第五周习题课　　曲面，曲线，Taylor 公式，无条件极值

例1.　　求曲面 $S：2x^2-2y^2+2z=1$ 上切平面与直线 $L:\begin{cases}3x-2y-z=5\\x+y+z=0\end{cases}$ 平行的切点的轨迹。

解：(1) 直线 $L:\begin{cases}x=x\\y=4x+5\\z=-5x-5\end{cases}$ 的方向：$\vec{\tau}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\3 & -2 & -1\\1 & 1 & 1\end{vmatrix}=-\vec{i}-4\vec{j}+5\vec{k}$.

切点为 $P(x,y,z)$ 处曲面 S 的法向：$\vec{n}=4x\vec{i}-4y\vec{j}+2\vec{k}$.

(2)所求轨迹：$\vec{n}\perp\vec{\tau}\Leftrightarrow\vec{n}\cdot\vec{\tau}=-4x+16y+10=0$,

轨迹为空间曲线：$\Rightarrow\begin{cases}2x-8y=5\\2x^2-2y^2+2z=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=x\\y=(2x-5)/8\\z=(-60x^2-60x+57)/64\end{cases}$

例2.　　证明球面 $S_1: x^2+y^2+z^2=R^2$ 与锥面 $S_2: x^2+y^2=a^2z^2$ 正交.

证明 所谓两曲面正交是指它们在交点处的法向量互相垂直.

记 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-R^2$,　$G(x,y,z)=x^2+y^2-a^2z^2$

曲面 S_1 上任一点 $M(x,y,z)$ 处的法向量是

$$gradF(x,y,z)=(2x,2y,2z)^T\quad\text{或者 }\vec{v}_1=(x,y,z)^T$$

曲面 S_2 上任一点 $M(x,y,z)$ 处的法向量为 $\vec{v}_2=(x,y,-a^2z)^T$.

设点 $M(x,y,z)$ 是两曲面的公共点，则在该点有

$$\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2=(x,y,z)^T\cdot(x,y,-a^2z)=x^2+y^2-a^2z^2=0$$

即在公共点处两曲面的法向量相互垂直，因此两曲面正交.

例3.　　通过曲面 $S: e^{xyz}+x-y+z=3$ 上点 $(1,0,1)$ 的切平面（　B　）

（A）通过 y 轴；　　　　（B）平行于 y 轴；

（C）垂直于 y 轴；　　　　（D）A，B，C 都不对.

解题思路 令 $F(x,y,z)=e^{xyz}+x-y+z-3$. 则 S 在其上任一点 M 的法向量为

$$\text{grad}\,F(M)=\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right)\Big|_M$$

于是 S 在点 M $(1,0,1)$ 的法向量为

$$(yze^{xyz}+1,xze^{xyz}-1,xye^{xyz}+1)\Big|_{(1,0,1)}=(1,0,1)$$

因此，切平面的方程为 $(x-1)+(z-1)=0$． S 在 $(1,0,1)$ 的法向量垂直于 y 轴，从而切平面平行于 y 轴．但是由于原点不在切平面，故切平面不含 y 轴.

例4. S 由方程 $ax+by+cz=G\left(x^2+y^2+z^2\right)$确定，试证明：曲面 S 上任一点的法线与某定直线相交。

证明：曲面上任意一点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的法线为

$$\frac{x-x_0}{a-2x_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2)}=\frac{y-y_0}{b-2y_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2)}=\frac{z-z_0}{c-2z_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2)}$$

设相交的定直线为 $\frac{x-x_1}{\alpha}=\frac{y-y_1}{\beta}=\frac{z-z_1}{\gamma}$，与法线向交:

$$\left(a-2x_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2),b-2y_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2),c-2z_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2)\right)$$ 不平行于 (α,β,γ)

$$\left[\left(a-2x_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2),b-2y_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2),c-2z_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2)\right)\times(\alpha,\beta,\gamma)\right]\cdot(x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0)=0$$

$$\begin{vmatrix} a-2x_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2) & b-2y_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2) & c-2z_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2) \\ \alpha & \beta & \gamma \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \end{vmatrix}+2G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2)\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}=0$$

只要取 $(\alpha,\beta,\gamma)=(a,b,c),\quad (x_1,y_1,z_1)=(0,0,0)$ 即可.

例5. 在椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上求一点，使椭球面在此点的法线与三个坐标轴的正向成等角。

解：椭球面在此点的法线矢量为 $(1,1,1)$，设该点为 (x_0,y_0,z_0)，则有

$$gradF\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}=(\frac{2x_0}{a^2},\frac{2y_0}{b^2},\frac{2z_0}{c^2})=k(1,1,1)$$

该点坐标为 $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a^2,b^2,c^2)$

6.

求螺线 $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = ct \end{cases}$；$(a>0, c>0)$，在点 $M(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{\pi c}{4})$ 处的切线与法平面.

