第十三次习题课　函数项级数 Fourier 级数

一. 函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots$$

(1) 收敛域

- 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 是定义在 D 上的一个函数项级数，$x_0 \in D$，若数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛，则称 x_0 是 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的一个**收敛点**。所有收敛点构成的集合称为级数的**收敛域**。

(2) 和函数的概念

- 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域为 I，则任给 $x \in I$，存在惟一的实数 $S(x)$，使得 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 成立。定义在 I 上的函数 $S(x)$ 称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的**和函数**。

1. 讨论下列级数的收敛域

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n^2}$：　$D = \left\{ x \in R \,\middle|\, |x - k\pi| \le \frac{\pi}{6}, k = 0, \pm 1, \cdots \right\}$；　$\frac{(2\sin x)^n}{n^2}$　$|2\sin x| \le 1$　$|2\sin x| > 1$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$：$|\sin(nx)| \le 1$　$D = (-\infty, +\infty)$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{200}} x^n$：$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n$　$D = \{0\}$；　$\frac{\left(\frac{nx}{e}\right)^n}{n^{200}}$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} n! e^{nx}$：$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n$　$D = \phi$　$\left(\frac{n}{e^{-x-1}}\right)^n$

(3) 幂级数及其收敛半径、收敛区间（指开区间）和收敛域

幂级数：$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$

- 若 $R \ge 0$ 满足：

（1）当 $|x|<R$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛；（2）当 $|x|>R$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散，

则称 R 为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的**收敛半径**，开区间 $(-R,R)$ 称为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的**收敛区间**。

- **收敛域**：考虑 $x=\pm R$ 两个端点的收敛性
- 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的系数 a_n 满足 $a_n \neq 0$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$，则其收敛半径为 $R=\frac{1}{\rho}$。
- 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的系数 a_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho$，则其收敛半径为 $R=\frac{1}{\rho}$。

2. 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+2)}(x-a)^n$ 在点 $x_1=-2$ 条件收敛，则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)^2}(x-a)^n$

>0　　$-1 \le -2-a < 0$

在点 $x_1=\frac{1}{2}$ 的收敛情况是 [　　]　　[C]　　$-2 < a \le -1$

$\frac{3}{2} \le x-a < \frac{5}{2}$

(A) 绝对收敛. (B) 条件收敛. (C) 发散. (D) 不能确定.

3. 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n}$ 在 $x=2$ 收敛，则实参数 a 的取值范围是____________。

$-1 \le \overset{2}{x} - a < 1$

解：显然 $R=1$，且收敛域为　$a-1 \le x < a+1$，
级数在 $x=2$ 收敛，则有　$a-1 \le 2 < a+1$，因此应有 $1 < a \le 3$。

4. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处条件收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ [　　]

$\sum(-2)^n a_n$ 条件收敛

$\left|\frac{(-2)^{n+1}a_{n+1}}{(-2)^n a_n}\right| \le 1$

（A）绝对收敛，（B）条件收敛 ，（C）发散 ，（D）不定。　　[A]

5. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $\mathbf{1}$，记级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+1)x^n$ 的收敛

$\sum a_n x^n$　　$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le \frac{1}{2}$

半径为 r，则必有 [　　].

(A) $r=1$. (B) $r \le 1$. (C) $r \ge 1$. (D) r 不能确定.　$\lim\limits_{n\to\infty} a_n+1 \to 0$

$a_n = (\frac{1}{6^n} - 1)$

$a_n = \frac{1}{n!} - 1$，$a_n + 1 = \frac{1}{n!}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+1)x^n$ 的收敛半径 $r=+\infty$。　　（ C ）

$|a_n| \le 1$

6. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n+(-3)^n}x^{2n}$ 的收敛域为_______________.

