第 4 次习题课：切线、切平面、Taylor 公式

1. 通过曲面 $S: e^{xyz}+x-y+z=3$ 上点 $(1,0,1)$ 的切平面（ B ）

（A）通过 y 轴；　　（B）平行于 y 轴；

（C）垂直于 y 轴；　　（D）A，B，C 都不对.

解题思路：令 $F(x,y,z)=e^{xyz}+x-y+z-3$. 则 S 在其上任一点 M 的法向量为

$$\operatorname{grad}F(M)=(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z})\Big|_M$$

于是 S 在点 M $(1,0,1)$ 的法向量为

$$(yze^{xyz}+1, xze^{xyz}-1, xye^{xyz}+1)\Big|_{(1,0,1)}=(1,0,1)$$

因此，切平面的方程为 $(x-1)+(z-1)=0$. S 在 $(1,0,1)$ 的法向量垂直于 y 轴，从而切平面平行于 y 轴. 但是由于原点不在切平面，故切平面不含 y 轴.

2. 在椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 上求一点，使椭球面在此点的法线与三个坐标轴的正向成等角。

解：椭球面在此点的法线矢量为 $(1,1,1)$，设该点为 (x_0,y_0,z_0)，则有

$$gradF\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}=(\frac{2x_0}{a^2},\frac{2y_0}{b^2},\frac{2z_0}{c^2})=k(1,1,1),$$

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{a^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1.$$

求解得该点坐标为 $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a^2,b^2,c^2)$.

3. 求螺线 $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \\ z=ct \end{cases}$；$(a>0,c>0)$，在点 $M(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\dfrac{a}{\sqrt{2}},\dfrac{\pi c}{4})$ 处的切线与法平面.

解：由于点 M 对应的参数为 $t_0=\dfrac{\pi}{4}$，所以螺线在 M 处的切向量是

$$\vec{v}=(x'(\pi/4), y'(\pi/4), z'(\pi/4))=(-a/\sqrt{2}, a/\sqrt{2}, c)$$

因而所求切线的参数方程为 $\begin{cases} x = a/\sqrt{2} - a/\sqrt{2}\,t, \\ y = a/\sqrt{2} + a/\sqrt{2}\,t, \\ z = (\pi/4)c + c\,t, \end{cases}$

法平面方程为 $-(a/\sqrt{2})(x - a/\sqrt{2}) + (a/\sqrt{2})(y - a/\sqrt{2}) + c(z - (\pi/4)c) = 0$.

4. 设曲线 $x = t, y = t^2, z = t^3$，求曲线上一点，使曲线在该点的切线平行于平面 $x + 2y + z = 4$.

解：曲线 $x = t, y = t^2, z = t^3$ 的切线方向为 $(1, 2t, 3t^2)$．曲线在该点的切线平行于平面 $x + 2y + z = 4$，即与平面的法向量 $(1,2,1)$ 垂直，因此

$$1 + 4t + 3t^2 = 0。$$

解得 $t = -\frac{1}{3}$ 或 -1。所求的点为 $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{27}\right)$ 或 $(-1, 1, -1)$.

5. 在曲面 $3x^2 + y^2 - z^2 = 27$ 的某点处作切平面，使得该切平面过直线 $L:\begin{cases} 10x + 2y - 2z = 27 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$。求这个点的坐标，以及该点处的切平面方程.

解： 设所求点为 (x_0, y_0, z_0)，则

$$3x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 = 27, \qquad (1)$$

曲面在该点处的法向量为

$$\vec{n}_1 = (3x_0, y_0, -z_0),$$

切平面方程为：

$$3x_0 x + y_0 y - z_0 z = 27. \qquad (2)$$

直线 $L:\begin{cases} 10x + 2y - 2z = 27 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ 的切向量方向为 $\vec{n}_2 \times \vec{n}_3$, 其中

$$\vec{n}_2 = (10, 2, -2), \qquad \vec{n}_3 = (1, 1, -1).$$

直线 L 落在切平面上，与切平面的法向量垂直，即 $\vec{n}_1 \perp (\vec{n}_2 \times \vec{n}_3)$, 因此

$$\det\begin{pmatrix} 3x_0 & y_0 & -z_0 \\ 10 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 0, \text{ 解得 } y_0 = z_0, \qquad (3)$$

直线 L 落在切平面上, 则 L 上一点 $(\frac{27}{8}, 0, \frac{27}{8})$ 落在切平面上, 代入（2）得

$$3x_0 - z_0 = 8 \qquad (4)$$

联立（1），（3），（4），得：

$$(x_0, y_0, z_0) = (3,\ 1,\ 1) \quad 或 \quad (-3, -17, -17)，$$

代入（2）得对应切平面方程为

$$9x + y - z - 27 = 0 \quad 或 \quad 9x + 17y - 17z + 27 = 0.$$

6. 在曲面 $S: 2x^2 - 2y^2 + 2z = 1$ 上的某些点作切平面，使得该切平面与直线 $\begin{cases} 3x - 2y - z = 5 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 平行。求这些点的轨迹。

