第四次习题课　曲面，曲线，Taylor 公式，无条件极值

例1.　求曲面 $S: 2x^2 - 2y^2 + 2z = 1$ 上切平面与直线 $L: \begin{cases} 3x - 2y - z = 5 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 平行的切点的轨迹。

解：(1) 直线 $L: \begin{cases} x = x \\ y = 4x + 5 \\ z = -5x - 5 \end{cases}$ 的方向：$\vec{\tau} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$.

$f(x,y,z)=0$

切点为 $P(x,y,z)$ 处曲面 S 的法向：$\vec{n} = 4x\vec{i} - 4y\vec{j} + 2\vec{k}$.

(2) 所求轨迹：$\vec{n} \perp \vec{\tau} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{\tau} = -4x + 16y + 10 = 0$, ①

轨迹为空间曲线：$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 8y = 5 & ① \\ 2x^2 - 2y^2 + 2z = 1 & ② \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x \\ y = (2x-5)/8 \\ z = (-60x^2 - 60x + 57)/64 \end{cases}$

例2.　证明球面 $S_1: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 与锥面 $S_2: x^2 + y^2 = a^2 z^2$ 正交.

证明　所谓两曲面正交是指它们在交点处的法向量互相垂直.

记 $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$, ① $G(x,y,z) = x^2 + y^2 - a^2 z^2$ ②

曲面 S_1 上任一点 $M(x,y,z)$ 处的法向量是

$$gradF(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)^T \quad \text{或者 } \vec{v}_1 = (x,y,z)^T$$

曲面 S_2 上任一点 $M(x,y,z)$ 处的法向量为 $\vec{v}_2 = (x, y, -a^2 z)^T$.

设点 $M(x,y,z)$ 是两曲面的公共点，则在该点有

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = (x,y,z)^T \cdot (x, y, -a^2 z) = x^2 + y^2 - a^2 z^2 = 0$$

即在公共点处两曲面的法向量相互垂直，因此两曲面正交.

例3.　通过曲面 $S: e^{xyz} + x - y + z = 3$ 上点 $(1, 0, 1)$ 的切平面（　B　）

（A）通过 y 轴；　　（B）平行于 y 轴；

（C）垂直于 y 轴；　　（D）A，B，C 都不对.

解题思路　令 $F(x,y,z) = e^{xyz} + x - y + z - 3$. 则 S 在其上任一点 M 的法向量为

$$\text{grad}\, F(M) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)\Big|_M$$

$\frac{\partial F}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial y} \cdots = 0$

于是 S 在点 M $(1, 0, 1)$ 的法向量为

$$(yze^{xyz} + 1, xze^{xyz} - 1, xye^{xyz} + 1)\Big|_{(1,0,1)} = (1,0,1)$$

因此，切平面的方程为 $(x-1) + (z-1) = 0$. S 在 $(1, 0, 1)$ 的法向量垂直于 y 轴，从而切平面平行于 y 轴. 但是由于原点不在切平面，故切平面不含 y 轴.

例4. S 由方程 $ax + by + cz = G(x^2 + y^2 + z^2)$ 确定，试证明：曲面 S 上任一点的法线与某

① $\vec{v_1}$ 和 $\vec{v_2}$ 不平行 $\Rightarrow \vec{v_1} \times \vec{v_2} \neq 0$ ①

$\vec{r_1} - \vec{r_2} \perp \vec{v_1} \times \vec{v_2}$　② $\exists\, t_1, t_2$ s.t. $\vec{r_1} - \vec{r_2} = t_1\vec{v_1} - t_2\vec{v_2}$

$(\vec{v_1}\times\vec{v_2})\cdot(\vec{r_1}-\vec{r_2})=0$ ②

$l_1: \vec{p_1}=\vec{r_1}+t_1\vec{v_1}$

$l_2: \vec{p_2}=\vec{r_2}+t_2\vec{v_2}$

$\vec{p}=\vec{r_1}+t_1\vec{v_1}=\vec{r_2}+t_2\vec{v_2}$

定直线相交。 $\vec{r_1}$

证明：曲面上任意一点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的法线为

$$\frac{x-x_0}{a-2x_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2)}=\frac{y-y_0}{b-2y_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2)}=\frac{z-z_0}{c-2z_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2)} \quad \vec{v_1}$$

设相交的定直线为 $\dfrac{x-x_1}{\alpha}=\dfrac{y-y_1}{\beta}=\dfrac{z-z_1}{\gamma}$，与法线向交： (x_1,y_1,z_1) $\vec{r_2}$ (α,β,γ) $\vec{v_2}$

