赵晨阳 软01

习题 1.9: 1. 2. 7(3) 8 9(3) 10(1)

Remark: 极值点出现在驻点与不可导点，因为不可导处也可能在某一邻域内某点处为极值

1. 由于Z在R^2上均可微，故极值点一定为驻点

$Z'_1 = 3x^2-6x \quad Z'_2 = 3y^2-6y \quad Z''_{11}=6x-6 \quad Z''_{12}=0=Z''_{21} \quad Z_{22}=6y-6$

$Z'_1=Z'_2=0$时，有驻点 $P_1(0,0)$ $P_2(0,2)$ $P_3(2,0)$ $P_4(2,2)$

$H(P_1)=\begin{pmatrix}-6&0\\0&-6\end{pmatrix}$ 负定，故P_1为极大值点，$Z(P_1)=0$

$H(P_2)=\begin{pmatrix}-6&0\\0&6\end{pmatrix}$ $H(P_3)=\begin{pmatrix}6&0\\0&-6\end{pmatrix}$ 二者不定，故P_2、P_3不为极值点

$H(P_4)=\begin{pmatrix}6&0\\0&6\end{pmatrix}$ 正定 故P_4为极小值点 $Z(P_4)=-8$

Hint: 实对称矩阵：正定：①每个主子式为正；②每个顺序主子式为正 ③λ全正

半正定：①每个主子式≥ 0 ②所有特征值≥ 0

负定：负定矩阵的负阵正定 ①奇次阶顺序主子式为负，偶次阶为正

1-2：由于Z在R^2上均可微，故极值点一定为驻点

$Z=e^{2x}\cdot x+e^{2x}\cdot y^2+2e^{2x}\cdot y \quad Z'_1=e^{2x}(2x+1)+e^{2x}\cdot 2y^2+4e^{2x}y=e^{2x}(2x+2y^2+4y+1)$

$Z'_2=2y\cdot e^{2x}+2e^{2x}=(2y+2)e^{2x} \quad Z''_{11}=e^{2x}\cdot(4x+4y^2+8y+4) \quad Z''_{12}=(4y+4)\cdot e^{2x}=Z''_{21}$

$Z''_{22}=2\cdot e^{2x} \quad Z'_1=Z'_2=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}\ y=-1$ 驻点 $P(\frac{1}{2},-1)$

$H(P)=\begin{bmatrix}2e&0\\0&2e\end{bmatrix}$ 正定 故P为极小值点 $Z(P)=-\frac{e}{2}$

由于Z在R^2上均可微，故极值点一定为驻点

3: $u'_1=\cos x-\cos(x+y+z) \quad u'_2=\cos y-\cos(x+y+z) \quad u'_3=\cos z-\cos(x+y+z)$

$u'_1=u'_2=u'_3=0$则有：$\cos x=\cos y=\cos z=\cos(x+y+z) \quad 0\leq x,y,z\leq\pi$

由$\cos x$在$[0,\pi]$内的单调性：$x=y=z \Rightarrow \cos x=\cos 3x$

① $0\leq x\leq\pi \quad 0\leq 3x\leq 3\pi$ 故$3x=x+2\pi$或$x+3x=2\pi$或$x=3x$；$x+3x=4\pi$， $x_1=\frac{\pi}{2}$；$\cancel{x_2=\pi}$；$\cancel{x_3=0}$

② $\cos 3x-\cos x=-2\sin 2x\cdot\sin\frac{x}{2}$ 故$\sin 2x\cdot\sin\frac{x}{2}=0$ $\therefore x_1=\frac{\pi}{2}$，$\cancel{x_2=\pi}$，$\cancel{x_3=0}$

③ 三倍角公式：$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta \quad e^{3i\theta}=\cos 3\theta+i\sin 3\theta$

$\therefore(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos^3\theta+3\cos^2\theta\cdot i\sin\theta+3\cos\theta(i\sin\theta)^2+(i\sin\theta)^3$

$=(\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta)+i(-\sin^3\theta+3\cos^2\theta\sin\theta)$

$\therefore\cos 3x=\cos^3x-3\cos x\cdot\sin^2x=\cos^3x-3\cos x(1-\cos^2x)=4\cos^3x-3\cos x$

$\therefore\cos 3x-\cos x=4\cos x(\cos^2x-1)=0 \quad \therefore x=\frac{\pi}{2}$或~~0或π~~

综上：$P_1(0,\cancel{0},0)$ $P_2(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ $P_3(\cancel{\pi},\pi,\pi)$

