Review

- $S: x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v), (u,v) \in D$,

  简记为$\mathrm{r} = \mathrm{r}(u,v), (u,v) \in D$. 则曲面面积为

$$\iint_D \|\mathrm{r}_u' \times \mathrm{r}_v'\| \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

- $S: z = f(x,y), (x,y) \in D$,曲面面积为

$$\iint_D \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

- 微元法

§1. 第一型曲线积分

1. 光滑曲线

Def. 点(x,y,z)在曲线L上变化时,若L的单位切向量$\vec{\tau}(x,y,z)$与$-\vec{\tau}(x,y,z)$都连续变化,则称L为光滑曲线.

光滑曲线的定义：参数方程为C^1函数。

Remark. $L: x=x(t), y=y(t), z=z(t), t\in[\alpha,\beta]$,则

L为光滑曲线 $\Leftrightarrow x(t),y(t),z(t)\in C^1([\alpha,\beta])$.

(导函数连续，即变化率也连续变化。)

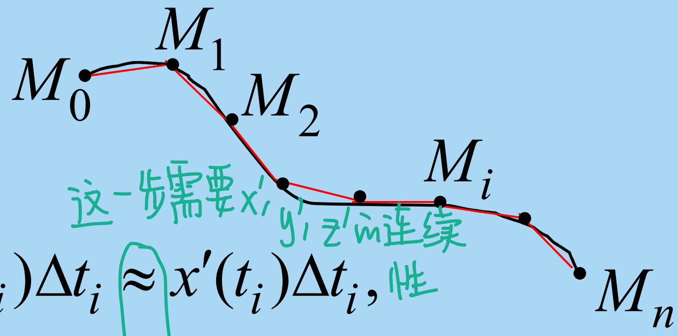
2. 曲线的弧长

$(x(t_i), y(t_i), z(t_i))$ $(x(t_{i+1})\ y(t_{i+1})\ z(t_{i+1}))$

光滑曲线 $L: r(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big), t \in [\alpha, \beta]$

• 分划 $\Delta: \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta, M_i = r(t_i), 0 \le i \le n.$

• 求弧长 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$:



这一步需要 x', y', z' 的连续性

$$x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\xi_i)\Delta t_i \approx x'(t_i)\Delta t_i,$$

$$y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(\eta_i)\Delta t_i \approx y'(t_i)\Delta t_i$$

$$z(t_i) - z(t_{i-1}) = z'(\lambda_i)\Delta t_i \approx z'(t_i)\Delta t_i,$$

$$\widehat{M_{i-1}M_i} \approx \left\| \mathrm{r}(t_i) - \mathrm{r}(t_{i-1}) \right\|$$

$$\approx \sqrt{x'(t_i)^2 + y'(t_i)^2 + z'(t_i)^2}\,\Delta t_i$$

•求和、求极限 $dl = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,dt.$

$$弧长 l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_{\alpha}^{\beta} \left\| r'(t) \right\| \mathrm{d}t$$

路程相对时间の变化率

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} = \left\| \mathrm{r}'(t) \right\|$$ 速率

Remark. 物理解释：路程对时间的变化率等于速率.

3. 第一型曲线积分的物理背景及定义

设空间曲线L上点(x,y,z)处的密度为$\mu(x,y,z)$，欲求曲线L的质量.

- Step1.分划：将曲线L分成若干小段$L_1, L_2, \cdots, L_n$，用$\Delta l_i (i=1,2,\cdots,n)$表示$L_i$的长度.
- Step2.取标志点：在L_i上取点$P_i(\xi_i, \eta_i, \gamma_i)$.
- Step3.近似求和：L的质量$m(L) \approx \sum_{i=1}^{n} \mu(P_i)\cdot\Delta l_i$.
- Step4.取极限：$\lim\limits_{\max\{\Delta l_i\}\to 0} \sum_{i=1}^{n} \mu(P_i)\cdot\Delta l_i = m(L)$.

