第五周习题课　　曲面，曲线, Taylor 公式，无条件极值

例 1.　求曲面 $S: 2x^2-2y^2+2z=1$ 上切平面与直线 $L:\begin{cases}3x-2y-z=5\\ x+y+z=0\end{cases}$ 平行的切点的轨迹。

例 2.　证明球面 $S_1: x^2+y^2+z^2=R^2$ 与锥面 $S_2: x^2+y^2=a^2z^2$ 正交.

例 3.　通过曲面 $S: e^{xyz}+x-y+z=3$ 上点 $(1, 0, 1)$ 的切平面（　　）

（A）通过 y 轴；　　（B）平行于 y 轴；

（C）垂直于 y 轴；　　（D）A，B，C 都不对.

例 4.　S 由方程 $ax+by+cz=G\left(x^2+y^2+z^2\right)$ 确定，试证明：曲面 S 上任一点的法线与某定直线相交。

例 5.　在椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 上求一点，使椭球面在此点的法线与三个坐标轴的正向成等角。

6.

求螺线 $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=a\sin t\\ z=ct\end{cases}$；$(a>0, c>0)$，在点 $M(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{\pi c}{4})$ 处的切线与法平面.

二．Taylor 公式

例 1 函数 x^y 在 $x=1, y=0$ 点的二阶 Taylor 多项式为 ____________________。

例 2 函数 $f(x,y)=\dfrac{\cos x}{y+1}$ 在点 $(0,0)$ 的带 Lagrange 余项的 Taylor 展开式为

____。

例 3 二元函数 $\sin(xy)$ 在点 $(1,1)$ 处的二阶 Taylor 多项式为____________________。

例 4 $x+y+z+xyz^3=0$ 在点 $(0,0,0)$ 邻域内确定隐函数 $z=z(x,y)$．求 $z(x,y)$ 在原点的带 Peano 余项的二阶 Taylor 公式.

三．极值

例 5 设可微函数 f(x, y)在($x_{0,}y_0$)取得极小值，则下列结论正确的是？

（A） $f(x_0, y)$在$y = y_0$处导数大于零;(B) $f(x_0, y)$在$y = y_0$处导数等于零;

(C) $f(x_0, y)$在$y = y_0$处导数小于零;(D) $f(x_0, y)$在$y = y_0$处导数不存在.

例 6 已知函数 f(x, y)在（0， 0）某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y) - xy}{(x^2 + y^2)^2} = 1$，则

(A)点(0, 0)不是 f(x, y)的极值点；(B)点(0, 0)是 f(x, y)的极大值点；
(C)点(0, 0)是 f(x, y)的极小值点；(D)根据所给条件无法判断(0, 0)是否 f(x, y)的极值点；

例 7 函数 $z(x,y)$在有界闭区域 D 上连续，在 D 内部偏导数存在, $z(x,y)$在 D 的边界上的值为零，在 D 内部满足 $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = f(z)$，其中 f 是严格单调函数，且 $f(0) = 0$，

证明 $z(x,y) \equiv 0$， $((x,y) \in D)$.

例 8 求函数 $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$ 的极值.

例 9 （隐函数的极值）设 $z = z(x,y)$ 由 $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$ 确定，求该函数的极值.