重积分习题课题目

第 1 部分 课堂内容回顾

1. 重积分的概念及其性质

(1) **$\mathbb{R}^n$ 中的坐标平行体上的积分:** $\mathbb{R}^n$ 中的区间或者坐标平行体及其体积, 分割, 步长, 带点分割, Riemann 和, 重积分, Riemann 可积.

(2) **有界集上的函数的 Riemann 积分:** 零延拓成坐标平行体上的函数, 再研究其积分. 有界集 Ω 上所有 Riemann 可积函数的全体记作 $\mathscr{R}(\Omega)$.

(3) **二重积分的几何意义:** 立体的体积.

(4) **Jordan 可测集:** 定义, 典型的 Jordan 可测集.

(5) **典型的 Riemann 可积函数:** 如果有界闭集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为 Jordan 可测集, 则我们有 $\mathscr{C}(\Omega) \subset \mathscr{R}(\Omega)$.

(6) **Jordan 可测集上重积分的性质:** 有界性, 线性, 区域可加性, (严格) 保号性, (严格) 保序性, 绝对值不等式, 积分的上、下界, 积分中值定理及其应用, 变量替换.

2. 重积分的计算

(1) 直角坐标系下二重积分的累次积分法,

(2) 极坐标坐标系下二重积分的累次积分法,

(3) 直角坐标系下三重积分的累次积分法,

(4) 柱坐标系下三重积分的累次积分法,

(5) 球坐标系下三重积分的累次积分法,

(6) 一般坐标变换: 目的在于转化成累次积分,

(7) **对称性在重积分计算当中的应用.**

3. 重积分应用: 质心、重心、形心, 曲面面积.

第 2 部分 习题课题目

§1. 二重积分

1. 设A是实二阶对称矩阵, 我们假设A是正定矩阵, 试确定有界闭区域$\Omega \subset \mathbb{R}^2$, 使得二重积分

$$I = \int_{\Omega} (1 - x^t A x) dx$$

的值取得最大值, 其中$x = (x_1, x_2)^t$是二维列向量, $dx = dx_1 dx_2$.

2. 改变下述累次积分的积分次序:

(1) $\displaystyle\int_0^1 \Big(\int_0^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y \Big) \mathrm{d}x + \int_1^3 \Big(\int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \Big) \mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r \Big)\,\mathrm{d}\theta$.

3. 假设 $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, 而 $f \in \mathscr{C}[-1,1]$, 求证:

$$\iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant 1} f(ax+by)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2} f(\sqrt{a^2+b^2}u)\,\mathrm{d}u.$$

4. 计算 $I = \displaystyle\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \Big(y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \Big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中

$$D = \Big\{ (x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant R^2 \Big\},\ R > 0.$$

5. 对二重积分 $\displaystyle\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 作极坐标变换并且给出极坐标系下不同积分次序的累次积分, 其中 $D = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant x+y \leqslant 1\}$.

6. 将 $\displaystyle\iint\limits_D f(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化成单重积分, 其中 $D = \Big\{(x,y) \mid |x| + |y| \leqslant 1\Big\}$.

7. 计算下列二重积分:

(1) $\displaystyle\iint\limits_D (x+y)\sin(x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $D = \Big\{(x,y) \mid 0 \leqslant x+y \leqslant \pi,\ 0 \leqslant x-y \leqslant \pi\Big\}$;

(2) $\displaystyle\iint\limits_D e^{\frac{y}{x+y}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $D = \Big\{(x,y) \mid x+y \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\Big\}$;

(3) $\displaystyle\iint\limits_{\substack{0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 \leqslant y \leqslant 2}} [x+y]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $[x+y]$ 表示 $x+y$ 的整数部分;

(4) $\displaystyle\iint\limits_D \Big| \frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2 \Big|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D = \Big\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant 1\Big\}$;

(5) $\displaystyle\iint\limits_D (x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D = \Big\{(x,y) \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 \leqslant 2,\ y \geqslant x\Big\}$;

(6) $\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D=\Big\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 2\Big\}$ 且 $\forall (x,y)\in D$,

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & \text{若 } |x|+|y|\leqslant 1,\\ 2, & \text{若 } 1<|x|+|y|\leqslant 2.\end{cases}$$

(7) $\iint\limits_{D} \frac{x^2}{y}\sin(xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中

$$D=\left\{(x,y): 0<a\leq \frac{x^2}{y}\leq b \quad 0<p\leq \frac{y^2}{x}\leq q\right\},$$

此处p,q为常数.

8. 设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$, 而 $f\in\mathscr{C}^{(2)}(D)$ 在 ∂D 上恒为零, 求证:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\Big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant 0.$$

9. 利用二重积分理论, 证明以下积分不等式. 设$f(x),g(x)$是$[a,b]$上的连续函数.

(1) 求证:

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2\leq (b-a)\int_a^b (f(x))^2dx$$

(2) 如果对于任意的$x\in[a,b]$, 我们有$f(x)>0$, 求证:

$$\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx\geq (b-a)^2.$$

§2. 三重积分

10. 设$f(u)$是$[0,1]$上的连续函数, 求证:

$$\int_0^1 dx_1\int_0^{x_1} dx_2\cdots\int_0^{x_{n-1}} f(x_n)dx_n=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 (1-x)^{n-1}f(x)dx.$$

11. 记 Ω 为曲面 $x^2+y^2=az$, $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$ $(a>0)$ 所围立体. 分别在直角坐标系、柱坐标系、球坐标系下将 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 化成累次积分.

12. 交换积分 $\int_0^1\Big(\int_0^{1-x}\Big(\int_0^{x+y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\Big)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x$:

(1) 先对 y 积, 再对 x 积, 最后再对 z 积;

(2) 先对 x 积, 再对 z 积, 最后再对 y 积.

13. 求下列立体的体积:

(1) 曲面 $(x^2+y^2)^2+z^4=z$ 围成的立体;

(2) 曲面 $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$, $z=x$, $x=0$ 围成的立体.

14. 计算下列积分:

(1) $\iiint_\Omega xyzdxdydz$, 其中, 区域Ω为下列不等式确定

$$\begin{cases} 0<a\le\sqrt{xy}\le b \\ 0<\alpha\le\frac{y}{x}\le\beta \\ 0<m\le\frac{x^2+y^2}{z}\le n \\ x>0 \\ y>0 \\ z>0 \end{cases}$$

(2) $\displaystyle\iiint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant y\leqslant b,\\0\leqslant z\leqslant c}}(x+2y+3z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$;

(3) $\displaystyle\iiint\limits_\Omega(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 和锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的区域;

(4) $\displaystyle\iiint\limits_\Omega(x+y+z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, $\Omega=\left\{(x,y,z)\mid\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant\sqrt{1-y^2-x^2}\right\}$.

15. 设曲面 S 的球坐标方程为 $r=a(1+\cos\theta)$, 求该曲面在直角坐标系下的形心坐标.

16. 设A是3阶实对称矩阵, 且A正定, $\sum_{i,j=1}^3 a_{ij}x_ix_j=1$表示$\mathbb{R}^3$中的一个椭球面. 求证: 该椭球面所围的立体$V$的体积为

$$|V|=\frac{4\pi}{3\sqrt{\det A}}.$$

17. 设

$$V=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2\le1\},\quad h=\sqrt{a^2+b^2+c^2}>0,$$

$f(u)$在区间$[-h,h]$上连续, 求证:

$$\iiint\limits_V f(ax+by+cz)dxdydz=\pi\int_{-1}^1(1-t^2)f(ht)dt.$$