Def. 设曲线L长度有限, $f(x,y,z)$是定义在L上的函数. 将L分成若干段$L_1, L_2, \cdots, L_n$, 用$\Delta l_i (i=1,2,\cdots,n)$表示$L_i$的长度, 在$L_i$上任取点$P_i(\xi_i, \eta_i, \gamma_i)(i=1,2,\cdots,n)$, 构造积分和$\sum_{i=1}^n f(P_i)\Delta l_i$. 若极限

$$\lim_{\max\{\Delta l_i\}\to 0} \sum_{i=1}^n f(P_i)\Delta l_i$$

存在, 则称该极限为函数 f 在曲线 L 上的(第一型)曲线积分, 记作$\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}l$. L为封闭曲线时记作$\oint_L f(x,y,z)\mathrm{d}l$.

直线 ⇒ 曲线.

平面 ⇒ 曲面

Remark: 极限 $\lim_{\max\{\Delta l_i\}\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta l_i$ 与对曲线L的分割无关, 与P_i的选取也无关.

Remark: $\int_L \mathrm{d}l$ 表示曲线 L 的长度.

4.第一型曲线积分$\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}l$的计算

设曲线L有参数方程：

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), \quad (\alpha \le t \le \beta),$$

其中$x(t), y(t), z(t) \in C^1([\alpha, \beta])$.

是对t作划分!

•Step1.分划：$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$, 对应地,曲线

L被分成若干个弧段$L_1, L_2, \cdots, L_n$.

•Step2.取点：在L_i上取点$P_i = (x(t_i), y(t_i), z(t_i))$.

•Step3.近似和：L_i的长度为

$$\Delta l_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$\approx \sqrt{x'(t_i)^2 + y'(t_i)^2 + z'(t_i)^2} \cdot \Delta t_i.$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot \Delta l_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot \sqrt{x'(t_i)^2 + y'(t_i)^2 + z'(t_i)^2} \cdot \Delta t_i$$

•Step4.取极限：$\boxed{\max\limits_{1\le i\le n} \Delta t_i} \to 0$时，$\max\limits_{1\le i\le n} \Delta l_i \to 0$，于是

$$\int_L f\mathrm{d}l = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

转换成一元定积分计算公式

清華大學

5.第一型曲线积分的性质

(1)(积分存在的充分条件)设

•L为光滑曲线, 即L的参数方程为

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t)(\alpha \le t \le \beta),$$

且①$x(t), y(t), z(t) \in C^1([\alpha, \beta]),$ 曲线光滑

被积函数连续.

•② $f(x, y, z)$是曲线L上的连续函数.即关于t的一元函数

$$f(x(t), y(t), z(t)) \in C([\alpha, \beta]),$$

则第一型曲线积分$\int_L f\mathrm{d}l$存在.

都是有限曲线

(2)(线性性质)设$\int_L f\mathrm{d}l$和$\int_L g\mathrm{d}l$存在,则$\forall$实数α,β,积分$\int_L(\alpha f+\beta g)\mathrm{d}l$存在,且

$$\int_L(\alpha f+\beta g)\mathrm{d}l=\alpha\int_L f\mathrm{d}l+\beta\int_L g\mathrm{d}l.$$

(3)(关于积分曲线的可加性)设曲线L由曲线$L_1,L_2,\cdots,L_k$连接而成,则

$$\int_L f\mathrm{d}l=\int_{L_1} f\mathrm{d}l+\int_{L_2} f\mathrm{d}l+\cdots+\int_{L_k} f\mathrm{d}l.$$

(4)(保序性) $f\le g$,则$\int_L f\mathrm{d}l\le\int_L g\mathrm{d}l$.

(5)(积分估值不等式) $\left|\int_L f\mathrm{d}l\right| \le \int_L |f|\mathrm{d}l.$

(6)(轮换不变性)　若$\boxed{\text{曲线 } L}$关于 x, y 有轮换对称性，即$(x,y,z)\in L \Leftrightarrow (y,x,z)\in L$,则

$$\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}l = \int_L f(y,x,z)\mathrm{d}l.$$

曲线由隐函数给出
首先转化为参数方程。

例: $I=\int_L (x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}})\mathrm{d}l,\ L: x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\ (a>0).$

解: L的参数方程为 $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t,\ t\in[0,2\pi]$.

