

9. 该平面图无割边, 故其对偶图无自环.

对偶图的结点除一个外, 度都可以被 d 整除.

若 G 的域可以 2 着色, 则对偶图的结点可以 2 着色, 对偶图是二分图.

故对偶图的结点可分为两个集合. 将集合中的结点度数相加, 互相等. (二分图的边两端一定在同一个集合中).

但由题设, 一个集合的度数和可以被 d 整除, 另一个不能. 矛盾.

因此 G 的域不能 2 着色.

11. G 的所有点度均为偶数, G 有欧拉回路. 故 G 的对偶图是二分图.

对偶图结点数 $n^* = e + 2 - n = 25$. 边数 $e^* = e = 38$.

G 无重边自环, 故 n^* 中每个顶点度为大于等于 3.

\therefore 只有一个点度为 4, 不能被 3 整除, 其余点度都能被 3 整除.

由第 9 题结论, G^* 不是二分图. 矛盾.

$\therefore G$ 不存在对偶图, G 不是平面图.

13. 图中有奇圈, $\chi(G) \geq 3$. 又有着色方案:

故 $\chi(G) = 3$.

$$f(G, t) = f(G_1, t) + f(G_2, t)$$

$$= f(G_1, t) + f(K_4, t) + f(K_3, t)$$

$$= f(G_3, t) + f(K_4, t) + f(K_4, t) + f(K_3, t)$$

$$= f(K_5, t) + 3f(K_4, t) + f(K_3, t)$$

$$= t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4) + 3t(t-1)(t-2)(t-3) + t(t-1)(t-2).$$