$u''_{11}=-\sin x+\sin(x+y+z) \quad u''_{12}=\sin(x+y+z) \quad u''_{13}=\sin(x+y+z)$

$u''_{22}=-\sin y+\sin(x+y+z) \quad u''_{23}=\sin(x+y+z) \quad u''_{33}=-\sin z+\sin(x+y+z)$

Warning: 极值点均为内点，而0与π为边界点，故对P_1、P_3的讨论均有问题，此处将其列下以示警醒

$$H(P_2)=\begin{bmatrix}-2&-1&-1\\-1&-2&-1\\-1&-1&-2\end{bmatrix}$$ 一阶顺序主子式 $=-2$，二阶顺序主子式 $=3$，三阶顺序主子式 $=-4$

$H(P_2)$负定，P_2为极大值点，$u(P_2)=4$

P_1与P_3为边界点，不能为极值点。

1.4：Z定义在开区间上，且在区间上任一点可微，故极值点均为驻点。

$Z_1'=1-x_2\frac{1}{x_1^2}$ $\quad Z_i'=\frac{1}{x_{i-1}}-\frac{x_{i+1}}{x_i^2}\ (2\le i\le n-1)$ $\quad Z_n'=\frac{1}{x_{n-1}}-\frac{2}{x_n^2}$

$Z_1'=Z_2'=\cdots=Z_{n-1}'=Z_n'=0$时，有 $x_{n-1}=\frac{x_n^2}{2}$ $\quad x_i^2=x_{i-1}x_{i+1}\ (2\le i\le n-1)$ $\quad x_2=x_1^2$

$x_1=x_2/x_1=x_3/x_2=\cdots=x_n/x_{n-1}=2/x_n$，设为$q$ $(q>1)$

$\Rightarrow x_1=q\quad x_2=q^2\ \cdots\ x_n=q^n$ 且 $q^{n+1}=2$ $\therefore q=2^{\frac{1}{n+1}}$，设$P$点为$(q,q^2,\cdots,q^n)$

$$H=\begin{bmatrix}\frac{2x_2}{x_1^3}&-\frac{1}{x_1^2}&&&&\\-\frac{1}{x_1^2}&\frac{2x_3}{x_2^3}&-\frac{1}{x_2^2}&&&\\0&-\frac{1}{x_2^2}&\frac{2x_4}{x_3^3}&-\frac{1}{x_3^2}&&\\&&\cdots&\cdots&&\\&&&-\frac{1}{x_{n-2}^2}&\frac{2x_n}{x_{n-1}^3}&-\frac{1}{x_{n-1}^2}\\&&&&-\frac{1}{x_{n-1}^2}&\frac{4}{x_n^3}\end{bmatrix}_{n\times n}$$

记$x_{n+1}=2$，即为$\frac{2x_{n+1}}{x_n^3}$

记H的n阶代数余子式为t_n.

$t_n=\frac{2x_{n+1}}{x_n^3}\cdot t_{n-1}-\left(\frac{1}{x_{n-1}^2}\right)^2\cdot t_{n-2}$

由数学归纳法有

$t_k=\frac{2x_{k+1}}{x_k^3}\cdot t_{k-1}-\frac{t_{k-2}}{x_{k-1}^4}\ (3\le k\le n)$

$t_1=\frac{2x_2}{x_1^3}=\frac{2}{q}>0$；$t_2=\frac{4x_2x_3}{x_1^3x_2^3}-\frac{1}{x_1^4}=3\cdot\frac{1}{q^4}>0$

$t_3=\frac{2q^4}{q^9}\cdot t_2-\frac{t_1}{q^8}=\frac{4}{q^9}>0$

假设 $t_k=\frac{k+1}{q^{k^2}}$，$t_{k-1}=\frac{k}{q^{(k-1)^2}}$成立，则 $t_{k+1}=\frac{2q^{k-2}}{q^{3k+3}}\cdot\frac{k+1}{q^{k^2}}-\frac{1}{q^{4k}}\cdot\frac{k}{q^{(k-1)^2}}=\frac{k+2}{q^{(k+1)^2}}$

而t_2与t_1符合通式，故t_k符合通式$(1\le k\le n)$

由数学归纳法，$t_k>0\ (1\le k\le n)$，故H正定。

综上，P为Z的极小值点，极小值为$(n+1)2^{\frac{1}{n+1}}$

1.5：u定义在开区间上，且在区间上任一点可微，故极值点均为驻点。

$u_1'=1-\frac{y^2}{4x^2}$ $\quad u_2'=\frac{1}{2x}y-\frac{z^2}{y^2}$ $\quad u_3'=\frac{2}{y}z-\frac{2}{z^2}$

