微积分A(2)

教师：王振波
email:
wangzhenbo@mail.tsinghua.edu.cn
office: 数学系荷二办公室212
Tel: 62772796

◆ 教材:

《高等微积分教程》（下册），章纪民、闫浩、刘智新编，清华大学数学科学系。

◆ 考核方式:

平时(作业、习题课、答疑)20%

期中30%

期末50%

◆ 答疑：微信群、网络学堂

◆ 习题课(待定)

第一章 多元函数及其微分学

§1. n维Euclid空间$\mathbb{R}^n$

1. n维实线性空间

集合$\mathbb{R}^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,|\,x_i\in\mathbb{R},i=1,2,\cdots,n\}$

实数域$\mathbb{R}$　　两种运算：加法、数乘

加法：$(x_1,x_2,\cdots,x_n)+(y_1,y_2,\cdots,y_n)$

$$\triangleq(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)$$

数乘：$\lambda(x_1,x_2,\cdots,x_n)\triangleq(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n)$

结论：集合$\mathbb{R}^n$是数域$\mathbb{R}$上的(n维)线性空间

清華大學

2. n维Euclid空间

Def. 设$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$，$x$与$y$之间的Euclid距离定义为$\|x-y\|\triangleq\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$.带有Euclid距离的$n$维线性空间$\mathbb{R}^n$称为$n$维Euclid空间.

Prop. $\mathbb{R}^n$中的Euclid距离满足以下性质：

1)正定性： $\|x-y\|\geq 0,\forall x,y\in\mathbb{R}^n$；且$\|x-y\|=0\Leftrightarrow x=y$；

2)对称性： $\|x-y\|=\|y-x\|,\forall x,y\in\mathbb{R}^n$；

3)三角不等式： $\|x-y\|\leq\|x-z\|+\|y-z\|,\forall x,y,z\in\mathbb{R}^n$.

清華大學

Remark. n维线性空间$\mathbb{R}^n$上的运算$d(x,y)$满足正定性、对称性和三角不等式，则称d为$\mathbb{R}^n$上的距离.

Question1. 试定义n维线性空间$\mathbb{R}^n$上的其它距离.

Question2. 为什么要定义n维线性空间$\mathbb{R}^n$上的距离？

3. n维Euclid空间中的开集和闭集

Def. 设$x \in \mathbb{R}^n, \delta > 0$.

点x的δ邻域： $B(x,\delta) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x-y\| < \delta\}$;

点x的去心δ邻域： $B_0(x,\delta) = \{y \in \mathbb{R}^n : 0 < \|x-y\| < \delta\}$.

Remark. 邻域的几何意义.

Def. 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n$.

(1)称x为Ω的一个内点, 若存在$\delta > 0, s.t.\ B(x,\delta) \subset \Omega$;

(2)称x为Ω的一个边界点, 若$\forall \delta > 0$,

$$B(x,\delta) \bigcap \Omega \neq \phi \text{ 且 } B(x,\delta) \bigcap (\mathbb{R}^n \setminus \Omega) \neq \phi;$$

(3)若Ω中每一点均为内点, 则称Ω为开集;

(4)若Ω的余集$\mathbb{R}^n \setminus \Omega$为开集, 则称$\Omega$为闭集;

(5)由Ω的所有内点构成的集合称为Ω的内部, 记作$\mathring{\Omega}$;

(6)Ω的所有边界点构成的集合称为Ω的边界, 记作$\partial\Omega$;

(7)称集合$\overline{\Omega} = \Omega \bigcup \partial\Omega$为集合$\Omega$的闭包.

(8)称$x_0 \in \mathbb{R}^n$为集合Ω的聚点,若x_0的任意去心邻域中都含有Ω中的点.

Remark. (1)全集$\mathbb{R}^n$和空集ϕ既是开集又是闭集.

(2)任意多个开集之并仍为开集;有限个开集之交仍为开集.

(3)任意多个闭集之交仍为闭集;有限个闭集之并仍为闭集.

