

第五周习题课 曲面, 曲线, Taylor 公式, 无条件极值

例 1. 求曲面 $S: 2x^2 - 2y^2 + 2z = 1$ 上切平面与直线 $L: \begin{cases} 3x - 2y - z = 5 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 平行的切点的轨迹。

解: (1) 直线 $L: \begin{cases} x = x \\ y = 4x + 5 \\ z = -5x - 5 \end{cases}$ 的方向: $\vec{\tau} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$.

切点为 $P(x, y, z)$ 处曲面 S 的法向: $\vec{n} = 4x\vec{i} - 4y\vec{j} + 2\vec{k}$.

(2) 所求轨迹: $\vec{n} \perp \vec{\tau} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{\tau} = -4x + 16y + 10 = 0$,

轨迹为空间曲线: $\Rightarrow \begin{cases} 2x - 8y = 5 \\ 2x^2 - 2y^2 + 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x \\ y = (2x - 5)/8 \\ z = (-60x^2 - 60x + 57)/64 \end{cases}$

例 2. 证明球面 $S_1: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 与锥面 $S_2: x^2 + y^2 = a^2 z^2$ 正交.

证明 所谓两曲面正交是指它们在交点处的法向量互相垂直.

记 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$, $G(x, y, z) = x^2 + y^2 - a^2 z^2$

曲面 S_1 上任一点 $M(x, y, z)$ 处的法向量是

$$\text{grad} F(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)^T \text{ 或者 } \vec{v}_1 = (x, y, z)^T$$

曲面 S_2 上任一点 $M(x, y, z)$ 处的法向量为 $\vec{v}_2 = (x, y, -a^2 z)^T$.

设点 $M(x, y, z)$ 是两曲面的公共点, 则在该点有

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = (x, y, z)^T \cdot (x, y, -a^2 z) = x^2 + y^2 - a^2 z^2 = 0$$

即在公共点处两曲面的法向量相互垂直, 因此两曲面正交.

例 3. 通过曲面 $S: e^{xyz} + x - y + z = 3$ 上点 $(1, 0, 1)$ 的切平面 (B)

(A) 通过 y 轴; (B) 平行于 y 轴;

(C) 垂直于 y 轴; (D) A, B, C 都不对.

解题思路 令 $F(x, y, z) = e^{xyz} + x - y + z - 3$. 则 S 在其上任一点 M 的法向量为

$$\text{grad} F(M) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) \Big|_M$$

于是 S 在点 $M(1, 0, 1)$ 的法向量为

$$(ye^{xyz} + 1, xze^{xyz} - 1, xye^{xyz} + 1) \Big|_{(1,0,1)} = (1, 0, 1)$$

因此, 切平面的方程为 $(x-1) + (z-1) = 0$. S 在 $(1, 0, 1)$ 的法向量垂直于 y 轴, 从而切平面平行于 y 轴. 但是由于原点不在切平面, 故切平面不含 y 轴.

例 4. S 由方程 $ax + by + cz = G(x^2 + y^2 + z^2)$ 确定, 试证明: 曲面 S 上任一点的法线

与某定直线相交。

证明: 曲面上任意一点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 的法线为

$$\frac{x-x_0}{a-2x_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2)} = \frac{y-y_0}{b-2y_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2)} = \frac{z-z_0}{c-2z_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2)}$$

设相交的定直线为 $\frac{x-x_1}{\alpha} = \frac{y-y_1}{\beta} = \frac{z-z_1}{\gamma}$, 与法线向交:

$$(a-2x_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2), b-2y_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2), c-2z_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2)) \text{ 不平}$$

行于 (α, β, γ)

$$\begin{aligned} & [(a-2x_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2), b-2y_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2), c-2z_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2)) \times (\alpha, \beta, \gamma)] \\ & \cdot (x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} a-2x_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2) & b-2y_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2) & c-2z_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2) \\ \alpha & \beta & \gamma \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \end{vmatrix} + 2G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2) \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = 0$$

只要取 $(\alpha, \beta, \gamma) = (a, b, c)$, $(x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 0)$ 即可。

例 5. 在椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 上求一点, 使椭球面在此点的法线与三个坐标轴的正向成等角。

解: 椭球面在此点的法线矢量为 $(1, 1, 1)$, 设该点为 (x_0, y_0, z_0) , 则有

$$\text{grad} F \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} = \left(\frac{2x_0}{a^2}, \frac{2y_0}{b^2}, \frac{2z_0}{c^2} \right) = k(1, 1, 1)$$

该点坐标为 $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a^2, b^2, c^2)$

6.

求螺线 $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = ct \end{cases}$; $(a > 0, c > 0)$, 在点 $M(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{\pi c}{4})$ 处的切线与法平面。

解 由于点 M 对应的参数为 $t_0 = \frac{\pi}{4}$, 所以螺线在 M 处的切向量是

$$\vec{v} = (x'(\pi/4), y'(\pi/4), z'(\pi/4)) = (-a/\sqrt{2}, a/\sqrt{2}, c)$$

因而所求切线的参数方程为

$$\begin{cases} x = a/\sqrt{2} - a/\sqrt{2}t, \\ y = a/\sqrt{2} + a/\sqrt{2}t, \\ z = (\pi/4)c + ct, \end{cases}$$

法平面方程为 $-(a/\sqrt{2})(x - a/\sqrt{2}) + (a/\sqrt{2})(y - a/\sqrt{2}) + c(z - (\pi/4)c) = 0$