$a_n = \frac{1}{n!} - 1$　　$a_n + 1 = \frac{1}{n!}$

$\sum(\frac{1}{6^n} - 1)x^n$ 半径1　　$\sim (\frac{n}{e})^n$　　$\sum\frac{x^n}{n!} = e^x$

$\frac{(\frac{1}{6^{n+1}}-1)x^{n+1}}{(\frac{1}{6^n}-1)x^n} = x$　　$\frac{x^n}{6^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n3^n}{2^n+(-3)^n} \to \infty$$

解: $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{n+1}{2^{n+1}+(-3)^{n+1}}x^{2(n+1)}}{\dfrac{n}{2^n+(-3)^n}x^{2n}}\right|=\frac{x^2}{3}$$

$|x|<\sqrt{3}$ 时收敛，收敛半径 $R=\sqrt{3}$. 当 $x=\pm\sqrt{3}$ 时，通项不趋于零，级数发散. 故收敛域为 $\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$

7. 已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛域为 **[−8，8]**，则 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{a_nx^n}{n(n-1)}$ 的收敛半径 R 为[　　].

（A） $R\ge 8$.　（B） $R\le 8$.　（C） $R=8$.　（D）不定.

$S_n(x)=\sum\frac{a_nx^n}{n(n-1)}$

$S_n'(x)=\sum\frac{a_nx^{n-1}}{n-1}$

$S_n''(x)=\sum a_nx^{n-2}$

$x^2S_n(x)=\sum a_nx^n$

[C]　(收敛的幂级数及其导数和积分有相同的收敛半径)

8. Lebnize 判别法用于收敛域的判断

求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{x}{2x+1}\right)^n$ 的收敛域.

解: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}(t)^n$ 的收敛半径 $R=1$, 确由 Leibnize 法则，收敛域为 $t\in[-1,1)$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a}{n}$　　$a=-1$　　$a\to 0$

解 $-1\le\dfrac{x}{2x+1}<1$，关于 x 的收敛域为 $\left\{x\middle|x<-1,\text{或}\ge-\dfrac{1}{3}\right\}$.

$\left|-1\le\frac{x}{2x+1}<1\right|$

(4) 幂级数的和函数

9. 常数项级数的和　　(分拆法)

求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ 的和

$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

解：部分和 $$S_m=\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{m+1}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2}\right)$$

$$\lim_{m\to\infty}S_m=\frac{1}{4}.$$

解法二：记 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+2}}{n(n+1)(n+2)}$

$\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$　　$\frac{x^n}{n}$　　$\sum x^{n-1}$

$S''(x)=\frac{1}{x(1-x)}$

$S'(x)=\int_0^x S''(t)dt$

$S(x)=\int_0^x S'(t)dt$

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$

$$S''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$$

$$S'(x)=\int_0^x-\ln(1-x)dx=(1-x)\ln(1-x)+x$$

$$S(x)=\int_0^x[(1-x)\ln(1-x)+x]dx=-\frac{1}{2}(1-x)^2\ln(1-x)+\frac{1}{4}(1-x)^2+\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4}$$

$$S(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{4}$$

10. 求 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ 的和函数.

$\sum_{n=0}^{\infty}x^{4n}$ $\quad \sum(x^4)^n$

$\frac{1}{1-x^4}$

$\boxed{\int_0^x\frac{1}{1-\cancel{t^4}}dt}$

解：设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$，收敛域为 $(-1,1)$．在收敛域内，

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{4n}=\frac{1}{1-x^4}, \qquad f(x)=\int_0^x\frac{1}{1-x^4}dx=\cdots$$

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t^2}+\frac{1}{1+t^2}\right)$

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)$ arctant

$\ln(1-t)$ $\quad \ln(1+t)$

11. 求 $\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$ 的和函数.

$S_n(x)=\sum n^2x^{n-1}$

解：设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$ $\quad \int\left(\frac{1}{x}\int S_n(x)\right)$ $\quad \sum x^n=\frac{1}{1-x}$

$$\int_0^x f(x)dx=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x n^2x^{n-1}dx=\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}nx^n}$$

$$\int_0^x\frac{1}{x}\left[\int_0^x f(x)dx\right]dx=\int_0^x\left[\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\right]dx=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$$

$\frac{x}{(1-x)^2}$

$$\frac{1}{x}\left[\int_0^x f(x)dx\right]=\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1-x}\right)=\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$f(x)=\frac{d}{dx}\frac{x}{(1-x)^2}=\frac{1+x}{1-x}$$

12. 设 $f_n(x)$ 满足 $f_n'(x)=f_n(x)+x^{n-1}e^x$（$n$ 为正整数），

且 $f_n(1)=\frac{e}{n}$，求函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 之和。

解：$f_n(x)=e^x\frac{x^n}{n}$，　　$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)=e^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=e^x\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$

$\sum\frac{x^n}{n}$　$\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$

$(-1,1)$　$(1,3)$

$\int\frac{1}{1-x}dx=-\ln(x-1)$

$\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|$

$\ln(x-1)$

13. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$ 的和.　　答案：3

14. 设参数 $a>1$，求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a^n}$ 的和.