$u_1'=u_2'=u_3'=0$，可知 $y^2=4x^2$ $\quad y^3=2xz^2$ $\quad y=z^3$ 又 $x,y,z>0$

故而 $z^8=1$，而$x,y,z\in R$ $\therefore z=1$，P点$(\frac{1}{2},1,1)$

$u_{11}''=\frac{y^2}{2}\cdot\frac{1}{x^3}$ $\quad u_{12}''=-\frac{1}{2x^2}y$ $\quad u_{13}''=0$ $\quad u_{22}''=\frac{1}{2x}+\frac{2z^2}{y^3}$ $\quad u_{23}''=-\frac{2}{y^2}z$

$u_{33}''=\frac{2}{y}+\frac{4}{z^3}$

$$H(P)=\begin{bmatrix}4&-2&0\\-2&3&-2\\0&-2&6\end{bmatrix}$$

一阶主子式 $=4$ 正定

二阶主子式 $=8$ 故P为极小值点

三阶主子式 $=32$ $u(P)=4$

2. 设 $f(x,y,z(x,y))=2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$.

$\frac{\partial f}{\partial x}=4x+2z\cdot z_1'+8z+8z_1'x-z_1'=0$ $\frac{\partial f}{\partial y}=4y+2z\cdot z_2'+8x\cdot z_2'-z_2'=0$

$\therefore z_1'=\frac{-4x-8z}{2z+8x-1}$ $z_2'=\frac{-4y}{2z+8x-1}$ $z_1'=z_2'=0$时, $y=0$, $x=-2z$.

代入 $f(x,y,z)=0$, 解之有 (x,y,z) 为 $P_1(-2,0,1)$; $P_2(+\frac{16}{7},0,-\frac{8}{7})$

$$z_{11}''=\frac{(-4-8z_1')(2z+8x-1)-(2z'+8)(-4x-8z)}{(2z+8x-1)^2}=\frac{-28x+4}{(7x-1)^2}$$

$$z_{12}''=\frac{-8z_2'(2z+8x-1)-2z_2'\cdot(-4x-8z)}{(2z+8x-1)^2}=0$$

$$z_{22}''=\frac{-4(2z+8x-1)-(2z_2')(-4y)}{(2z+8x-1)^2}=\frac{-28x+4}{(7x-1)^2}$$

故 $H(p_1)=\begin{bmatrix}\frac{4}{15} & 0\\ 0 & \frac{4}{15}\end{bmatrix}$ 正定. 故 P_1 为 z 的极小值点, 极小值为 1.

$H(p_2)=\begin{bmatrix}-\frac{4}{15} & \\ & -\frac{4}{15}\end{bmatrix}$ 负定. 故 P_2 为 z 的极大值点, 极大值为 $-\frac{8}{7}$

7.3. 有界闭集上连续函数一定有最大最小值, 又 u 在题设闭集内处处可微, 故条件极值点必为 Lagrange函数驻点

$L=x^2+y^2+z^2+\lambda(\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}-1)$

$\frac{\partial L}{\partial x}=2x+\frac{\lambda}{8}x=0$ ——① $\frac{\partial L}{\partial y}=2y+\frac{2\lambda}{9}y=0$ ——②

$\frac{\partial L}{\partial z}=2z+\frac{\lambda}{2}z=0$ ——③ $\frac{\partial L}{\partial \lambda}=\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}-1=0$ ——④

解之有 $\begin{cases}\lambda=-16\\ z=0\\ y=0\\ x=\pm4\end{cases}$ $\begin{cases}\lambda=-9\\ x=0\\ z=0\\ y=\pm3\end{cases}$ $\begin{cases}\lambda=-4\\ x=0\\ y=0\\ z=\pm2\end{cases}$

$\frac{x}{2}\cdot①+\frac{y}{2}\cdot②+\frac{z}{2}\cdot③$ 可得:

$x^2+\frac{\lambda}{16}x^2+y^2+\frac{\lambda}{9}y^2+z^2+\frac{\lambda}{4}z^2=0$

$(x^2+y^2+z^2)+\lambda(\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4})=0$

$\therefore \lambda=-(x^2+y^2+z^2)=-u$

$\therefore u_{max}=(-\lambda)_{max}=16$ $u_{min}=(-\lambda)_{max}=4$

8. u 连续可微, 在球内部最值必在驻点取得

$u=(x-y)^2+(z-y)^2$ $u_x'=2(x-y)$ $u_y'=-2(x-y)-2(z-y)$ $u_z'=2(z-y)$

$u_x'=u_y'=u_z'=0\Rightarrow$ 驻点 $x=y=z$. 将其代入 u 有 $u=0$, 又 $u\geq0$, 且可在 $x^2+y^2+z^2\leq4$ 范围内寻得无穷多组 (x,y,z) 符合条件. 故 $u_{min}=0$.

