作业4.

习题二、

8. 由推论2.4.1知只需证 $\forall v,w\in V$, $d(v)+d(w)\geq n$.

若 $\exists v,w\in V$, $d(v)+d(w)\leq n-1$

则去除 v,w 及其关联边后，若剩下的图为完全图，即每一点都与其他所有点有边相连，此时边数最多，为 $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ 条。

又∵去掉的两点 $d(v)+d(w)\leq n-1$

∴去掉的和 u,v 关联的边数 $\leq n-1<n$

∴G中边数 $m<\frac{1}{2}(n-2)(n-3)+n$

$$=\frac{1}{2}(n^2-5n+6+2n)$$

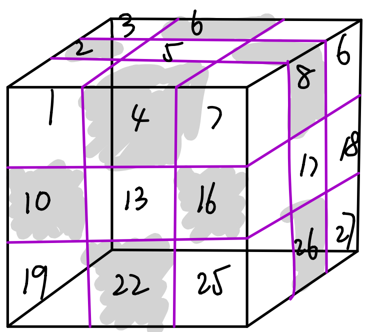
$$=\frac{1}{2}(n^2-3n+6) \quad (*).$$

由题设，$m\geq\frac{1}{2}(n^2-3n+2+4)=\frac{1}{2}(n^2-3n+6)$，与 $(*)$ 矛盾.

∴ $\forall v,w\in V$, $d(v)+d(w)\geq n$

∴ G中存在H回路.

12.



不可以.

将27个小立方体编号为1, 2, … 27

转化为点 $v_1 \dots v_{27}$.

若 v_i 与 v_j 间共有某一个面，

则 v_i, v_j 间存在无向边。建立简单图 $G(V,E)$.

则问题转化为：是否存在一条以 v_1 为起点，v_{14} 为终点的H-道路？

即在G中补充边 (v_1,v_{14})，问得到的图 G' 中是否存在H-圈？ $\boxed{\text{指定了}}$始、末点求道路，可以补连线后转化为求圈问题。

去除方块2, 10, 12, 20, 4, 6, 14, 22, 25, 8, 16, 18, 26 共13个.

则剩余14个方块间无共同面，即形成314个连通支.

由形成连通支数 $p(G'-S)>|S|$ 得 G' 中不存在H-圈。

即这样的路径不存在。

注：存在回路的条件是 $p(G-S) \le |S|$

存在道路的条件是 $p(G-S) \le |S|+1$（更宽松）.