



## Review

- 隐函数求导  $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, (x, y) \mapsto F(x, y)$ , 若  $\frac{\partial F}{\partial y}$  可逆, 则  $F(x, y) = 0$  确定隐“函数”  $y = y(x)$ , 求  $\frac{\partial y}{\partial x}$  时有两种方法:

(1) 套用定理:  $\frac{\partial y}{\partial x} = - \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}.$

求Jaccobi矩阵  $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$  时  $x, y$  相互独立!

- (2) 将  $F(x, y) = 0$  中  $y$  视为  $y = y(x)$ , 利用复合映射的链式法则, 方程组  $F(x, y(x)) = 0$  两边对  $x$  求Jaccobi矩阵.



**Remark:** 对具体的例子, 不必死记硬背隐函数定理中的公式, 只要将某些变量视为其它变量的隐函数, 再利用复合函数的求导法则即可.

**Remark:**  $m$ 个方程确定 $m$ 个隐函数, 将某 $m$ 个变量看成函数, 其它变量相互独立.

• 逆映射的Jacobi矩阵 
$$\frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} = \left( \frac{\partial (u, v)}{\partial (x, y)} \right)^{-1}$$



## § 4. 空间曲面和曲线

曲线  $y = f(x)$  在  $x_0$  可导, 即

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0),$$

$x \rightarrow x_0$  时.

则曲线  $y = f(x)$  在  $x_0$  的切线方程为

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

以直代曲:

以全微分代替函数值的改变量.



类比曲线的情形, 曲面  $z = g(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  可微, 即

$$z - z_0 = g'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + o(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}),$$

当  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$  时.

则曲面  $z = g(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  的切平面方程为:

$$z - z_0 = g'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$



## 1. 参数方程下空间曲线的切线

空间  $C^1$  曲线  $L: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

记  $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t), \quad \Delta y = y(t + \Delta t) - y(t),$   
 $\Delta z = z(t + \Delta t) - z(t), \quad \Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t).$

**Def.**  $\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t} \right)$   
 $= (x'(t), y'(t), z'(t)).$

**Def.** 若  $\mathbf{r}'(t_0) \neq 0$ , 则称  $\mathbf{r}(t_0)$  为曲线  $L: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  的正则点.

**Question.** 正则点的意义(几何意义、逆映射定理).

清华大学



**Remark1:** (几何意义)  $T = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$  为曲线L在点 $\mathbf{r}(t)$

处的单位切向量.

**Remark2:** L在 $\mathbf{r}(t_0)$ 处的切线方程为

$$(x(\tau), y(\tau), z(\tau))^T = \mathbf{r}(t_0) + \tau \cdot \mathbf{r}'(t_0).$$

**Remark3:** (物理意义) 设质点的位移为 $\mathbf{r}(t)$ , 则速度为 $\mathbf{r}'(t)$ , 加速度为 $\mathbf{r}''(t)$ .

**Remark4:**  $\mathbf{r}'(t)$ 既反映了 $\mathbf{r}(t)$ 在长度上的变化, 又反映了 $\mathbf{r}(t)$ 在方向上的变化.



## 2. 参数方程下曲面的切平面

设曲面 $S$ 的参数方程为 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ , 即

$$S: \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

**Def.**  $\mathbf{r}(u, v)$ 连续可微, 称 $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(u_0, v_0)$ 为曲面 $S$ 的正

则点, 若 $\text{rank} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v)} \bigg|_{(u_0, v_0)} = 2$ .

**Question.** 正则点的意义(几何意义、逆映射定理).

**Question.** 求曲面 $S$ 在正则点 $\mathbf{r}_0$ 处的切平面 $\Pi$ .



考虑 $S$ 上两条特殊的光滑曲线:

$$\ell_1: \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v_0), \ell_2: \mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0, v).$$

$\ell_1$ 在 $\mathbf{r}_0$ 的切向量为 $\mathbf{r}'_u(u_0, v_0) = (x'_u, y'_u, z'_u)|_{(u_0, v_0)}$ ,

$\ell_2$ 在 $\mathbf{r}_0$ 的切向量为 $\mathbf{r}'_v(u_0, v_0) = (x'_v, y'_v, z'_v)|_{(u_0, v_0)}$ .

$$\text{rank} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v)} \bigg|_{(u_0, v_0)} = 2, \mathbf{r}'_u(u_0, v_0) \text{与} \mathbf{r}'_v(u_0, v_0) \text{不平行,}$$

则 $\Pi$ 过点 $\mathbf{r}_0$ , 由 $\mathbf{r}'_u(u_0, v_0)$ 与 $\mathbf{r}'_v(u_0, v_0)$ 张成. 故

- $S$ 的切平面 $\Pi$ :  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = s\mathbf{r}'_u + t\mathbf{r}'_v,$

- $S$ 在 $\mathbf{r}_0$ 的法向量:  $\vec{n} = (\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v)|_{(u_0, v_0)}.$





