第一次习题课（多元函数极限、连续、可微及偏导）

一．累次极限与重极限

例.1 $f(x,y)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}, & x\cdot y\neq 0 \\ 0, & x\cdot y=0 \end{cases}$ ，分别求累次极限与二重极限。

解：两个二次极限都不存在，但二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$.

例.2 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{3xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & x^2+y^2=0 \end{cases}$，分别求累次极限与二重极限。

解：$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=0$，而二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 不存在.

例.3 $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$，证明：$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=0$，而二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 不存在。

证明：$\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0$，故 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0$；同理，$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=0$。

沿直线 $y=x$ 趋于 $(0,0)$ 点，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x}} f(x,y)=1$；沿直线 $y=0$ 趋于 $(0,0)$ 点，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=0}} f(x,y)=0$，故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 不存在。

例.4 记 $D=\{(x,y)\,|\,x+y\neq 0\}$， $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y},(x,y)\in D$ 。证明：

$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=1,\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=-1$，但是 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in D}} f(x,y)$ 不存在。

解：$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=1$，同理，$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=-1$。

取 $(x_n,y_n)=(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}),\quad (x_n',y_n')=(\dfrac{2}{n},\dfrac{1}{n})$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n,y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(x_n',y_n')=(0,0)$，但是

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,y_n)=0,\quad \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n',y_n')=\dfrac{1}{3}$ 不相等，所以 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in D}} f(x,y)$ 不存在。

一般结论：

$\boxed{\text{重极限与累次极限没有关系}}$

$\boxed{\text{重极限 } \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \text{ 与累次极限 } \lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y),\ \lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) \text{ 均存在，则有}}$

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)}$$

$\boxed{\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y),\quad \lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)\text{ 均存在但不等，}\quad \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\text{ 不存在}}$

二．多元函数的极限与连续，连续函数性质

例.5 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}(x+y)^{\frac{x+y+1}{x+y-1}}$；（2）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\ln(x^2+y^2)$；

（3）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(xy)}{x}$；（4）$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$；

（5）$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$。

解：（1）$\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}(x+y)^{\frac{x+y+1}{x+y-1}}=\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}(1+(x+y-1))^{\frac{1}{x+y-1}\bullet(x+y+1)}=e^2$；

（2）设 $x^2+y^2<1$，则 $|\ln(x^2+y^2)|\le|\ln x^2|$，$|\ln(x^2+y^2)|\le|\ln y^2|$，

$|(x+y)\ln(x^2+y^2)|\le|x\ln x^2|+|y\ln y^2|$，所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\ln(x^2+y^2)=0\,.$$

（3）写成 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in D}}\dfrac{\sin(xy)}{x}$ 更好，其中 $D=\{(x,y)\,|\,x\neq 0\}$。

当 $y=0$ 时，$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in D}}\dfrac{\sin(xy)}{x}=\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in D}}\dfrac{0}{x}=0=y$；

当 $y\neq 0$ 时，$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in D}}\dfrac{\sin(xy)}{x}=\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in D}}\dfrac{\sin(xy)}{xy}\bullet y=y$，所以 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in D}}\dfrac{\sin(xy)}{x}=y$。

（4）$$\left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right|\le\left|\frac{x}{x^2-xy+y^2}\right|+\left|\frac{y}{x^2-xy+y^2}\right|\le\left|\frac{x}{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\right|+\left|\frac{y}{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\right|$$

$$\le\left|\frac{2}{x}\right|+\left|\frac{2}{y}\right|$$

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}=0$。

思考：$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-2xy+y^2}$ 是否存在？若存在，极限值是什么？

（5）$(x^2+y^2)e^{-(x+y)}=\dfrac{x^2}{e^{x+y}}+\dfrac{y^2}{e^{x+y}}\le\dfrac{x^2}{e^x}+\dfrac{y^2}{e^y}$，所以 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}=0$。

例.6 证明：极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)}\left(\dfrac{|xy|}{x^2+y^2}\right)^{x^2}=0$.