代入时对$\forall t$, L曲线方程都成立
$\therefore t$可以取遍$[0,2\pi]$

$$\mathrm{d}l=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=\sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2+(3a\sin^2 t\cos t)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=3a\,|\sin t\cos t|\,\mathrm{d}t$$

$$I=\int_0^{2\pi}[(a\cos^3 t)^{\frac{4}{3}}+(a\sin^3 t)^{\frac{4}{3}})]\cdot\frac{3a}{2}|\sin 2t|\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{3}{2}a^{\frac{7}{3}}\int_0^{2\pi}(\cos^4 t+\sin^4 t)|\sin 2t|\,\mathrm{d}t=4a^{\frac{7}{3}}.\ \square$$

清华大学

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\cdot 2\cdot\sin t\cdot\cos t\,dt = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^5 t\,d\cos t=\frac{2}{6}\cos^6 t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0}=\frac{1}{3}$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cdot 2\sin t\,d\sin t=\frac{1}{3}$

$-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{1}{3}\cos^6 t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{1}{3}$ $\quad\frac{1}{3}\sin^6 t\Big|_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{3}$

$\frac{8}{3}\times\frac{3}{2}$

$\int_0^{2\pi} \cos^4 t + \sin^4 t \ |\sin 2t|\, dt$

$= 2\int_0^{\pi} \sin^4 t\, |\sin 2t|\, dt$ 因为 $\sin^4 t$ 是 $T=\pi$ 的周期函数

$$\int_0^{2\pi} \sin^4 t\,|\sin 2t|\, dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \sin 2t\, dt - 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^4 t \sin 2t\, dt$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 t\, d\sin t - 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^5 t\, d\sin t$$

$$= 4\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^4 t\,|\sin 2t|\, dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \sin 2t\, dt - 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^4 t \sin 2t\, dt$$

$$= -4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 t\, d\cos t + 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^5 t\, d\cos t$$

$$= -4\int_1^0 x^5\, dx + 4\int_0^{-1} x^5\, dx$$

$$= -4\cdot\frac{x^6}{6}\Big|_1^0 + 4\cdot\frac{x^6}{6}\Big|_0^{-1} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

下题：$x^2+xy+y^2 = (x+\frac{y}{2})^2 - \frac{y^2}{4} + y^2 = (x+\frac{y}{2})^2 + \frac{3}{4}y^2$.

或 $x^2+xy+y^2 = (y+\frac{x}{2})^2 + \frac{3}{4}x^2$. 哪种都可以！

$$\frac{3}{4}x^2 + \left(\frac{x}{2}+y\right)^2 = \frac{R^2}{2} \Rightarrow \frac{3}{2}x^2 + 2\left(\frac{x}{2}+y\right)^2 = R^2$$

$\downarrow$

$$x = \sqrt{\frac{2}{3}}\cos t$$

$$y = \frac{\sin t}{\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{1}{6}}\cos t.$$

$$z = -x-y = -\frac{\sin t}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{6}}\cos t + \frac{1}{\sqrt{6}}\cos t$$

$$= \frac{\sin t}{-\sqrt{2}} - \frac{\cos t}{\sqrt{6}}.$$

我们学习过从曲面法向量叉积表示节，但这个算法从未出现

例：$I=\oint_L x^2\mathrm{d}l$，其中L为$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2, & \text{球} \\ x+y+z=0. & \text{过0平面} \end{cases}$

解法一：将$z=-x-y$代入$x^2+y^2+z^2=R^2$，有

$\boxed{x^2+xy+y^2=R^2/2}$，即$\left(\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)^2+\left(\dfrac{x}{2}+y\right)^2=\left(\dfrac{R}{\sqrt{2}}\right)^2$.

标准二次型

前面系数为1，全是齐次平方项.

用正交变换把二次型换成标准型。

即$L:\begin{cases} x=\sqrt{2/3}R\cos t, \\ y=\sqrt{1/2}R\sin t-\sqrt{1/6}R\cos t, \\ z=-\sqrt{1/2}R\sin t-\sqrt{1/6}R\cos t, \end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$.

$\begin{cases} x \\ y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=\frac{\sqrt{3}}{2}x=\frac{R}{\sqrt{2}}\cos\theta \\ v=\frac{x}{2}+y=\frac{R}{\sqrt{2}}\sin\theta \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{R\cos\theta}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} \\ y=\frac{R}{\sqrt{2}}\sin\theta-\frac{R\cos\theta}{\sqrt{6}} \end{cases}$

为什么是R呢　$\mathrm{d}l=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,\mathrm{d}t=R\mathrm{d}t$.

