3. 树为二分图，设 $G$ 为 $\langle V_1,V_2,E\rangle$，若 $|V_1|\neq|V_2|$，则不存在完美匹配，

若 $|V_1|=|V_2|=n$ 存在完美匹配. 下证其唯一.

考虑树的所有叶结点.

叶结点仅与其父结点关联，若存在完美匹配，则每个叶结点必与其父结点匹配。

故不存在两叶结点有共同的父结点，否则会有无法匹配的点.

删去所有叶结点与和这些叶结点相匹配的父结点及其匹配边，则新生成的图仍为树

且新生成树仍有完美匹配。故此时也不存在两叶结点有共同的父结点

└→因为从匹配中删去匹配边仍为匹配

不断重复上述步骤，直到树没有边. 由此可知，若原树存在完美匹配，

则每个叶结点仅能与其父结点相匹配，而删去这些匹配后，新生成的树

也只能每个叶结点与其父结点相匹配，即每次匹配叶结点时，匹配方式唯一

故若树的结点数为 $2n$，且存在完美匹配，则其匹配唯一.

7. 设 $A$ 为 $m\times n$ 矩阵. 可知 $n\geq m$. 取点集：$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$，$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$

若 $A_{ij}=1$，则 $x_i$ 与 $y_j$ 间有边相连. $A_{ij}=0$，则 $x_i$ 与 $y_j$ 间无边相连

则 $A$ 是二分图 $G=\langle X,Y,E\rangle$ 的表示矩阵.

利用数学归纳法：

$k=1$ 时，令 $P_1=A$，则 $k=1$ 时成立.

若 $k=t-1$ 成立，下证 $k=t$ 成立，$(t\geq 2)$

令 $k=t$ 时的矩阵为 $A_t$，则 $A_t$ 表示的二分图 $\langle X,Y,E\rangle$ 有 $\begin{cases}X\text{中每个结点至少关联}t\text{条边}\\ Y\text{中每个结点最多关联}t\text{条边}\end{cases}$

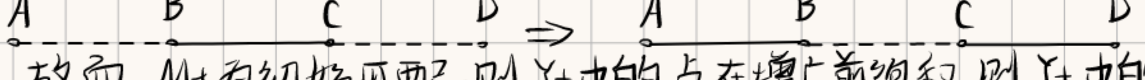
由 $k$ 条件可知，此二分图存在完全匹配

① 在 $Y$ 集合中，设度为 $t$ 的点的集合为 $Y_t$. 由于 $\langle X,Y,E\rangle$ 中共有 $mt$ 条边，故 $|Y_t|\leq m$.

$Y_t$ 中每个点关联 $t$ 条边，$X$ 中每个点关联 $t$ 条边，故由 $k$ 条件，存在 $Y_t$ 与 $X$ 间的完全匹配

记为 $M_t$. 以 $M_t$ 为初始匹配，利用匈牙利算法搜索从 $X$ 到 $Y$ 的完全匹配 $M$.

② 注意到，匈牙利算法中，通过可增广路径不断扩大匹配时，原本饱和的点作对称差后依然饱和. 比如下图，BC在增广前后均为饱和点.




故而，$M_t$ 为初始匹配，则 $Y_t$ 中的点在增广前饱和，则 $Y_t$ 中的点在增广后，即 $Y_t$ 中的点在 $M$ 中也为饱和点.

故而可生成一最大匹配 $M$ 其中 $Y$ 中所有度数为 $t$ 的点全部饱和.

设矩阵 $P_t(i,j)=\begin{cases}1, & (x_i,y_j)\text{在}M\text{中}\\ 0, & (x_i,y_j)\text{不在}M\text{中}\end{cases}$，则 $P_t$ 为 $m\times n$ 矩阵，每个1都不出现在同行同列，且

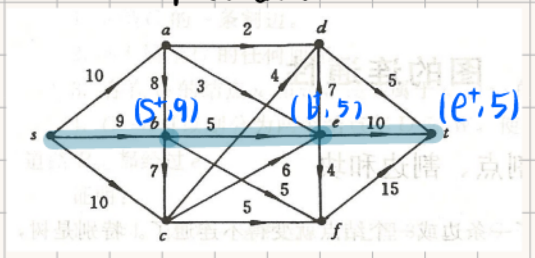
因为匹配数为 $m$，故 $P_t$ 中每一行恰有1个1，每一列的1不多于1个

$P_t$ 中出现的边都是二分图 $\langle X,Y,E\rangle$ 中的点，则 $P_t$ 中的1均出现在 $A_t$ 中1的位置

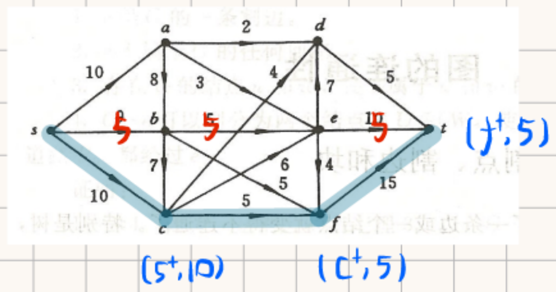
且由之前对$M_t$的构造过程有：$A_t$中所有有t个1的列，$P_t$中对应的列必有且仅有1个1
则记 $A_t - P_t = A_{t-1}$，对$A_{t-1}$任一行恰有t-1个1，且任一列至多有t-1个1。
由归纳假设，$k=t-1$时结论成立，即$A_{t-1}=P_1+P_2+\cdots+P_{t-1}$。
则 $A_t = A_{t-1}+P_t = P_1+P_2+\cdots P_{t-1}+P_t$.

