{1}{2A}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}du=\frac{\sqrt{\pi}}{2A}$;当 $\frac{1}{2A}\le y\le 1$ 时, $\frac{A}{y}-\frac{1}{y^2}\ge A-1$, $I(A,y)\le\int_{A-1}^{+\infty}e^{-u^2}du$.

因此, $\sup\limits_{0<y<1}I(A,y)\le\max\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2A},\int_{A-1}^{+\infty}e^{-u^2}du\right)\to 0(A\to+\infty)$, 一致收敛.

评注: 令 $f(x,y)=e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}$, 则 $\int_1^{+\infty}f(x,y)dx$ 关于 $0<y<1$ 一致收敛. 值得注意的是, 对这里的 $f(x,y)$ 找不到控制函数 $F(x)$ 使得 $|f(x,y)|\le F(x)$ 且 $\int_1^{+\infty}F(x)dx$ 收敛. 事实上, 若存在这样的 $F(x)$, 则必有 $x_0>1$, 使得 $F(x_0)<1$, 但 $f\left(x_0,\frac{1}{x_0}\right)=1$, 矛盾!

(5) $I(A,y)=\left|\int_A^{+\infty}e^{-yx^2}\sin ydx\right|=\frac{|\sin y|}{\sqrt{y}}\int_{A\sqrt{y}}^{+\infty}e^{-u^2}du=\frac{|\sin y|}{y}\sqrt{y}\int_{A\sqrt{y}}^{+\infty}e^{-u^2}du$.

当 $0\le y\le \dfrac{1}{A}$ 时，$I(A,y)\le \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{A}}$；当 $y\ge \dfrac{1}{A}$ 时，由 $\dfrac{|\sin y|}{\sqrt{y}}\le 1$，有 $I(A,y)\le \int_{\sqrt{A}}^{+\infty}e^{-u^2}du$.

因此，$\sup\limits_{0<y<1} I(A,y)\le \max\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{A}},\int_{\sqrt{A}}^{+\infty}e^{-u^2}du\right)\to 0(A\to+\infty)$，一致收敛.

(6)当 $x=0$ 时，$\int_1^{+\infty}\sin ydy$ 发散，不可能一致收敛.

13. 计算 $I(y)=\int_0^{+\infty}\dfrac{\arctan xy}{x(1+x^2)}dx$，其中 $y\ge 0$. (第二章总复习题 6(1), P116)

解: $I'(y)=\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{(1+x^2)(1+x^2y^2)}=\dfrac{1}{y^2}\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{1-y^{-2}}\left(\dfrac{1}{x^2+y^{-2}}-\dfrac{1}{x^2+1}\right)dx$

$=\dfrac{1}{y^2-1}\left(\dfrac{\pi y}{2}-\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2(y+1)}$ (这里要求 $y\ne 1$,但由连续性 $y=1$ 也成立).而 $I(0)=0$,因此 $I(y)=\dfrac{\pi}{2}\ln(1+y)$.

14. 计算 $I=\int_0^{+\infty}\dfrac{\cos ax}{b^2+x^2}dx$. 其中 $a,b\ge 0$.(第二章总复习题 6(2), P116)

解: $I=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{+\infty}e^{-y(b^2+x^2)}\cos axdy=\int_0^{+\infty}dy\int_0^{+\infty}e^{-y(b^2+x^2)}\cos axdx$.下面先算积分，后证此处换序的合理性.

由 $\int_0^{+\infty}e^{-yx^2}\cos axdx=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{y}}e^{-\frac{a^2}{4y}}$，有 $I=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{y}}e^{-\left(\frac{a^2}{4y}+b^2y\right)}dy=\sqrt{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-\left(\frac{c^2}{u^2}+b^2u^2\right)}du$.

这里 $c=\dfrac{a}{2}$. 令 $v=\dfrac{c}{bu}$，有 $I=\sqrt{\pi}\int_0^{+\infty}\dfrac{c}{bv^2}e^{-\left(b^2v^2+\frac{c^2}{v^2}\right)}dv=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^{+\infty}\left(1+\dfrac{c}{bv^2}\right)e^{-\left(b^2v^2+\frac{c^2}{v^2}\right)}dv$

$=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2b}\int_0^{+\infty}\left(b+\dfrac{c}{v^2}\right)e^{-\left(bv-\frac{c}{v}\right)^2-2bc}dv=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2b}e^{-2bc}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-s^2}ds=\dfrac{\pi}{2b}e^{-ab}$.

