第 12 周习题课 曲线曲面积分 2

本次习题课讨论题涉及以下四个问题。

一．曲线曲面积分续。
二．Green 定理的应用续。
三．积分关于路径的无关性

一．曲线曲面积分续。

1．记 L^+ 为圆周 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ y=x\tan\alpha \quad \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$，从 0x 轴的正向看去，圆周的正向为逆时针方向。写出 L^+ 的参数方程，并利用这个参数方程来计算线积分

$$I=\oint_{L^+}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz 。$$

（注：我们将在第三部分的第 3 题，利用 Stokes 公式更简单地计算上述线积分。）

2．求积分 $I=\iint_{\Sigma} f(x)dy\wedge dz+g(y)dz\wedge dx+h(z)dx\wedge dy$，其中 Σ 为长方体 $[0,a]\times[0,b]\times[0,c]$ 的边界，正法向朝外，函数 $f(x)$, $g(y)$ 和 $h(z)$ 均为连续函数。

3．设 S 为锥面 $z^2=x^2+y^2$ 位于 $0\le z\le h$ 的那一部分，正法向向下。设 $\mathbf{v}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ 为流体运动的速度场。求流体在单位时间里通过定向曲面 S 由内向外的流量 Q，即求曲面积分 $Q=\iint_S \mathbf{v}\cdot d\mathbf{S}$。

4．记 S^+ 为园柱面 $S: x^2+y^2=1$ 位于 $0\le z\le 2$ 的部分，外法向为正，计算曲面积分 $I=\iint_{S^+} x(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

二．Green 定理的应用。

1．（利用 Green 定理证明平面面积变换公式）回忆平面面积变换定理:

设φ是平面域上的微分同胚，即φ是 1-1 映射且其逆也是连续可微的.假设开区域D_0及其边界∂D_0均属于φ的定义域。记开区域D_0在映射φ下的象为D_1，即$D_1=\varphi(D_0)$。根据曲面面积公式知D_1的面积公式为$|D_1|=\iint\limits_{D_0}\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$，这里$x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$表示映射$\varphi$的两个分量函数。试利用 Green 公式来证明上述面积变换公式。

2．计算线积分$I=\oint\limits_{L^+}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$，其中$L^+$为$|x|+|y|=1$，逆时针为正向。

3．设$D\subseteq R^2$为有界开区域，它的边界∂D是逐段光滑曲线，$\vec{n}$是∂D的外单位法向量，设函数$f(x,y)\in C^1(\overline{D})$，且$f(x,y)$在$D$内为调和函数，即$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\equiv 0$，$\forall(x,y)\in D$。求证：

(i) $\oint\limits_{\partial D}\frac{\partial f}{\partial n}dl=0$；

(ii) $\oint\limits_{\partial D}f\frac{\partial f}{\partial n}dl=\iint\limits_{D}|\nabla f|^2dxdy$；

(iii) 若在边界∂D上，$f(x,y)\equiv 0$，求证$f(x,y)\equiv 0$，$\forall(x,y)\in D$。

4． 已知函数$f(x)$在整个实轴R上二次连续可微，满足$f'(0)=0$，且使得微分式$[f(x)+y(e^x+x-f(x))]dx+f'(x)dy$是全微分，求$f(x)$，并使由$A(0,0)$到$B(\frac{\pi}{2},\pi)$逐段光滑曲线$L$上全微分的积分的值为$\frac{\pi^2}{8}$。

5． 设$f(x)$是实轴上处处为正的连续函数，D为圆心在原点的单位开圆盘。

证明：(i) $\int_{\partial D^{+}} xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx=\int_{\partial D^{+}} -yf(x)dx+\frac{x}{f(y)}dy$；

(ii) $\int_{\partial D^{+}} xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx\geq 2\pi$ 。