第 11 次习题课 第二型曲面积分、Gauss 公式、Stokes 公式

1. 设 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\,(0\le x\le 1)$ 的下侧，求

$$\iint_{\Sigma} xdy\wedge dz+2ydz\wedge dx+3(z-1)dx\wedge dy.$$

解: 补一个曲面 $\sum_1:\begin{cases}x^2+y^2\le 1\\ z=1\end{cases}$ 上侧，记 Ω 为锥面 Σ 和平面 Σ_1 所为区域，由 Gauss 公式，

$$P=x,\quad Q=2y,\quad R=3(z-1),\ \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=1+2+3=6$$

$$\iint_{\Sigma}+\iint_{\Sigma_1} Pdy\wedge dz+Qdz\wedge dx+Rdx\wedge dy\ =\iiint_{\Omega}6dxdydz=6\times\frac{\pi}{3}=2\pi$$

而在 $\sum_1$ 上，$\vec{n}=(0,0,1),\vec{v}\cdot\vec{n}=3(z-1)=0,$ 所以

$$\iint_{\Sigma_1} xdy\wedge dz+2ydz\wedge dx+3(z-1)dx\wedge dy=\iint_{\Sigma_1}3(z-1)dS=0\,,$$

从而 $$\iint_{\Sigma} xdy\wedge dz+2ydz\wedge dx+3(z-1)dx\wedge dy=2\pi\,.$$

2. 计算 $\iint_S x(y-z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(x-y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$，$S:x^2+y^2=1(0\le z\le 2)$，外侧.

解法 1：$\vec{v}=x(y-z)\vec{i}+(x-y)\vec{k}$，$\vec{n}=x\vec{i}+y\vec{j}$.

$$I=\iint_S x(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_S\vec{v}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S=\iint_{\substack{x^2+y^2=1\\0\le z\le 2}}x^2(y-z)\mathrm{d}S$$

S 的参数方程为:$x=\cos\theta,y=\sin\theta,z=z,(0\le\theta\le 2\pi,0\le z\le 2)$，$dS=d\theta dz$，于是

$$I=\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^2(\sin\theta-z)dz=-2\pi.$$

解法 2：高斯公式．记 $S_1:x^2+y^2\le 1,z=0$ 下侧，$S_1:x^2+y^2\le 1,z=2$ 上侧,

$\Omega:x^2+y^2\le 1,0\le z\le 2$. 则

$$\iint_{S_1}\vec{v}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S=0,\iint_{S_2}\vec{v}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S=0\,,$$

$$\iint_{\partial\Omega}\vec{v}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S=\iiint_{\Omega}\nabla\cdot\vec{v}\mathrm{d}V=\iiint_{\Omega}[(y-z)\mathrm{d}V=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^2\mathrm{d}z=-2\pi\,.$$

因此，$\iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S = -2\pi - \iint_{S_1} \vec{v}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S - \iint_{S_2} \vec{v}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S = -2\pi.$

3. 求 $I = \oint_{L^+}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$，其中 L^+ 为 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $y = x\tan\alpha\ \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的交线, 从 0x 轴的正向看去，圆周的正向为逆时针方向.

解: 记 S^+ 为平面 $y = x\tan\alpha$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 内部分, 以 L^+ 为正向边界，则 S^+ 的正单位法向量为 $\vec{\mathbf{n}} = (\sin\alpha, -\cos\alpha, 0)$. $rot(y-z, z-x, x-y) = -2(1,1,1)$, 由 Stokes 公式, 得

$$\begin{aligned} I &= \oint_{L^+}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz = \iint_S rot(y-z, z-x, x-y)\cdot\vec{\mathbf{n}}dS \\ &= -2\iint_S (1,1,1)\cdot(\sin\alpha, -\cos\alpha, 0)dS \\ &= 2(\cos\alpha-\sin\alpha)\iint_S dS = 2\pi a^2(\cos\alpha-\sin\alpha) \end{aligned}$$

其中 $\iint_S dS = \pi a^2$ 为平面 $y = x\tan\alpha$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 部分内的面积.

4. 向量场 $\mathbf{F} = (2x-3)\mathbf{i} - z\mathbf{j} + \cos z\mathbf{k}$ 是否是保守场 ________ （填是或否）.

【答案】否。$rot\mathbf{F} = (1,0,0)$。

5. 设 L 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，从 z 轴正向看去 L 正向为逆时针方向，则 $\int_L (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz =$ ____________________.

【答案】$-2\sqrt{3}\pi a^2$

6. 设 $\mathbf{F}(x,y,z) = (yz, zx, xy)$，则 $\mathrm{rot}\mathbf{F} =$ ____________，$\mathrm{div}\mathbf{F} =$ ______________.