为证明积分换序合理，记 $f(x,y)=e^{-y(b^2+a^2)}\cos ax$,可证 $\int_0^{+\infty}f(x,y)dy$ 关于 $x\in[0,+\infty)$ 一致收敛，且 $\int_0^{+\infty}f(x,y)dx$ 关于 $y\in[\delta,+\infty)$ 一致收敛，这里 δ 为任意给定的正数. 而题设积分 I 绝对收敛，因此 $\int_0^{+\infty}dx\int_\delta^{+\infty}f(x,y)dy=\int_\delta^{+\infty}dy\int_0^{+\infty}f(x,y)dx$. (*)

另一方面，$\int_0^{\delta}|f(x,y)|dy\le\int_0^{\delta}dy=\delta$，因此，当 $\delta\to 0$ 时 $\int_0^{\delta}f(x,y)dy$ 关于 x 一致趋于 0,有 $\int_0^{+\infty}dx\int_0^{\delta}f(x,y)dy\to 0$. 在(*)两边令 $\delta\to 0$ 即得.

15. 求证: $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2 y}{x}dx$ 关于 $y>0$ 不一致收敛, 但连续. (第二章总复习题 7, P116)

证明: 令 $u=x^2y$ 有 $I(y)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2y}{x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{2u}du$ 是常值函数, 当然连续.

而 $\sup\limits_{y>0}\left|\int_A^{+\infty}\frac{\sin x^2y}{x}dx\right|=\sup\limits_{y>0}\left|\int_{A^2y}^{+\infty}\frac{\sin u}{2u}du\right|\geq\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{2u}du>0$, 关于 y 不一致收敛.

16. 一些重要积分的计算. (本部分的结论需要记住, 计算细节了解即可)

$(1)I=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx;(2)J=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx;(3)K=\int_0^{+\infty}\sin x^2dx$.

解: (1)令 $x=ut$ 有 $I=\int_0^{+\infty}ue^{-u^2t^2}dt$, 因此

$$I^2=\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du\int_0^{+\infty}ue^{-u^2t^2}dt=\int_0^{+\infty}dt\int_0^{+\infty}ue^{-u^2(1+t^2)}du=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{4},\text{ 有 }I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

(积分换序合理性的细节: 记 $\tilde{I}^2=\int_0^{+\infty}dt\int_0^{+\infty}ue^{-u^2(1+t^2)}du$. 可证明 $\varphi(t)=\int_0^{+\infty}ue^{-u^2(1+t^2)}du$ 关于 $t\in[0,A]$ 一致收敛, 有

$\int_0^A dt\int_0^{+\infty}ue^{-u^2(1+t^2)}du=\int_0^{+\infty}du\int_0^A ue^{-u^2(1+t^2)}dt\leq\int_0^{+\infty}du\int_0^{+\infty}ue^{-u^2(1+t^2)}dt=I^2$, 令 $A\to+\infty$ 得 $\tilde{I}^2\leq I^2$; 另一方面, 可证明 $\psi(u)=\int_0^{+\infty}ue^{-u^2(1+t^2)}dt$ 关于 $u\in[\delta,+\infty)$ 一致收敛, 因此也有 $\int_\delta^{+\infty}du\int_0^{+\infty}ue^{-u^2(1+t^2)}dt=\int_0^{+\infty}dt\int_\delta^{+\infty}ue^{-u^2(1+t^2)}du\leq\int_0^{+\infty}dt\int_0^{+\infty}ue^{-u^2(1+t^2)}du=\tilde{I}^2$. 令 $\delta\to0$ 有 $I^2\leq\tilde{I}^2$.)

评注: 事实上, 只要 $f(x,y)$ 非负, 而且 $g(y)=\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$, $h(x)=\int_b^{+\infty}f(x,y)dy$ 都逐点收敛且在任意有界区间上可积, 就有 $\int_b^{+\infty}dy\int_a^{+\infty}f(x,y)dx=\int_a^{+\infty}dy\int_b^{+\infty}f(x,y)dy$, 这里等式的意义是左右两边同敛散且收敛时相等, 而无需考察一致收敛性. 对于变号函数, 在以上所有广义积分都绝对收敛的条件下, 积分换序等式也成立. 当然这些结论的证明已经超出微积分课程的范围.

(2)令 $f(a)=\int_0^{+\infty}e^{-ax}\frac{\sin x}{x}dx$, 有 $f'(a)=-\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin xdx=-\frac{1}{1+a^2}$.

(可以证明, 任给 $\delta>0,\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin xdx$ 关于 $a\in[\delta,+\infty)$ 一致收敛, 因此可以积分号下求导)

而 $\left|e^{-ax}\frac{\sin x}{x}\right|\leq e^{-ax}\to0(a\to+\infty)$,有 $f(+\infty)=0,\ f(a)=\frac{\pi}{2}-\arctan a$. 特别的, $J=\frac{\pi}{2}$.

