2012 级微积分 A（2）期中考题 A

系名__________　　班级__________　　姓名__________　　学号__

一.　填空题（每空 3 分，共 15 分）（请将答案直接写在横线上！）

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,+\infty)} \frac{xy}{x^2+y}$ = __________。

2. 函数 f(x,y) = $\begin{cases} y\ln(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$ 在（0，0）点是否连续？__________ 。（填"是"或"否"）。

3. 设 f(x,y) = (x + y)$\sin\frac{1}{x^2+y^2}$, $(x^2+y^2\neq 0)$, 则$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)$ = __________ 。

4. 函数 f(x , y)可微，且在点 P_0 处沿 l_1 = （$\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}$）的方向导数为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，沿 l_2 = （$\frac{3}{5}$，$\frac{4}{5}$）的方向导数为$\frac{1}{5}$，则$\frac{\partial f}{\partial x}|P_0$ = __________。

5. 二元函数 x^2+xy+y^2 在点（-1,1）处增长最快的方向为 __________。

6. 设 z(x,y）= e^{x^2y},则 dz = __________。

7. 设 y(x) = f(2x, x^2),其中 f 为可微函数，则$\grave{y}(x)$= __________ 。

8. 设$\begin{cases} f(u,v)=u+v, \\ g(u,v)=uv, \end{cases}$ $\begin{cases} u=x+y, \\ v=x-y, \end{cases}$ 则$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}$ = __________。

9. 设 z = z(x,y) 是由方程x^2 + y + z = e^{-z}所确定的隐函数，则$\frac{\partial z}{\partial x}(1,e)$ = __________。

10. 函数 f(x,y) = $\frac{1}{x+y}$ 在点（1,0）处带 Peano 余项的二阶 Taylor 展式为__________。

11. 曲面(x + y + z)e^{xyz} = 3e 在点(1,1,1)处的切平面方程为__________。

12. 曲面$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases}$在点（2,1,1）处的切向量为__________。

13.曲线 $x = 3t,\ y = 3t^2, z = t^3$ 上一点 P_0 的切线与平面 $x+y+z = 3$ 平行，则 P_0 的坐标为__________。

14.设函数 $F（x,y） = \int_1^{\infty} t^{x-1}\, e^{-yt} dt,(x,y>0)$,则$\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} =$ __________。

15.设$\varphi（t） = \int_{2t}^{t^2} \frac{\sin tx}{x} dx,\ t > 0$,则$\varphi'(t) =$ __________。

二． 计算题（每题 10 分，共 40 分）

1. 讨论函数 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 y)}{x^2+y^2}, x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, \quad x^2+y^2 = 0 \end{cases}$,在（0,0）点连续性，偏导的存在性以及可微性。

2. 设$\varphi \in C^{(2)}(R)$,函数 $z=z(x,y)$由 $x + y - z = \varphi(x+y+z)$给出，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

3. 求函数 $f(x,y) = x^2+y^2 - xy - x - y$ 在闭单位圆盘$x^2+y^2 \leq 1$ 上的最大值和最小值。

4. 设 $b > a > 0$ 为任意实数，计算广义积分$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x} \cos x dx$。

三．证明题

1. （6 分）设$\lim\limits_{y \to y_0} \varphi(y) = a(a \epsilon R)$, $\lim\limits_{x \to x_0} \Psi(x) = 0$, 且$|f(x,y) - \varphi(y)| \leq \Psi(x)$,$(x,y) \epsilon R^2$,证明：$\lim\limits_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x,y) = a$。

2. （9 分）设 $f（x,y）\epsilon C^{(2)}(R^2)$,且$\forall（x,y） \epsilon R^2$,$f(x,y)>0$, $f''_{xy}(x,y)f(x,y) \equiv f'_x(x,y) f'_y(x,y)$

证明：（1）$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{f'_x}{f}\right\} \equiv 0$;

(2)$\exists \varphi, \Psi \epsilon C^2(R)$,使得 $f(x,y) = \varphi(x)\Psi(y),(x,y)\epsilon R^2$。