微积分A (2)

教师：王振波

email: wangzhenbo@tsinghua.edu.cn

office: 数学系荷二办公室212

Tel: 62772796

第三章 重积分

- 二重积分的定义
- 二重积分的性质
- 可积条件
- 二重积分化累次积分

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_c^d \mathrm{d}y \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$$

- 极坐标下二重积分的计算

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_E f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

$$E=\{(r,\theta)\,|\,(r\cos\theta, r\sin\theta)\in D, r\geq 0, 0\leq\theta\leq 2\pi\}.$$

- 变量替换下二重积分的计算

$$u=u(x,y), v=v(x,y)$$

$$(x,y)\in D\leftrightarrow(u,v)\in\Omega$$

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_\Omega f(x(u,v),y(u,v))\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

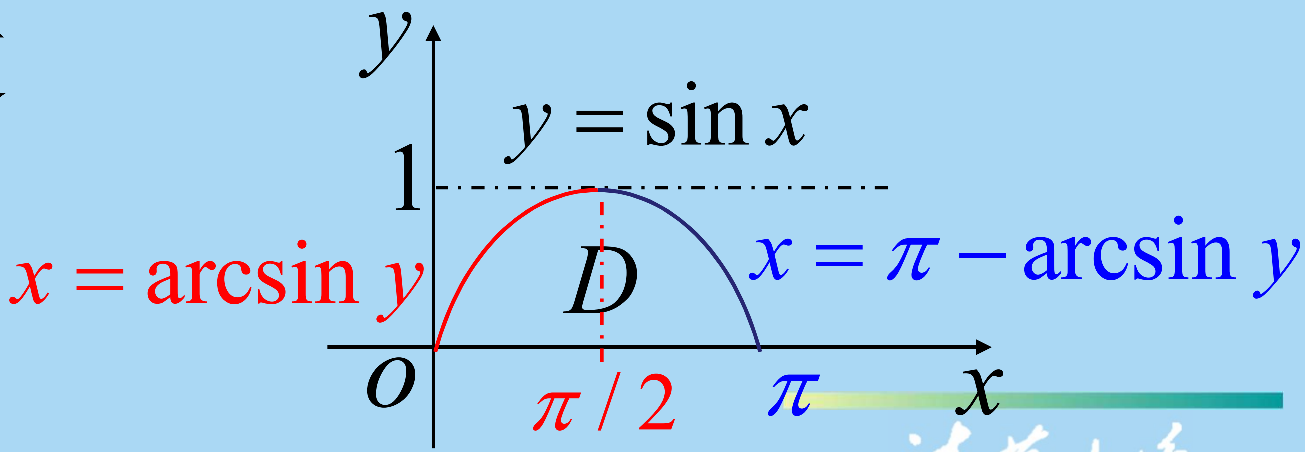
例: 求$I=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} x\mathrm{d}x.$

分析:按所给积分次序,内层积分容易求出,但再积分就困难了.所以尝试交换积分次序.

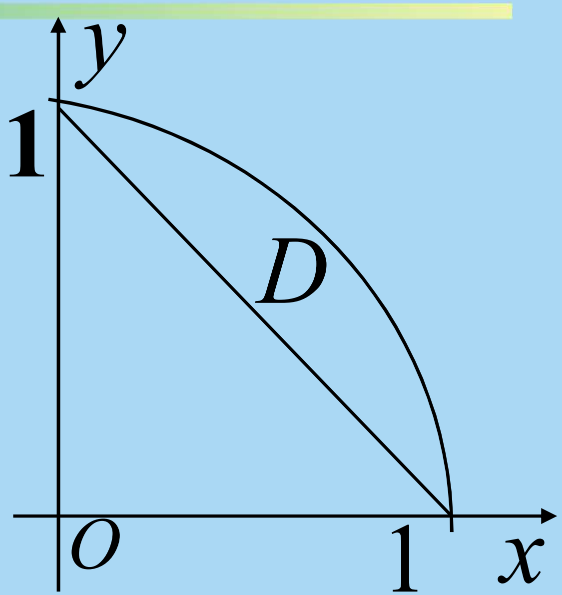
解: $I=\int_0^{\pi} x\mathrm{d}x\int_0^{\sin x}\mathrm{d}y$

$$=\int_0^{\pi} x\sin x\mathrm{d}x=-\int_0^{\pi} x\,\mathrm{d}\cos x$$

$$=-x\cos x\Big|_{x=0}^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x\mathrm{d}x=\pi.\square$$



例:求$I=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1,x+y\ge 1}\frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$



解:极坐标下积分区域为

$$0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}\le r\le 1.$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^{1}\frac{r\sin\theta+r\cos\theta}{r^2}\cdot r\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta+\cos\theta-1)\mathrm{d}\theta=2-\frac{\pi}{2}.\ \square$$