二. Taylor 公式

例 1 函数 x^y 在 $x=1, y=0$ 点的二阶 Taylor 多项式为 _____。

【答案】 $1 + (x-1)y$

例 2 函数 $f(x, y) = \frac{\cos x}{y+1}$ 在点 $(0,0)$ 的带 Lagrange 余项的 Taylor 展开式为

_____。

【答案】 $f(x, y) = 1 - y + \frac{1}{2}(x, y) \begin{pmatrix} -\frac{\cos \theta x}{1+\theta y} & \frac{\sin \theta x}{(1+\theta y)^2} \\ \frac{\sin \theta x}{(1+\theta y)^2} & \frac{2 \cos \theta x}{(1+\theta y)^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \theta \in (0,1)$

例 3 二元函数 $\sin(xy)$ 在点 $(1,1)$ 处的二阶 Taylor 多项式为_____。

【答案】

$$\begin{aligned} & \sin 1 + (\cos 1)(x-1) + (\sin 1)(y-1) - \frac{1}{2}(\sin 1)((x-1)^2 + (y-1)^2) \\ & + (\cos 1 - \sin 1)(x-1)(y-1) \end{aligned}$$

例 4 $x + y + z + xyz^3 = 0$ 在点 $(0,0,0)$ 邻域内确定隐函数 $z = z(x, y)$. 求 $z(x, y)$ 在原点的带 Peano 余项的二阶 Taylor 公式.

【解】 $z(0,0) = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x}(0,0) &= \frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = -1 \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0) &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0,0) = 0 \end{aligned}$$

$z(x, y)$ 在原点的带 Peano 余项的二阶 Taylor 公式为 $z = -x - y + o(\rho^3)$

三. 极值

例 5 设可微函数 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 取得极小值, 则下列结论正确的是?

(A) $f(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 处导数大于零; (B) $f(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 处导数等于零;

(C) $f(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 处导数小于零; (D) $f(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 处导数不存在.

答案: (B)

例 6 已知函数 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 某个邻域内连续, 且 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - xy}{(x^2 + y^2)^2} = 1$, 则

(A) 点 $(0, 0)$ 不是 $f(x, y)$ 的极值点; (B) 点 $(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极大值点;

(C) 点 $(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极小值点; (D) 根据所给条件无法判断 $(0, 0)$ 是否 $f(x, y)$ 的极值点;

答案 (A)

分析: 由已知极限得知: $f(0, 0) = 0$, 且 $f(x, y) - xy = (x^2 + y^2)^2 + o(1)$, 当 $|x|, |y|$

充分小. 于是 $f(x, y) - f(0, 0) = xy + (x^2 + y^2)^2 + o(1)$;

于是当 $y=x$ 充分小, $f(x, y) - f(0, 0) = xy + (x^2 + y^2)^2 + o(1) > 0$

当 $y=-x$ 充分小, $f(x, y) - f(0, 0) = -x^2 + 4x^4 + o(1) < 0$

所以选 (A)

例 7 函数 $z(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 在 D 内部偏导数存在, $z(x, y)$ 在 D 的边界上的值

为零, 在 D 内部满足 $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = f(z)$, 其中 f 是严格单调函数, 且 $f(0) = 0$,

证明 $z(x, y) \equiv 0, ((x, y) \in D)$.

证明: 假设 $z(x, y)$ 不恒为 0, 不妨设其在区域 D 上某点 $P(x_0, y_0)$ 处取极大值, 则有

$f(z)|_P = 0$, 这与 f 是严格单调函数矛盾.

例 8 求函数 $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$ 的极值.

解: $z'_x = (2x - 2x(x^2 + y^2))e^{-(x^2 + y^2)} = 0$

$$z'_y = (2y - 2y(x^2 + y^2))e^{-(x^2 + y^2)} = 0$$

驻点为(0,0)与曲线 $x^2 + y^2 = 1$ 上的所有的点. 在(0,0)点,

$$z''_{xx}(0,0) = 2, \quad z''_{xy}(0,0) = 0, \quad z''_{yy}(0,0) = 2$$

(0,0)点是极小值点, 极小值为0.

设 $t = x^2 + y^2$, $z = te^t$, $t = 1$ 是其驻点, 且 $z''(1) < 0$, 函数 $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$ 在曲线 $x^2 + y^2 = 1$ 上取到极大值 e^{-1} .

例9 (隐函数的极值) 设 $z = z(x, y)$ 由 $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$ 确定, 求该函数的极值.

解:

$$4xdx + 4ydy + 2zdz + 8xdz + 8zdx - dz = 0$$

$$dz = -\frac{4x+8z}{2z+8x-1}dx - \frac{4y}{2z+8x-1}dy$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{4x+8z}{2z+8x-1} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{4y}{2z+8x-1} = 0$$

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$$

三个方程联立, 得驻点 $(-2, 0), \left(\frac{16}{7}, 0\right)$.

在 $(-2, 0)$ 点

$$[z''_{xy}(-2, 0)]^2 - z''_{xx}(-2, 0)z''_{yy}(-2, 0) = -\frac{16}{15} < 0$$

且 $z''_{xx}(-2, 0) = \frac{4}{15} > 0$, $(-2, 0)$ 点是极小值点;

在 $\left(\frac{16}{7}, 0\right)$ 点

$$\left[z''_{xy}\left(\frac{16}{7}, 0\right) \right]^2 - z''_{xx}\left(\frac{16}{7}, 0\right) z''_{yy}\left(\frac{16}{7}, 0\right) = -\frac{16}{15} < 0$$

且 $z''_{xx}\left(\frac{16}{7}, 0\right) = -\frac{4}{15} < 0$, $\left(\frac{16}{7}, 0\right)$ 点是极大值点.