第九次习题课：曲线、曲面积分 1

一. 曲线积分

1. 计算 $\oint_L xydl$，其中 L 是正方形 $|x|+|y|=a$，$(a>0)$.

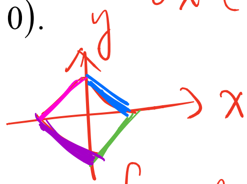
解：设 $A(0,-a), B(a,0), C(0,a), D(-a,0)$，

$$\oint_L xydl = \left(\int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DA}\right) xydl$$

$$= \int_0^a x(x-a)\sqrt{2}dx + \int_0^a x(x-a)\sqrt{2}dx$$

$$+ \int_{-a}^0 x(x+a)\sqrt{2}dx + \int_{-a}^0 - x(x+a)\sqrt{2}dx = 0$$

注：如果经验丰富的话，一眼看出积分为零（根据对称性）.



dx (dy)

$dl = \sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\, dx$

$dS = \sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\, dxdy$

$\oint_L y\, dl = 0.$

$\oint_{L'} xy\, dl = 0$

L' 是圆(或椭圆)

2. 设 L 为椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，其周长记为 a。求 $\oint_L (2xy+\underbrace{3x^2+4y^2}_{12})dl$ $\quad 12\oint_L dl = 12a$

解法一： 椭圆 L 的方程可写成 $3x^2+4y^2=12$。于是

$$\oint_L (2xy+3x^2+4y^2)dl = \oint_L (12+2xy)dl = 12a + \oint_L 2xydl$$

$dl = \sqrt{(\frac{dx}{d\theta})^2+(\frac{dy}{d\theta})^2}\, d\theta$

由对称性，$\oint_L 2xydl = 0$，故 $\oint_L (2xy+3x^2+4y^2)dl = 12a$.

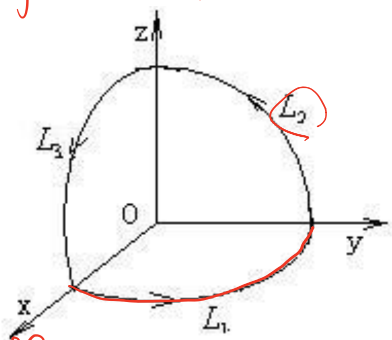
解法二：椭圆 L：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 写作参数式 $x=2\cos\theta$，$y=\sqrt{3}\sin\theta$，$\theta\in[0,2\pi]$。于是

所求第一型曲线积分为 $\oint_L (2xy+3x^2+4y^2)dl = 12a + 2\oint_L xydl$。而

$$\oint_L xydl = \int_0^{2\pi}\left[2\cos\theta\sqrt{3}\sin\theta\right]\sqrt{4\sin^2\theta+3\cos^2\theta}\,d\theta = 0.$$ 因此原积分为 $12a$。

3. 计算积分 $I=\int_\Gamma (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$，其中 Γ 为球面片 $x^2+y^2+z^2=1$，$x,y,z\ge 0$ 的边界曲线，方向是从点 $(1,0,0)$ 到点 $(0,1,0)$，到点 $(0,0,1)$，再回到 $(1,0,0)$。（课本习题 4. 4 题 3 (4)，page 192）

$\int \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int(\vec{F}\cdot\vec{l})dl$