例: $I=\iint_{x^2+4y^2\le 1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

解: 令$x=\rho\cos\theta, y=\dfrac{1}{2}\rho\sin\theta$,则

$$\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}=\det\begin{pmatrix}\cos\theta & -\rho\sin\theta\\ \dfrac{1}{2}\sin\theta & \dfrac{1}{2}\rho\cos\theta\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\rho\neq 0,$$

$$I=\iint_{0\le\rho\le 1,0\le\theta\le 2\pi}\rho^2(\cos^2\theta+\frac{1}{4}\sin^2\theta)\cdot\frac{1}{2}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^1\frac{1}{2}\rho^3\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}(\cos^2\theta+\frac{1}{4}\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{5\pi}{32}.\square$$

清华大学

•三重积分化累次积分

（先一后二） $\Omega:\begin{cases}(x,y)\in D_{xy},\\ z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y),\end{cases}$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

（先二后一） $\Omega:\begin{cases}c\le z\le d,\\ (x,y)\in\Omega_z,\end{cases}$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_c^d dz\iint_{\Omega_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

●三重积分的变量替换

$$u=u(x,y,z),v=v(x,y,z),w=w(x,y,z)$$

$$(x,y,z)\in\Omega\leftrightarrow(u,v,w)\in\Omega^{*}.$$

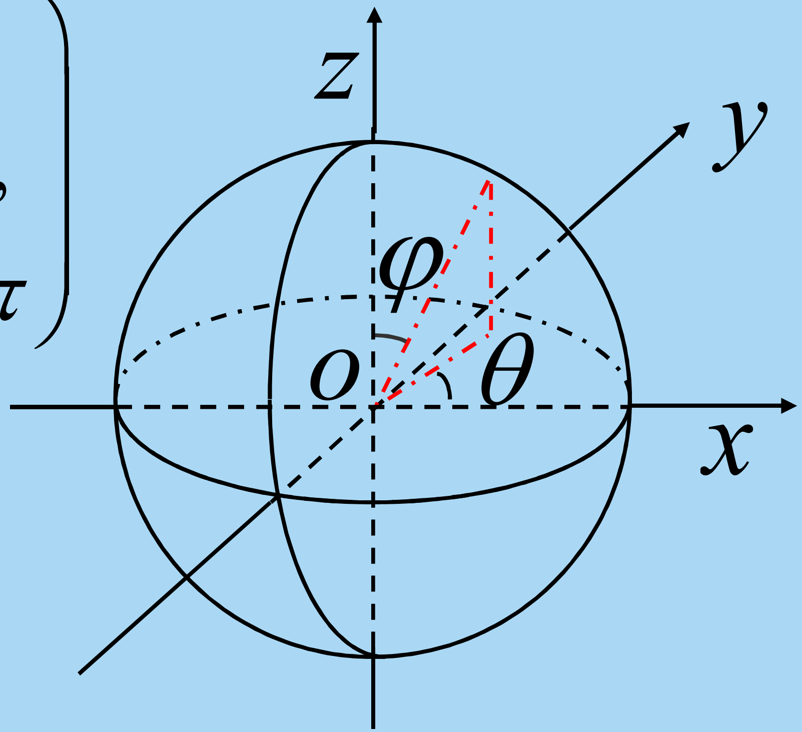
$$\iiint_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint_{\Omega^{*}}f\left(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\right)$$

$$\cdot\left|\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w.$$

特别地, 在球坐标变换

$$\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta, \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \\ z = \rho\cos\varphi, \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \rho \ge 0, \\ 0 \le \varphi \le \pi, \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{array} \right)$$



下,

$$\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \rho^2\sin\varphi.$$

于是 $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$= \iiint_{\Omega^*} f\big(x(\rho,\varphi,\theta), y(\rho,\varphi,\theta), z(\rho,\varphi,\theta)\big)$$