(4)$\mathring{\Omega}$ 是开集, $\bar{\Omega}$是闭集.

(5)Ω为闭集 $\Leftrightarrow$ Ω的任意聚点都包含于Ω.

Question3. 任意多个开集之交是否仍为开集? $(-1/n, 1/n)$

Question4. 任意多个闭集之并是否仍为闭集? $[1/n, 1]$

Def. 设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$.若存在$M>0$,使得$\forall x\in\Omega$,有$\|x\|<M$,则称$\Omega$为有界集合.

例. $B(x,\delta)$是__有界开__集, $B_0(x,\delta)$是__有界开__集.

$\partial B(x,\delta)=$ $\underline{\{y\in\mathbb{R}^n:\|x-y\|=\delta\}}$, 这是一个__有界闭__集.

$\partial B_0(x,\delta)=$ $\underline{\{y\in\mathbb{R}^n:\|x-y\|=\delta\}\cup\{x\}}$, 这是一个__有界闭__集.

$\bar{B}(x,\delta)=$ $\underline{\{y\in\mathbb{R}^n:\|x-y\|\le\delta\}}$, 这是一个__有界闭__集.

$\overline{B_0}(x,\delta)=$ $\underline{\{y\in\mathbb{R}^n:\|x-y\|\le\delta\}}$, 这是一个__有界闭__集.

$\mathring{B}(x,\delta)=$ $\underline{B(x,\delta)}$. $\mathring{B}_0(x,\delta)=$ $\underline{B_0(x,\delta)}$.

清华大学

4. $\mathbb{R}^n$中集合的连通性

Def. 集合$\Omega \subset \mathbb{R}^n$称为(道路)连通的, 如果对$\Omega$中的任意两点$x, y$, 都存在$\Omega$中的一条折线将两点连接起来, 否则, 称$\Omega$为非(道路)连通集.

Def. $\mathbb{R}^n$中非空的连通开集称为开区域, 开区域的闭包称为闭区域.

例. $B(x,\delta)$与$B_0(x,\delta)$都是$\mathbb{R}^n$中的开区域.

例. $\{(x,y) : |x|<1, |y|<2\}$是$\mathbb{R}^2$中的开区域.

例. $\{(x,y,z) : 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 2\}$是$\mathbb{R}^3$中的闭区域.

5. $\mathbb{R}^n$中点列

$\mathbb{R}^n$中点列$\{x_k\}_{k=1}^{+\infty}$也记作$\{x_k\}$.

$$x_k=\left(x_k^{(1)},x_k^{(2)},\cdots,x_k^{(n)}\right)\in\mathbb{R}^n,\quad k=1,2,\cdots,\infty.$$

Def. $\mathrm{A}=\left(a^{(1)},a^{(2)},\cdots,a^{(n)}\right)\in\mathbb{R}^n,\{x_k\}\subset\mathbb{R}^n$. 称点列$\{x_k\}$收敛于A, 或点列$\{x_k\}$以A为极限, 记作$\lim\limits_{k\to+\infty}x_k=\mathrm{A}$, 如果$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}^+,s.t.$

$$\|x_k-\mathrm{A}\|<\varepsilon,\qquad\forall k>N.$$

Remark. (1) $n=1$时与实数列的极限定义一致.

(2) $\lim\limits_{k\to+\infty}x_k=\mathrm{A}$的几何意义.

Thm. 设$x_k=\left(x_k^{(1)},x_k^{(2)},\cdots,x_k^{(n)}\right)\in\mathbb{R}^n$, $k=1,2,\cdots,\infty$.

