# 第 12 周习题课 曲线曲面积分 2

本次习题课讨论题涉及以下四个问题。

一．曲线曲面积分续。
二．Green 定理的应用续。
三．积分关于路径的无关性

## 一．曲线曲面积分续。

**1**．记 $L^+$ 为圆周 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ y=x\tan\alpha \quad \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$，从 0x 轴的正向看去，圆周的正向为逆时针方向。写出 $L^+$ 的参数方程，并利用这个参数方程来计算线积分

$$I=\oint_{L^+}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz \text{。}$$

（注：我们将在第三部分的第 3 题，利用 Stokes 公式更简单地计算上述线积分。）

**解**：在球坐标下曲线的方程为 $r=a,\varphi=\alpha$，由此得到 $L^+$ 的参数方程

$$L^+:\begin{cases} x=a\cos\alpha\sin\theta \\ y=a\sin\alpha\sin\theta \\ z=a\cos\theta \end{cases} \qquad 0\le\theta\le 2\pi\text{，参数增加为曲线正向，}$$

代入曲线积分式，得

$$\begin{aligned} I&=\oint_{L^+}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz \\ &=\int_0^{2\pi}[a(\sin\alpha\sin\theta-\cos\theta)(a\cos\alpha\cos\theta)+a(\cos\theta-\cos\alpha\sin\theta)(a\sin\alpha\cos\theta) \\ &\qquad +a(\cos\alpha\sin\theta-\sin\alpha\sin\theta)(-a\sin\theta)]d\theta \\ &=\int_0^{2\pi}a^2(\cos\alpha-\sin\alpha)d\theta=2\pi a^2(\cos\alpha-\sin\alpha)\text{。} \end{aligned}$$

解答完毕。

**2**．求积分 $I=\iint_\Sigma f(x)dy\wedge dz+g(y)dz\wedge dx+h(z)dx\wedge dy$，其中 $\Sigma$ 为长方体 $[0,a]\times[0,b]\times[0,c]$ 的边界，正法向朝外，函数 $f(x)$，$g(y)$ 和 $h(z)$ 均为连续函数。

解：边界面 $\Sigma$ 由 6 个平面构成，其朝外的单位法向量分别为：

$x=0$：$\mathbf{n}=(-1,0,0)$，$x=a$：$\mathbf{n}=(1,0,0)$，

$y=0$：$\mathbf{n}=(0,-1,0)$，$y=b$：$\mathbf{n}=(0,1,0)$，

$z=0$：$\mathbf{n}=(0,0,-1)$， $z=c$：$\mathbf{n}=(0,0,1)$，

所以 $\iint\limits_{\Sigma} f(x)dy\wedge dz=\iint\limits_{\substack{0\le y\le b\\0\le z\le c}} f(a)dydz-\iint\limits_{\substack{0\le y\le b\\0\le z\le c}} f(0)dydz=bc[f(a)-f(0)]$。

同理 $\iint\limits_{\Sigma} g(y)dz\wedge dx=\iint\limits_{\substack{0\le z\le c\\0\le x\le a}} g(b)dzdx-\iint\limits_{\substack{0\le z\le c\\0\le x\le a}} g(0)dzdx=ac[g(b)-g(0)]$，

$\iint\limits_{\Sigma} h(z)dx\wedge dy=\iint\limits_{\substack{0\le x\le a\\0\le y\le b}} h(c)dxdy-\iint\limits_{\substack{0\le x\le a\\0\le y\le b}} h(0)dzdx=ab[h(c)-h(0)]$。

因此 $I=bc[f(a)-f(0)]+ca[g(b)-g(0)]+ab[h(c)-h(0)]$。解答完毕。

3．设 $S$ 为锥面 $z^2=x^2+y^2$ 位于 $0\le z\le \mathrm{h}$ 的那一部分，正法向向下。设 $\mathbf{v}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ 为流体运动的速度场。求流体在单位时间里通过定向曲面 $S$ 由内向外的流量 Q，即求曲面积分 $Q=\iint\limits_{S}\mathbf{v}\cdot d\mathbf{S}$。