$\sum\frac{2n}{2^n}-\sum\frac{1}{2^n}$

$\sum n x^n$　$x=\frac{1}{2}$　$2\cdot\frac{\frac{1}{2}}{(\frac{1}{2}-1)^2}-1$　4

15. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{n!}$ 的和为[　　]

(A) $2e^{-1}$。(B) 0。(C) e^{-1}　(D) $e^{-1}-1$。　　[B]

$S_n(x)$

$x\sum\frac{x^{n-1}n}{(n-1)!}$　$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$

$x\sum\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}$　$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$　e^x

$xS_n(x)=xe^x+e^x$

$S_n(x)=e^x+\frac{1}{x}e^x$

(5) 幂级数在其收敛区间内的基本性质

- **两级数和的收敛半径：** 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 R_1，$\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径为 R_2，一般情况下，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ 的收敛半径为 $R=\min\{R_1,R_2\}$，且

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n,\quad x\in(-R,R)。$$

- **和函数的连续性：** 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域 I 上连续，

即任给 $x_0\in I$，有

$$\lim_{x\to x_0}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\lim_{x\to x_0}a_nx^n\right)\lim_{x\to x_0}S(x)=S(x_0)$$

- **和函数的可积性与逐项积分性质**

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域 I 上可积，且可逐项积分，即任给 $x\in I$，有

$$\int_0^x S(t)dt=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n\right)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^x a_nt^ndt\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+}$$

若记$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为R，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 的收敛半径为R_1，则$R \le R_1$。且逐项积分后的幂级数收敛域不会变小。

- **和函数的可导性与逐项求导公式：** 幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数$S(x)$在其收敛区间

  $(-R,R)$内可导，且可逐项求导，即任给$x \in (-R,R)$，有

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

16. 已知$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{a_n x^n}$ 的收敛域为$[\mathbf{-8}，\mathbf{8}]$，则$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n(n-1)}$

 的收敛半径$\boldsymbol{R}$为[　　].
（A）$\boldsymbol{R \ge 8}$.（B）$\boldsymbol{R \le 8}$.（C）$\boldsymbol{R = 8}$.（D）不定.
[C]　(收敛的幂级数及其导数和积分有相同的收敛半径)

(6)初等幂级数展开式函

- 直接展开法

直接展开法指的是：利用泰勒级数的定义及泰勒级数收敛的充要条件，将函数在某个区间上直接展开成指定点的泰勒级数的方法。

由直接展开法易知函数$e^x, \cos x, \sin x, \ln(1+x), (1+x)^\alpha$的麦克劳林级数展开式为：

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n，\quad x \in (-\infty,+\infty)，$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}，\quad x \in (-\infty,+\infty)，$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}，\quad x \in (-\infty,+\infty)，$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n，\quad x \in (-1,1]，$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n，$$

其中，当$\alpha \le -1$ 时，$x \in (-1,1)$；当$-1 < \alpha < 0$ 时，$x \in (-1,1]$；当$\alpha > 0$ 时，$x \in [-1,1]$。

特别地，当 $\alpha=-1$ 时，有 $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$，$x\in(-1,1)$。

● 间接展开法

间接展开法指的是：通过一定运算将函数转化为其他函数，进而利用新函数的幂级数展开将原来函数展开为幂级数的方法。所用的运算主要是加法运算，数乘运算，（逐项）积分运算和（逐项）求导运算。利用的幂级数展开公式主要是一些简单函数的麦克劳林展开公式，上述几个简单函数就是常用的几个。间接展开法是将函数展开成幂级数的主要方法。

$-\sum(-x)^n$　　$\sum(-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{1+x}$

17. 设 $f(x)$ 的 Maclaurin 级数为 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n$，