$\mathrm{A}=\left(a^{(1)},a^{(2)},\cdots,a^{(n)}\right)\in\mathbb{R}^n$,则

$$\lim_{k\to+\infty}x_k=\mathrm{A}\Leftrightarrow\lim_{k\to+\infty}x_k^{(i)}=a^{(i)},i=1,2,\cdots,n.$$

Proof.

$$\max_{1\le i\le n}\left\{\left|x_k^{(i)}-a^{(i)}\right|\right\}\le\left\|x_k-\mathrm{A}\right\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_k^{(i)}-a^{(i)}\right)^2}\le\sum_{i=1}^{n}\left|x_k^{(i)}-a^{(i)}\right|.$$

若$\lim\limits_{k\to+\infty}x_k=\mathrm{A}$,则$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}^+,s.t.\ \left\|x_k-\mathrm{A}\right\|<\varepsilon,\forall k>N$.

于是,对任意$1\le i\le n$,有

$$\left|x_k^{(i)}-a^{(i)}\right|\le\max_{1\le i\le n}\left\{\left|x_k^{(i)}-a^{(i)}\right|\right\}\le\left\|x_k-\mathrm{A}\right\|<\varepsilon,\forall k>N.$$

故 $\lim\limits_{k\to+\infty}x_k^{(i)}=a^{(i)},\ i=1,2,\cdots,n.$

反之，若 $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k^{(i)} = a^{(i)}$, $i=1,2,\cdots,n$, 则 $\forall\varepsilon>0, \exists N_i\in\mathbb{N}^+$, $i=1,2,\cdots,n$, s.t.

$$\left|x_k^{(i)}-a^{(i)}\right|<\frac{\varepsilon}{n}, \forall k>N_i.$$

令 $N=\max\limits_{1\le i\le n}\{N_i\}, \forall k>N\ge N_i$, 有

$$\|x_k-\mathrm{A}\|\le\sum_{i=1}^{n}\left|x_k^{(i)}-a^{(i)}\right|<n\cdot\frac{\varepsilon}{n}=\varepsilon.$$

故 $\lim\limits_{k\to+\infty}x_k=\mathrm{A}$. □

Def. 称 $\{x_k\}\subset\mathbb{R}^n$ 为Cauchy列，如果 $\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}^+$, s.t.

$$\|x_l-x_m\|<\varepsilon, \quad \forall l,m>N.$$

Thm. $x_k=\left(x_k^{(1)},x_k^{(2)},\cdots,x_k^{(n)}\right)\in\mathbb{R}^n$, $k=1,2,\cdots,\infty$. 则

$$\{x_k\}\text{为Cauchy列}\Leftrightarrow\left\{x_k^{(i)}\right\}\text{为Cauchy列}, i=1,2,\cdots,n.$$

Thm. $\mathbb{R}^n$中收敛列与Cauchy列等价.

Thm. Euclid空间$\mathbb{R}^n$是完备的, 即$\mathbb{R}^n$中的Cauchy列必收敛于$\mathbb{R}^n$中的点.

Thm. 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$为闭集,$\{x_k\} \subset \Omega$, $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = \mathrm{A}$,则$\mathrm{A} \in \Omega$.

Proof. 反证法.假设$\mathrm{A} \notin \Omega$,则$\mathrm{A} \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$.因$\Omega$为闭集, $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$为开集.于是$\exists \varepsilon > 0, s.t. B(\mathrm{A},\varepsilon) \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega$, $B(\mathrm{A},\varepsilon) \bigcap \Omega = \phi$.

另一方面, $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = \mathrm{A}$,因此对上述$\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+, s.t. \forall k > N$,有$\|x_k - \mathrm{A}\| < \varepsilon$,即$x_k \in B(\mathrm{A},\varepsilon)$. 又$\{x_k\} \subset \Omega$,故$B(\mathrm{A},\varepsilon) \bigcap \Omega \neq \phi$,矛盾.□

6. $\mathbb{R}^n$的重要性质

Thm.(Weierstrass) $\mathbb{R}^n$中有界列必有收敛子列.

Proof. 设$\{x_k\}\subset\mathbb{R}^n$有界列,即$\exists M>0, s.t. \|x_k\|<M, \forall k\in\mathbb{N}^+$.