$\int_1^0$ dx

解： 如图 $\Gamma = L_1+L_2+L_3$，L_1, L_2, L_3 利用球坐标参数可以写成

$L_1: x=\cos\varphi, y=\sin\varphi, z=0$，$0\le\varphi\le\pi/2$（参数增为正），

$L_2: x=0, y=\sin\theta, z=\cos\theta$，$0\le\theta\le\pi/2$（参数减为正），

$L_3: x=\sin\theta, y=0, z=\cos\theta$，$0\le\theta\le\pi/2$（参数增为正），

$\int_\Gamma (y^2-z^2)dx = \int_{L_1} + \int_{L_3}$ （注意在 L_2 上 $dx=0$）

$I = 3\int_\Gamma (y^2-z^2)dx$

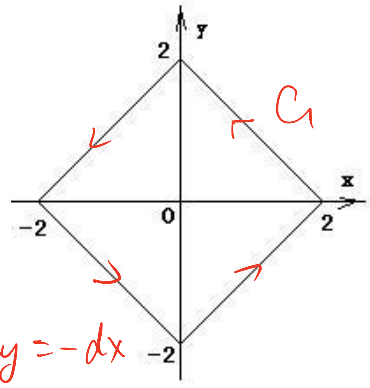
$dx=\frac{\partial x}{\partial \varphi}d\varphi$

$$=\int_0^{\pi/2}(\sin^2\varphi-0)\cdot(-\sin\varphi)d\varphi+\int_0^{\pi/2}(0-\cos^2\theta)\cdot\cos\theta d\theta=-2\int_0^{\pi/2}\cos^3\theta d\theta=-\frac{4}{3}$$

由 x-y-z 循环对称，原式$=-4$．解答完毕。

4. 设 C 为闭曲线：$|x|+|y|=2$，逆时针为正向。

计算 $\oint_C \frac{axdy-bydx}{|x|+|y|}$。 $=2$



解： 利用 $|x|+|y|=2$，$\oint_C \frac{axdy-bydx}{|x|+|y|}=\frac{1}{2}\oint_C axdy-bydx$，

再将曲线分成 4 段直线段 $C=C_1+C_2+C_3+C_4$，

$C_1: x+y=2$，$0\le x\le 2$，x 减少为正向；

$y=2-x$

$dy=-dx$

$C_2: y-x=2$，$-2\le x\le 0$，x 减少为正向；

$C_3: x+y=-2$，$-2\le x\le 0$，x 增加为正向；

$C_4: x-y=2$，$0\le x\le 2$，x 增加为正向；

$$\int_{C_1} axdy-bydx=-\int_0^2[ax(-1)-b(2-x)]dx=\int_0^2[(a-b)x+2b]dx=2(a+b),$$

$$\int_{C_2} axdy-bydx=-\int_{-2}^0[ax-b(2+x)]dx=\int_{-2}^0[(b-a)x+2b]dx=2(a+b),$$

$$\int_{C_3} axdy-bydx=\int_{-2}^0[ax(-1)-b(-2-x)]dx=\int_{-2}^0[(b-a)x+2b]dx=2(a+b),$$

$$\int_{C_4} axdy-bydx=\int_0^2[ax-b(x-2)]dx=\int_0^2[(a-b)x+2b]dx=2(a+b),$$

综上，原式$=\frac{1}{2}[\int_{C_1}+\int_{C_2}+\int_{C_3}+\int_{C_4}]=4(a+b)$.

二．曲面积分

$dS=\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\,dxdy$

5. 计算 $\iint_S (x^2+y^2)\mathrm{d}S$．其中 S 是锥体 $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1$ 的边界．

$z=f(x,y)$

解：分别记 S_1 和 S_2 为锥体的侧面和上底面，则

$$\iint_S (x^2+y^2)\mathrm{d}S=\iint_{S_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}S+\iint_{S_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}S$$

$dxdz$

在 S_1 上，$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ （$z=\sqrt{x^2+y^2}$）

曲面投影到xOz平面.

在 S_2 上，$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=dxdy$（$z=1$）．于是

Jacobi

$\sqrt{2}$

$$\iint_{S_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}S=\iint_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)dxdy=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cdot\sqrt{2}r\mathrm{d}r=\pi/\sqrt{2},$$

$\iint_{S_1}(x^2+y^2)\cdot\sqrt{2}\,dxdy$

$$\iint_{S_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}S=\iint_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)dxdy=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cdot r\mathrm{d}r=\pi/2 .$$

$\sqrt{1+(\frac{\partial y}{\partial x})^2+(\frac{\partial y}{\partial z})^2}$

所以所求面积分为 $\iint_S(x^2+y^2)\mathrm{d}S=\pi(1/2+1/\sqrt{2})$.

