第十周习题课: 曲线、曲面积分 1

一. 曲线积分

1. 计算 $\oint_L xydl$，其中 L 是正方形 $|x|+|y|=a,\quad (a>0)$.

解：设 $A(0,-a), B(a,0), C(0,a), D(-a,0)$,

$$\oint_L xydl=\left(\int_{AB}+\int_{BC}+\int_{CD}+\int_{DA}\right)xydl$$

$$=\int_0^a x(x-a)\sqrt{2}dx+\int_0^a x(x-a)\sqrt{2}dx$$

$$+\int_{-a}^0 x(x+a)\sqrt{2}dx+\int_{-a}^0 -x(x+a)\sqrt{2}dx=0$$

注：如果经验丰富的话，一眼看出积分为零(根据对称性).

2. 设 L 为椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，其周长记为 a。求 $\oint_L(2xy+3x^2+4y^2)dl$

解法一：椭圆 L 的方程可写成 $3x^2+4y^2=12$。于是

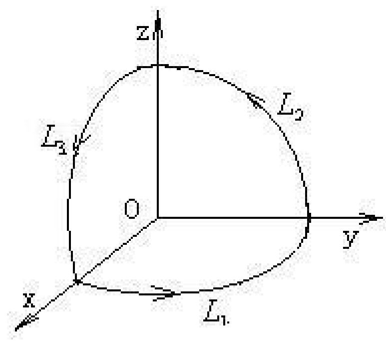
$$\oint_L(2xy+3x^2+4y^2)dl=\oint_L(12+2xy)dl=12a+\oint_L 2xydl$$

由对称性，$\oint_L 2xydl=0$，故 $\oint_L(2xy+3x^2+4y^2)dl=12a$.

解法二：椭圆 L ：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 写作参数式 $x=2\cos\theta$，$y=\sqrt{3}\sin\theta$，$\theta\in[0,2\pi]$。于是所求第一型曲线积分为 $\oint_L(2xy+3x^2+4y^2)dl=12a+2\oint_L xydl$。而

$$\oint_L xydl=\int_0^{2\pi}\left[2\cos\theta\sqrt{3}\sin\theta\right]\sqrt{4\sin^2\theta+3\cos^2\theta}d\theta=0$$. 因此原积分为 $12a$。

3. 计算积分 $I=\int_\Gamma(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$，其中 Γ 为球面片 $x^2+y^2+z^2=1$，$x,y,z\ge 0$ 的边界曲线，方向是从点 $(1,0,0)$ 到点 $(0,1,0)$，到点 $(0,0,1)$，再回到 $(1,0,0)$。（课本习题 4.4 题 3（4），page 192）



解：如图 $\Gamma=L_1+L_2+L_3$，L_1,L_2,L_3 利用球坐标参数可以写成

$L_1: x=\cos\varphi, y=\sin\varphi, z=0$，$0\le\varphi\le\pi/2$（参数增为正），

$L_2: x=0, y=\sin\theta, z=\cos\theta$，$0\le\theta\le\pi/2$（参数减为正），

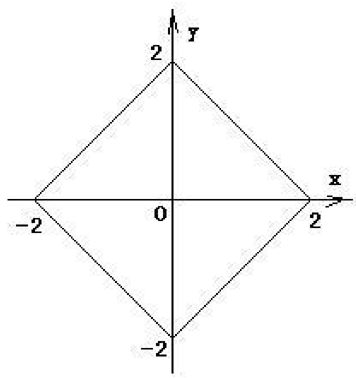
$L_3: x=\sin\theta, y=0, z=\cos\theta$ ，$0\le\theta\le\pi/2$（参数增为正），

$$\int_\Gamma (y^2-z^2)dx=\int_{L_1}+\int_{L_3} \quad （注意在 L_2 上 dx=0 ）$$

$$=\int_0^{\pi/2}(\sin^2\varphi-0)\cdot(-\sin\varphi)d\varphi+\int_0^{\pi/2}(0-\cos^2\theta)\cdot\cos\theta d\theta=-2\int_0^{\pi/2}\cos^3\theta d\theta=-\frac{4}{3}$$