$\left(a-2x_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2),b-2y_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2),c-2z_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2)\right)$ 不平行于 (α,β,γ)

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = x_3\vec{i}+y_3\vec{j}+z_3\vec{k}$$

$$\left[\left(a-2x_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2),b-2y_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2),c-2z_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2)\right)\times(\alpha,\beta,\gamma)\right]\cdot(x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0)=0$$

$\vec{v_1}\times\vec{v_2}\neq 0$

$$\begin{vmatrix} a-2x_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2) & b-2y_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2) & c-2z_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2) \\ \alpha & \beta & \gamma \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} \vec{r_1}-\vec{r_2} \\ \vec{v_1} \\ \vec{v_2} \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \end{vmatrix}+2G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2)\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}=0$$

只要取 $(\alpha,\beta,\gamma)=(a,b,c)$，$(x_1,y_1,z_1)=(0,0,0)$ 即可.

例5. 在椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 上求一点，使椭球面在此点的法线与三个坐标轴的正向成等角。

解：椭球面在此点的法线矢量为 $(1,1,1)$，设该点为 (x_0,y_0,z_0)，则有

$$gradF\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}=\left(\frac{2x_0}{a^2},\frac{2y_0}{b^2},\frac{2z_0}{c^2}\right)=k(1,1,1)$$

该点坐标为 $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a^2,b^2,c^2)$

例6. 求螺线 $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \\ z=ct \end{cases}$；$(a>0,c>0)$，在点 $M(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{\pi c}{4})$ 处的切线与法平面.

解 由于点 M 对应的参数为 $t_0=\dfrac{\pi}{4}$，所以螺线在 M 处的切向量是

$\vec{P_0} = \vec{P_1} + t_0\vec{v}$

$$\vec{v} = (x'(\pi/4),\ y'(\pi/4),\ z'(\pi/4)) = (-a/\sqrt{2},\ a/\sqrt{2},\ c)$$

因而所求切线的参数方程为 $\begin{cases} x = a/\sqrt{2} - a/\sqrt{2}\,t, \\ y = a/\sqrt{2} + a/\sqrt{2}\,t, \\ z = (\pi/4)c + ct, \end{cases}$

$x'(x-x_0)+y'(y-y_0)+z'(z-z_0)=0$

法平面方程为 $-\left(a/\sqrt{2}\right)(x - a/\sqrt{2}) + \left(a/\sqrt{2}\right)(y - a/\sqrt{2}) + c(z - (\pi/4)c) = 0$

二．Taylor 公式

$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)$

$+\begin{pmatrix}x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix}^T \begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{pmatrix}_{(x_0,y_0)} \begin{pmatrix}x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix}$

例7. 函数 x^y 在 $x=1, y=0$ 点的二阶 Taylor 多项式为 ________。

【答案】$1+(x-1)y$

例8. 函数 $f(x,y) = \dfrac{\cos x}{y+1}$ 在点 $(0,0)$ 的带 Lagrange 余项的 Taylor 展开式为

________________________________。

【答案】$f(x,y) = 1 - y + \dfrac{1}{2}(x,y)\begin{pmatrix} -\dfrac{\cos\theta x}{1+\theta y} & \dfrac{\sin\theta x}{(1+\theta y)^2} \\ \dfrac{\sin\theta x}{(1+\theta y)^2} & \dfrac{2\cos\theta x}{(1+\theta y)^3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\quad \theta\in(0,1)$

例9. 二元函数 $\sin(xy)$ 在点 $(1,1)$ 处的二阶 Taylor 多项式为________。

【答案】

$$\sin 1 + (\cos 1)(x-1) + (\sin 1)(y-1) - \tfrac{1}{2}(\sin 1)((x-1)^2 + (y-1)^2) \\ + (\cos 1 - \sin 1)(x-1)(y-1)$$

例10. $x+y+z+xyz^3 = 0$ 在点 $(0,0,0)$ 邻域内确定隐函数 $z=z(x,y)$．求 $z(x,y)$ 在原点的带 Peano 余项的二阶 Taylor 公式.

【解】$z(0,0)=0$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = -1$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0,0) = 0$$

$z(x,y)$ 在原点的带 Peano 余项的二阶 Taylor 公式为 $z = -x - y + o\left(\rho^3\right)$

$f(x_0,y_0)$ 是极值. ① $\frac{f(x_0,y_0)}{\partial x} = \frac{f(x_0,y_0)}{\partial y} = 0$

② Hessen 矩阵正定. 负定. 不定.