$$\cdot \rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta.$$

重积分的应用

- $S: x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v), (u,v) \in D,$

  简记为$\mathrm{r} = \mathrm{r}(u,v), (u,v) \in D.$ 则曲面面积为

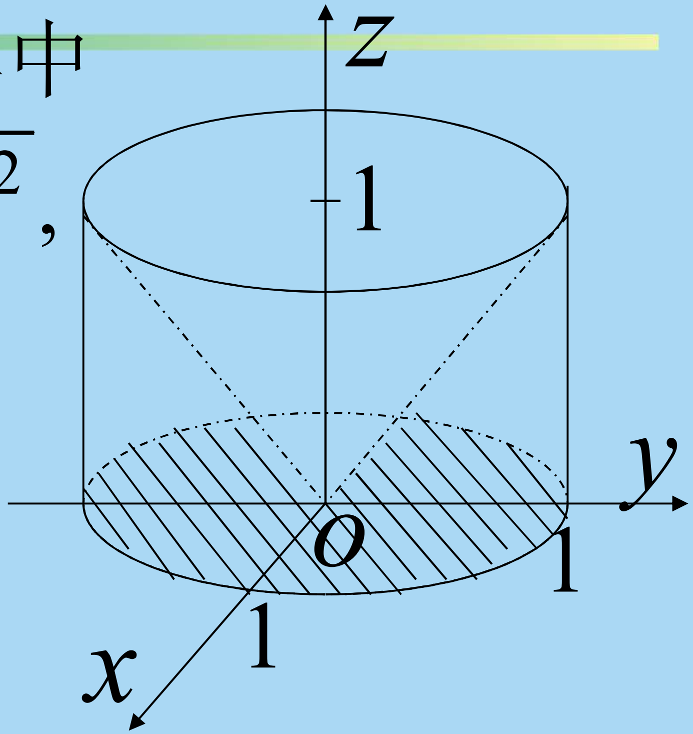
$$\iint_D \left\| \mathrm{r}'_u \times \mathrm{r}'_v \right\| \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

- $S: z = f(x,y), (x,y) \in D,$ 曲面面积为

$$\iint_D \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

- 质心
- 转动惯量
- 万有引力

例: $I=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Ω 由 $x^2+y^2=1$, 曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$, 和 $z=0$ 围成.



解法一: ("先一后二")

$$\Omega:\begin{cases} x^2+y^2\le 1, \\ 0\le z\le\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

$$I=\iint_{x^2+y^2\le 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}}(x^2+y^2)z\mathrm{d}z.$$

$$=\iint_{x^2+y^2\le 1}\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^5\mathrm{d}r=\frac{\pi}{6}.\square$$

清華大學

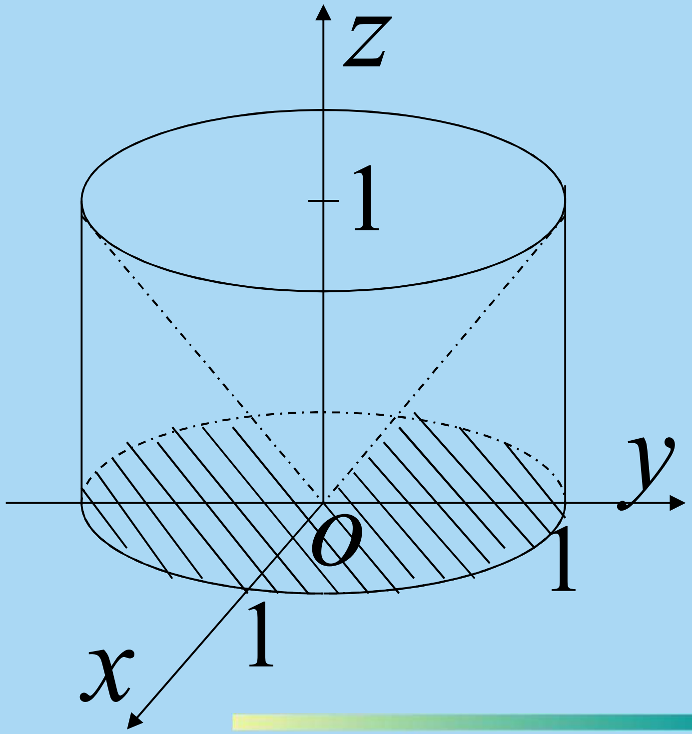
解法二:（″先二后一″） $\Omega: \begin{cases} 0 \le z \le 1, \\ z^2 \le x^2 + y^2 \le 1. \end{cases}$

$$I = \int_0^1 \mathrm{d}z \iint\limits_{z^2 \le x^2+y^2 \le 1} (x^2 + y^2) z \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 z\mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_z^1 r^2 \cdot r\mathrm{d}r$$

$$= 2\pi \int_0^1 z \cdot \frac{1}{4}(1 - z^4)\mathrm{d}z$$

$$= \pi / 6. \square$$



清華大學

例: $I=\iiint_{\Omega}(x^2+2y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中$\Omega: 0\le z\le\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

解:被积函数x^2+2y^2是z的偶函数,可将积分扩展到整个球域$\Omega_1: x^2+y^2+z^2\le R^2$.

$$I=\frac{1}{2}\iiint_{\Omega_1}(x^2+2y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

由Ω_1的轮换对称性

$$\iiint_{\Omega_1}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega_1}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega_1}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

于是, $I=\frac{1}{2}\iiint_{\Omega_1}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{R}\rho^4\mathrm{d}\rho=2\pi R^5/5.\square$$

第四章 曲线积分与曲面积分

$$L: x = x(t), y = y(t), z = z(t) \quad (\alpha \le t \le \beta),$$

- 第一型曲线积分

$$\int_L f \mathrm{d}l = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} \mathrm{d}t.$$

