赵晨阳 软01 2020012363

1. $\frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x}=\int_a^b x\cdot e^{-tx^2}dt$ 原式 $=\int_0^{+\infty}dx\int_a^b x\cdot e^{-tx^2}dt$.

不妨设 $a<b$, 则 $f(t,x)=x\cdot e^{-tx^2}$ 在 $[a,b]\times[0,+\infty)$ 上连续. $|x\cdot e^{-tx^2}|\le x\cdot e^{-ax^2}$. 而 $\int_0^{+\infty}x\cdot e^{-ax^2}dx$ 收敛. 故 $\int_0^{+\infty}f(t,x)dx$ 关于 $t\in[a,b]$ 一致收敛. 故广义含参积分可交换积分顺序

$\int_0^{+\infty}x\cdot e^{-tx^2}dx=\frac{-1}{-2t}\int_0^{+\infty}-2tx\cdot e^{-tx^2}dx=-\frac{1}{2t}e^{-tx^2}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{2t}$

故原式 $=\int_a^b dt\int_0^{+\infty}x\cdot e^{-tx^2}dx=\int_a^b\frac{1}{2t}dt=\frac{1}{2}\ln t\Big|_a^b=\frac{1}{2}\ln(\frac{b}{a})$

2. 设 $I=\int_0^{+\infty}x\cdot e^{-ax^2}\cdot\sin yx\,dx\ (a>0)=-\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty}\sin yx\,de^{-ax^2}$

$=-\frac{1}{2a}e^{-ax^2}\sin yx\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\cdot y\cdot\cos yx\,dx=\frac{y}{2a}\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\cdot\cos yx\,dx$

设 $J(y)=\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\cos yx\,dx$. 设积分由一元函数 Dirichlet 判别法可知关于y逐点收敛

故 $I=\frac{y}{2a}J(y)$. 设 $f(x,y)=e^{-ax^2}\cdot\cos yx$. $f'_y(x,y)=-e^{-ax^2}\cdot\sin yx\cdot x$ $f(x,y)$ 与 $f'_y(x,y)$ 在 $[0,+\infty)\times R$ 上

连续: $|-x\sin yx\cdot e^{-ax^2}|\le x\cdot e^{-ax^2}$ 而 $\int_0^{+\infty}x\cdot e^{-ax^2}dx$ 关于y一致收敛

$\therefore J'(y)=\int_0^{+\infty}-x\sin yx\cdot e^{-ax^2}dx=-I$ $\therefore I=\frac{y}{2a}J(y)=-J'(y)$

$\therefore J=\frac{-2a}{y}J'$ $\frac{dJ}{J}=\frac{y}{-2a}dy$ $\therefore \ln|J|=\frac{y^2}{-4a}+C$ $\therefore J(y)=e^{-\frac{y^2}{4a}}\cdot C$

而 $J(0)=\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}dx$ 令 $t=\sqrt{a}x$. 则 $J(0)=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}d\sqrt{a}x=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}$

而 $J(0)=e^0\cdot C$ $\therefore C=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}$ $\therefore J(y)=e^{-\frac{y^2}{4a}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}$

$\therefore I=\frac{y}{2a}J(y)=\frac{\sqrt{\pi}y}{4a\sqrt{a}}\cdot e^{-\frac{y^2}{4a}}$

(3) $\int_a^b\frac{\sin tx}{x}dt=\frac{\cos tx}{-x^2}\Big|_{t=a}^{b}=\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}$ 原式: $I=\int_0^{+\infty}dx\int_a^b\frac{\sin tx}{x}dt$

$=\int_a^b dt\int_0^{+\infty}\frac{\sin tx}{x}dx$ 又 $\because t\in[a,b]$, 故 $t>0$ $\int_0^{+\infty}\frac{\sin tx}{x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin tx}{tx}dtx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$

$\therefore I=\int_a^b\frac{\pi}{2}dt=\frac{\pi}{2}(b-a)$

下证积分可交换顺序 $\lim_{x\to0}\frac{\sin tx}{x}=0$ 令 $f(t,x)=\begin{cases}\frac{\sin tx}{x} & (x\ne0)\\ t & (x=0)\end{cases}$ 不妨设 $0<a<b$

则 $f(t,x)$ 在 $[a,b]\times[0,+\infty)$ 上连续

而 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin tx}{x}dx=\frac{\pi}{2}$. $t\in[a,b]$ 时, $\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上关于t单调一致趋于0

$\left|\int_0^A\sin tx\,dx\right|=\left|\frac{-\cos tx}{t}\right|_0^A$ 当取 $R=1$, $M=\frac{2}{a}$. 则 $\forall A>R$. 该积分 $<M$.