三. 极值

例11. 设可微函数 f(x, y)在(x_0, y_0)取得极小值，则下列结论正确的是？

（A） $f(x_0,y)$在$y=y_0$处导数大于零;（B） $f(x_0,y)$在$y=y_0$处导数等于零;

（C） $f(x_0,y)$在$y=y_0$处导数小于零;（D） $f(x_0,y)$在$y=y_0$处导数不存在.

答案：（B）

例12. 已知函数 f(x, y)在（0, 0）某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2} = 1$，

则

(A)点(0, 0)不是 f(x, y)的极值点；(B)点(0, 0)是 f(x, y)的极大值点；

(C)点(0, 0)是 f(x, y)的极小值点；(D)根据所给条件无法判断(0, 0)是否 f(x, y)的极值点；

答案（A）

$f(x,y) = xy + (x^2+y^2)^2 + o((x^2+y^2)^2)$

分析：由已知极限得知：f(0, 0)=0, 且 $f(x,y)-xy=(x^2+y^2)^2+\cancel{o(1)}$，当|x|, |y|充分小。于是 $f(x,y)-f(0,0)=xy+(x^2+y^2)^2+o(1)$；

$= xy + o(xy)$

于是当 y=x 充分小，$f(x,y)-f(0,0)=xy+(x^2+y^2)^2+o(1)>0$

$(x^2+y^2)^2 \geq 2|xy|$

当 y=-x 充分小，$f(x,y)-f(0,0)=-x^2+4x^4+o(1)<0$

$f(0,0)=0$ $\quad \geq 4(xy)^2$

所以选（A）

例13. 函数 $z(x,y)$在有界闭区域 D 上连续，在 D 内部偏导数存在，$z(x,y)$在 D 的边界上的值为零，在 D 内部满足 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=f(z)$，其中 f 是严格单调函数，且 $f(0)=0$，

证明 $z(x,y)\equiv 0$， $((x,y)\in D)$.

$z(x_0,y_0) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ $\quad z \neq 0,\ f(z) \neq 0$

矛盾！

证明：假设 $z(x,y)$ 不恒为 0，不妨设其在区域 D 上某点 P(x_0,y_0)处取极大值，则有

$f(z) = 0$

$f(z)|_P=0$，这与 f 是严格单调函数矛盾。

例14. 求函数 $z=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ 的极值.

解：

$$z'_x=\left(2x-2x(x^2+y^2)\right)e^{-(x^2+y^2)}=0$$

$$z'_y=\left(2y-2y(x^2+y^2)\right)e^{-(x^2+y^2)}=0$$

驻点为 $(0,0)$ 与曲线 $x^2+y^2=1$ 上的所有的点．在 $(0,0)$ 点，

$$z''_{xx}(0,0)=2,\quad z''_{xy}(0,0)=0,\quad z''_{yy}(0,0)=2$$

$(0,0)$ 点是极小值点，极小值为 0 .

设 $t=x^2+y^2$， $z=te^t$， $t=1$ 是其驻点，且 $z''(1)<0$，函数 $z=\left(x^2+y^2\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}$ 在曲线 $x^2+y^2=1$ 上取到极大值 e^{-1} .

例15. （隐函数的极值）设 $z=z(x,y)$ 由 $2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$ 确定，求该函数的极值.

解：
$$4xdx+4ydy+2zdz+8xdz+8zdx-dz=0$$

$$dz=-\frac{4x+8z}{2z+8x-1}dx-\frac{4y}{2z+8x-1}dy$$

$x^2+y^2=1$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{4x+8z}{2z+8x-1}=0 & ① \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{4y}{2z+8x-1}=0 & ② \\ 2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0 & ③\end{cases}$$

三个方程联立，得驻点 $(-2,0)$, $\left(\frac{16}{7},0\right)$.

在 $(-2,0)$ 点

$$\left[z''_{xy}(-2,0)\right]^2-z''_{xx}(-2,0)z''_{yy}(-2,0)=-\frac{16}{15}<0$$

且 $z''_{xx}(-2,0)=\frac{4}{15}>$， $(-2,0)$ 点是极小值点；

在 $\left(\frac{16}{7},0\right)$ 点

$$\left[z''_{xy}\left(\frac{16}{7},0\right)\right]^2-z''_{xx}\left(\frac{16}{7},0\right)z''_{yy}\left(\frac{16}{7},0\right)=-\frac{16}{15}<0$$

且 $z''_{xx}\left(\frac{16}{7},0\right)=-\frac{4}{15}<0$， $\left(\frac{16}{7},0\right)$ 点是极大值点.