- 第二型曲线积分

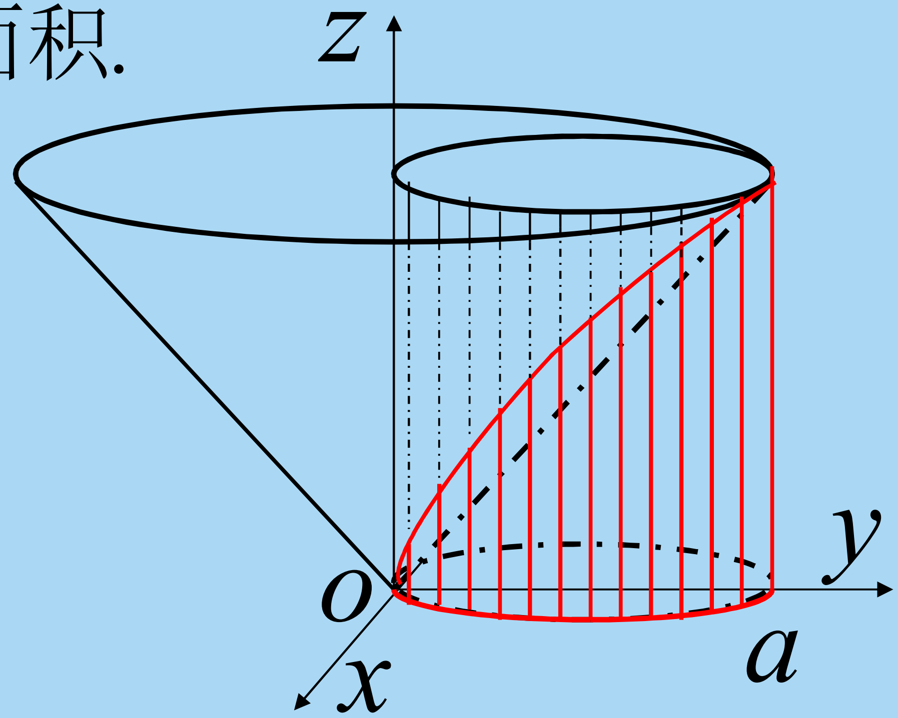
$$\vec{v}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

$$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \int_L \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_L \vec{v} \cdot \vec{\tau} \mathrm{d}l$$

$$= \pm \int_\alpha^\beta \{Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t)\} \mathrm{d}t$$

t 增加与L的正(反)向一致时取正(负)号.

例: 求圆柱面$x^2+y^2=ay$界于锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$和平面$z=0$之间部分S的面积.



解: 记L: $\begin{cases} x^2+y^2=ay \\ z=0 \end{cases}$,

由微元法得

$$\sigma(S)=\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}l$$

L的参数方程为:

$$x=\frac{a}{2}\cos t, y=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\sin t, t\in[0,2\pi].$$

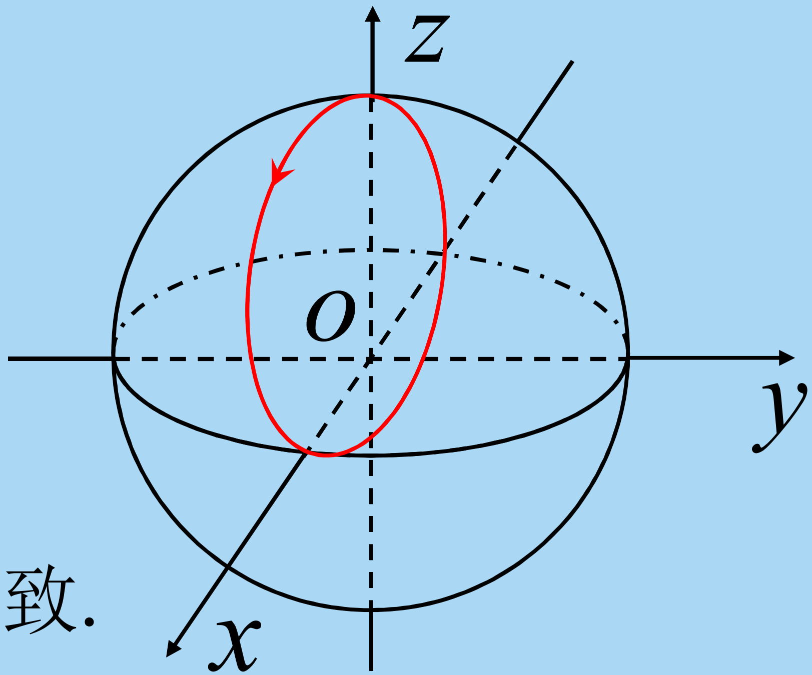
于是

$$\sigma(S)=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{a}{2}\cos t\right)^2+\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\sin t\right)^2}\cdot\frac{a}{2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{a^2}{2\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\sin t}\,\mathrm{d}t$$

$$=2a^2.\square$$

例. $I=\oint_L (y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$, 其中$L$是柱面$x^2+y^2=ax(a>0)$与球面$x^2+y^2+z^2=a^2(z>0)$的交线（从$x>a$看$L$取逆时针方向）.



