2010 级多元微积分期中考题（A）

系名________________ 班级______________ 姓名______________ 学号___________

一．填空题（每空 3 分，共 15 空）（请将答案直接填写在横线上！）

1. 将定义在区间 $(0,\pi)$ 上的函数 e^x 展成周期为 2π 的正弦级数，记 $S(x)$ 为级数的和函数，则 $S(0)=$________________________。

2. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to 0}}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=$__________________。

3. 设 $z=f(x+y,x-y)$，其中 $f\in C^{(1)}$，则 $dz=$______________________________。

4. 设 $z=x^y$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$___________________________。

5. 方程 $xy+z\ln y+e^{yz}=e$ 在 $(0,1,1)$ 点附近确定隐函数 $z=z(x,y)$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$__________。

6. 设 $y=y(x),z=z(x)$ 为由方程组 $\begin{cases}x+y+z=0\\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\end{cases}$ 确定的隐函数，$c^2y\neq b^2z$，则 $\dfrac{dy}{dx}=$_______________________。

7. 函数 $x+y^2+z^3$ 在点 $(1,1,1)$ 处沿方向 $\left(\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5},0\right)$ 的方向导数为__________。

8. 函数 x^2+y^2 在点 $(1,2)$ 处函数值**增大**最快的方向为____________________________。

9. 设 $\begin{cases}x=\cos\varphi\cos\theta\\ y=\cos\varphi\sin\theta\end{cases}$，则它的 Jacobi 矩阵的**行列式** $\det\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(\varphi,\theta)}=$__________________。

10. 参数曲面 $x=u+v,y=uv,z=u\sin v$ 在 $(u,v)=(1,0)$ 处的切平面方程为___________。

11. 曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\ z=x^2+y^2\end{cases}$ 在点 $(1,-1,2)$ 处的切线方程为___________________________。

12. 曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 在点 $(1,-2,2)$ 处的法线方程为________________________。

13. 曲面$z=\arctan\dfrac{y}{x}$在点$\left(1,1,\dfrac{\pi}{4}\right)$处的单位法向量为______________________________。

14. M 是曲线$x=t, y=t^2, z=t^3$上的一点，此点处切线平行于平面$x+2y+z=4$，则 M 点的坐标为__________________。

15. 函数$f(x,y)=e^x(\sin y+\cos y)$在$(0,0)$点的带有 Peano 余项的二阶 Taylor 公式为

____。

二．计算题（每题 10 分，共 40 分）

1．求函数$f(x)=\begin{cases}\pi-x, & -\pi\le x\le 0\\ \pi+x, & 0\le x\le\pi\end{cases}$的 Fourier 级数，并求数项级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$的和。

2．设$f(u,v)\in C^{(2)}(R^2)$，$z=z(x,y)$为由方程$x+y=f$（x,z）确定的隐函数，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

3．设$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^4}$，研究$f(x,y)$在$(0,0)$点的连续性、偏导数的存在性以及可微性（要说明理由）。

4．求函数$f(x,y)=xy$在集合$D=\left\{(x,y)\big|(x-1)^2+y^2\le 1\right\}$上的最大值和最小值。

三．证明题

1．(8 分) 设$F(x,y,z)$有连续的一阶偏导数$\dfrac{\partial F}{\partial x},\dfrac{\partial F}{\partial y},\dfrac{\partial F}{\partial z}$，并且满足$y\dfrac{\partial F}{\partial x}-x\dfrac{\partial F}{\partial y}+\dfrac{\partial F}{\partial z}\ge\alpha>0$，其中$\alpha$为常数，证明$\displaystyle\lim_{t\to+\infty}F(-\cos t,\sin t,t)=+\infty$。

2．（7 分）设$D=\left\{(x,y)\big||x|\le a,|y|\le b,a>0,b>0\right\}$，二元函数$f\in C^{(2)}(D)$，且在$D$内满足$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\ne 0$，证明函数$f(x,y)$的最大值和最小值只能在$D$的边界上取得。