6. 求 $I=\iint_S(x+y+z)^2\,dS$，其中 S 为单位球面.

$x^2+y^2+z^2=1$ $\iint_S 2xy\,dS=\iint_S 2xy\,dxdz$ $=0$

解：$I=\iint_S(x+y+z)^2\,dS=\iint_S(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx)dS$

$I=\iint_S 1\,dS=4\pi$

$$=\iint_S(1+2xy+2yz+2zx)dS=4\pi+2\iint_S(xy+yz+zx)dS$$

其中 4π 是球的表面积．由对称性可知, $\iint_S xydS=\iint_S yzdS=\iint_S zxdS=0$, 故 $I=4\pi$ 。

7. 计算螺旋面 S： $x=r\cos\varphi$， $y=r\sin\varphi$， $z=r\varphi$ （$0\le r\le R,\ 0\le\varphi\le 2\pi$）的面积。

$dS=\sqrt{EG-F^2}\,drd\varphi$

$dS=\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,drd\varphi$

$dS\to dxdy$ ↓ $drd\varphi$

解： $|S|=\iint_S dS=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R\sqrt{EG-F^2}\,dr$

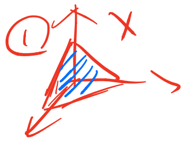
$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{2+\varphi^2}\,d\varphi\int_0^R rdr=\frac{\pi R^2}{2}[\sqrt{2+4\pi^2}+\ln(\sqrt{2}\pi+\sqrt{1+2\pi^2})]。$$

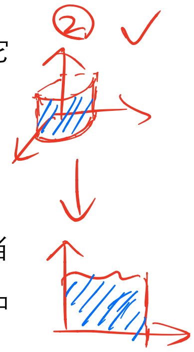
8. 求圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 被抛物柱面 $z=R^2-x^2$ 及平面 $z=0$ 所截部分 S 的侧面积。

$L: x^2+y^2=R^2$ $|S|=\int_L|z|\,dl$

解法一：（利用第一类曲线积分的几何意义）

侧面积 $A=\int_L(R^2-x^2)dl$，其中 L 为空间曲线 $\begin{cases}z=R^2-x^2\\x^2+y^2=R^2\end{cases}$ 在 xoy 平面上的投影，即 xoy 平面上的园 L： $x^2+y^2=R^2$ 。其参数方程为 $x(t)=R\cos t$， $y(t)=R\sin t$， $0\le t\le 2\pi$，它的弧长微分 $dl=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt=Rdt$ 。





于是 $A=\int_L(R^2-x^2)dl=\int_0^{2\pi}(R^2-R^2\cos^2 t)Rdt=\pi R^3$ 。

解法二：（第一类曲面积分）由于所截部分 S 关于 xoz 平面对称，即点 $(x,y,z)\in S$ 当且仅当 $(x,-y,z)\in S$ 。位于 $y>0$ 部分的曲面方程为 $y=\sqrt{R^2-x^2}$ ， $(x,z)\in D$ ，其中 $D=\{-R\le x\le R,\ 0\le z\le R^2-x^2\}$。于是所求面积为

$$|S|=\iint_S dS=2\iint_{D_{xz}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\,dxdz=2\int_{-R}^{R}dx\int_0^{R^2-x^2}\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}\,dz=$$

$$=4R\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\,dx=4R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 tdt=\pi R^3。$$ 解答完毕。

9. 计算均匀半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(z\ge 0)$ 关于 z 轴的转动惯量.

解：对于该曲面上任意一点 (x,y,z) 出的面积微元 $\mathrm{d}S$，其质量等于 $b\mathrm{d}S$，关于 z 轴的转动惯量为 $b(x^2+y^2)\mathrm{d}S$.

$\iint_S (x^2+y^2)\,\rho\, ds$

密度.