【答案】（0， 0， 0）， 0

7. 设 $u = x^2+y^2+z^2$，则 $\mathrm{div}(\mathrm{grad}u) =$ ______________； $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}u) =$ ________。

【答案】$6, (0,0,0)$

8. 设 L 是平面 $x+y+z=0$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的交线，从 z 轴正向看去为逆时针方向，求第二类曲线积分 $\int_{L^+}\dfrac{(y+1)\,dx+(z+2)\,dy+(x+3)\,dz}{x^2+y^2+z^2}$ 。

【解】$I=\int_{L^+}\dfrac{(y+1)\,dx+(z+2)\,dy+(x+3)\,dz}{x^2+y^2+z^2}=\int_{L^+}(y+1)\,dx+(z+2)\,dy+(x+3)\,dz$

令 S 是平面 $x+y+z=0$ 上包含于球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 内的部分，规定 S 的正法向量向上，即正法向与 z 轴成锐角，则根据

stokes 公式得
$$I=-\iint_{S^+}dydz+dzdx+dxdy$$

注意到 S 的单位正法向 $\vec{n}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ ，有

$$I=-\iint_S(1,1,1)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)dS=-\sqrt{3}\iint_S dS=-\sqrt{3}\pi$$

9. 设 $f(u)$ 二阶连续可微, $f(0)=0$, 求

$$I=\oiint_\Sigma x^3dy\wedge dz+\left[\frac{1}{z}f(\frac{y}{z})+y^3\right]dz\wedge dx+\left[\frac{1}{y}f(\frac{y}{z})+z^3\right]dx\wedge dy,$$

其中, Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与两球面 $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2+z^2=4$ 所围空间区域 Ω 的外表面。

解：记 $P=x^3,Q=\dfrac{1}{z}f(\dfrac{y}{z})+y^3,R=\dfrac{1}{y}f(\dfrac{y}{z})+z^3,(y\neq 0)$. 由于

$$\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}f(\frac{y}{z})=\lim_{y\to 0}\frac{f(\frac{y}{z})-f(0)}{y}=\frac{f'(0)}{z},$$

定义
$$R(x,0,z)\triangleq\lim_{y\to 0}R(x,y,z)=\frac{f'(0)}{z}+z^3.$$

于是 P,Q,R 在 $\bar{\Omega}$ 上连续, 且

$$\frac{\partial P}{\partial x}=3x^2,\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{1}{z^2}f'(\frac{y}{z})+3y^2,\frac{\partial R}{\partial z}=-\frac{1}{z^2}f'(\frac{y}{z})+3z^2$$

在 Ω 中连续。由 Gauss 公式, $I = 3\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)dxdydz$.

令 $x = r\sin\varphi\cos\theta,\ y = r\sin\varphi\sin\theta,\ z = r\cos\varphi$, 则$1\le r\le 2$, 由$z=\sqrt{x^2+y^2}$得

$\cos\varphi = \sin\varphi, \varphi = \pi/4$. 又$z>0, 0<\varphi\le\pi/4$. 于是

$$I = 3\int_1^2 r^2\cdot r^2 dr\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/4}\sin\varphi d\varphi = 3\times\frac{31}{5}\times 2\pi\times(1-\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{93}{5}(2-\sqrt{2})\pi.$$

10. 设 $\vec{\mathrm{V}} = (P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))^{\mathrm{T}}\in C^1(\mathbb{R}^3)$, 且

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{\mathrm{V}}(x,y,z)=0, & \forall(x,y,z)\in\Omega, \\ \vec{\mathrm{V}}(x,y,z)=(1,1,1)^{\mathrm{T}}, & \forall(x,y,z)\in\partial\Omega. \end{cases}$$

Ω为$\mathbb{R}^3$中以原点为球心的单位球, 求证: $\iiint_\Omega (P+Q+R)dxdydz = 4\pi.$

证明: 由 Gauss 公式,得

$$\begin{aligned}
&\iint_{\partial\Omega}(x+y+z)\vec{\mathrm{V}}\cdot d\vec{S} \\
&= \iiint_\Omega \left[(P+Q+R)+(x+y+z)(P'_x+Q'_y+R'_z)\right]dxdydz \\
&= \iiint_\Omega (P+Q+R)\ dxdydz.
\end{aligned}$$

在 $\partial\Omega$ 上, $\vec{\mathrm{V}}(x,y,z)=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\vec{n}=(x,y,z)$,因此

$$\begin{aligned}
&\iiint_\Omega (P+Q+R)\ dxdydz \\
&= \iint_{\partial\Omega}(x+y+z)\vec{\mathrm{V}}\cdot\vec{n}dS \\
&= \iint_{\partial\Omega}(x+y+z)^2 dS \\
&= \iint_{\partial\Omega}(x^2+y^2+z^2)dS + 2\iint_{\partial\Omega}(xy+yz+zx)dS \\
&= \iint_{\partial\Omega}dS + 0 = 4\pi.
\end{aligned}$$