# 第 11 次习题课题目

## 第 1 部分 课堂内容回顾

### 1. 广义积分的概念

(1) **右端点为奇点的情形:**

(a) **广义积分的定义:** 设 $a \in \mathbb{R}$, $\omega \in (a, +\infty]$, 而 $f : [a, \omega) \to \mathbb{R}$ 使得 $\forall A \in (a, \omega)$, 函数 $f$ 在 $[a, A]$ 上均为可积. 定义 $f$ 在 $[a, \omega)$ 上的广义积分为

$$\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{A \to \omega^-} \int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x.$$

若该极限收敛, 称广义积分 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 否则称发散. 广义积分也称反常积分.

(b) **奇点的定义:** 通常 $\omega = +\infty$, 或 $\omega \in \mathbb{R}$ 但函数 $f$ 在 $\omega$ 的邻域内无界, 此时称 $\omega$ 为 $f$ 的奇点, 相应的广义积分被称为无穷限积分或瑕积分.

(c) **广义积分存在的局部性:** $\forall A \in [a, \omega)$ 以及 $c \in [a, A]$, 我们有

$$\int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^A f(x)\,\mathrm{d}x.$$

由此可知 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 的敛散性仅与函数 $f$ 在 $\omega$ 的邻域内的性质有关.

(d) **广义积分与正常积分的关系:** 如果 $\omega \in \mathbb{R}$ 而 $f \in \mathscr{R}[a, \omega]$, 则 $f$ 在 $[a, \omega]$ 的任意闭子区间上均可积, 并且我们还有

$$\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{A \to \omega^-} \int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x.$$

此时正常的定积分与广义积分一致.

(2) **右端点为奇点的情形:** 若 $b \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 使得 $\omega < b$, 而函数 $f : (\omega, b] \to \mathbb{R}$ 在 $(\omega, b]$ 的任意的闭子区间上可积, 此时可以类似地定义广义积分

$$\int_\omega^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{B \to \omega^+} \int_B^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

该广义积分与前述广义积分具体类似的性质.

(3) **多个奇点的情形:** 若 $f$ 有多个奇点, 此时可将整个区间分割成若干个小区间使得 $f$ 在每一个小区间上只有一个奇点且该点为小区间的端点, 随后在每个小区间上定义广义积分, 最后将上述广义积分之和定义为 $f$ 在原来那个区间上的广义积分. 可以证明上述定义不依赖区间的分割方式. 有鉴于此, 通过坐标变换, 我们总可以将问题归结为研究形如 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 这样的广义积分.

### 2. 广义积分的性质与计算

(1) **广义积分的性质:** 广义积分自然继承了正常的定积分的性质, 比如说线性性, 保序性, Newton-Leibniz 公式, 分部积分, 换元法等等.

(2) **广义积分的计算:**

(a) **Newton-Leibniz 公式:** 若 $f \in \mathscr{C}[a,\omega)$ 在 $[a,\omega)$ 上有原函数 $F$, 则

$$\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x = F\Big|_a^\omega = F(\omega-0) - F(a).$$

**注:** 根据上述公式, 计算广义积分的首要方法是: 先求原函数, 再带入两端点的值.

(b) **分部积分公式:** 若假设下述极限均存在, 则

$$\begin{aligned}\int_a^\omega u(x)\,\mathrm{d}v(x) &= \lim_{A\to\omega^-}\int_a^A u(x)\,\mathrm{d}v(x)\\ &= \lim_{A\to\omega^-}\left(uv\Big|_a^A - \int_a^A v(x)\,\mathrm{d}u(x)\right)\\ &= uv\Big|_a^\omega - \int_a^\omega v(x)\,\mathrm{d}u(x).\end{aligned}$$

**注:** 此处常见的错误是在第二行中的两个极限均不存在的情形应用四则运算法则!

(c) **典型的广义积分:** 设 $p \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

1) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \begin{cases}\frac{1}{p-1}, & 若\ p>1,\\ +\infty, & 若\ p<1.\end{cases}$ 2) $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \begin{cases}+\infty, & 若\ p>1,\\ \frac{1}{1-p}, & 若\ p<1.\end{cases}$

3) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x} = +\infty$, 4) $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x} = +\infty$.

5) $\int_1^{+\infty}\log x\,\mathrm{d}x = +\infty$. 6) $\int_0^1\log x\,\mathrm{d}x = -1$.

**3. 广义积分收敛性的判别**

(1) **判别准则:**

(a) **Cauchy 准则:** 设 $a\in\mathbb{R}$, $\omega\in(a,+\infty]$, 而 $f:[a,\omega)\to\mathbb{R}$ 使得 $\forall A\in(a,\omega)$, 函数 $f$ 在 $[a,A]$ 上可积. 则广义积分 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛当且仅当 $\forall\varepsilon>0$, $\exists c\in(a,\omega)$ 使得 $\forall A_1,A_2\in(c,\omega)$, 均有 $|\int_{A_1}^{A_2}f(x)\,\mathrm{d}x|<\varepsilon$.

(b) **比较法则:** 假设函数 $f,g:[a,\omega)\to[0,+\infty)$ 在 $[a,\omega)$ 的任意闭子区间上可积且存在 $C>0$ 以及 $c\in[a,\omega)$ 使得 $\forall x\in[c,\omega)$, 均有 $|f(x)|\leqslant C|g(x)|$,

1) 若广义积分 $\int_a^\omega g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则广义积分 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 也收敛.

2) 若广义积分 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散, 则广义积分 $\int_a^\omega g(x)\,\mathrm{d}x$ 也发散.