由 x-y-z 循环对称，原式=－4．解答完毕。

4. 设 C 为闭曲线：$|x|+|y|=2$，逆时针为正向。



计算 $\oint_C \frac{axdy-bydx}{|x|+|y|}$。

解：利用 $|x|+|y|=2$ ，$\oint_C \frac{axdy-bydx}{|x|+|y|}=\frac{1}{2}\oint_C axdy-bydx$ ，

再将曲线分成 4 段直线段 $C=C_1+C_2+C_3+C_4$ ，

$C_1: x+y=2$ ，$0\le x\le 2$ ，x 减少为正向；

$C_2: y-x=2$ ，$-2\le x\le 0$ ，x 减少为正向；

$C_3: x+y=-2$ ，$-2\le x\le 0$ ，x 增加为正向；

$C_4: x-y=2$ ，$0\le x\le 2$ ，x 增加为正向；

$$\int_{C_1}axdy-bydx=-\int_0^2[ax(-1)-b(2-x)]dx=\int_0^2[(a-b)x+2b]dx=2(a+b) ，$$

$$\int_{C_2}axdy-bydx=-\int_{-2}^0[ax-b(2+x)]dx=\int_{-2}^0[(b-a)x+2b]dx=2(a+b) ，$$

$$\int_{C_3}axdy-bydx=\int_{-2}^0[ax(-1)-b(-2-x)]dx=\int_{-2}^0[(b-a)x+2b]dx=2(a+b) ，$$

$$\int_{C_4}axdy-bydx=\int_0^2[ax-b(x-2)]dx=\int_0^2[(a-b)x+2b]dx=2(a+b) ，$$

综上，原式 $=\frac{1}{2}[\int_{C_1}+\int_{C_2}+\int_{C_3}+\int_{C_4}]=4(a+b)$ ．

二．曲面积分

5. 计算 $\iint_S (x^2+y^2)\mathrm{d}S$．其中 S 是锥体 $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1$ 的边界.

解：分别记 S_1 和 S_2 为锥体的侧面和上底面，则

$$\iint_S (x^2+y^2)\mathrm{d}S=\iint_{S_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}S+\iint_{S_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}S$$

在S_1上，$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$（$z=\sqrt{x^2+y^2}$）

在S_2上，$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=dxdy$（$z=1$）. 于是

$$\iint_{S_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}S=\iint_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)dxdy=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cdot\sqrt{2}r\mathrm{d}r=\pi/\sqrt{2},$$

$$\iint_{S_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}S=\iint_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)dxdy=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cdot r\mathrm{d}r=\pi/2.$$

所以所求面积分为 $\iint_S(x^2+y^2)\mathrm{d}S=\pi(1/2+1/\sqrt{2})$.

6. 求$I=\iint\limits_S(x+y+z)^2dS$，其中$S$为单位球面.

解：$I=\iint\limits_S(x+y+z)^2dS=\iint\limits_S(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx)dS$

$$=\iint\limits_S(1+2xy+2yz+2zx)dS=4\pi+2\iint\limits_S(xy+yz+zx)dS$$

其中4π是球的表面积. 由对称性可知, $\iint\limits_S xydS=\iint\limits_S yzdS=\iint\limits_S zxdS=0$, 故$I=4\pi$。

7. 计算螺旋面S：$x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，$z=r\varphi$（$0\le r\le R,\ 0\le\varphi\le 2\pi$）的面积。

解：$|S|=\iint\limits_S d\mathrm{S}=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R\sqrt{EG-F^2}dr$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{2+\varphi^2}d\varphi\int_0^R rdr=\frac{R^2}{2}[\sqrt{2+4\pi^2}+\ln(\sqrt{2}\pi+\sqrt{1+2\pi^2})]。$$