$a_n=\begin{cases}1 & n=3k+1\\ 0 & else\end{cases}$

又 $g(x)=\frac{xf(x)}{1+x}$，求 $g(x)$ 的 Maclaurin 级数。　$\sum a_n x^{cn+b}$

解：$f(x)=\frac{x}{1+x}$，$g(x)=\frac{x^2}{(1+x)^2}$，　$f(x)=1-\frac{1}{1+x}$　$f(x)=\sum x^{3n+1}=\sum a_n x^n$

$(x-a)$

f(x) 和函数.

$$\frac{1}{(1+x)^2}=-\left(\frac{1}{1+x}\right)'=-(1-x+x^2+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots)'$$

$$=1-2x+3x^2+\cdots+(-1)^{n-1}nx^{n-1}+\cdots$$

$\frac{1}{(1+x)^2}$

故
$$g(x)=\frac{x^2}{(1+x)^2}=x^2\left(1-2x+3x^2+\cdots+(-1)^{n-1}nx^{n-1}+\cdots\right)$$

$=-\left(\frac{1}{1+x}\right)'$

************************** $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ ***************************************

$\sum(-1)^n x^n$

18. 求函数 $f(x)=\frac{x-1}{(x+1)^2}$ 在 $x=1$ 处的幂级数，并求收敛域.

$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot n\cdot x^{n+1}$

解：　$\frac{1}{(x+1)^2}$

$$\frac{f(x)}{x-1}=\frac{1}{(x+1)^2}=-\left(\frac{1}{x+1}\right)'=-\left(\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}}\right)'=-\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{2^n}\right]'$$

$\sum a_n(x-1)^{cn+b}$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2^{n+1}}(x-1)^n$$

收敛半径 $R=2$，$x=-1,3$ 时幂级数发散，故收敛域为 $(-1,3)$.　$\frac{1}{1+x}=\sum(-1)^n\cdot x^n$

$|x-1|<2$

$x-1=\pm2$　$(-1)^n\frac{n}{2}$

19. 设 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^3}$，则 $f^{(100)}(0)=$________________.

$\dfrac{x}{1+x^3}=\sum(-1)^n x^{3n+1}$

解：$f(x)=\dfrac{x}{1+x^3}=x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n}=\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$,

$f^{(3n+1)}(0)=(-1)^n(3n+1)!$

$n=33$，

$f^{(100)}(0)=-100!$

$\dfrac{f^{(100)}(0)}{100!}x^{100}=(-1)^{33}\cdot x^{100}$

$f^{(99)}(0)=0$

20. 求函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{(x+1)^2}$ 在 $x=1$ 处的幂级数，并求收敛域.

解：
$$\frac{f(x)}{x-1}=\frac{1}{(x+1)^2}=-\left(\frac{1}{x+1}\right)'=-\left(\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}}\right)'=-\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{2^n}\right]'$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2^{n+1}}(x-1)^n$$

收敛半径 $R=2$， $x=-1,\,3$ 时幂级数发散，故收敛域为 $(-1,\,3)$

21. 将函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{(x+1)^2}$ 在 $x=1$ 处展成幂级数，并求收敛区间。

解： 因为 $\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\ x\in(-1,1)$，所以

$$f(x)=\frac{x-1}{(x+1)^2}=-(x-1)\left(\frac{1}{1+x}\right)'=-(x-1)\left(\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}}\right)'$$
$$=-\frac{(x-1)}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{2^n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n\frac{(x-1)^n}{2^{n+1}},$$

收敛区间为 $(-1,3)$。

22. 函数 $f(x)=xe^x$ 在 $x=1$ 处的幂级数展开式为 $e\left[1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{(n-1)!}+\dfrac{1}{n!}\right)(x-1)^n\right]$。

解：由 $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}x^n\ \ (x\in(-\infty,+\infty))$，对函数 $f(x)=xe^x$ 进行间接展开

$\sum\dfrac{x^{n+1}}{n!}$

$f(x)=xe^x=e[(x-1)e^{x-1}+e^{x-1}]$

$e\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{n+1}}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{n}}{n!}\right]$

$$\begin{aligned}
xe^x &= e[(x-1)e^{x-1}+e^{x-1}] \\
&= e\left[(x-1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x-1)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x-1)^n\right] \\
&= e\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}\right)(x-1)^n\right]。
\end{aligned}$$