证明：$\left|\dfrac{|xy|}{x^2+y^2}\right|\le\dfrac{1}{2}$，故 $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)}\left(\dfrac{|xy|}{x^2+y^2}\right)^{x^2}=0$。

例. 7　若 $z=f(x,y)$ 在 R^2 上连续，且 $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty}f(x,y)=+\infty$，证明 函数 f 在 R^2 上一定有最小值点。

证明：任取 $P\in R^2$，设 $f(P)=M$；

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}f(x,y)=+\infty\Rightarrow\exists d>0,\forall\rho=\sqrt{u^2+v^2}>d:f(u,v)>M;$$

存在 $Q\in B=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le d^2\}$：　$f(Q)=\min\limits_{(x,y)\in B}f(x,y)$.

显然，　$f(Q)=\min\limits_{(x,y)\in R^2}f(x,y)$。

例. 8　$f(\mathbf{x})$ 在 R^n 上连续, 且

（1）$\mathbf{x}\ne\mathbf{0}$ 时，　$f(\mathbf{x})>0$

（2）$\forall c>0,\quad f(c\mathbf{x})=cf(\mathbf{x})$

证明：存在 $a>0,b>0$，使 $a|\mathbf{x}|\le f(\mathbf{x})\le b|\mathbf{x}|$.

证明：$f\left(\dfrac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\right)$ 有界.　　$a\le f\left(\dfrac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\right)\le b$

例. 9　若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的某个邻域内有定义，$f(0,0)=0$，且

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=a$$

a 为常数。证明：

（1）$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续；

（2）若 $a\ne-1$，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续，但不可微；

（3）若 $a=-1$，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微。

【证明】 $$\frac{f(x,y)-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=a+o(1)$$

$$f(x,y)=(a+1)\sqrt{x^2+y^2}+o(\sqrt{x^2+y^2})$$

（1）显然

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}$ 不存在， $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续，但不可微；

（3）$df(0,0)=0$

例.10 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点是否连续?

___________(填是或否)；在 $(0,0)$ 点是否可微? _____________(填是或否).

【答案】是，否

【解析】（1） $$\left|\frac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2)\right|\le\sqrt{|xy|}\to 0,\quad (x,y)\to 0$$

$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点是连续。

（2） $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(\Delta y,0)-f(0,0)}{\Delta y}=0$$

$$\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\Delta y\right)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\frac{\sqrt{|\Delta x\cdot\Delta y|}}{(\Delta x^2+\Delta y^2)^{\frac{3}{2}}}\sin(\Delta x^2+\Delta y^2)$$

不是无穷小.

三．多元函数的全微分与偏导数

例. 11 有如下做法：

设 $f(x,y)=(x+y)\varphi(x,y)$ 其中 $\varphi(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续，则

$$df(x,y)=[\varphi(x,y)+(x+y)\varphi_x(x,y)]dx+[\varphi(x,y)+(x+y)\varphi_y(x,y)]dy$$

令 $x=0,y=0$， $df(0,0)=\varphi(0,0)(dx+dy)$.

(1)指出上述方法的错误；

(2)写出正确的解法.

解： $\Delta f(0,0)=f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=(\Delta x+\Delta y)\varphi(\Delta x,\Delta y)$

因为 $\varphi(x,y)$ 在（0，0）处连续，即 $\lim\limits_{\rho\to 0}\varphi(\Delta x,\Delta y)=\varphi(0,0)$，其中 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ 。

所以$\varphi(\Delta x,\Delta y)=\varphi(0,0)+\alpha(\rho)$，其中$\lim\limits_{\rho\to 0}\alpha(r)=0.$

$$\Delta f(0,0)=\varphi(0,0)\Delta x+\varphi(0,0)\Delta y+\alpha(\rho)\Delta x+\alpha(\rho)\Delta y$$

$f(x,y)$在（0，0）点处可微。

$$df(x,y)|_{(0,0)}=\varphi(0,0)dx+\varphi(0,0)dy$$

例.12　设二元函数$f(x,y)$于全平面$\Re^2$上可微，(a,b)为平面$\Re^2$上给定的一点，则极限

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(a+x,b)-f(a-x,b)}{x}=$__________________。

【答案】$2f_x'(a,b)$

例.13　设函数$f(x,y)$在$(1,1)$点可微，$f(1,1)=1$，$f_x'(1,1)=2$，$f_y'(1,1)=3$，

$g(x)=f(x,f(x,x))$，求$g'(1)$。

【解】$g'(x)=f_x'(x,f(x,x))+f_y'(x,f(x,x))[f_x'(x,x)+f_y'(x,x)]$，

$g'(1)=2+3[2+3]=17$　。

例.14　设$z=f(x^2y,\dfrac{y}{x})$，其中$f\in C^2$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$和$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