最大值点应在边界上求得: $x^2+y^2+z^2=4$.

$f=(x-y)^2+(y-z)^2+\lambda(x^2+y^2+z^2-4)$ $f_x'=2(x-y)+2x\lambda$ $f_y'=2(y-x)+2(y-z)+2\lambda y$

$f_z'=2(z-y)+2\lambda z$. $f_\lambda'=x^2+y^2+z^2-4$ 四者为0,则:

① $\lambda=-1$, $y=0$. $(x,z)=(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ 或 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

② $\lambda=0$, $x=y=z=\pm\frac{2}{3}\sqrt{3}$

③ $\lambda=1$, (x,y,z) 为 $(\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{2}{3}\sqrt{6},\frac{\sqrt{6}}{3})$ 或 $(-\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{2\sqrt{6}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{3})$

将②代入 u 有 $u=0$, 即为最小值

将①代入 u 有: $u=4$

将③代入 u 有: $u=12$, 即为最大值

9.3: 内接长方体体积为 $V=|8xyz|$;由对称性,不妨设 $x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$,则 $V=8xyz$

$V\geq 0$ 而 $x=0$ 时,V恰好为0,故 $V_{min}=0$.

$f=8xyz+\lambda(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1)$ $f'_x=8yz+\frac{2\lambda}{a^2}x=0$ —① $f'_y=8zx+\frac{2\lambda}{b^2}y=0$ —②

$f'_z=8xy+\frac{2\lambda}{c^2}z=0$ —③ $f'_\lambda=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ —④

由①②③: $4xyz=-\frac{\lambda x^2}{a^2}=-\frac{\lambda y^2}{b^2}=-\frac{\lambda z^2}{c^2}$ 代入④有: $xyz=-\frac{\lambda}{12}$.

①·x有: $\frac{\lambda x^2}{a^2}=-4xyz$ $\therefore x^2=\frac{a^2}{3}$,同理: $y^2=\frac{b^2}{3}$; $z^2=\frac{c^2}{3}$

故 $xyz=\sqrt{x^2y^2z^2}=\frac{\sqrt{3}}{9}abc$

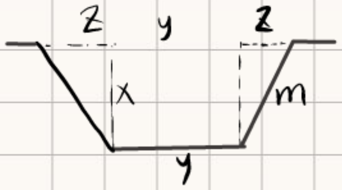
$\therefore V_{max}=\frac{8}{9}\sqrt{3}abc$

remark: 实际上求 $8xyz$ 的max 也是求 xyz 的max.
设为 $L=xyz-\lambda(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1)$ 即可

而当四个顶趋于 $(a,0,0)$,另四个顶点趋于 $(-a,0,0)$ 时,$V\to 0$

$\therefore V_{min}=0$

10.1:



$C=2\sqrt{x^2+z^2}+y$; $(2y+2z)\cdot x/2=S$

$\therefore f=2\sqrt{x^2+z^2}+y+\lambda(xy+xz-S)$

$f'_x=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{x^2+z^2}}+\lambda(y+z)=0$ —① $f'_y=1+\lambda x=0$ —②

$f'_z=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2z}{\sqrt{x^2+z^2}}+\lambda x=0$ —③ $f'_\lambda=xy+xz-S=0$ —④

$\therefore$ ②有 $x=-\frac{1}{\lambda}$ 代入③: $x=\sqrt{3}z$ 代入①有: $y=\frac{2}{3}\sqrt{3}x$,代入④有: $x=\sqrt{\frac{S}{\sqrt{3}}}$

又 $\because C=2\sqrt{x^2+z^2}+y$ 在 $(x,y,z)\to(+\infty,+\infty,+\infty)$ 时函数值 $\to+\infty$

故在曲面 $xy+yz-S=0$ 上有最小值

此时 $m=2z$ $y=2z$

$\therefore$ 上底:下底:腰 $=1:2:1$