解：简单计算可知曲面（锥面）$S$ 的单位法向 $\mathbf{n}=\pm\dfrac{(x,y,-z)}{\sqrt{2}z}$。由于 $S$ 的正法向向下，由此可知，$S$ 的单位正法向为 $\mathbf{n}=\dfrac{(x,y,-z)}{\sqrt{2}z}$。于是所求流量为

$$Q=\iint\limits_{S}\mathbf{v}\cdot d\mathbf{S}=\iint\limits_{S}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}dS=\iint\limits_{S}(x,y,z)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}z}(x,y,-z)dS==\frac{1}{\sqrt{2}}\iint\limits_{S}\frac{x^2+y^2-z^2}{z}dS=0。$$

解答完毕。

4．记 $S^+$ 为园柱面 $S:x^2+y^2=1$ 位于 $0\le z\le 2$ 的部分，外法向为正，计算曲面积分 $I=\iint_{S^+}x(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

解法 1：记向量场 $\vec{V}=(x(y-z),0,x-y)$。由假设 $S^+$ 的单位正法向量 $\vec{n}=(x,y,0)$，当 $(x,y,z)\in S^+$。曲面 $S$ 在柱面坐标下的方程为 $x=\cos\varphi$，$y=\sin\varphi$，$z=z$，$0\le\varphi\le 2\pi$，$0\le z\le 2$。记 $\vec{r}=(x,y,z)$。则 $\vec{r}_\varphi=(-\sin\varphi,\cos\varphi,0)$，$\vec{r}_z=(0,0,1)$。于是

$\vec{r}_\varphi\times\vec{r}_z=(\cos\varphi,\sin\varphi,0)$。这表明 $\vec{r}_\varphi\times\vec{r}_z$ 与 $S^+$ 的单位正法向量 $\vec{n}=(x,y,0)$ 一致。因此

$$I=\iint\limits_{S^+}\vec{V}\cdot d\vec{S}=\iint\limits_{0\le\varphi\le 2\pi,0\le z\le 2}\vec{V}(r(\varphi,z))\cdot\vec{r}_\varphi\times\vec{r}_z(\varphi,z)d\varphi dz=$$

$$=\iint\limits_{0\le\varphi\le 2\pi,0\le z\le 2}(\cos\varphi(\sin\varphi-z),0,\cos\varphi-\sin\varphi)\cdot(\cos\varphi,\sin\varphi,0)d\varphi dz=$$

$$=\iint\limits_{0\le\varphi\le 2\varphi,0\le z\le 2}(\cos^2\varphi\sin\varphi-z\cos^2\varphi)d\varphi dz=-2\pi。$$

解法 2：记立体$\Omega: x^2+y^2\le 1, 0\le z\le 2$，$S_1^+: x^2+y^2\le 1$，$z=0$，正法向向下，$S_2^+: x^2+y^2\le 1$，$z=2$，正法向向上。根据 Gauss 公式得

$$\iint_{\partial\Omega}\vec{V}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S=\iiint_{\Omega}\nabla\cdot\vec{V}\mathrm{dxdydz}=\iiint_{\Omega}[(y-z)\mathrm{dxdydz}=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^2\mathrm{dz}=-2\pi$$

$\iint_{S}\vec{V}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S=-2\pi-\iint_{S_1}\vec{V}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S-\iint_{S_2}\vec{V}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S$. 简单计算得到$\iint_{S_1}\vec{V}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S=0$，$\iint_{S_2}\vec{V}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S=0$。因此原积分$I=-2\pi$。解答完毕。

二．Green 定理的应用。

1.（利用 Green 定理证明平面面积变换公式）回忆平面面积变换定理:
设$\varphi$是平面域上的微分同胚，即$\varphi$是 1-1 映射且其逆也是连续可微的. 假设开区域$D_0$及其边界$\partial D_0$均属于$\varphi$的定义域。记开区域$D_0$在映射$\varphi$下的象为$D_1$，即$D_1=\varphi(D_0)$。根据曲面面积公式知$D_1$的面积公式为$|D_1|=\iint_{D_0}\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$，这里$x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$表示映射$\varphi$的两个分量函数。试利用 Green 公式来证明上述面积变换公式。

证明：设开域$D_0$的边界$\partial \mathrm{D}_0$有正则的参数表示$\mathrm{u}=u(t)$，$\mathrm{v}=v(t)$，$a\le t\le b$，并且$\partial \mathrm{D}_0$的正向（逆时针）与参数$t$增加的方向一致，那么区域$\mathrm{D}_1$的边界$\partial \mathrm{D}_1$有相应的参数表示