解: L的参数方程为

$$x=\frac{a}{2}(1+\cos t),\ y=\frac{a}{2}\sin t,$$

$$z=a\sin\frac{t}{2},\quad t\in[0,2\pi],$$

t增加的方向与曲线的正向一致.

$$I=\frac{a^2}{4}\int_0^{2\pi}\left[(\sin t-2\sin\frac{t}{2})\cdot(-\sin t)+(2\sin\frac{t}{2}-1-\cos t)\cdot\cos t\right.$$

$$\left.+(1+\cos t-\sin t)\cdot\cos\frac{t}{2}\right]\mathrm{d}t=-\frac{a^2}{6}(3\pi+8).\square$$

第一型曲面积分的计算

- $S: x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v), (u,v) \in D,$

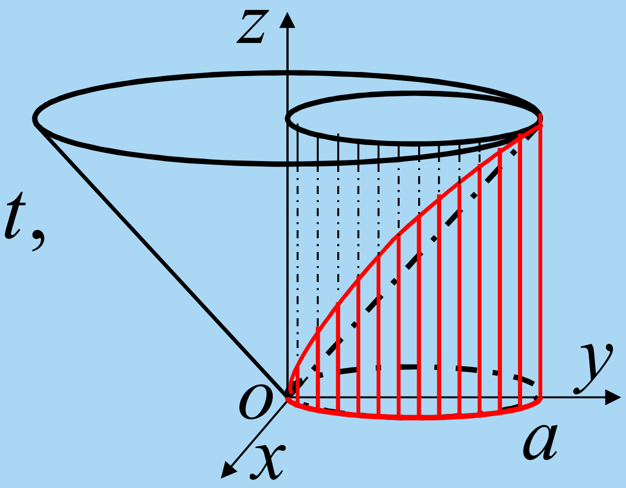
$$(A,B,C) = \mathrm{r}'_u \times \mathrm{r}'_v$$

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S$$
$$= \iint_D f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

- $S: z = f(x,y), (x,y) \in D,$

$$\iint_S g(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint_D g(x,y,f(x,y))\sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

例: 求圆柱面$x^2+y^2=ay$界于锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$和平面$z=0$之间部分S的面积$\sigma(S)$.



解: S: $x=\dfrac{a}{2}\cos\theta,\ y=\dfrac{a}{2}(1+\sin\theta),\ z=t,$

$$\theta\in[0,2\pi],\quad 0\le t\le\frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\sin\theta}.$$

$$\mathrm{r}'_\theta=(-\frac{a}{2}\sin\theta,\frac{a}{2}\cos\theta,0),$$

$$\mathrm{r}'_t=(\quad 0\quad,\quad 0\quad,1),$$

$$\mathrm{r}'_\theta\times\mathrm{r}'_t=(\frac{a}{2}\cos\theta,\frac{a}{2}\sin\theta,0),$$

$$\|\mathrm{r}'_\theta\times\mathrm{r}'_t\|=\frac{a}{2}.$$

$$\sigma(S)$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\sin\theta}}\|\mathrm{r}'_\theta\times\mathrm{r}'_t\|\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{a^2}{2\sqrt{2}}\sqrt{1+\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

$$=2a^2.\square$$

清華大學

第二型曲面积分的计算

- 方法一：化第二型曲面积分为第一型曲面积分

$$\iint_S P\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S$$

其中$\vec{v} = (P, Q, R)$

- 方法二：$S: x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v), (u,v) \in D,$

$$\iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S = \pm\iint_D (PA + QB + RC)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

$$(A,B,C) = \mathrm{r}'_u \times \mathrm{r}'_v = \left(\det\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \det\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right).$$

•方法三 $S: z = f(x,y), (x,y) \in D,$

$$\iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} \mathrm{d}S = \pm \iint_D (-Pf'_x - Qf'_y + R) \mathrm{dxdy}.$$

•方法四:直接化二重积分S在坐标面上的投影区域上的二重积分

$$\iint_S P\mathrm{dy} \wedge \mathrm{dz} = \pm \iint_{D_{yz}} P\mathrm{dydz}$$

$$\iint_S Q\mathrm{dz} \wedge \mathrm{dx} = \pm \iint_{D_{xz}} Q\mathrm{dxdz}$$

$$\iint_S R\mathrm{dx} \wedge \mathrm{dy} = \pm \iint_{D_{xy}} R\mathrm{dxdy}$$

例: $I=\iint_S xz\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$, 其中$S$

为半球$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, 上侧为正.

