7. G为群，故G非空，$\forall a,b\in G$，有 $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$ 而G中所有元的逆元是其本身

$\therefore (ab)^{-1}=ab$ 且 $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}=ba$

$\therefore ab=ba$ $\therefore$ ab为交换群

8. $\because 0\in G$，故G非空

①封闭：$\forall a,b\in G$，则 $\exists k_1,k_2\in Z$ $a=k_1m$ $b=k_2m$ $a+b=(k_1+k_2)m\in G$.

②结合：$\forall c\in G$，$\exists k_3\in Z$ 使得 $c=k_3m$ $(a+b)+c=(k_1+k_2)m+k_3m=(k_1+k_2+k_3)m$

$a+(b+c)=k_1m+(k_2+k_3)m=(k_1+k_2+k_3)m$ 故 $(a+b)+c=a+(b+c)$

③幺元：$0\in G$．$\forall a\in G$ 有 $a+0=0+a=a$，故0为幺元

④逆元：$\forall a\in G$，$\exists k\in Z$，$a=km$，则 $\exists a^{-1}=-km$ $a+a^{-1}=a^{-1}+a=0$

即G中任意元素均有逆元，且逆元 $\in G$.

综上，$(G,+)$ 为群

11. $(a,b)(c,d)=(ac,cb+d)$

$\because (1,0)\in G$，故G非空．

①封闭：$\forall (a,b)(c,d)\in G$，则 $a,b,c,d\in R$，$a\neq 0$，$c\neq 0$，$cb+d\in R$，$ac\neq 0$ 且 $ac\in R$，故

$(a,b)(c,d)=(ac,cb+d)\in G$.

②结合：$\forall (e,f)\in G$，$[(a,b)(c,d)](e,f)=(ac,cb+d)(e,f)=(ace,ecb+ed+f)$

$(a,b)[(c,d)(e,f)]=(a,b)(ce,ed+f)=(ace,bce+ed+f)$

③幺元：$\forall (a,b)\in G$，$(a,b)(1,0)=(a,b)$ $(1,0)(a,b)=(a,b)$ $\therefore (1,0)$ 为单位元

④逆元：$\forall (a,b)\in G$，取 $(\frac{1}{a},-\frac{b}{a})\in G$，且 $(\frac{1}{a},-\frac{b}{a})(a,b)=(a,b)(\frac{1}{a},-\frac{b}{a})=(1,0)$.

即G中任意元素均有逆元，且逆元 $\in G$

综上G为群

12. G为幺群，故G非空．设单位元为e，则：$\forall a,b\in G$．$ae=ea=a$ $eb=be=b$

①若 $b=a^{-1}$，则 $ab=ba=e$．而幺群符合结合律

$\therefore aba=(ab)a=ea=a$ $ab^2a=(ab)(ba)=e^2=e$

②若 $aba=a$ 且 $ab^2a=e$．故 $(aba)(b^2a)=ab^2a=e$

而 $(aba)(b^2a)=(ab)(ab^2a)=(ab)e=ab$ 故 $ab=e$．b为右逆

$(ab^2)(aba)=(ab^2a)ba=e(ba)=ba$

而 $(ab^2)(aba)=ab^2a=e$ 故 $ba=e$．b为左逆

综上：$b=a^{-1}$

③综上：b为 a^{-1} 的充要条件为 $aba=a$ 且 $ab^2a=e$

13. ① 封闭性：$\forall x^{-1}h_1x \in H_1, x^{-1}h_2x \in H_1, h_1,h_2 \in H$

$(x^{-1}h_1x)(x^{-1}h_2x) = x^{-1}(h_1h_2)x$ H为G子群. 故H对运算封闭, 故 $h_1h_2 \in H$.

$\therefore x^{-1}(h_1h_2)x \in H_1$

② 单位元：设e为G的单位元. 则 $e \in H$. 令 $h=e$. 则 $x^{-1}hx = x^{-1}ex = e \in H_1$.

③ 逆元：因为H为子群, $\forall h \in H$, $\exists h^{-1} \in H$, h^{-1}为h逆元

$\forall x^{-1}hx \in H_1$, $\exists x^{-1}h^{-1}x \in H_1$, 且 $x^{-1}hx \cdot x^{-1}h^{-1}x = x^{-1}h^{-1}x \cdot x^{-1}hx = e \in H_1$

故 H_1中任意元素均有逆元, 且逆元 $\in H_1$

综上, H_1为G子群.

15.

klein运算表如下：

·	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

设klein群为循环群, 则∃生成元 $t \in \{e,a,b,c\}$

且 $o\langle t\rangle$ = 群阶 = 4.

而 $o\langle e\rangle = 1$ $o\langle a\rangle = o\langle b\rangle = o\langle c\rangle = 2$

这与 $o\langle t\rangle = 4$ 矛盾.

故 klein群不为循环群