解 由于点 M 对应的参数为 $t_0 = \frac{\pi}{4}$，所以螺线在 M 处的切向量是

$$\vec{v} = (x'(\pi/4),\ y'(\pi/4),\ z'(\pi/4)) = (-a/\sqrt{2},\ a/\sqrt{2},\ c)$$

因而所求切线的参数方程为 $\begin{cases} x = a/\sqrt{2} - a/\sqrt{2}\,t, \\ y = a/\sqrt{2} + a/\sqrt{2}\,t, \\ z = (\pi/4)c + c\,t, \end{cases}$

法平面方程为 $-(a/\sqrt{2})(x - a/\sqrt{2}) + (a/\sqrt{2})(y - a/\sqrt{2}) + c(z - (\pi/4)c) = 0$

二．Taylor 公式

例1 函数 x^y 在 $x=1, y=0$ 点的二阶 Taylor 多项式为 ____________________。

【答案】$1 + (x-1)y$

例2 函数 $f(x,y) = \frac{\cos x}{y+1}$ 在点 $(0,0)$ 的带 Lagrange 余项的 Taylor 展开式为

____。

【答案】$f(x,y) = 1 - y + \frac{1}{2}(x,y)\begin{pmatrix} -\frac{\cos\theta x}{1+\theta y} & \frac{\sin\theta x}{(1+\theta y)^2} \\ \frac{\sin\theta x}{(1+\theta y)^2} & \frac{2\cos\theta x}{(1+\theta y)^3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\quad \theta\in(0,1)$

例3 二元函数 $\sin(xy)$ 在点 $(1,1)$ 处的二阶 Taylor 多项式为____________________。

【答案】

$$\sin 1 + (\cos 1)(x-1) + (\sin 1)(y-1) - \tfrac{1}{2}(\sin 1)((x-1)^2 + (y-1)^2) \\ + (\cos 1 - \sin 1)(x-1)(y-1)$$

例4 $x + y + z + xyz^3 = 0$ 在点 $(0,0,0)$ 邻域内确定隐函数 $z = z(x,y)$．求 $z(x,y)$ 在原点的带 Peano 余项的二阶 Taylor 公式.

【解】$z(0,0) = 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)=-1$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(0,0)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0,0)=0$$

$z(x,y)$ 在原点的带 Peano 余项的二阶 Taylor 公式为 $z=-x-y+o\left(\rho^3\right)$

三．极值

例5 设可微函数 f(x, y)在(x_0,y_0)取得极小值，则下列结论正确的是？

（A）$f(x_0,y)$在$y=y_0$处导数大于零；(B) $f(x_0,y)$在$y=y_0$处导数等于零；

(C) $f(x_0,y)$在$y=y_0$处导数小于零；(D) $f(x_0,y)$在$y=y_0$处导数不存在.

答案：（B）

例6 已知函数 f(x, y)在（0, 0）某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$，则

(A)点(0, 0)不是 f(x, y)的极值点；(B)点(0, 0)是 f(x, y)的极大值点；
(C)点(0, 0)是 f(x, y)的极小值点；(D)根据所给条件无法判断(0, 0)是否 f(x, y)的极值点；
答案（A）

分析：由已知极限得知：f(0, 0)=0,且 $f(x,y)-xy=(x^2+y^2)^2+o(1)$，当|x|,|y|充分小。于是 $f(x,y)-f(0,0)=xy+(x^2+y^2)^2+o(1)$；

于是当 y=x 充分小，$f(x,y)-f(0,0)=xy+(x^2+y^2)^2+o(1)>0$

当 y=-x 充分小，$f(x,y)-f(0,0)=-x^2+4x^4+o(1)<0$
所以选（A）

例7 函数 $z(x,y)$在有界闭区域 D 上连续，在 D 内部偏导数存在, $z(x,y)$在 D 的边界上的值为零，在 D 内部满足 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=f(z)$，其中 f 是严格单调函数，且 $f(0)=0$，

证明 $z(x,y)\equiv 0$，$((x,y)\in D)$.

证明：假设 $z(x,y)$ 不恒为 0，不妨设其在区域 D 上某点 P (x_0,y_0) 处取极大值，则有 $f(z)\big|_P=0$，这与 f 是严格单调函数矛盾。

例8 求函数 $z=\left(x^2+y^2\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}$ 的极值.

解：
$$z'_x=\left(2x-2x(x^2+y^2)\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}=0$$
$$z'_y=\left(2y-2y(x^2+y^2)\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}=0$$

驻点为 $(0,0)$ 与曲线 $x^2+y^2=1$ 上的所有的点．在 $(0,0)$ 点，

$$z''_{xx}(0,0)=2,\quad z''_{xy}(0,0)=0,\quad z''_{yy}(0,0)=2$$

$(0,0)$ 点是极小值点，极小值为 0 .

设 $t=x^2+y^2$，$z=te^t$，$t=1$ 是其驻点，且 $z''(1)<0$，函数 $z=\left(x^2+y^2\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}$ 在曲线 $x^2+y^2=1$ 上取到极大值 e^{-1} .

例9 （隐函数的极值）设 $z=z(x,y)$ 由 $2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$ 确定，求该函数的极值.

解：
$$4xdx+4ydy+2zdz+8xdz+8zdx-dz=0$$
$$dz=-\frac{4x+8z}{2z+8x-1}dx-\frac{4y}{2z+8x-1}dy$$
$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{4x+8z}{2z+8x-1}=0$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{4y}{2z+8x-1}=0$$

$$2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$$

三个方程联立，得驻点 $(-2,0)$, $\left(\frac{16}{7},0\right)$.

在 $(-2,0)$ 点

$$\left[z''_{xy}(-2,0)\right]^2-z''_{xx}(-2,0)z''_{yy}(-2,0)=-\frac{16}{15}<0$$

且 $z''_{xx}(-2,0)=\frac{4}{15}>$，$(-2,0)$ 点是极小值点；

在 $\left(\frac{16}{7},0\right)$ 点

$$\left[z''_{xy}\left(\frac{16}{7},0\right)\right]^2 - z''_{xx}\left(\frac{16}{7},0\right)z''_{yy}\left(\frac{16}{7},0\right) = -\frac{16}{15} < 0$$

且 $z''_{xx}\left(\frac{16}{7},0\right) = -\frac{4}{15} < 0$， $\left(\frac{16}{7},0\right)$点是极大值点.