

第九周习题课 三重积分

例.1 (三重积分) 设 V 是锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 和球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 所围成的区域, 积分

$$\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz =$$

例.2 求 $\iiint_{\Omega} (1 + x^2 + y^2) z dx dy dz,$

例.3 设 $f(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, $F(t) = \iiint_{\Omega} (z^2 + f(x^2 + y^2)) dx dy dz$, 其中

$$\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq h, x^2 + y^2 \leq t^2\} \quad (t > 0). \text{ 求 } \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(t)}{t^2}.$$

.

例.4 求三重积分: $I = \iiint_{\Omega} (x + y + z) dv$, 其中

$$\Omega = \{(x, y, z) | \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}$$

例.5 求由曲面 $S: (x^2 + y^2)^2 + z^4 = z^2$ 所围立体 Ω 的体积。

例.6 设 $A = (a_{ij})$ 为 3×3 实对称正定矩阵, $\sum_{i,j=1}^3 a_{ij} x_i x_j = 1$ 表示三维空间的一个椭球面。证明该

$$\text{椭球面所包围立体 } V \text{ 的体积为 } |V| = \frac{4\pi}{3\sqrt{\det A}}.$$

例.7 令曲面 S 在球坐标下方程为 $r = a(1 + \cos \theta)$, Ω 是 S 围成的有界区域, 计算 Ω 在直角坐标系下的形心坐标。

例.8 由六个平面 $3x - y - z = \pm 1, -x + 3y - z = \pm 1, -x - y + 3z = \pm 1$ 所围立体的体积为_____

例.9 设 $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, $h = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} > 0$, $f(u)$ 在区间

$[-h, h]$ 上连续, 证明: $\iiint_V f(ax + by + cz) dx dy dz = \pi \int_{-1}^1 (1 - t^2) f(ht) dt$ 。