8. 求圆柱面$x^2+y^2=R^2$被抛物柱面$z=R^2-x^2$及平面$z=0$所截部分S的侧面积。

解法一：（利用第一类曲线积分的几何意义）

侧面积 $A=\int\limits_L(R^2-x^2)dl$，其中$L$为空间曲线$\begin{cases}z=R^2-x^2\\x^2+y^2=R^2\end{cases}$在$xoy$平面上的投影，即$xoy$平面上的园$L$：$x^2+y^2=R^2$。其参数方程为$x(t)=R\cos t$，$y(t)=R\sin t$，$0\le t\le 2\pi$，它的弧长微分$dl=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt=Rdt$。

于是$A=\int\limits_L(R^2-x^2)dl=\int_0^{2\pi}\left(R^2-R^2\cos^2 t\right)Rdt=\pi R^3$。

解法二：（第一类曲面积分）由于所截部分S关于xoz平面对称，即点$(x,y,z)\in S$当且仅当$(x,-y,z)\in S$。位于$y>0$部分的曲面方程为$y=\sqrt{R^2-x^2}$，$(x,z)\in D$，其中$D=\{-R\le x\le R,\ 0\le z\le R^2-x^2\}$。于是所求面积为

$$|S|=\iint\limits_S dS=2\iint\limits_{D_{xz}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}dxdz=2\int_{-R}^R dx\int_0^{R^2-x^2}\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}dz=$$

$$= 4R\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,dx = 4R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \pi R^3$$ 。解答完毕。

9. 计算均匀半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2\ (z \geq 0)$ 关于 z 轴的转动惯量.

解：对于该曲面上任意一点 (x, y, z) 出的面积微元 $\mathrm{d}S$ ，其质量等于 $b\mathrm{d}S$ ，关于 z 轴的转动惯量为 $b(x^2 + y^2)\mathrm{d}S$.

球面的面积微元 $\mathrm{d}S = \dfrac{a\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$.

于是整个曲面的转动惯量为

$$\iint_S ba(x^2 + y^2)\mathrm{d}S = ab\iint_S \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= ab\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a \frac{r^3}{\sqrt{a^2 - r^2}}\mathrm{d}r = 2ab\pi(r^2\sqrt{a^2 - r^2})\Big|_a^0 + 2\int_0^a r\sqrt{a^2 - r^2}\mathrm{d}r)$$

$$= \frac{4}{3}\pi ab(a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_a^0 = \frac{4}{3}\pi ba^4$$

10. 令曲面 S 在球坐标下方程为 $r = a(1 + \cos\theta)$，Ω 是 S 围成的有界区域，分别计算 S 和 Ω 在直角坐标系下的形心坐标。

解： Ω 的体积 $V = \iiint\limits_{\Omega} dV = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{a(1+\cos\theta)} r^2 dr = \dfrac{8}{3}\pi a^3$ ，

Ω 关于 z=0 平面的静力矩

$$V_{xy} = \iiint\limits_{\Omega} z dV = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \cos\theta \sin\theta d\theta \int_0^{a(1+\cos\theta)} r^3 dr = \frac{32}{15}\pi a^4$$ ，

Ω 的形心坐标为 $\bar{x} = \bar{y} = 0, \bar{z} = \dfrac{4}{5}a$ ；

S 的面积 $M = \iint\limits_{S} ds = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sqrt{EG - F^2}\, d\theta$ ，

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sqrt{2}a^2 (1 + \cos\theta)^{3/2} \sin\theta d\theta = \frac{32}{5}\pi a^2$$

S 关于 z=0 平面的静力矩

$$M_{xy}=\iint_S zdS=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sqrt{2}a^3(1+\cos\theta)^{5/2}\cos\theta\sin\theta d\theta=\frac{320}{63}\pi a^3\ ,$$

S 的形心坐标为 $\bar{x}=\bar{y}=0,\bar{z}=\dfrac{50}{63}a$。

11. 计算第一型曲面积分 $I=\iint\limits_S|z|dS$，以及第二型曲面积分 $J=\iint\limits_{S^+}|z|dx\wedge dy$，其中曲面 S 为球面 $S:x^2+y^2+z^2=a^2$；定向曲面 S^+ 的正法向向外。