10. 采用Ford-Fulkerson算法

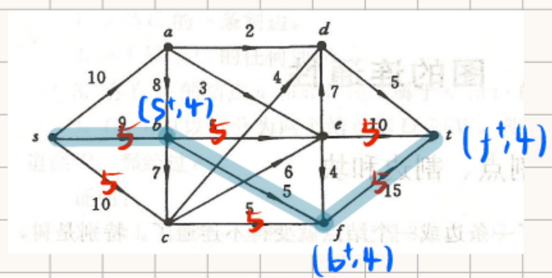
初始流

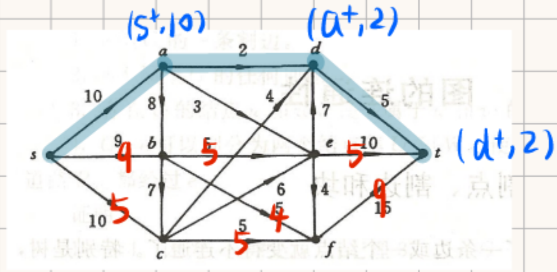


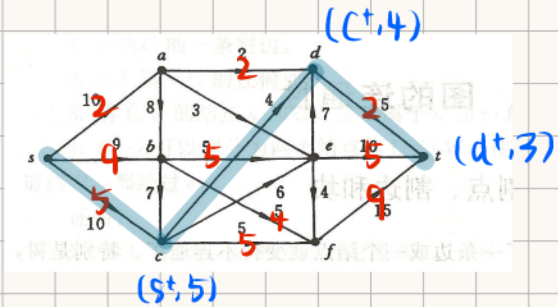

$\delta=5$

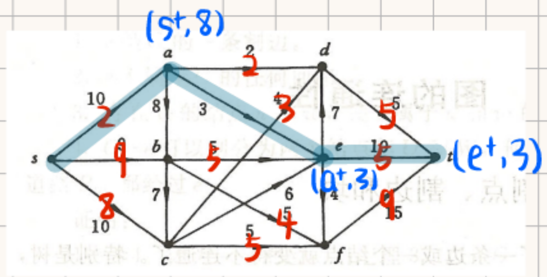



$\delta=5$

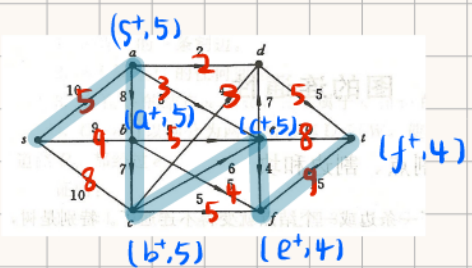


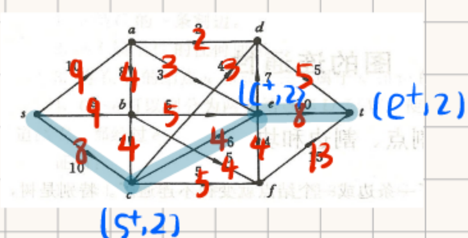



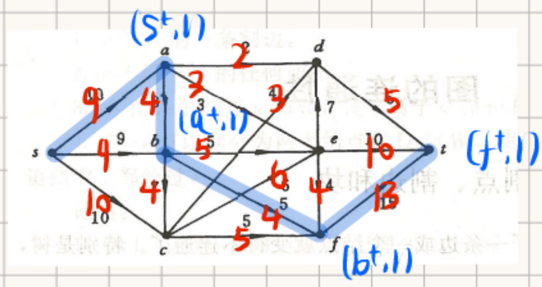



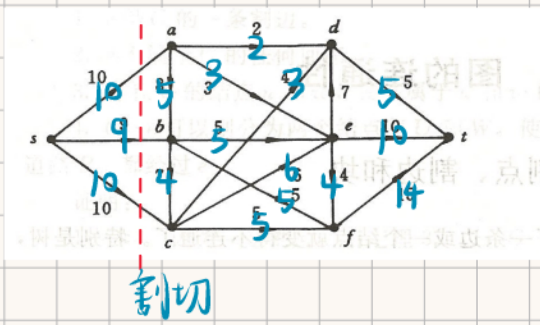




$\delta=3$






{sa.sb.sc}构成割切,割切容量为29.

∴ 最大流≤29 而此时流量恰为29.

∴ 最大流为29. 最小割切容量为29.且最小割切为{sa.sb,sc}