【解】　$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'2xy+f_2'(-\dfrac{y}{x^2})$；

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(f_{11}''x^2+f_{12}''\frac{1}{x})2xy+f_1'2x+(f_{21}''x^2+f_{22}''\frac{1}{x})(-\frac{y}{x^2})+f_2'(-\frac{1}{x^2})$$

$$=2x^3yf_{11}''+yf_{12}''-f_{22}''\frac{y}{x^3}+2xf_1'-\frac{1}{x^2}f_2'$$

。

例. 15　设$z(x,y)$定义在矩形区域$D=\{(x,y)|0\le x\le a,0\le y\le b\}$上的可微函数。证明:

（1）$z(x,y)=f(y)\Leftrightarrow\forall(x,y)\in D,\dfrac{\partial z}{\partial x}\equiv 0$　；

（2）$z(x,y)=f(x)+g(y)\Leftrightarrow\forall(x,y)\in D,\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\equiv 0$

证明: (1)$\Rightarrow$: 显然.

$$\Leftarrow:\ z(x,y)-z(x_0,y)=\frac{\partial z}{\partial x}(\xi,y)(x-x_0)=0,$$

$$z(x,y)=z(x_0,y)$$

$z(x,y)=f(y)$与x无关.

(2) $\Rightarrow$: 显然.

$\Leftarrow$: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \equiv 0$, $\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = h(y)$ 与 x 无关.

固定 y_0，令 $z\left(x, y_0\right) = f\left(x\right)$

$z\left(x, y\right) - z\left(x, y_0\right) = \int h(y) dx = g\left(y\right)$，故 $z\left(x, y\right) = f\left(x\right) + g\left(y\right)$.

例. 16 n 为整数，若任意 $t > 0$, $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$，则称 f 是 n 次齐次函数。证明：

$f(x, y)$ 是零次齐次函数的充要条件是

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

【证明】先证必要性。由条件 $f(tx, ty) = f(x, y)(\forall t > 0)$，对 t 求导，得

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y\frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) = 0$$

令 $t = 1$，即得 $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$。

再证充分性。令 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta.$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\sin\theta = \frac{1}{r}(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}) = 0.$$

上式说明 f 在极坐标系中只是 $\theta = \arctan\dfrac{y}{x}$ 的函数，这等价于只是 $\dfrac{y}{x}$ 的函数。可记 $f(x, y) = \phi(\dfrac{y}{x})$。显然 ϕ 是零次齐次函数。

例. 17 下列条件成立时能够推出 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 点可微, 且全微分 $df = 0$ 的是（ D ）.

(A) 在点 (x_0, y_0) 两个偏导数 $f'_x = 0, f'_y = 0$

(B) $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的全增量 $\Delta f = \dfrac{\Delta x \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$，

(C) $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的全增量 $\Delta f = \dfrac{\sin(\Delta x^2 + \Delta y^2)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$

(D) $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的全增量 $\Delta f = (\Delta x^2 + \Delta y^2)\sin\dfrac{1}{\Delta x^2 + \Delta y^2}$

解题思路 用两个条件判断：(1) $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$；

(2) $\dfrac{\Delta f(x_0,y_0)-df(x_0,y_0)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\dfrac{\Delta f(x_0,y_0)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\xrightarrow{\rho\to 0}0$ (1)

条件(1)都成立，只有 D 中条件(2)成立, 故选 D.

例. 18　设 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$, 则在 $(0,0)$ 点(　B　)

(A) 连续, 但偏导数不存在；　(B) 偏导数存在, 但不可微；

(C) 可微；　(D) 偏导数存在且连续.

解题思路　$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$, 在 $(0,0)$ 的两个偏导数都等于零. 如果 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$, 在 $(0,0)$ 可微, 则 $df(0,0)=0$, 从而 $\Delta f(x,y)-df=\sqrt{|\Delta x\Delta y|}$；但它不是 $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ 的高阶无穷小.

例. 19　设 $z=\arcsin\dfrac{x}{y}$，求 dz.

例. 20　$u=\arctan\dfrac{x-y}{x+y}$，则 $\mathrm{d}u=$__________________

例.21　设函数 $z=2\cos^2(x-\dfrac{y}{2})$，证明 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

例.22　设函数 $z=(x+2y)^{xy}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.