解：分别记 S_1，S_2 为 S 的上半球面和下半球面，它们的方程为

S_1 : $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，$(x,y)\in D=\{(x,y),\ \ x^2+y^2\le a^2\}$

S_2 : $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，$(x,y)\in D$

考虑第一型曲面积分 I。根据被积函数和球面的对称性，我们有 $\iint\limits_{S_1}|z|dS=\iint\limits_{S_2}|z|dS$。因此

$$I=\iint_S|z|dS=\iint_{S_1}|z|dS+\iint_{S_2}|z|dS=2\iint_{S_1}zdS\ 。$$

对于上半球面 S_1，面积元素

$$dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy=\frac{a\,dxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\ 。$$

于是

$$I=2\iint_{S_1}zdS=2\int_{-a}^{a}dx\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy=8a\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx=2\pi a^3\ 。$$

考虑第二型曲面积分 J。

$J=\iint\limits_{S^+}|z|dx\wedge dy=\iint\limits_{S_1^+}|z|dx\wedge dy+\iint\limits_{S_2^+}|z|dx\wedge dy$。注意到

$\iint\limits_{S_1^+}|z|dx\wedge dy=\int_{-a}^{a}dx\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy$，以及

$\iint\limits_{S_2^+}|z|dx\wedge dy=\int_{-a}^{a}dx\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}(-dxdy)$，故

$J=\iint\limits_S|z|dx\wedge dy=\iint\limits_{S_1}|z|dx\wedge dy+\iint\limits_{S_2}|z|dx\wedge dy=0$。

12. 记 S 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2x$ 所截的有限部分。规定曲面 S 的正向向下，所得的定向曲面记为 S^+。求下面两个积分的值。

（i）$\iint_S zdS$。　　（ii）$\iint_S \sqrt{x^2+y^2+z^2}\left(xdydz+ydzdx+zdxdy\right).$

解：(i) 简单计算知锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 的面积元素为 $dS=\sqrt{2}dxdy$。因此

$$\iint_S zdS=\iint_{x^2+y^2\le 2x}\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{2}dxdy=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\rho^2d\rho=\frac{32\sqrt{2}}{9}$$

(ii) 不难计算曲面 S 的单位正法向量为 $(x/\sqrt{x^2+y^2},y/\sqrt{x^2+y^2},-1)/\sqrt{2}$。于是根据第二曲面积分的定义有 $\iint_{S^+}\sqrt{x^2+y^2+z^2}(xdydz+ydzdx+zdxdy)$

$$=\iint_S\sqrt{x^2+y^2+z^2}(x,y,z)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},-1\right)dS=\iint_S 0dS=0.$$

解答完毕。

13. 设一元函数 $f(u)$ 于整个实轴上连续，S 代表单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$。证明 Poisson 公式 $\iint_S f(ax+by+cz)dS=2\pi\int_{-1}^{1}f(\rho t)dt$，这里 $\rho:=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$。（课本习题 4.3 第 11 题，page 187）。

为了证明 Poisson 公式，我们需要先建立一个 Lemma。

Lemma：设 Σ 是一个正则的参数曲面。记 Σ' 是 Σ 在一个正交变换（正交矩阵）P 下的象，即 $\Sigma'=P(\Sigma)$。记 $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$，$U=\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$，则对任何 Σ 上连续函数 $g(x,y,z)$，我们有 $\iint_\Sigma g(X)dS=\iint_{\Sigma'}g(P^TU)dS$。（这个 Lemma 大致的意思是说，曲面的面积元素关于正交变换是不变的。）

证明：由假设 Σ 有正则的参数表示 $X(s,t)=\begin{pmatrix}x(s,t)\\y(s,t)\\z(s,t)\end{pmatrix}$，$(s,t)\in D$，$D$ 为平面有界闭域。