23. 将 $f(x)=\arctan\dfrac{2x}{1-x^2}$ 展开为 x 的幂级数。 $f(x)=\arctan\frac{2x}{1-x^2}$

解： 注意到 $f(x)=\arctan\dfrac{2x}{1-x^2}=\arctan(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1+x})$

$f'(x)=\frac{1}{1+(\frac{2x}{1-x^2})^2}\cdot\frac{2(1-x^2)+2x\cdot 2x}{(1-x^2)^2}$

$$f'(x)=\frac{2}{1+x^2}=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}，\text{则当 } |x|<1 \text{ 时有}$$

$=\frac{2}{1+x^2}$

$$f(x)=\int_0^x\frac{2}{1+t^2}dt=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^{2n}dt=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}.$$

$\frac{1}{1+t}=\sum(-1)^n t^n$

$t = x^2$，x^m

二．Fourier 级数

定义在 $[0,l]$ 上的函数可以有多种方式展开成 $2l$ 三角级数，但常用的方式只有三种，即：周期奇延拓、周期偶延拓、周期延拓。三种延拓方式得到的三角级数展开式分别为：

正弦级数展开 $f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\dfrac{n\pi}{l}x$， $x\in[0,l]$，（周期为 $2l$ ）。

其中 $b_n=\dfrac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\dfrac{n\pi}{l}xdx \quad (n=1,2,3,\cdots)$。

余弦级数展开 $f(x)\sim\dfrac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\dfrac{n\pi}{l}x$， $x\in[0,l]$，（周期为 $2l$ ）。

其中 $a_n=\dfrac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\dfrac{n\pi}{l}xdx \quad (n=0,1,2,\cdots)$。

(2) 狄利克雷（Dirichlet）定理

设 $f(x)$ 是周期为 2π 的可积函数，且满足

（1） $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续或只有有限个第一类间断点，

（2） $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上只有有限个单调区间，

则 $f(x)$ 的以 2π 为周期的傅里叶级数收敛，且

$a_n = \frac{1}{l}\int f(x)\cos nx\,dx$

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)=\frac{1}{2}\left(f(x^+)+f(x^-)\right)$$

$S(x)=\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ $B=(\sin nx, \cos nx)$

24. 已知 $f(x)=x+1, x\in[0,1]$，$S(x)$ 是 $f(x)$ 的周期为1的三角级数的和函数，则 $S(0), S(\frac{1}{2})$ 的值分别为 $\underline{\frac{3}{2}}$，$\underline{\frac{3}{2}}$。

$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

$A=(\vec{A_1}, \vec{A_2}, \vec{A_3}, \vec{A_4})$

$\vec{a}=\sum_{i=1}^{4}c_i\vec{A_i}$

$B=(\vec{B_1}\ \vec{B_2}\ \vec{B_3}\ \vec{B_4})$

$\vec{a}=\sum_{i=1}^{4}d_i\vec{B_i}$

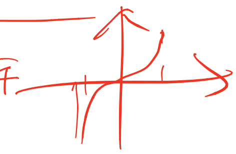
25. 证明 $\forall x\in(-\pi,\pi)$，成立 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx=\frac{\pi^2}{12}-\frac{x^2}{4}$.

26. 设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x,\quad x\in(-\infty,+\infty)$，其中

奇延拓

$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,dx,\qquad f(x)=x^2, x\in[0,1]\ (n=1,2,\cdots)$，求 $S(-\frac{1}{2})$.

$-\frac{1}{4}$



27. 将函数 $f(x)=x^2\quad x\in(0,\pi)$ 按下列要求展开成 Fourier 级数：

(1) 按正弦 Fourier 展开；　(2) 按余弦 Fourier 展开.

$\frac{2}{l}\int_0^1 \sin n\pi x\,dx$

$\frac{x^2}{4}$ $(-\pi,\pi]$ 偶

$B=[\vec{B_1}\ \vec{B_2}\ \vec{B_3}\ \vec{B_4}]\ \frac{x^2}{4}=\frac{\pi^2}{12}-\sum a_n\cos nx$

$\vec{a}=\sum d_i\vec{B_i}$

$d_i=\vec{a}^T\vec{B_i}$

$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x^2}{4}\cos nx\,dx$

$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$