**Remark.**  $S: z = f(x, y)$  可以看成以  $x, y$  为参数的曲面

$$x = x, y = y, z = f(x, y).$$

于是在点  $(x_0, y_0, z_0)$  处

$$\mathbf{r}'_x = (1, 0, f'_x(x_0, y_0))^T, \mathbf{r}'_y = (0, 1, f'_y(x_0, y_0))^T.$$

• 切平面为  $\Pi: \begin{cases} x = x_0 + t \\ y = y_0 + s \\ z = z_0 + tf'_x(x_0, y_0) + sf'_y(x_0, y_0) \end{cases},$

即  $z = z_0 + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$

• 法向量  $\vec{n} = (-f'_x(x_0, y_0), -f'_y(x_0, y_0), 1)^T$

清华大学



例: 求球面

$$\begin{cases} x = a \sin \varphi \cos \theta \\ y = a \sin \varphi \sin \theta \\ z = a \cos \varphi \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0 \leq \varphi \leq \pi \\ 0 \leq \theta < 2\pi \end{pmatrix} \text{ 在 } \varphi = \pi/6,$$

$\theta = \pi/3$  的切平面和法向量.

解:  $\mathbf{r}'_{\theta} = (-a \sin \varphi \sin \theta, a \sin \varphi \cos \theta, 0)$

$$\mathbf{r}'_{\varphi} = (a \cos \varphi \cos \theta, a \cos \varphi \sin \theta, -a \sin \varphi).$$

当  $\varphi = \pi/6, \theta = \pi/3$  时,

$$(x, y, z) = (a/4, \sqrt{3}a/4, \sqrt{3}a/2),$$

$$\mathbf{r}'_{\varphi} = (\sqrt{3}a/4, 3a/4, -a/2),$$

$$\mathbf{r}'_{\theta} = (-\sqrt{3}a/4, a/4, 0).$$

清华大学



$$\vec{n} // (\mathbf{r}'_{\varphi} \times \mathbf{r}'_{\theta}) = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \sqrt{3}a/4 & 3a/4 & -a/2 \\ -\sqrt{3}a/4 & a/4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} // (1/8, \sqrt{3}/8, \sqrt{3}/4).$$

切平面方程为

$$(x - a/4, y - \sqrt{3}a/4, z - \sqrt{3}a/2) \cdot \vec{n} = 0,$$

即

$$x + \sqrt{3}y + 2\sqrt{3}z - 4a = 0. \square$$



### 3. 一般方程下曲面的切平面

设  $S: F(x, y, z) = 0$ ,  $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ . 求曲面  $S$  在点  $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  处的法线和切平面.

若  $S: z = f(x, y)$  是  $F(x, y, z) = 0$  确定的隐函数, 则

$$f'_x(x_0, y_0) = -\frac{F'_x}{F'_z}\bigg|_{\mathbf{r}_0}, \quad f'_y(x_0, y_0) = -\frac{F'_y}{F'_z}\bigg|_{\mathbf{r}_0}.$$

•  $S$  在  $\mathbf{r}_0$  的法向量为

$$\vec{n} = (-f'_x(x_0, y_0), -f'_y(x_0, y_0), 1)^T = \left( \frac{F'_x}{F'_z}, \frac{F'_y}{F'_z}, 1 \right)^T \bigg|_{\mathbf{r}_0}$$

即  $\vec{n} // \text{grad} F(x_0, y_0, z_0)$ .



•  $S$  在  $\mathbf{r}_0$  的切平面方程为

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \text{grad}F(\mathbf{r}_0) = 0$$

即

$$(x - x_0)F'_x(\mathbf{r}_0) + (y - y_0)F'_y(\mathbf{r}_0) + (z - z_0)F'_z(\mathbf{r}_0) = 0.$$

•  $S$  在  $\mathbf{r}_0$  的法线方程为  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t \cdot \text{grad}F(\mathbf{r}_0)$

$$\text{即} \begin{cases} x = x_0 + F'_x(\mathbf{r}_0)t \\ y = y_0 + F'_y(\mathbf{r}_0)t \\ z = z_0 + F'_z(\mathbf{r}_0)t. \end{cases}$$



例: 球面  $S_1: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  与锥面  $S_2: x^2 + y^2 = a^2 z^2$  正交 (即交点处的法向量相互垂直).

证明: 记  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$ ,  
 $G(x, y, z) = x^2 + y^2 - a^2 z^2$ .

交点  $(x, y, z)$  处  $S_1$  与  $S_2$  的法向量分别为

$$\text{grad}F(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$$

$$\text{grad}G(x, y, z) = (2x, 2y, -2a^2 z).$$

而  $\text{grad}F(x, y, z) \cdot \text{grad}G(x, y, z) = 4(x^2 + y^2 - a^2 z^2) = 0$ , 故  $S_1$  与  $S_2$  正交.  $\square$



例: 设  $f$  可微. 求证曲面  $S: f\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right) = 0$  上任意一点处的切平面通过一定点.

