第十次习题课 曲线曲面积分 2

一．曲线曲面积分续。

1．记L^+为圆周$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ y=x\tan\alpha \quad \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$，从 0x 轴的正向看去，圆周的正向为逆时针方向。写出L^+的参数方程，并利用这个参数方程来计算线积分

$$I=\oint_{L^+}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz \text{。}$$

2．求积分 $I=\iint_{\Sigma} f(x)dy\wedge dz+g(y)dz\wedge dx+h(z)dx\wedge dy$，其中$\Sigma$为长方体$[0,a]\times[0,b]\times[0,c]$的边界，正法向朝外，函数$f(x)$，$g(y)$和$h(z)$均为连续函数。

3．设S为锥面$z^2=x^2+y^2$位于$0\le z\le \mathrm{h}$的那一部分，正法向向下。设$\mathbf{v}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$为流体运动的速度场。求流体在单位时间里通过定向曲面S由内向外的流量 Q，即求曲面积分$Q=\iint_S \mathrm{v}\cdot d\mathrm{S}$。

4．记S^+为圆柱面$S:x^2+y^2=1$位于$0\le z\le 2$的部分，外法向为正，计算曲面积分$I=\iint_{S^+}x(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

二．Green 定理的应用。

1．(利用 Green 定理证明平面面积变换公式) 回忆平面面积变换定理:
设φ是平面域上的微分同胚，即φ是 1-1 映射且其逆也是连续可微的. 假设开区域D_0及其边界∂D_0均属于φ的定义域。记开区域D_0在映射φ下的象为D_1，即$D_1=\varphi(D_0)$。根据曲面面积公式知D_1的面积公式为$|D_1|=\iint_{D_0}\left|\det\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$，这里$x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$表示映射$\varphi$的两个分量函数。试利用 Green 公式来证明上述面积变换公式。

2．计算线积分$I=\oint_{L^+}\dfrac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$，其中$L^+$为$|x|+|y|=1$，逆时针为正向。

3．设 $D \subseteq R^2$ 为有界开区域，它的边界 ∂D 是逐段光滑曲线，$\vec{n}$ 是 ∂D 的外单位法向量，

设函数 $f(x,y) \in C^1(\overline{D})$，且 $f(x,y)$ 在 D 内为调和函数，即 $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \equiv 0$，

$\forall (x,y) \in D$。求证：

(i) $\displaystyle\oint_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial n} dl = 0$；

(ii) $\displaystyle\oint_{\partial D} f \frac{\partial f}{\partial n} dl = \iint_D |\nabla f|^2 dxdy$；

(iii) 若在边界 ∂D 上，$f(x,y) \equiv 0$，求证 $f(x,y) \equiv 0$，$\forall (x,y) \in D$。

4． 已知函数 $f(x)$ 在整个实轴 R 上二次连续可微，满足 $f'(0) = 0$，且使得微分式

$[f(x) + y(e^x + x - f(x))]dx + f'(x)dy$ 是全微分，求 $f(x)$，并使由 $A(-1,1)$ 到 $B(1,0)$

逐段光滑曲线 L 上积分的值为 $\dfrac{\pi^2}{8}$。

5． 设 $f(x)$ 是实轴上处处为正的连续函数，D 为圆心在原点的单位开圆盘。

证明：(i) $\displaystyle\int_{\partial D^+} xf(y)dy - \frac{y}{f(x)}dx = \int_{\partial D^+} -yf(x)dx + \frac{x}{f(y)}dy$；

(ii) $\displaystyle\int_{\partial D^+} xf(y)dy - \frac{y}{f(x)}dx \ge 2\pi$。