Jordan normal form

如何对一个线性映射$L:V\to V$找到你需要的基，使得这个映射在这组基下为*Jordan normal form*

也就是对于映射的初始表示矩阵A，计算使得出$P^{-1}AP=J$

其中P矩阵的每一列代表一个基向量，每个基向量都可以由自然基的线性组合表示。而V空间的自然基就选择最自然的即可，比如$V=C^2$则选择$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix}i\\0\end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix}0\\i\end{bmatrix}$

$V=P_4$*, the real vector space space of all real polynomials of degree at most 4.*注意到次数不大于4的多项式空间的维度为5，选择的基为0，x，x^2，x^3，x^4

按照如下步骤进行计算，考试的时候只需要按照标题走就可以了，具体的细节不清楚了再回顾。

一、选出自然基并且计算出映射L的初始表示矩阵A

$\mathbf{L([e_1,e_2,.....e_n])=[e_1,e_2,.....e_n]A}$

二、对A计算特征多项式

$\mathbf{A=(x-\lambda_1)^{t_1}...(x-\lambda_n)^{t_n}}$

t_1是λ_1对应的广义特征空间的维度，也就是λ_1对应的所有*Jordan block*的大小之和。

求得大小之后后，需要计算λ_1对应几块*Jordan block*。

三、对每个特征值λ_i计算几何重数，并记录对应特征向量

解方程$\mathbf{(A-\lambda I)=0}$，记录解出的特征向量，且解出的向量个数即是几何重数，即是λ_1对应的所有*Jordan block*的个数，同时也是$dim(ker(A-\lambda I))=n-rank(A-\lambda I)$。

马上就能得知$A-\lambda I$的$rank$。

接下来注意一件事，我们在二中，根据代数重数，算出了λ_1对应的所有*Jordan block*的大小之和，接下来根据几何重数算出了λ_1对应的所有*Jordan block*的个数。问题在于，知道这些信息后，倘若没有巧合，不足以我们推导出每个*Jordan block*的大小。

所谓的巧合，比如代数重数是3，几何重数是2，那么显然是$1+2$型。但如果代数重数是4，几何重数是2，没法直接确定是$2+2$还是$1+3$。

这个确定方法放在最后，我们不要偏离主线，因为**大多时候都是巧合的。**

四、对λ_i的某个具体大小的$jordan$块，计算出广义特征向量

比如已知λ_i的某个$jordan$块的大小是m，任意选择λ_i的某个特征向量x_1，开始辗转计算：

$((\mathbf{A}-\lambda_\mathbf{i}\mathbf{I})\mathbf{x_k}=\mathbf{x_{k-1}}$，直到计算出m个广义特征向量，并且写成特征向量链的形式，也就是x_1、$x_2...x_n$。那么对应的$jordan$块就是

$$\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \lambda_i & 1 & \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & & \cdot \end{bmatrix}$$，大小为m。

五、计算出λ_i的其他$jordan$块，同上计算，顺次排列

六、对于其他的特征值，不断重复直到完全写出所有$jordan$块

注意到之前我们已经按照顺序排列出了特征向量链x_1、$x_2...x_n, y_1, y_2...y_m$，顺次写出即为矩阵$P$。用这些列向量去组合自然基，即是我们为映射$L$找的基。

附录.关于不是巧合的情况

记特征值λ具体大小为k的jordan块的个数为n_k，使用如下公式：

$(\mathbf{d_k}=\mathbf{rank}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{\mathbf{k+1}}+\mathbf{rank}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{\mathbf{k-1}}-\mathbf{2rank}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{\mathbf{k}}$

注意，虽然公式在这里，**但是大多时候都是巧合，如果出现了不是巧合的情况，一定检查下是否是算错了！**