故 $\int_0^A\sin tx\,dx$ 关于 $t\in[a,b]$ 与充分大的A一致有界

故积分可交换顺序

2.(1) 设 $I_{2n}(t)=\int_0^{+\infty} e^{-tx^2}x^{2n}dx \ (t>0) = \frac{x^{2n+1}}{2n+1}e^{-tx^2}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}de^{-tx^2}$

$= \int_0^{+\infty}\frac{2tx}{2n+1}x^{2n+1}e^{-tx^2}dx = \frac{2t}{2n+1}\int_0^{+\infty}x^{2n+2}e^{-tx^2}dx = \frac{2t}{2n+1}I_{2n+2}(t)$

∴ $I_{2n}(t)=\frac{2n-1}{2t}I_{2n-2}(t)$ 而 $I_0(t)=\int_0^{+\infty}e^{-tx^2}dx$

由1.(2)可知 $I_0(t)=\int_0^{+\infty}e^{-tx^2}dx$ 令 $a=\sqrt{t}x$，则

$I_0(t)=\frac{1}{\sqrt t}\int_0^{+\infty}e^{-tx^2}d\sqrt{t}x = \frac{1}{\sqrt t}\int_0^{+\infty}e^{-a^2}da=\frac{\sqrt\pi}{2\sqrt t}$

∴ $I_{2n}(t)=\frac{2n-1}{2t}\cdot\frac{2n-3}{2t}\cdots\frac{1}{2t}I_0(t)=\frac{(2n-1)!!}{2^n t^n}\cdot\frac{\sqrt\pi}{2\sqrt t}$

2.(2) 令 $I_{n+1}=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(y+x^2)^{n+1}}\ (y>0)$ 设 $f(x,y)=\frac{1}{(y+x^2)^{n+1}}$ $f'_y(x,y)=\frac{-(n+1)}{(y+x^2)^{n+2}}$ 而 $\int_0^{+\infty}\frac{-(n+1)}{(y+x^2)^{n+2}}dx$

$=-(n+1)\left[\int_0^1\frac{dx}{(y+x^2)^{n+2}}+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(y+x^2)^{n+2}}\right]$ $\forall y_0>0, (x,y)\in[0,+\infty)\times[y_0,+\infty)$ 时 $\int_0^1\frac{dx}{(y+x^2)^{n+2}}$ 无瑕点

又∵ $x\in[1,+\infty)$ 时 $\left|\frac{1}{(y+x^2)^{n+2}}\right|\le\frac{1}{x^{2n+4}}$, $y>0$. 且 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{2n+4}}$ 收敛，故 $\int_1^{+\infty}f_y(x,y)dx$ 关于y一致收敛

故 $\int_0^{+\infty}f_y(x,y)dx$ 关于y一致收敛

而 $f(x,y)$, $f'_y(x,y)$ 在 $[0,+\infty)\times[y_0,+\infty)$ 上连续 ∴ $I'_{n+1}(y)=\int_0^{+\infty}\frac{-(n+1)}{(y+x^2)^{n+2}}dx=-(n+1)I_{n+2}$

即 $I'_n(y)=-nI_{n+1}$

而 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{y+x^2}=\frac{1}{\sqrt y}\int_0^{+\infty}\frac{d(\frac{x}{\sqrt y})}{1+(\frac{x}{\sqrt y})^2}=\frac{1}{\sqrt y}\arctan\frac{x}{\sqrt y}\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2\sqrt y}$ 对 I_1 求n次导有:

$I_1'(y)=-1\cdot I_2$ $I_1''(y)=(-1)\cdot(-2)\cdot I_3$ …… $I_1^{(n)}=(-1)^n\cdot n!\cdot I_{n+1}(y)$

又 $I_1(y)=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt y}$ $I_1^{(n)}(y)=(-\frac12)\cdot(-\frac32)\cdots(-\frac{2n-1}{2})\cdot\frac{\pi}{2}\cdot y^{-(n+\frac12)}=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{2}\cdot(2n-1)!!\cdot\frac{1}{2^n}\cdot y^{-(n+\frac12)}$

∴ $(-1)^n n!\cdot I_{n+1}(y)=(-1)^n(2n-1)!!\cdot\frac{\pi}{2}\cdot y^{-(n+\frac12)}\cdot(\frac12)^n$

∴ $I_{n+1}(y)=\frac{(2n-1)!!}{n!}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot y^{-(n+\frac12)}\cdot(\frac12)^n$

$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)!!}{2n!!}y^{-(n+\frac12)}$