球面的面积微元 $\mathrm{d}S=\dfrac{a\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$.

$dS=\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\,dxdy$

Jacobi

$dr\,d\theta$

于是整个曲面的转动惯量为

$$\iint_S ba(x^2+y^2)\mathrm{d}S=ab\iint_S\frac{x^2+y^2}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=ab\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\frac{r^3}{\sqrt{a^2-r^2}}\mathrm{d}r=2ab\pi(r^2\sqrt{a^2-r^2})\Big|_a^0+2\int_0^a r\sqrt{a^2-r^2}\mathrm{d}r)$$

$$=\frac{4}{3}\pi ab(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_a^0=\frac{4}{3}\pi ba^4$$

10. 令曲面 S 在球坐标下方程为 $r=a(1+\cos\theta)$，Ω 是 S 围成的有界区域，分别计算 S 和 Ω 在直角坐标系下的形心坐标。

解： Ω 的体积 $V=\iiint\limits_{\Omega}dV=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{a(1+\cos\theta)}r^2dr=\frac{8}{3}\pi a^3$，

Ω 关于 z=0 平面的静力矩

$$V_{xy}=\iiint\limits_{\Omega}zdV=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\cos\theta\sin\theta d\theta\int_0^{a(1+\cos\theta)}r^3dr=\frac{32}{15}\pi a^4,$$

Ω 的形心坐标为 $\bar{x}=\bar{y}=0,\bar{z}=\frac{4}{5}a$；

S 的面积 $M=\iint\limits_S ds=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sqrt{EG-F^2}d\theta$，

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sqrt{2}a^2(1+\cos\theta)^{3/2}\sin\theta d\theta=\frac{32}{5}\pi a^2$$

S 关于 z=0 平面的静力矩

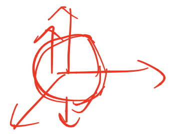
$$M_{xy}=\iint\limits_S zdS=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sqrt{2}a^3(1+\cos\theta)^{5/2}\cos\theta\sin\theta d\theta=\frac{320}{63}\pi a^3,$$

S 的形心坐标为 $\bar{x}=\bar{y}=0, \bar{z}=\dfrac{50}{63}a$。

11. 计算第一型曲面积分 $I=\iint\limits_{S}|z|dS$，以及第二型曲面积分 $J=\iint\limits_{S^+}|z|dx\wedge dy$， 其中曲面 S 为球面 $S: x^2+y^2+z^2=a^2$；定向曲面 S^+ 的正法向向外。

$\iint\limits_{S^+}\vec{V}\cdot d\vec{S}=\iint\limits_{S^+}\vec{V}\cdot\vec{n}\,dS$

$dx\wedge dy+dy\wedge dz+dz\wedge dx$



解：分别记 S_1， S_2 为 S 的上半球面和下半球面，它们的方程为

$$S_1:\ z=\sqrt{a^2-x^2-y^2},\quad (x,y)\in D=\{(x,y),\ x^2+y^2\le a^2\}$$

$$S_2:\ z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2},\quad (x,y)\in D$$

考虑第一型曲面积分 I。根据被积函数和球面的对称性，我们有 $\iint\limits_{S_1}|z|dS=\iint\limits_{S_2}|z|dS$。因此

$$I=\iint\limits_{S}|z|dS=\iint\limits_{S_1}|z|dS+\iint\limits_{S_2}|z|dS=2\iint\limits_{S_1}zdS\text{。}$$

对于上半球面 S_1， 面积元素

$$dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy=\frac{a\,dxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\text{。}$$

于是

$$I=2\iint\limits_{S_1}zdS=2\int_{-a}^{a}dx\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy=8a\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx=2\pi a^3\text{。}$$

