

8. 推论2.4.1. 假设简单图 G 中任意两点 v_i, v_j , 恒有 $d(v_i) + d(v_j) \geq n$.
则此图存在哈密顿回路

假设 $\exists v_i$ 与 v_j 有 $d(v_i) + d(v_j) < n$. 则在 G_n 中删去 v_i, v_j 与其所连边后, $M(G_{n-2}) \leq M(K_{n-2}) = (n-2)(n-3)/2 = (n^2 - 5n + 6)/2$

另一方面 $M(G_{n-2}) \geq M(G_n) - (d(v_i) + d(v_j))$ ("="当且仅当 $(v_i, v_j) \in E(G_n)$ 时可取)
 $> \frac{1}{2}(n-1)(n-2) + 2 - n = (n^2 - n + 6)/2$
发生矛盾

故 $\forall v_i, v_j \in V(G_n)$ 且 $v_i \neq v_j$, 有 $d(v_i) + d(v_j) \geq n$
故 G 存在H回路

12. 不可能!

即寻找特定的H-道路. (此图当然有H-道路, 但起点与终点不一定符合要求)
将 $3 \times 3 \times 3$ 立方体建模为 $G = (V, E)$ V 为所有顶点, 相邻两顶点间有面相连则视为有边

故可获27个顶点与相连的面构成二分图.

即所有与八个顶角与六个面心构成 V_1 , 十二个棱心与一个体心构成 V_2 . E 全由 $(v_x, v_y) | v_x \in V_1, v_y \in V_2$ 构成

注意到 V_1 有14个点, V_2 有13个点

V_2 中点完全去掉后, 形成14个连通支
故 G 无哈密顿回路

区分:H-回路与H-道路!

进一步: 此题更要求从顶角走到体心. 即 V_1 出发的H道路最终停在 V_2 .
 V_1 含14个点, V_2 含13个点. 故 V_1 比 V_2 多一个点. 因而从 V_1 出发的H道路最终必回到 V_1

故不存在这样的H-道路

另一方面, H-道路问题也可转化为H-回路问题

取 V_1 中一个点为 v_x , V_2 中一个点为 v_y . 连接 (v_x, v_y) . 则将此问题转化为H-回路.
从 v_x 出发回到 v_x . 而此二分图无H-回路, 理由同上, 故此问题无解