$x=x(t)=x(u(t),v(t))$，$y=y(t)=y(u(t),v(t))$，$a\le t\le b$。

这是因为微分同胚映内点为内点，映边界点为边界点。因此$\partial \mathrm{D}_1=\varphi$（$\partial \mathrm{D}_0$）。假设映射$\varphi$保持定向，即它的 Jacobian 行列式在其定义域上恒大于零，即$\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}>0$，$\forall(u,v)\in D_0$，则$\partial \mathrm{D}_1$的正向与参数 t 增加的方向一致. 于是根据 Green 公式提供的面积公式得$\mathrm{D}_1$的面积为

$$|\mathrm{D}_1|=\oint_{\partial \mathrm{D}_1}xdy=\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}}x(t)y'(t)dt=\int_a^b x(t)[y_u u'(t)+y_v v'(t)]dt=\oint_{\partial D_0}xy_u du+xy_v dv。$$

对上式最后一个积分应用 Green 公式得

$$|\mathrm{D}_1|=\iint_{D_0}\left([xy_v]_u-[xy_u]_v\right)dudv=\iint_{D_0}(x_u y_v-x_v y_u)dudv=\iint_{D_0}\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv。$$

注意这里我们要求微分同胚$\varphi$为二阶连续可微。证毕.

2．计算线积分$I=\oint\limits_{L^+}\dfrac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$，其中$L^+$为$|x|+|y|=1$，逆时针为正向。

解：记$P(x,y)=\dfrac{-y}{4x^2+y^2}$，$Q(x,y)=\dfrac{x}{4x^2+y^2}$。不难验证$Q_x=\dfrac{y^2-4x^2}{4x^2+y^2}=P_y$。因此向量场$(P,Q)$是无旋场。记$L_\varepsilon^+:4x^2+y^2=\varepsilon^2$，逆时针为正向。在由正方形$L^+$和椭圆$L_\varepsilon^+$所围成的有界域上，应用 Green 公式的旋度形式得

$\oint\limits_{L^+}\dfrac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\oint\limits_{L_\varepsilon^+}\dfrac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\dfrac{1}{\varepsilon^2}\oint\limits_{L_\varepsilon}xdy-ydx$。对线积分$\oint\limits_{L_\varepsilon}xdy-ydx$再应用 Green 公式的旋度形式得$I=\dfrac{1}{\varepsilon^2}\oint\limits_{L_\varepsilon}xdy-ydx=\dfrac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{4x^2+y^2\le\varepsilon^2}2dxdy=\pi$。解答完毕。

3．设$D\subseteq R^2$为有界开区域，它的边界$\partial D$是逐段光滑曲线，$\vec{n}$是$\partial D$的外单位法向量，设函数$f(x,y)\in C^1(\overline{D})$，且$f(x,y)$在$D$内为调和函数，即$\Delta f=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\equiv 0$，$\forall(x,y)\in D$。求证：

(i) $\oint\limits_{\partial D}\dfrac{\partial f}{\partial n}dl=0$；

(ii) $\oint\limits_{\partial D}f\dfrac{\partial f}{\partial n}dl=\iint\limits_{D}|\nabla f|^2dxdy$；

(iii) 若在边界$\partial D$上，$f(x,y)\equiv 0$，求证$f(x,y)\equiv 0$，$\forall(x,y)\in D$。

解：(i)由于$\Delta f=0$, $\oint\limits_{\partial D}\dfrac{\partial f}{\partial n}dl=\oint\limits_{\partial D}\nabla f\cdot ndl=\iint\limits_{D}\Delta f\,dxdy=0$。(应用 Green 公式散度形式)。

(ii) $\oint\limits_{\partial D}f\dfrac{\partial f}{\partial n}dl=\oint\limits_{\partial D}f\nabla f\cdot ndl=\iint\limits_{D}[(ff_x)_x+(ff_y)_y]dxdy=\iint\limits_{D}\left[f(f_{xx}+f_{yy})+f_x^2+f_y^2\right]dxdy$

$=\iint\limits_{D}|\nabla f|^2dxdy$。(这里用到了假设$\Delta f=f_{xx}+f_{yy}=0$。)

(iii) 由(ii)的结论可知，若$f(x,y)\equiv 0$，$\forall(x,y)\in\partial D$，则$\nabla f\equiv 0$，$\forall(x,y)\in D$。

即 $\dfrac{\partial f}{\partial x}\equiv 0$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}\equiv 0$，$\forall (x,y)\in D$，所以 $f(x,y)\equiv const$，从而 $f(x,y)\equiv 0$，$\forall (x,y)\in D$。证毕。

