

习题课 函数项级数

二. 函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots$$

(1) 收敛域

- 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 是定义在 D 上的一个函数项级数, $x_0 \in D$, 若数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛,

则称 x_0 是 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的一个**收敛点**。所有收敛点构成的集合称为级数的**收敛域**。

(2) 和函数的概念

- 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域为 I , 则任给 $x \in I$, 存在惟一的实数 $S(x)$, 使得

$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 成立。定义在 I 上的函数 $S(x)$ 称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的**和函数**。

1. 讨论下列级数的收敛域

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n^2} : D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid |x - k\pi| \leq \frac{\pi}{6}, k = 0, \pm 1, \cdots \right\};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2} : D = (-\infty, +\infty)$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{200}} x^n : D = \{0\};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} n! e^{nx} : D = \emptyset$$

(3) 幂级数及其收敛半径、收敛区间（指开区间）和收敛域

幂级数: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$

- 若 $R \geq 0$ 满足:

(1) 当 $|x| < R$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛; (2) 当 $|x| > R$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散,

则称 R 为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径, 开区间 $(-R, R)$ 称为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛区间。

● **收敛域:** 考虑 $x = \pm R$ 两个端点的收敛性

● 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的系数 a_n 满足 $a_n \neq 0$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$, 则其收敛半径为 $R = \frac{1}{\rho}$ 。

● 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的系数 a_n 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$, 则其收敛半径为 $R = \frac{1}{\rho}$ 。

2. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+2)} (x-a)^n$ 在点 $x_1 = -2$ 条件收敛, 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^2} (x-a)^n$

在点 $x_1 = \frac{1}{2}$ 的收敛情况是 [] [C]

(A) 绝对收敛. (B) 条件收敛. (C) 发散. (D) 不能确定.

3. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n}$ 在 $x = 2$ 收敛, 则实参数 a 的取值范围是_____。

解: 显然 $R = 1$, 且收敛域为 $a - 1 \leq x < a + 1$,

级数在 $x = 2$ 收敛, 则有 $a - 1 \leq 2 < a + 1$, 因此应有 $1 < a \leq 3$ 。

4. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x = -1$ 处条件收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ []

(A) 绝对收敛, (B) 条件收敛, (C) 发散, (D) 不定。 [A]

5. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 1, 记级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 1)x^n$ 的收敛

半径为 r , 则必有 [].

(A) $r = 1$. (B) $r \leq 1$. (C) $r \geq 1$. (D) r 不能确定.

$a_n = \frac{1}{n!} - 1$, $a_n + 1 = \frac{1}{n!}$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 1)x^n$ 的收敛半径 $r = +\infty$ 。 (C)

6. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n + (-3)^n} x^{2n}$ 的收敛域为_____。

7. 已知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域为 $[-8, 8]$, 则 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n(n-1)}$ 的收敛半径 R 为 [].

(A) $R \geq 8$. (B) $R \leq 8$. (C) $R = 8$. (D) 不定.

[C] (收敛的幂级数及其导数和积分有相同的收敛半径)

8. Lebnize 判别法用于收敛域的判断

求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x}{2x+1} \right)^n$ 的收敛域.

(4) 幂级数的和函数

9. 常数项级数的和 (分拆法)

求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ 的和

10. 求 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ 的和函数.

11. 求 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$ 的和函数.

12. 设 $f_n(x)$ 满足 $f'_n(x) = f_n(x) + x^{n-1}e^x$ (n 为正整数),

且 $f_n(1) = \frac{e}{n}$, 求函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 之和. (2001-3-8)

13. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$ 的和. 答案: 3

14. 设参数 $a > 1$, 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a^n}$ 的和.

15. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n!}$ 的和为 []

(A) $2e^{-1}$. (B) 0. (C) e^{-1} (D) $e^{-1} - 1$. [B]

(5) 幂级数在其收敛区间内的基本性质

● 两级数和的收敛半径: 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R_1 , $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径为

R_2 , 一般情况下, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ 的收敛半径为 $R = \min\{R_1, R_2\}$, 且

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad x \in (-R, R).$$

- **和函数的连续性：** 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域 I 上连续，

即任给 $x_0 \in I$ ，有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} a_n x^n \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = S(x_0)$$

- **和函数的可积性与逐项积分性质**

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域 I 上可积，且可逐项积分，即任给 $x \in I$ ，有

$$\int_0^x S(t) dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x a_n t^n dt \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

若记 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R ， $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 的收敛半径为 R_1 ，则 $R \leq R_1$ 。且逐项积分后的

的幂级数收敛域不会变小。

- **和函数的可导性与逐项求导公式：** 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛区间

$(-R, R)$ 内可导，且可逐项求导，即任给 $x \in (-R, R)$ ，有

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

16. 已知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域为 $[-8, 8]$ ，则 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n(n-1)}$

的收敛半径 R 为 []。

(A) $R \geq 8$. (B) $R \leq 8$. (C) $R = 8$. (D) 不定.

[C] (收敛的幂级数及其导数和积分有相同的收敛半径)

(6) 初等幂级数展开式

- **直接展开法**

直接展开法指的是：利用泰勒级数的定义及泰勒级数收敛的充要条件，将函数在某个区间上直接展开成指定点的泰勒级数的方法。

由直接展开法易知函数 $e^x, \cos x, \sin x, \ln(1+x), (1+x)^\alpha$ 的麦克劳林级数展开式为:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \quad x \in (-1, 1],$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n,$$

其中, 当 $\alpha \leq -1$ 时, $x \in (-1, 1)$; 当 $-1 < \alpha < 0$ 时, $x \in (-1, 1]$; 当 $\alpha > 0$ 时, $x \in [-1, 1]$ 。

特别地, 当 $\alpha = -1$ 时, 有 $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad x \in (-1, 1)$ 。

● 间接展开法

间接展开法指的是: 通过一定运算将函数转化为其他函数, 进而利用新函数的幂级数展开将原来函数展开为幂级数的方法。所用的运算主要是加法运算, 数乘运算, (逐项) 积分运算和 (逐项) 求导运算。利用的幂级数展开公式主要是一些简单函数的麦克劳林展开公式, 上述几个简单函数就是常用的几个。间接展开法是将函数展开成幂级数的主要方法。

17. 设 $f(x)$ 的 Maclaurin 级数为 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^n$,

又 $g(x) = \frac{xf(x)}{1+x}$, 求 $g(x)$ 的 Maclaurin 级数。

18. 求函数 $f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2}$ 在 $x=1$ 处的幂级数, 并求收敛域。

19. 设 $f(x) = \frac{x}{1+x^3}$, 则 $f^{(100)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

20. 求函数 $f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2}$ 在 $x=1$ 处的幂级数, 并求收敛域。

21. 将函数 $f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2}$ 在 $x=1$ 处展成幂级数，并求收敛区间。

22. 函数 $f(x) = xe^x$ 在 $x=1$ 处的幂级数展开式为 $e \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} \right) (x-1)^n \right]$ 。

23. 将 $f(x) = \arctan \frac{2x}{1-x^2}$ 展开为 x 的幂级数。