由此导出曲面 $\Sigma'=P(\Sigma)$ 的一个参数表示 $U(s,t)=PX(s,t)$，$(s,t)\in D$。于是我们可以确定两个曲面 Σ 和 Σ' 关于上述参数表示的 Gauss 系数，E，G，F 和 E′，G′，F′：

$\mathrm{E} = \mathrm{X_s}(\mathrm{s},\mathrm{t})^{\mathrm{T}} \mathrm{X_s}(\mathrm{s},\mathrm{t})$，$\mathrm{G} = \mathrm{X_t}(\mathrm{s},\mathrm{t})^{\mathrm{T}} \mathrm{X_t}(\mathrm{s},\mathrm{t})$，$\mathrm{F} = \mathrm{X_s}(\mathrm{s},\mathrm{t})^{\mathrm{T}} \mathrm{X_t}(\mathrm{s},\mathrm{t})$。

$\mathrm{E}' = U_s(s,t)^T \mathrm{U_s}(\mathrm{s},\mathrm{t}) = \mathrm{X_s}(\mathrm{s},\mathrm{t})^{\mathrm{T}} \mathrm{P}^{\mathrm{T}} \mathrm{P} \mathrm{X_s}(\mathrm{s},\mathrm{t}) = \mathrm{X_s}(s,t)^T X_s(s,t) = E$，

同理可证 $\mathrm{G}' = \mathrm{G}$，$\mathrm{F}' = \mathrm{F}$。因此我们有 $\sqrt{\mathrm{E}'\mathrm{G}' - \mathrm{F}'^2} = \sqrt{EG - F^2}$。于是

$$\iint_{\Sigma'} g(P^T U)dS = \iint_D g(P^T U(s,t))\sqrt{E'G' - F'^2}\,dsdt =$$
$$= \iint_D g(P^T U(s,t))\sqrt{EG - F^2}\,dsdt = \iint_D g(X(s,t))\sqrt{EG - F^2}\,dudv = \iint_{\Sigma} \mathrm{g}(\mathrm{X})\mathrm{dS}$$

。证毕。

Poisson 公式的证明：

取一个三阶正交矩阵 P，使得 P 的第一行为 $(a,b,c)/\rho$。作正交变换 $\mathrm{U} = PX$，其中记号 U，X 的意义同上。于是 $ax + \mathrm{b}y + cz = \rho u$。此外，在这个正交变换下，单位球面 $x^2 + \mathrm{y}^2 + z^2 = 1$ 仍为单位球面 $u^2 + \mathrm{v}^2 + w^2 = 1$。根据上述 Lemma 可知

$$\iint_{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2+\mathrm{z}^2=1} \mathrm{f}(ax + by + cz)dS = \iint_{u^2+v^2+w^2=1} f(\rho u)dS。$$

我们来考虑上式右边的积分。根据对称性知

$$\iint_{u^2+v^2+w^2=1} f(\rho u)dS = 2 \iint_{\mathrm{w}=\sqrt{1-u^2-v^2}} f(\rho u)dS。$$

考虑上式右边的积分。简单计算可知曲面 $\mathrm{w} = \sqrt{1 - u^2 - v^2}$ 的面积元素为

$$dS = \sqrt{1 + \mathrm{w}_u^2 + w_v^2}\,dudv = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}\,dudv$$

。于是

$$\iint_{u^2+v^2+w^2=1} f(\rho u)dS = 2 \iint_{u^2+v^2\le 1} \frac{f(\rho u)dudv}{\sqrt{1-u^2-v^2}} = 2\int_{-1}^{1} f(\rho u)du \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} \frac{dv}{\sqrt{1-u^2-v^2}}$$
$$= 4\int_{-1}^{1} f(\rho u)du \int_{0}^{\sqrt{1-u^2}} \frac{dv}{\sqrt{1-u^2-v^2}} = 4\int_{-1}^{1} f(\rho u)du \frac{\pi}{2} = 2\pi \int_{-1}^{1} f(\rho u)du。$$

证毕。