4．已知函数 $f(x)$ 在整个实轴 $R$ 上二次连续可微，满足 $f'(0)=0$，且使得微分式 $[f(x)+y(e^x+x-f(x))]dx+f'(x)dy$ 是全微分，求 $f(x)$，并使由 $A(0,0)$ 到 $B(\dfrac{\pi}{2},\pi)$ 逐段光滑曲线 $L$ 上全微分的积分的值为 $\dfrac{\pi^2}{8}$。

解：由假设微分式 $[f(x)+y(x-f(x))]dx+f'(x)dy$ 是全微分，故 $f''(x)=[f(x)+y(x-f(x))]_y$，即 $f''(x)+f(x)=x$。这是关于未知函数 $f(x)$ 的二阶常系数线性常微分方程。根据线性 ODE 一般理论知，对应的齐次方程 $f''(x)+f(x)=0$ 通解为 $c_1\cos x+c_2\sin x$。另一方面不难看出方程 $f''(x)+f(x)=x$ 有一个特解 $x$。因此原方程的通解为 $f(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+x$。关于函数 $f(x)$ 的两个条件，条件 $f'(0)=0$，以及条件由 $A(-1,1)$ 到 $B(1,0)$ 逐段光滑曲线 $L$ 上积分的值为 $\dfrac{\pi^2}{8}$，可以唯一确定两个常数 $c_1$，$c_2$。对 $f(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+x$ 求导得

$f'(x)=-c_1\sin x+c_2\cos x+1$，$f'(0)=c_2+1=0$，$c_2=-1$。于是

$f(x)=c_1\cos x-\sin x+x$，$f'(x)=-c_1\sin x-\cos x+1$。

$$[f(x)+y(x-f(x))]dx+f'(x)dy=d[c_1\sin x+\cos x+\frac{1}{2}x^2+y(-c_1\sin x-\cos x+1)]$$

由 $A(0,0)$ 到 $B(\dfrac{\pi}{2},\pi)$ 积分得 $[c_1+\dfrac{\pi^2}{8}+\pi(-c_1+1)]-1=c_1(1-\pi)+\dfrac{\pi^2}{8}+\pi-1=\dfrac{\pi^2}{8}$

得 $c_1=1$。于是 $f(x)=\cos x-\sin x+x$。解答完毕。

5. 设 $f(x)$ 是实轴上处处为正的连续函数，$D$ 为圆心在原点的单位开圆盘。

证明：(i) $\int_{\partial D^+} xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx=\int_{\partial D^+} -yf(x)dx+\frac{x}{f(y)}dy$；

(ii) $\int_{\partial D^+} xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx\geq 2\pi$。

证明：对等式(i)的两边线积分，分别应用 Green 公式的旋度形式得

左边$=\iint_{\bar{D}}\left[f(y)+\frac{1}{f(x)}\right]dxdy$，右边$=\iint_{\bar{D}}\left[f(x)+\frac{1}{f(y)}\right]dxdy$。

由于积分区域为单位圆盘，故上述两个二重积分相等。因此等式(i)成立。

注：对上任何一个二重积分中，作变量代换 $x=v$， $y=u$ 就得到另一个二重积分。

(ii) 类似，我们不难看出 $\iint_{\bar{D}} f(x)dxdy=\iint_{\bar{D}} f(y)dxdy$，$\iint_{\bar{D}}\frac{dxdy}{f(x)}dxdy=\iint_{\bar{D}}\frac{dxdy}{f(y)}$。

这表明，在如下两个二重积分中，

$\iint_{\bar{D}}\left[f(y)+\frac{1}{f(x)}\right]dxdy$ 和 $\iint_{\bar{D}}\left[f(x)+\frac{1}{f(y)}\right]dxdy$。

将被积函数中的变元 $x$ 换为 $y$，并不改变积分的值。因此

$$\int_{\partial D} xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx=\iint_{\bar{D}}\left[f(y)+\frac{1}{f(x)}\right]dxdy=\iint_{\bar{D}}\left[f(y)+\frac{1}{f(y)}\right]dxdy。$$

由于 $f(y)+\frac{1}{f(y)}\geq 2$。 因此 $\int_{\partial D} xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx\geq\iint_{\bar{D}} 2dxdy=2\pi$。证毕。