是巧合吗？

$$I=\oint_L x^2\mathrm{d}l=\int_0^{2\pi}\frac{2}{3}R^2\cos^2 t\cdot R\mathrm{d}t=\frac{2}{3}\pi R^3.\square$$

$\frac{2}{3}R^2\cos^2t\cdot R\mathrm{d}t.$

清华大学

代入 $z=-x-y$ 得

$x^2+y^2+(x+y)^2=R^2 \Rightarrow x^2+y^2+xy=\frac{R^2}{2} \Rightarrow \frac{3}{4}x^2+(y+\frac{x}{2})^2=\frac{R^2}{2}$.

$\Rightarrow x=\frac{\cancel{2}\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{R}{\cancel{\sqrt{2}}}\cos\theta = \sqrt{\frac{2}{3}}R\cos\theta$.

$y+\frac{x}{2}=\frac{R}{\sqrt{2}}\sin\theta$. $y=\frac{R}{\sqrt{2}}\sin\theta-\sqrt{\frac{1}{6}}R\cos\theta$.

$x'_\theta=-\sqrt{\frac{2}{3}}R\sin\theta$, $y'_\theta=\frac{R}{\sqrt{2}}\cos\theta+\sqrt{\frac{1}{6}}R\sin\theta$, $z'_\theta=\sqrt{\frac{2}{3}}R\sin\theta-\frac{R}{\sqrt{2}}\cos\theta-\sqrt{\frac{1}{6}}R\sin\theta$.

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{2}{3}R^3\cos^2\theta\,d\theta=\frac{2}{3}R^3\cdot\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}1+\cos2\theta\,d\theta$$

$$=\frac{R^3}{3}\cdot2\pi+\frac{R^3}{6}\int_0^{2\pi}\cos2\theta\,d2\theta. =\frac{2\pi R^3}{3}$$

解法2. 积分曲线关于 x,y,z 对称

$$I=\frac{1}{3}\oint x^2+y^2+z^2\,dl$$

$$=\frac{1}{3}\oint R^2\,dl \qquad \oint dl=\text{曲线长度}=2\pi R.$$

$$=\frac{R^2}{3}\cdot2\pi R=\frac{2\pi R^3}{3}$$

x,y,z 都对称

例: $I=\oint_L x^2 \mathrm{d}l$, 其中 L 为 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2, \\ x+y+z=0. \end{cases}$

解法二: 利用轮换不变性.

$$I=\oint_L x^2\mathrm{d}l=\oint_L y^2\mathrm{d}l=\oint_L z^2\mathrm{d}l$$

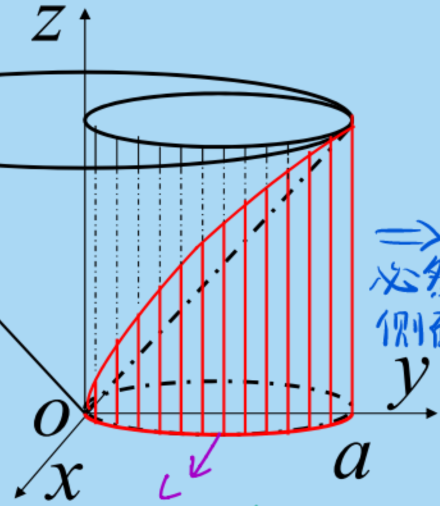
$$=\frac{1}{3}\oint_L (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}l$$

$$=\frac{R^2}{3}\oint_L \mathrm{d}l=\frac{2\pi R^3}{3}. \square$$

$\frac{R^2}{3}\cdot 2\pi R$

this is L in 周长.

例: 求圆柱面$x^2+y^2=ay$界于锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$和平面$z=0$之间部分S的面积.