解: $\vec{v}=(xz,yz,z^2),\vec{n}=(x,y,z)/R$.

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left(R/z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

$$I=\iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S=\iint_S \frac{z}{R}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} R^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi R^4.\square$$

•*Green's formula*

$$\oint_{\partial D} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D \left(Q'_x - P'_y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

$$\oint_{\partial D} \vec{v}\cdot\vec{\tau}\,\mathrm{d}l = \iint_D \nabla\times\vec{v}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

$$\int_{\partial D} (P,Q)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}l = \iint_D (P'_x + Q'_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

$$\int_{\partial D} \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}l = \iint_D \nabla\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

$$\mathrm{rot}\vec{v} = \nabla\times\vec{v} \triangleq \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{pmatrix},\ \mathrm{div}\vec{v} = \nabla\cdot\vec{v} \triangleq P'_x + Q'_y.$$

清華大學

●平面向量场

保守场：第二型曲线积分与路径无关

有势场$\vec{u}$：$\exists f, s.t., \vec{u} = \nabla f$

无源场$\vec{u}$：$\nabla \cdot \vec{u} = 0$

无旋场$\vec{u}$：$\nabla \times \vec{u} = 0$

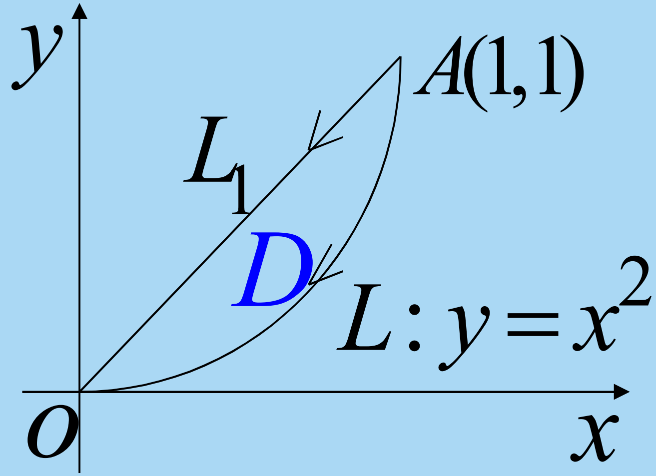
连续的保守场$\Leftrightarrow$有势场.

单连通区域上,连续可微的保守场$\Leftrightarrow$无旋场.

例 $I=\int_L xe^{-(x^2-y^2)}(1-x^2-y^2)\mathrm{d}x+ye^{-(x^2-y^2)}(1+x^2+y^2)\mathrm{d}y.$

其中L为$y=x^2$上从$A(1,1)$到$O(0,0)$的一段.

解：设L_1为从A到$O(0,0)$的有向线段,记L_1与L所围区域为D.令



$$P=xe^{-(x^2-y^2)}(1-x^2-y^2),$$

$$Q=ye^{-(x^2-y^2)}(1+x^2+y^2),$$

则$Q'_x=P'_y=-2xy(x^2+y^2)e^{-(x^2-y^2)}$.

由Green公式,$\int_{L^-\cup L_1}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D(Q'_x-P'_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$

于是$I=\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{L_1}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_1^0 2t\mathrm{d}t=-1.$ □

例：求微分形式$2xy^3dx+3x^2y^2dy$的原函数.

解:(用第二型曲线积分求向量场的势函数)

$$P=2xy^3, Q=3x^2y^2,\ Q'_x-P'_y=6xy^2-6xy^2\equiv 0.$$

即$\vec{v}=P\vec{i}+Q\vec{j}$为$\mathbb{R}^2$上的无旋场,从而为保守场.存在$\vec{v}$的势函数$f(x,y)$,也即$2xy^3dx+3x^2y^2dy$的原函数,满足

$$f(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}2xy^3dx+3x^2y^2dy.$$

取积分曲线为折线段$(0,0)\to(x,0)\to(x,y)$,则

$$f(x,y)=\int_{(0,0)\to(x,0)}2xy^3\mathrm{d}x+3x^2y^2\mathrm{d}y+\int_{(x,0)\to(x,y)}2xy^3\mathrm{d}x+3x^2y^2\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^x 0\mathrm{d}t+\int_0^y 3x^2t^2\mathrm{d}t=x^2y^3.$$

- Gauss公式 $$\iint_{\partial\Omega}\vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S=\iiint_{\Omega}\nabla\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

  Green公式 $$\int_{\partial D}\vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}l=\iint_{D}\nabla\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

  Remark: Gauss公式成立的条件.

- Stokes公式 $$\oint_{\partial S}\vec{v}\cdot\vec{\tau}\,\mathrm{d}l=\iint_{S}(\nabla\times\vec{v})\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$$

  Green公式 $$\int_{\partial D}\vec{v}\cdot\vec{\tau}\,\mathrm{d}l=\iint_{D}\nabla\times\vec{v}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

  Remark: 曲面S的选取及定向.

