

## 一. 条件极值

例 1 求原点到曲面  $z^2 = xy + x - y + 4$  的最短距离.

例 2 当  $x, y, z > 0$  时, 求函数  $u = \ln x + 2\ln y + 3\ln z$  在球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 6r^2$  上的最大值, 这里  $r > 0$ . 由此进一步证明, 对于任意正实数  $a, b, c$ , 下述不等式成立

$$ab^2c^3 \leq 108 \left( \frac{a+b+c}{6} \right)^6.$$

例 3 求抛物面  $z = x^2 + y^2$  与平面  $x + y + z = 1$  的交线 (椭圆) 的长轴、短轴的长.

## 四. 多元函数的最大值、最小值及其简单应用

例 4 求  $z = xy(4 - x - y)$  在  $x = 1, y = 0, x + y = 6$  所围闭区域  $\bar{D}$  上的最大值.

例 5 设  $u(x, y)$  在  $x^2 + y^2 \leq 1$  上有二阶连续偏导数, 在  $x^2 + y^2 < 1$  内满足  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u$ ,

且在  $x^2 + y^2 = 1$  上,  $u(x, y) \geq 0$ , 证明: 当  $x^2 + y^2 \leq 1$  时,  $u(x, y) \geq 0$ . (提示: 可用反证法证明)

例 6 假设  $f(x, y)$  有连续的偏导数, 在全平面除原点之外处处满足等式

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} > 0.$$

求证原点是  $f(x, y)$  的唯一极小值点. 并且满足  $\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$ . (分母写错了,

其中一个  $x$  是  $y$ )

例 7 设  $p > 0, q > 0$  满足  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . 求函数  $\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$  在平面第一象限  $x > 0, y > 0$  里

满足约束条件  $xy = 1$  的最小值. 由此进一步证明 Young 不等式  $\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \geq xy$ ,

$\forall x, y > 0$ .