考虑第二型曲面积分 J。

$$J=\iint\limits_{S^+}|z|dx\wedge dy=\iint\limits_{S_1^+}|z|dx\wedge dy+\iint\limits_{S_2^+}|z|dx\wedge dy\text{。注意到}$$

$$\iint\limits_{S_1^+}|z|dx\wedge dy=\int_{-a}^{a}dx\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy\text{，以及}$$

$$\iint\limits_{S_2^+}|z|dx\wedge dy=\int_{-a}^{a}dx\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,(-dxdy)\text{，故}$$

$$J=\iint\limits_{S}|z|dx\wedge dy=\iint\limits_{S_1}|z|dx\wedge dy+\iint\limits_{S_2}|z|dx\wedge dy=0\text{。}$$

12. 记 S 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2x$ 所截的有限部分。规定曲面 S 的正向向下，所得的定向曲面记为 S^+。求下面两个积分的值。

$(x-1)^2+y^2=1$

(i) $\iint\limits_{S}zdS$。　　(ii) $\iint\limits_{S^+}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,(xdydz+ydzdx+zdxdy)$.

解：(i) 简单计算知锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 的面积元素为 $dS=\sqrt{2}dxdy$。因此

$$\iint\limits_{S}zdS=\iint\limits_{x^2+y^2\le 2x}\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{2}dxdy=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\rho^2d\rho=\frac{32\sqrt{2}}{9}$$

$\int_L\vec{F}\cdot d\vec{l}=0$

$A\to B$

Jaccobi

$\oiint_S (\vec{F})\, d\vec{S} \to 0$

(ii) 不难计算曲面 S 的单位正法向量为 $(x/\sqrt{x^2+y^2}, y/\sqrt{x^2+y^2}, -1)/\sqrt{2}$。于是根据第二曲面积分的定义有 $\iint_{S^+}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,(xdydz+ydzdx+zdxdy)$

$\iint_{S^+} \vec{V}\cdot\vec{n}\, dS$ 正法向量.

$$=\iint_S \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,(x,y,z)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},-1\right)dS=\iint_S 0dS=0.$$

解答完毕。

$\vec{V}$ $\quad$ $\vec{n}$

13. 设一元函数 $f(u)$ 于整个实轴上连续，S 代表单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$。证明 Poisson 公式 $\iint_S f(ax+by+cz)dS=2\pi\int_{-1}^{1}f(\rho t)dt$，这里 $\rho:=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$。（课本习题 4.3 第 11 题，page 187）。

当 $a=b=c=0$ 时，左边 $=\iint_S f(0)dS=4\pi f(0)$

右边 $=2\pi\int_{-1}^{1} f(0)dt=4\pi f(0)$

$\vec{n}=P\cdot\vec{m}$

$P^TP=PP^T=I$

$dxdydz=|J|\cdot dudvdw$

$\vec{m}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ $\vec{n}=\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$

为了证明 Poisson 公式，我们需要先建立一个 Lemma。

Lemma：设 Σ 是一个正则的参数曲面。记 Σ' 是 Σ 在一个正交变换（正交矩阵）P 下的象，即 $\Sigma'=P(\Sigma)$。记 $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$，$U=\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$，则对任何 Σ 上连续函数 $g(x,y,z)$，我们有 $\iint_\Sigma g(X)dS=\iint_{\Sigma'}g(P^TU)dS$。（这个 Lemma 大致的意思是说，曲面的面积元素关于正交变换是不变的。）

$J=P^TP=I$

$dS=dS_1$

$\sqrt{EG-F^2}=1$

证明：由假设 Σ 有正则的参数表示 $X(s,t)=\begin{pmatrix}x(s,t)\\y(s,t)\\z(s,t)\end{pmatrix}$，$(s,t)\in D$，$D$ 为平面有界闭域。