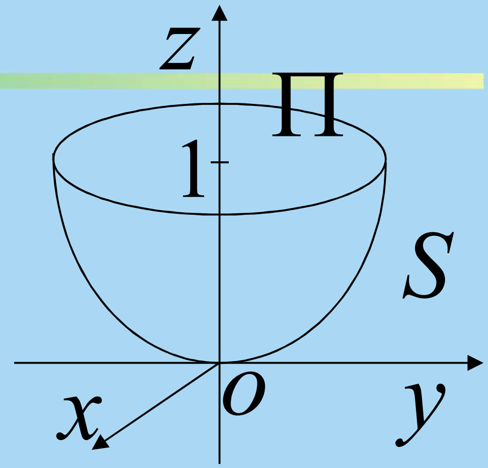
- 空间向量场

清华大学

例: $I=\iint_S (2x+z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,$

其中S为曲面$z=x^2+y^2(0\le z\le 1),$

其法向量与z轴正向夹角为锐角.



解: 设S与平面$\Pi: z=1, x^2+y^2\le 1$

所围空间区域为Ω,则$\partial\Omega=S^-\cup\Pi$,其中$\Pi$的正向向上.

记$\vec{v}=(2x+z,0,z)$,则$I=\iint_S \vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$,由$Gauss$公式可得

$$\iint_{S^-}\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S}+\iint_\Pi \vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\oiint_{\partial\Omega}\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\iiint_\Omega \nabla\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=3\iiint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3\int_0^1\mathrm{d}z\iint_{0\le x^2+y^2\le z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\pi/2.$$

$$\iint_S \vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=-\frac{3\pi}{2}+\iint_\Pi \vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=-\frac{3\pi}{2}+\iint_\Pi z\,\mathrm{d}S=-\frac{3\pi}{2}+\pi=-\frac{\pi}{2}.\square$$

例:求$I=\oiint_S \frac{\cos<\vec{r},\vec{n}>}{r^2}\mathrm{d}S$,$S$为简单光滑闭曲面,$\vec{n}$为$S$的单位外法向量,$M_0$为$S$内部一个确定点,$\vec{r}$是$M_0$到$S$上的点的矢向量,$r$表示$\vec{r}$的长度.

解:取S内部以M_0为球心半径为δ(足够小)的球面为S_1,外侧为正.记S与S_1所围成的区域为Ω,则$\partial\Omega=S\cup S_1^-$.

$$\frac{\cos<\vec{r},\vec{n}>}{r^2}=\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\vec{n},\quad \nabla\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)=0.$$

由Gauss公式得$\oiint_{S\cup S_1^-}\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S=\iiint_\Omega \nabla\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$,

于是$I=\oiint_S\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S=\oiint_{S_1}\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S=\oiint_{S_1}\frac{1}{r^2}dS=4\pi.\square$

第五章 常数项级数

- $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$收敛$\Leftrightarrow \{S_n\}$收敛.

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, s.t. \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon, \forall n > N, p \geq 1.$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

- 常用级数：$\sum_{n=1}^{+\infty} r^n, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ 或 $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$

非负项级数

总则：$\{S_n\}$有界　　Cauchy积分

比较：(逐项)　$\xrightarrow{b_n = r^n}$　　Cauchy根式 $\sqrt[n]{a_n}$

比值：(增速)　$\xrightarrow{b_n = r^n}$　　D'Alembert $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

$\xrightarrow{b_n = n^{-p}}$　　Raabe $n(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1)$

• 条件收敛与绝对收敛

- Leibnitz判别法

$$a_n \searrow 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n \text{收敛.}$$

- Dirichlet判别法

$$\left.\begin{array}{l} \text{数列}\{a_n\}\text{单调趋于}0; \\ \left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right| \le M, \forall n; \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} a_n b_n \text{收敛.}$$

清華大學

- Abel判别法

$$\left.\begin{array}{l} 数列\{a_n\}单调且有界, \\ \sum_{k=1}^{+\infty} b_k 收敛 \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} a_n b_n 收敛.$$

- Taylor展开在级数判敛中的应用
- 非负项级数的比较、比值判敛法不适用于一般项级数

例. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n!}\cdot 2^n}{n^{n/2}}$

解： $\frac{a_{n+1}}{a_n}=2\sqrt{n+1}\cdot\frac{n^{n/2}}{(n+1)^{(n+1)/2}}$

$$=\frac{2n^{n/2}}{(n+1)^{n/2}}=\frac{2}{\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2}{\sqrt{e}}>1,\text{故级数发散.}\square$$

例. 证明$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos n}{n}$条件收敛.

