习题八.

7. ∵ G是群 ∴ G非空，且 $\forall a,b\in G$，$(a\cdot b)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$

∴ $(a\cdot b)^{-1}=b^{-1}\cdot a^{-1}=b\cdot a$

又 ∵ G中任意元的逆元都是它自身，且G中每个元素逆元唯一

∴ $a\cdot b=b\cdot a$.

∴ G是交换群

8. ∵ $0\in G$ ∴ G非空

$\forall a,b\in G$，设 $a=k_1m$，$b=k_2m$，则 $a+b=(k_1+k_2)m\in G$. ∴ G关于+封闭。

$\forall c\in G$，设 $c=k_3m$，则 $(a+b)+c=(k_1+k_2)m+k_3m=(k_1+k_2+k_3)m=k_1m+(k_2+k_3)m=a+(b+c)$. ∴ +满足结合律

∵ $0\in G$，$\forall a\in G$，$a+0=0+a=a$ ∴ G有单位元0.

又∵ $\forall a=km\in G$，$\exists a^{-1}=(-km)\in G$，s.t. $a^{-1}+a=a+a^{-1}=0$ ∴ G中任一元素有逆元。

∴ (G,+)为群。

11. ∵ $(1,0)\in G$ ∴ G非空.

∵ $\forall (a,b),(c,d)\in G$，$a,b,c,d\in\mathbb{R}, a\neq 0, c\neq 0 \Rightarrow ac\in\mathbb{R}$，$cb+d\in\mathbb{R}$，$ac\neq 0$.

∴ $(ac, cb+d)\in G$ ∴ G关于运算封闭.

$\forall (e,f)\in G$，$\big[(a,b)(c,d)\big](e,f)=(ac,cb+d)(e,f)=(ace, e(cb+d)+f)$
$=(ace, cbe+de+f)$

$(a,b)\big((c,d)(e,f)\big)=(a,b)(ce, ed+f)=(ace, ceb+ed+f)=\big((a,b)(c,d)\big)(e,f)$

∴ 满足结合律.

又∵ $\forall (a,b)\in G$，$(a,b)(1,0)=(a,b)=(1,0)(a,b)$ ∴ (1,0)为单位元。

且对 $\forall (a,b)\in G$，$(\frac{1}{a},-\frac{b}{a})\in G$. 且 $(a,b)(\frac{1}{a},-\frac{b}{a})=(\frac{1}{a},-\frac{b}{a})(a,b)=(1,0)$

∴ G中任一元素均存在逆元。 ∴ G为群。

12. 由G为幺群，得G非空.

设幺群中单位元为e. 则 $\forall a,b\in G$，$ae=ea=a$，$be=eb=b$.

一方面，若 b 为 a 逆元，则 $ab=ba=e$

∵ 幺群上运算满足结合律 ∴ $aba=(ab)a=ea=a$.

$ab^2a=(ab)(ba)=e\cdot e=e$

另一方面，若 $aba=a$ 且 $ab^2a=e$

则 $(aba)(b^2a)=ab^2a=e$

且 $(aba)(b^2a)=(ab)(ab^2a)=abe=ab$ $\Rightarrow$ $ab=e$.

$(ab^2)(aba)=(ab^2a)(ba)=eba=ba$

且 $(ab^2)(aba)=ab^2a=e$ $\Rightarrow$ $ba=e$

∴ b 为 a 逆元。 ∴ 综上，a 有逆元 b 的充要条件是 $aba=a$，$ab^2a=e$.

13. ∵ $\forall x^{-1}h_1x\in H_1$，$x^{-1}h_2x\in H_1$，$h_1,h_2\in H$.

$(x^{-1}h_1x)(x^{-1}h_2x)=x^{-1}h_1(xx^{-1})h_2x=x^{-1}(h_1h_2)x$

∵ H 为子群 ∴ H 对运算封闭 ∴ $h_1h_2\in H$ ∴ $x^{-1}(h_1h_2)x\in H_1$

∴ H_1 对运算封闭。

∵ H 是 G 的子群

∴ 设 G 单位元为 e，则 $e\in H$.

∴ 令 $h=e$，则 $x^{-1}ex=x^{-1}x=e\in H_1$. ∴ H_1 中有单位元 e.

又 ∵ H 是 G 子群

∴ $\forall h\in H$，$\exists h^{-1}\in H$，h^{-1} 为 h 逆元。

∴ $\forall x^{-1}hx\in H_1$，$\exists x^{-1}h^{-1}x\in H_1$，且 $(x^{-1}hx)(x^{-1}h^{-1}x)=x^{-1}(hh^{-1})x=x^{-1}ex=x^{-1}x=e$，

$(x^{-1}h^{-1}x)(x^{-1}hx)=x^{-1}h^{-1}(xx^{-1})hx=x^{-1}(h^{-1}h)x=x^{-1}x=e$.

∴ H_1 中任一元素都有在 H_1 中的逆元。

15. Klein 四元群运算表如下：

·	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

若 Klein 四元群为循环群，且有生成元 $t\in\{e,a,b,c\}$.

则 $O\langle t\rangle=$ 循环群元素数 $=4$

且 $\forall e^1=e$，$a^2=b^2=c^2=e$

∴ $O\langle e\rangle, O\langle a\rangle, O\langle b\rangle, O\langle c\rangle\leq 2<4$

∴ 不存在这样的生成元。 ∴ 该群不是循环群。