$\|x_k\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_k^{(i)}\right)^2}\ge\left|x_k^{(i)}\right|$,则$\{x_k^{(i)}\}$均为有界实数列,$i=1,2,\cdots,n$.

下面我们分n步抽取$\{x_k\}$的收敛子列.

Step1.由$\mathbb{R}$中的Weierstrass定理,$\{x_k^{(1)}\}$有收敛子列$\{x_{k_l}^{(1)}\}_{l=1}^{+\infty}$,

$s.t. \lim\limits_{l\to+\infty}x_{k_l}^{(1)}=a^{(1)}$.于是,我们抽出了$\{x_k\}$的一个子列$\{x_{k_l}\}_{l=1}^{+\infty}$,

它的第一个分量构成的实数列收敛到$a^{(1)}$.

Step2.对Step1中抽出的子列$\left\{x_{k_l}\right\}_{l=1}^{+\infty}$, 利用Step1中方法, 可抽出一个子子列$\left\{x_{k_{l_m}}\right\}_{m=1}^{+\infty}$, $s.t.\ \lim\limits_{m\to+\infty} x_{k_{l_m}}^{(2)} = a^{(2)}$.由于$\left\{x_{k_{l_m}}^{(1)}\right\}_{m=1}^{+\infty}$也是$\left\{x_{k_l}^{(1)}\right\}_{l=1}^{+\infty}$的子列,所以$\lim\limits_{m\to+\infty} x_{k_{l_m}}^{(1)} = \lim\limits_{l\to+\infty} x_{k_l}^{(1)} = a^{(1)}$. 至此, 我们抽出了$\left\{x_k\right\}$的一个子列$\left\{x_{k_{l_m}}\right\}_{m=1}^{+\infty}$,不妨仍记为$\left\{x_{k_l}\right\}_{l=1}^{+\infty}$, 它的第$i$个分量构成的实数列收敛到$a^{(i)}, i=1,2$.

依次类推,到Step$n$, 可抽出$\left\{x_k\right\}$的一个子列,不妨仍记为$\left\{x_{k_l}\right\}_{l=1}^{+\infty}$, 其第$i$个分量构成的实数列收敛到$a^{(i)}, i=1,2,\cdots,n$. 此时有$\lim\limits_{l\to+\infty} x_{k_l} = \mathrm{A} = \left(a^{(1)}, a^{(2)}, \cdots a^{(n)}\right)$.□

Def.(集合的直径) 设$F \subset \mathbb{R}^n$,若$F \neq \phi$,定义F的直径为

$$d(F) = \sup\left\{\|x-y\| : x, y \in F\right\}.$$

若$F = \phi$,则定义F的直径为$d(F) = 0$.

Thm.(闭集套定理) 设$F_k \subset \mathbb{R}^n$为非空闭集,$k = 1, 2, \cdots$,且

$$F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_k \supset F_{k+1} \cdots.$$

若$\lim\limits_{k\to+\infty} d(F_k) = 0$,则集合$\bigcap_{k=1}^{+\infty} F_k$中有且仅有一点.

Def. 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\{G_\alpha\}(\alpha \in I)$为开集族，若$\Omega \subset \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$，则称$\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$为$\Omega$的一个开覆盖.

例. $\{(x-1, x+1)\}$, $x \in \mathbb{R}$，是一个开集族.

例. $\{(n-2^{-n}, n+2^{-n})\}$, $n \in \mathbb{N}$，是一个开集族.

例. $\left\{(n-\frac{1}{n}, n+\frac{1}{n})\right\}$, $n = 1, 2, \cdots, 100$，是一个开集族.

Thm.(有限覆盖定理) 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$为有界闭集，$\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$为$\Omega$的一个开覆盖，则$\exists$有限个开集$G_{\alpha_i}$, $\alpha_i \in I$, $i = 1, 2, \cdots, N$, s.t.
$\Omega \subset \bigcup_{i=1}^N G_{\alpha_i}$.

清華大學

作业：

习题1.1 No. 3(3),4(4),5(4)