Proof. $\frac{1}{n}\searrow 0, \left|\sum_{k=1}^{n}\cos k\right| = \left|\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)-\sin\frac{1}{2}}{2\sin\frac{1}{2}}\right| \le \frac{1}{\sin\frac{1}{2}}.$

由Dirichlet判别法,$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos n}{n}$收敛.

下证$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{\cos n}{n}\right|$发散.

$$\left|\frac{\cos n}{n}\right| \geq \frac{\cos^2 n}{n} = \frac{1+\cos 2n}{2n}.$$

同上可证$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos 2n}{2n}$收敛, 而$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n}$发散, 故

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+\cos 2n}{2n} \text{ 发散,}$$

因此$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{\cos n}{n}\right|$发散.

综上, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos n}{n}$条件收敛. □

第六章 函数项级数

- 函数项级数的逐点收敛与一致收敛

$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$在$x \in I$上一致收敛

$$\Leftrightarrow \exists S(x), \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon), s.t.,$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - S(x)\right| < \varepsilon, \quad \forall n > N, \forall x \in I.$$

$\Leftrightarrow$ (Cauchy准则) $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon), s.t.,$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| < \varepsilon, \quad \forall n > N, \forall p \geq 1, \forall x \in I.$$

- 函数项级数一致收敛的判别法

  Weierstrass　Dirichlet　Abel

一致收敛函数项级数和函数的性质

- 逐项求极限
- 逐项积分
- 逐项求导

- 幂级数的收敛性、收敛半径

  幂级数在其收敛域中内闭一致收敛

- 幂级数和函数的性质

  逐项求极限、逐项积分、逐项求导

- C^{∞}函数的幂级数展开、幂级数求和

例. 求证: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1.$

解: 令$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{n-1}}{(n+1)!}$, $x \in \mathbb{R}$. 欲证$S(1) = 1$.

$$\int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x \frac{nt^{n-1}\mathrm{d}t}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$$

$$= \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{e^x - 1 - x}{x}, x \neq 0.$$

$S(x) = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}, x \neq 0.$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!} = S(1) = 1.$ □

第七章 Fourier 级数

- $f(x)$以$2l$ 为周期,在$[-l,l]$上可积或广义绝对可积,则

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right).$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x,\ n = 0,1,2,\cdots$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x,\ n = 1,2,\cdots$$

•Bessel不等式

$$f(x) \sim \frac{a_0}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) \le \|f\|^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\bullet f \in \Re[-\pi,\pi] \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = 0, \\ \lim\limits_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = 0. \end{cases}$$

清華大学

Thm (Dini判别法)

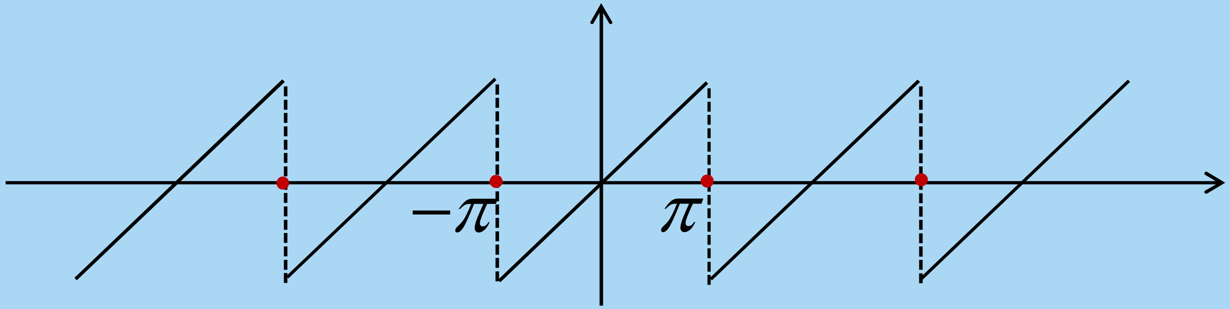
Thm (Lipschitz判别法)

Corollary. f以2π为周期,且在$[-\pi,\pi]$上分段可微, 则f在每一点x_0的Fourier级数收敛于

$$\frac{1}{2}\left[f(x_0+0)+f(x_0-0)\right].$$

特别地,若f在x_0连续,则f在x_0的Fourier级数收敛于$f(x_0)$.

例. $f(x)=x$在$(0,\pi)$上的2π-周期的正弦Fourier级数为



$$f(x)\sim\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{2}{k}\sin kx,$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{2}{k}\sin kx=\begin{cases}x, & x\in(-\pi,\pi),\\ 0, & x=\pm\pi.\end{cases}$$

令$x=\dfrac{\pi}{2}$,得

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}+\cdots=\frac{\pi}{4}.\square$$

Thank you for your attendance!

最后，祝大家在考试中取得好成绩！

并祝学习进步，生活愉快！

清華大学