证明: 记  $F(x, y, z) \triangleq f\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right)$ . 则曲面  $S$  在点

$(x_0, y_0, z_0)$  的法向量为

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \text{grad} F(x_0, y_0, z_0) \\ &= \left( \frac{f'_1}{z_0 - c}, \frac{f'_2}{z_0 - c}, \frac{a - x_0}{(z_0 - c)^2} f'_1 + \frac{b - y_0}{(z_0 - c)^2} f'_2 \right)^T\end{aligned}$$

清华大学



$S$ 在点 $(x_0, y_0, z_0)$ 的切平面方程为

$$\begin{aligned} & (x - x_0) \frac{f_1'}{z_0 - c} + (y - y_0) \frac{f_2'}{z_0 - c} \\ & + (z - z_0) \frac{a - x_0}{(z_0 - c)^2} f_1' + (z - z_0) \frac{b - y_0}{(z_0 - c)^2} f_2' = 0. \end{aligned}$$

可见所有的切平面都过定点 $(a, b, c)$ .  $\square$





例: 求 $\lambda > 0$ , 使以下两曲面相切:

$$S_1 : xyz = \lambda, \quad S_2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

解: 设 $S_1$ 与 $S_2$ 在点 $(x, y, z)$ 相切, 则两曲面在 $(x, y, z)$ 的切平面的法向量平行, 即

$$(yz, xz, xy) // \left( \frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2} \right).$$

于是存在 $\mu \in \mathbb{R}$ , s.t.

$$yz = \mu \frac{x}{a^2}, \quad xz = \mu \frac{y}{b^2}, \quad xy = \mu \frac{z}{c^2}.$$

用 $x, y, z$ 分别乘各等式, 得



$$xyz = \mu \frac{x^2}{a^2} = \mu \frac{y^2}{b^2} = \mu \frac{z^2}{c^2} \quad (*)$$

于是  $3xyz = \mu \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right).$

点 $(x, y, z)$ 在两曲面上,因此 $3\lambda = \mu$ .

注意到 $xyz = \lambda$ ,由 $(*)$ 式得

$$x^2 = a^2 xyz / \mu = a^2 \lambda / \mu = a^2 / 3,$$

$$y^2 = b^2 xyz / \mu = b^2 \lambda / \mu = b^2 / 3,$$

$$z^2 = c^2 xyz / \mu = c^2 \lambda / \mu = c^2 / 3.$$

故 $\lambda = \sqrt{x^2 y^2 z^2} = \sqrt{3}abc/9.$   $\square$



#### 4. 一般方程表示的空间曲线的切线

曲线L是曲面 $S_1$ 与 $S_2$ 的交线,  $L: \begin{cases} (S_1:) F(x, y, z) = 0 \\ (S_2:) G(x, y, z) = 0. \end{cases}$

求L在点 $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ 处的切线.

L在点 $\mathbf{r}_0$ 处的切线必落在 $S_1, S_2$ 在点 $\mathbf{r}_0$ 的切平面上.  
因而L在 $\mathbf{r}_0$ 的切向量 $\mathbf{T}$ 与 $S_1, S_2$ 在点 $\mathbf{r}_0$ 的法向量垂直.

于是,  $\mathbf{T} = \text{grad}F(\mathbf{r}_0) \times \text{grad}G(\mathbf{r}_0),$

L在点 $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ 处的切线方程为

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t (\text{grad}F(\mathbf{r}_0) \times \text{grad}G(\mathbf{r}_0)).$$



例: 求曲线  $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 6 = 0, \\ z - x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$  在点  $M_0(1, 1, 2)$  处的切线方程.

解: 令  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 6$ ,  
 $G(x, y, z) = z - x^2 - y^2$ .

则  $\text{grad}F(1, 1, 2) = (2, 2, 4)^T$ ,  $\text{grad}G(1, 1, 2) = (-2, -2, 1)^T$ .

曲线在点  $M_0(1, 1, 2)$  的切向量为

$$\vec{v} = \text{grad}F(M_0) \times \text{grad}G(M_0) = (10, -10, 0)^T.$$

曲线在点  $M_0$  的切线方程为  $\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 1 - t, \\ z = 2. \end{cases}$



## 4. 总结

曲面的切平面与法线：

曲面方程	点	法向量
$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$	$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(u_0, v_0)$	$(\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v) _{(u_0, v_0)}$
$z = f(x, y)$	$(x_0, y_0, z_0)$ $z_0 = f(x_0, y_0)$	$(-f'_x, -f'_y, 1)^T _{(x_0, y_0)}$
$F(x, y, z) = 0$	$\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$	$\text{grad}F(\mathbf{r}_0)$



## 曲线的切向量:

曲线方程	点	切向量
$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$	$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$	$\mathbf{r}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$
$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$	$\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$	$\text{grad}F(\mathbf{r}_0) \times \text{grad}G(\mathbf{r}_0)$



# 作业：习题1.7

No. 1 (5) (6), 2, 3, 5, 6