⟹这个面积必然不是±侧面积

解: 记$L:\begin{cases}x^2+y^2=ay\\ z=0\end{cases}$,

由微元法得

$$\sigma(S)=\oint_L\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}l$$

L的参数方程为: 曲线积分都要写成参数方程形式。

$$x=\frac{a}{2}\cos t,\ y=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\sin t,\ t\in[0,2\pi].$$

清華大學

法① 曲线积分

把曲面的高作为被积函数

$$\ell: x^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4} \Rightarrow \text{令}\begin{cases} x=\frac{a}{2}\cos t \\ y=\frac{a}{2}\sin t+\frac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow d\ell=\frac{a}{2}dt. \quad x^2+y^2=\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{2}\sin t+\frac{a^2}{4}$$

$$\sigma=\oint_\ell \sqrt{x^2+y^2}\,d\ell=\frac{a}{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}\sin t}\,dt=\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{\sqrt2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\sin t}\,dt=\frac{a^2}{\cancel{2}\sqrt2}\int_0^{2\pi}\sqrt{\sin^2\frac{t}{2}+\cos^2\frac{t}{2}+2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}\,d\frac{t}{2}$$

$$=\frac{a^2}{\sqrt2}\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{t}{2}+\cos\frac{t}{2}\right|d\frac{t}{2} = \frac{a^2}{\cancel{\sqrt2}}\int_0^{\pi}\cancel{\sqrt2}\left|\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right|dt = a^2\int_0^{\frac{3}{4}\pi}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)dt-a^2\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)dt$$

$$=\left[-\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\frac{3}{4}\pi}+\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\Big|_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}\right]a^2$$

$$=-\left(-1-\frac{\sqrt2}{2}\right)a^2+\left(-\frac{\sqrt2}{2}+1\right)a^2$$

$$=a^2\left(1+\frac{\sqrt2}{2}-\frac{\sqrt2}{2}+1\right)=2a^2$$

法② 曲面积分

别搞混二重积分的换元 $\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|$

和曲面积分的参数化 $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$

$$\sigma(D)=\iint_S dS$$

$$\text{参数化}\begin{cases} x=\frac{a}{2}\cos\theta \\ y=\frac{a}{2}\sin\theta+\frac{a}{2} \\ z=z. \end{cases}$$

$r'_\theta=\left(-\frac{a}{2}\sin\theta,\ \frac{a}{2}\cos\theta,\ 0\right)$. $\quad r'_\theta\times r'_z=\left(\frac{a}{2}\cos\theta,\ \frac{a}{2}\sin\theta,\ 0\right)$.

$r'_z=(0,0,1)$. $\quad \|r'_\theta\times r'_z\|=\frac{a}{2}$.

本质上是柱坐标

$$S=\left\{(\theta,z)\ \middle|\ \theta\in[0,2\pi),\ 0\le z\le\frac{a}{\sqrt2}\sqrt{1+\sin\theta}\right\}.$$

$$\therefore \sigma(D)=\frac{a}{2}\iint_{S_{\theta,z}}d\theta\,dz=\frac{a}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{a}{\sqrt2}\sqrt{1+\sin\theta}}dz=\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{\sqrt2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\sin\theta}\,d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2\cancel{\sqrt2}}\cdot\cancel{\sqrt2}\int_0^{2\pi}\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|d\theta=a^2\int_0^{2\pi}\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|d\frac{\theta}{2}=a^2\int_0^{\pi}\left|\sin\left(y+\frac{\pi}{4}\right)\right|dy=a^2\int_0^{\frac{3}{4}\pi}\sin\left(y+\frac{\pi}{4}\right)dy$$

$$-a^2\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}\sin\left(y+\frac{\pi}{4}\right)dy=-a^2\left(-1-\frac{\sqrt2}{2}\right)+a^2\left(-\frac{\sqrt2}{2}+1\right)=a^2\left(-\frac{\sqrt2}{2}+1+1+\frac{\sqrt2}{2}\right)=2a^2.$$

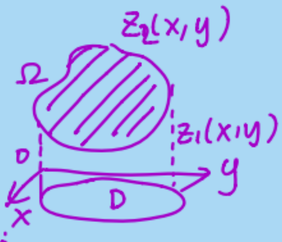
于是

被积函数代入 $x(t), y(t)$；$dl = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$

$$\sigma(S) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{a}{2}\cos t\right)^2 + \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sin t\right)^2} \cdot \frac{a}{2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a^2}{2\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin t}\,\mathrm{d}t$$

$$= 2a^2. \square$$



三重积分：

$$\iint_D dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz.$$

作业：习题4.2 No.3-7