(3)首先有 $K=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$.记 $g(a)=\int_0^{+\infty}e^{-at}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt, t>0$.由 $\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{t}\int_0^{+\infty}e^{-tu^2}du$,因此

$$g(a)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}dt\int_0^{+\infty}e^{-t(a+u^2)}\sin t du=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}du\int_0^{+\infty}e^{-t(a+u^2)}\sin t dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+(a+u^2)^2}.$$

[易证 $\int_0^{+\infty}e^{-t(a+u^2)}\sin t dt$ 关于 $u\in[0,+\infty)$ 一致收敛, $\int_0^{+\infty}e^{-t(a+u^2)}\sin t du$ 关于 $t\in[0,+\infty)$ 一致收敛(这个证明类似前面的 12(5)题), 且 $\int_0^{+\infty}du\int_0^{+\infty}|e^{-t(a+u^2)}\sin t|dt\le\int_0^{+\infty}\frac{du}{a+u^2}<+\infty$ (值得注意的是, 如不引入收敛因子 e^{-at}, 这个积分不再绝对收敛!), 因此积分换序合理.]

令 $a\to 0$ (可以证明两边关于 $a\in[0,1]$ 都是一致收敛), 有 $K=\frac{g(0)}{2}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+u^4}=\sqrt{\frac{\pi}{8}}$.

同样的方法可以算得

第三章 重积分

1. 计算 $I=\iint\limits_D \cos\dfrac{x-y}{x+y}dxdy, D=\{(x,y):x\ge 0, y\ge 0, x+y\le 1\}$

解：令 $u=x-y, v=x+y$，积分区域变为 $\Omega=\{(u,v):v\le 1, -v\le u\le v\}$. 因此,

$I=\dfrac{1}{2}\int_0^1 dv\int_{-v}^{v}\cos\dfrac{u}{v}du=\int_0^1 v\sin 1 dv=\dfrac{1}{2}\sin 1$.

2. 计算 $I=\iint\limits_D \sqrt{(x^2+y^2)^3}dxdy, D=\{(x,y):x^2+y^2\le \min(1,2x)\}$

解：由对称性，积分值等于对第一象限部分 D_1 积分的 2 倍. 令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，这时

D_1 变为 $\Omega=\{(r,\theta):r\le \min(1,2\cos\theta), 0\le\theta\le\pi/2\}$. 分成两块，并化为累次积分得到

$$I=2\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_0^1 r^4dr+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}r^4dr\right)=\frac{2\pi}{15}+\frac{64}{5}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta d\theta$$

这里 $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta d\theta=\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}(1-t^2)^2dt=\ldots$

3. 计算 $I=\iint\limits_D y^2dxdy, D$ 由曲线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}, 0\le t\le 2\pi$ 和 x 轴围成.

解：将积分域边界的曲线记做 $y=f(x)$，有

$$I=\int_0^{2\pi a}dx\int_0^{f(x)}y^2dy=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi a}\big(f(x)\big)^3dx=\frac{a^4}{3}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^4dt=\frac{35}{12}\pi a^4.$$

这里 $\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^4dt=16\int_0^{2\pi}\sin^8\dfrac{t}{2}dt=64\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^8 udu=64\dfrac{7!!}{8!!}\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{35\pi}{4}$.

4. 计算 $I=\iint\limits_{\sqrt{x}+\sqrt{y}\le 1}(\sqrt{x}+\sqrt{y})dxdy$.

解：令 $x=r\cos^4\theta, y=r\sin^4\theta$，有 $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=4r\sin^3\theta\cos^3\theta$，因此

$I=4\int_0^1 r^{3/2}dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\cos^3\theta d\theta=\dfrac{8}{15}$.

5. 设 $f(x,y)$ 非负连续, a, b, R 为常数. 计算 $I=\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}\dfrac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}dxdy$.

解：注意到积分区域关于 x 和 y 的对称性，有

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}\frac{f(x)}{f(x)+f(y)}dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}\frac{f(y)}{f(x)+f(y)}dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}dxdy=\frac{\pi R^2}{2}.$$

因此 $I=\dfrac{a+b}{2}\pi R^2$.

6. 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{\sin z}{z}dxdydz, \Omega=\{(x,y,z):\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 4\}$.

解: $I=\int_0^4\dfrac{\sin z}{z}dz\iint\limits_{x^2+y^2\le z^2}dxdy=\pi\int_0^4 z\sin zdz=\pi(\sin 4-4\cos 4)$.

评注: 三重积分化成累次积分比二重积分要灵活, 此题先积 z 不可能积出, 但对 x 和 y 化成一个二重积分和一个一重积分处理.

7.