**注:** 只能对非负函数应用比较法则.

(c) **比较法则的推论.** 假设函数 $f,g:[a,\omega)\to[0,+\infty)$ 在 $[a,\omega)$ 的任意闭子区间上可积且 $\lim\limits_{x\to\omega^-}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha\in[0,+\infty]$.

1) 若 $\alpha\in(0,+\infty)$, 则广义积分 $\int_a^\omega g(x)\,\mathrm{d}x$ 和广义积分 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 同敛散.

2) 若 $\alpha=0$ 且广义积分 $\int_a^\omega g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则广义积分 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

3) 若 $\alpha=+\infty$ 且广义积分 $\int_a^\omega g(x)\,\mathrm{d}x$ 发散, 则广义积分 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

(d) **常用的比较函数:** $\frac{1}{x^p}$ 与 $\frac{\log x}{x^p}$, 其中 $p\in\mathbb{R}$.

(2) **绝对收敛与条件收敛:** 设函数 $f:[a,\omega)\to\mathbb{R}$ 在 $[a,\omega)$ 的任意闭子区间上均可积.

(a) 若广义积分 $\int_a^\omega |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则称广义积分 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

(b) 若广义积分 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛但非绝对收敛, 则称广义积分 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 条件收敛.

(c) 若广义积分 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 绝对收敛, 则广义积分 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 但反过来不对.

(c) **Abel-Dirichlet 判别准则:** 设 $f, g : [a, \omega) \to \mathbb{R}$ 在 $[a, \omega)$ 的任意闭子区间上可积.

1) **(Abel 判别准则)** 若 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 而 $g$ 单调有界, 则 $\int_a^\omega f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

2) **(Dirichlet 判别准则)** $\forall A \in [a, \omega)$, 定义 $F(A) = \int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x$. 若 $F$ 有界, 而 $g$ 单调且 $\lim\limits_{x \to \omega^-} g(x) = 0$, 则 $\int_a^\omega f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

(3) **Euler 积分:**

(a) $\Gamma$ **函数:** $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$, 其中 $s \in \mathbb{R}$.

1) Gamma 函数 $\Gamma(s)$ 收敛当且仅当 $s > 0$.

2) $\forall s > 1$, 均有 $\Gamma(s) = (s-1)\Gamma(s-1)$.

3) **余元公式:** $\forall s \in (0, 1)$, 均有 $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin s\pi}$. 特别地, 我们有

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}e^x} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

(b) **Beta 函数:** $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$, 其中 $p, q \in \mathbb{R}$.

1) 广义积分 $B(p, q)$ 收敛当且仅当 $p, q > 0$.

2) $\forall p, q > 0$, 均有 $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

## 第 2 部分 习题课题目

**1.** 计算下列广义积分:

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+5x^2)\sqrt{1+x^2}}$, (2) $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2}\,\mathrm{d}x$,

(3) $\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}\,\mathrm{d}x$, (4) $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{e^{2x}-1}}$.

**2.** 设 $\alpha > 0$. 计算 $I = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin\beta x\,\mathrm{d}x$, $J = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos\beta x\,\mathrm{d}x$.

**3.** 求 $a > 0$ 使得 $\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

**4.** 已知 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$, 求 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x\cos x}{x}\,\mathrm{d}x$ 以及 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

**5.** 判断下列广义积分的敛散性, 其中 $p \in \mathbb{R}$ (若被积函数变号, 还须指出是否为条件收敛或绝对收敛):

(1) $\int_1^{+\infty} \frac{x\log x}{\sqrt{x^5+1}}\,\mathrm{d}x$, (2) $\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin x}}$,

(3) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^p}\,\mathrm{d}x$, (4) $\int_1^{+\infty} \left(\log(\frac{1+x}{x-1})\right)^p \mathrm{d}x$ $(p > 0)$,

(5) $\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}(1-x)^2}\,\mathrm{d}x$, (6) $\int_0^{+\infty} (-1)^{[x^2]}\,\mathrm{d}x$,

(7) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x$, (8) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{x^p}\,\mathrm{d}x$,

(9) $\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos\sqrt{2x}-\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x$, (10) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p+\sin x}\,\mathrm{d}x$,

(11) $\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^p}\,\mathrm{d}x$, (12) $\int_0^1 \frac{\log x}{x^p}\,\mathrm{d}x$,

(13) $\int_0^1 \frac{\ln(\cos x)}{x^p}\,\mathrm{d}x$, (14) $\int_0^{+\infty} \sin(x^p)\,\mathrm{d}x$ $(p > 0)$.

**6.** 若 $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ 单调且 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \alpha \neq 0$ ($\alpha$ 可为 $\pm\infty$) , 而 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 求证: $\lim\limits_{x\to 0^+} xf(x) = 0$.

**7.** 设 $a \in \mathbb{R}$, 而 $f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ 在 $[a,+\infty)$ 的任意闭子区间上可积.

(1) 若 $f$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续且 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 求证: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

(2) 若 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 而 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \alpha$ (可为 $\pm\infty$), 求证: $\alpha = 0$.

(3) 若 $f$ 单调且 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 求证: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

(4) 若 $f$ 单调且 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 求证: $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$.

(5) 若 $f$ 连续可导且 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_a^{+\infty} f'(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 求证: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

(6) 若 $f$ 连续可导、单调且 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 求证: $\int_a^{+\infty} xf'(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

(7) 若 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 绝对收敛且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, 求证: $\int_a^{+\infty} (f(x))^2\,\mathrm{d}x$ 收敛.

(8) 若 $f$ 连续可导、单调且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, 求证: $\int_a^{+\infty} f'(x)\sin^2 x\,\mathrm{d}x$ 收敛.