homework 11

9. 由平面图一定存在对偶图. G无割边，故$G^*$无自环，$G^*$可以染色。
G图的域是2-可着色的，当且仅当$G^*$图的结点是2-可着色的，当且仅当$G^*$图是二分图.

作该图的对偶图$G^*$，则原图各域对应对偶图各点，且若$G^*$的顶点$v_i^*$位于G的面$R_i$中，则$d_{G^*}(v_i^*) = \deg(R_i)$

则$G^*$中除一个点外，其余各点的度均可被$d$整除。设该点为$u$。

假设G图的域是2-可着色的，则$G^*$图是二分图，即$G^*$中所有点可分为两个集合$V_1^*$ $V_2^*$，且所有边都满足一个结点在$V_1^*$中，一个结点在$V_2^*$中。

则 $V_1^*$中所有点度数和$=$ $V_2^*$中所有点度数和。

不妨设$u \in V_1^*$，则除$u$外$V_1^*$中的所有点度数都为$d$倍数.

$\therefore$ $V_1^*$中所有点度数和不整除$d$.

$\because$ $V_2^*$中所有点度数均为$d$倍数　　$\therefore$ $V_2^*$中所有点度数和是$d$的倍数.

$\therefore$ $V_1^*$中所有点度数和$\neq$ $V_2^*$中所有点度数和。 矛盾。

$\therefore$ G的域不能2着色。

11. 假设G是平面图.

由于G所有点度数都为偶数，则G存在欧拉回路

由平面图G可2-着色当且仅当G中存在欧拉回路，得G的域可2-着色。

由平面图均存在对偶图，作G对偶图$G^*$. 则$G^*$的点可2-着色。

由 $n(G)=15$，$m(G)=\sum_{v_i \in G} \deg(v_i) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(4\times 8 + 6\times 6 + 8) = 16+18+4 = 38$

且 $n(G)-m(G)+r(G)=2$，(欧拉公式)，得 $r(G)= 2+m(G)-n(G) = 2+38-15=25$.

$\therefore$ $n(G^*)=r(G)=25$，　$m(G^*)=m(G)=38$.

对任意图K，$K^*$中存在度数$\leq 2$的结点，当且仅当K中存在重边和自环.

由于G为简单连通图，G中无重边和自环，故$G^*$中点的度$\geq 3$.

又∵ $G^*$中 $\sum_{v_i^* \in G^*} deg(v_i^*) = 2 \cdot m(G^*) = 76$

$3 \times n(G^*) = 75$ ∴ $G^*$中只有一点$v_k^*$的度为4，其他点度均为3.

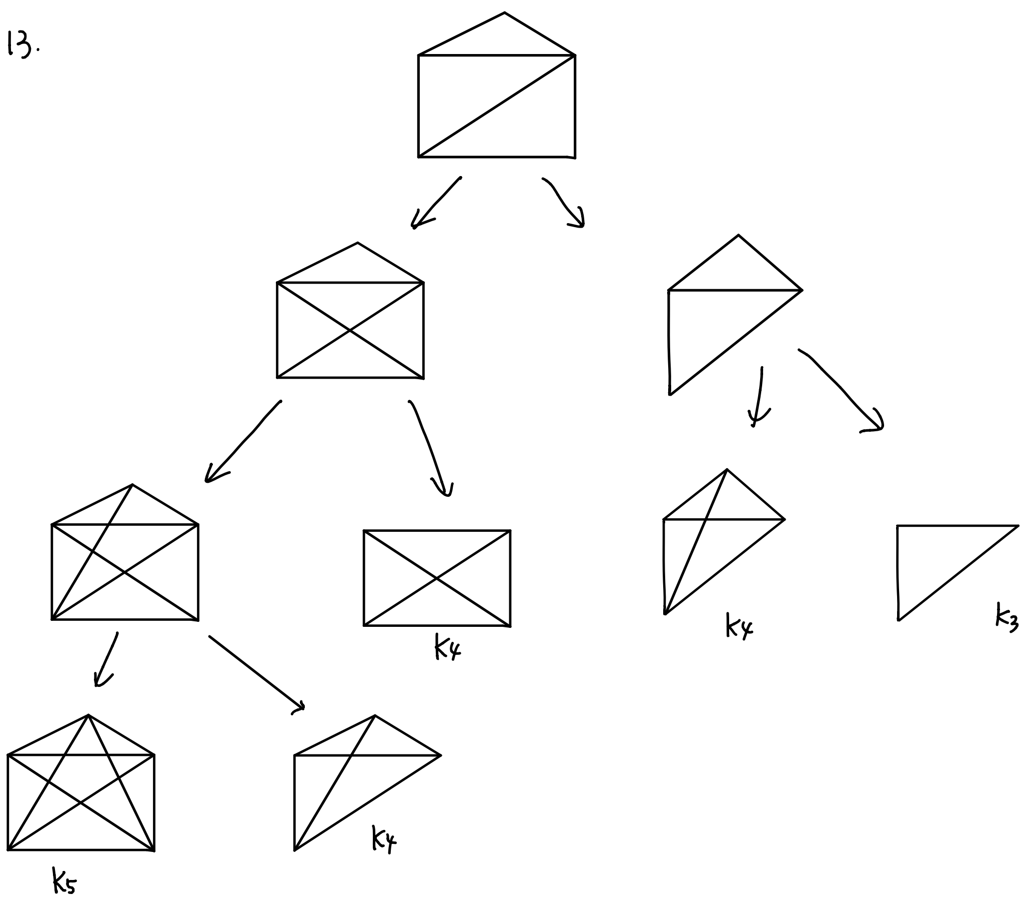
∴G中只有一个域度为4，其他域度均为3.

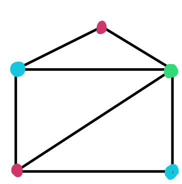
又∵G中有欧拉回路 ∴ G中无割边

∴由⑨题结论得G的域不可2-着色，矛盾.

∴G是非平面图.

13.



一方面，由于该图中存在奇圈，$\gamma(G) \geq 3$.

另一方面，如图，用3种颜色可以对G染色. ∴ $\gamma(G) \leq 3$

∴ $\gamma(G) = 3$

设原图为G，$f(G,t)$表示至多用t种颜色对图G点染色的方案数。

∵若i, j是G中的不相邻结点，则 $f(G,t)=f(\overline{G_{ij}},t)+f(\overset{\circ}{G_{ij}},t)$

∴由上图，得 $f(G,t)=f(K_5,t)+f(K_4,t)+f(K_4,t)+f(K_4,t)+f(K_3,t)$

$$=t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)+3t(t-1)(t-2)(t-3)+t(t-1)(t-2)$$

$$=t(t-1)(t-2)(t^2-7t+12+3t-9+1)$$

$$=t(t-1)(t-2)(t^2-4t+4)=t(t-1)(t-2)^3$$