由此导出曲面 $\Sigma'=P(\Sigma)$ 的一个参数表示 $U(s,t)=PX(s,t)$，$(s,t)\in D$。于是我们可以确定两个曲面 Σ 和 Σ' 关于上述参数表示的 Gauss 系数，E，G，F 和 E'，G'，F'：

$$E=X_s(s,t)^TX_s(s,t),\quad G=X_t(s,t)^TX_t(s,t),\quad F=X_s(s,t)^TX_t(s,t)。$$

$$E'=U_s(s,t)^TU_s(s,t)=X_s(s,t)^TP^TPX_s(s,t)=X_s(s,t)^TX_s(s,t)=E,$$

同理可证 $G'=G$，$F'=F$。因此我们有 $\sqrt{E'G'-F'^2}=\sqrt{EG-F^2}$。于是

$$\iint_{\Sigma'}g(P^TU)dS=\iint_D g(P^TU(s,t))\sqrt{E'G'-F'^2}\,dsdt=$$

$$=\iint_D g(P^TU(s,t))\sqrt{EG-F^2}\,dsdt=\iint_D g(X(s,t))\sqrt{EG-F^2}\,dudv=\iint_\Sigma g(X)dS。\text{证毕。}$$

Poisson 公式的证明：

构造

取一个三阶正交矩阵P，使得P的第一行为$(a,b,c)/\rho$。作正交变换$U=PX$，其中记号U，X的意义同上。于是$ax+by+cz=\rho u$。此外，在这个正交变换下，单位球面$x^2+y^2+z^2=1$仍为单位球面$u^2+v^2+w^2=1$。根据上述 Lemma 可知

$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$X^TX=1$

$U^TU=X^TP^TPX=X^TX=1$

$\sqrt{EG-F^2}$ 参数方程 (s,t)

$$\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=1} f(ax+by+cz)dS = \iint\limits_{u^2+v^2+w^2=1} f(\rho u)dS\text{。}$$

$\sqrt{E'G'-F'^2}$ 参数

我们来考虑上式右边的积分。根据对称性知

$\sqrt{1+(\frac{\partial w}{\partial u})^2 \cdots}\, du\, dv$

$$\iint\limits_{u^2+v^2+w^2=1} f(\rho u)dS = 2\iint\limits_{w=\sqrt{1-u^2-v^2}} f(\rho u)dS\text{。}$$

考虑上式右边的积分。简单计算可知曲面$w=\sqrt{1-u^2-v^2}$的面积元素为

$dS=\sqrt{1+w_u^2+w_v^2}\,dudv=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}}dudv$。于是

$$\iint\limits_{u^2+v^2+w^2=1} f(\rho u)dS = 2\iint\limits_{u^2+v^2\le 1}\frac{f(\rho u)dudv}{\sqrt{1-u^2-v^2}} = 2\int_{-1}^{1} f(\rho u)du\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}}\frac{dv}{\sqrt{1-u^2-v^2}}$$

$$=4\int_{-1}^{1} f(\rho u)du\int_{0}^{\sqrt{1-u^2}}\frac{dv}{\sqrt{1-u^2-v^2}} = 4\int_{-1}^{1} f(\rho u)du\frac{\pi}{2} = 2\pi\int_{-1}^{1} f(\rho u)du\text{。}$$

证毕。

$v=\sqrt{1-u^2}\cdot\cos\theta$

$$I=\int_0^b\sqrt{x^2+a^2}\,dx$$

$$=x\sqrt{x^2+a^2}\Big|_0^b-\int_0^b\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$$

$$=b\sqrt{a^2+b^2}-\left(\int_0^b\frac{x^2+a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx-\int_0^b\frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx\right)$$

$$=b\sqrt{a^2+b^2}-\int_0^b\sqrt{x^2+a^2}\,dx+a^2\int_0^b\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$$

$$=b\sqrt{a^2+b^2}-I+a^2\left(\ln(b+\sqrt{a^2+b^2})-\ln a\right)$$

$$\therefore I=\frac{b}{2}\sqrt{a^2+b^2}+\frac{a^2}{2}\left(\ln(b+\sqrt{a^2+b^2})-\ln a\right)$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$$

$$=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$$

↓导数

$$\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}}{x+\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{x\sqrt{x^2+a^2}+(x^2+a^2)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$