解： 直线 L 的方程向量为 $(3,-2,-1)\times(1,1,1) = (-1,-4,\ 5) = \vec{\tau}$。 曲面 S 上的点 (u, v, w) 处的法方向为 $(4u, -4v, 2) = \vec{n}$。点 (u, v, w) 处的切平面与直线 L 平行意味着 $\vec{\tau}\cdot\vec{n} = 0$，即 $-4u + 16v + 10 = 0$。由于动点 (u, v, w) 在曲面 S 上。因此所求动点的轨迹为空间曲线

$$\begin{cases} 2u - 8v = 5 \\ 2u^2 - 2v^2 + 2w = 1 \end{cases}。$$

将动点记号 (u, v, w) 换回 (x, y, z)。则所求轨迹为 $\begin{cases} 2x - 8y = 5 \\ 2x^2 - 2y^2 + 2z = 1 \end{cases}$。

7. 求 $(1 - x^2 - y^2)^{-1/2}$ 在 $(0, 0)$ 的带 Peano 余项的 Taylor 公式.

解： $$(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}t^n + o(t^n), \quad t \to 0.$$

令 $t = -(x^2 + y^2)$, 得

$$\left(1 - x^2 - y^2\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) + \frac{3}{8}\left(x^2 + y^2\right)^2 +$$

$$\cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(x^2 + y^2)^n + o((x^2 + y^2)^n), \qquad x^2 + y^2 \to 0 时.$$

8. 求 $\dfrac{\cos x}{\cos y}$ 在 $(0, 0)$ 的带 Peano 余项的 4 阶 Taylor 公式.

解： 当 $|y|$ 充分小时, $\cos y > 0$. 于是当 $(x, y) \to (0, 0)$ 时,

$$\frac{\cos x}{\cos y} = \cos x \cdot (1 - \sin^2 y)^{-1/2}$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right)\left(1 + \frac{\sin^2 y}{2} + \frac{3\sin^4 y}{8} + o(y^4)\right)$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right)\left(1 + \frac{\left(y - \frac{y^3}{3!} + o(y^4)\right)^2}{2} + \frac{3\big(y + o(y)\big)^4}{8} + o(y^4)\right)$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)\left(1 + \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{3!} + \frac{3y^4}{8} + o(y^4)\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + \frac{x^4}{24} - \frac{x^2 y^2}{4} + \frac{5y^4}{24} + o(x^4) + o(y^4)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + \frac{x^4}{24} - \frac{x^2 y^2}{4} + \frac{5y^4}{24} + o\big((x^2 + y^2)^2\big).$$

9.　（1）证明：存在隐函数 $z = z(x, y)$，满足 $\sin(x+y) + ze^z - ye^x = 0$，$z(0,0) = 0.$

（2）求（1）中隐函数在点 $(0,0)$ 处带 Peano 余项的 2 阶 Taylor 公式。

解答：（1）令 $F(x, y, z) = \sin(x+y) + ze^z - ye^x$，则

$$F(0,0,0) = 0,\ F_z' = e^z + ze^z, F_z'(0,0,0) = 1 \neq 0,$$

由隐函数定理知方程 $\sin(x+y) + ze^z - ye^x = 0$ 确定了点 $(x_0, y_0) = (0,0)$ 的邻域中的隐函数 $z = z(x, y)$。

（2）视 $\sin(x+y) + ze^z - ye^x = 0$ 中 $z = z(x, y)$，分别对 x, y 求偏导，得

$$\cos(x+y) + z_x' e^z + ze^z z_x' - ye^x = 0,$$
$$\cos(x+y) + z_y' e^z + ze^z z_y' - e^x = 0.$$

将 $x = y = z = 0$ 代入，得 $z_x' = -1, z_y' = 0.$ 再对 x, y 求偏导，得

$$-\sin(x+y)+z''_{xx}e^z+2(z'_x)^2e^z+z(z'_x)^2e^z+ze^z z''_{xx}-ye^x=0,$$
$$-\sin(x+y)+z''_{xy}e^z+2z'_x z'_y e^z+zz'_y z'_x e^z+ze^z z''_{xy}-e^x=0,$$
$$-\sin(x+y)+z''_{yy}e^z+2(z'_y)^2e^z+z(z'_y)^2e^z+ze^z z''_{yy}=0,$$

将 $x=y=z=0, z'_x=-1, z'_y=0$ 代入，得 $z''_{xx}=-2, z''_{xy}=1, z''_{yy}=0$. 故隐函数在点 $(0,0)$ 处带 Peano 余项的 2 阶 Taylor 公式为

$$\begin{aligned}z(x,y)&=z(0,0)+z'_x(0,0)x+z'_y(0,0)y\\&\quad+\frac{1}{2!}\left(z''_{xx}(0,0)x^2+2z''_{xy}(0,0)xy+z''_{yy}(0,0)y^2\right)+o(x^2+y^2)\\&=-x-x^2+xy+o(x^2+y^2),\quad (x,y)\to(0,0).\end{aligned}$$

10. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 二阶连续可微, f 的 Hesse 矩阵处处正定.证明 f 至多有一个驻点.

证法一: 反证法. 设 $p,q\in\mathbb{R}^2$ 为 f 的驻点, $p\neq q$.因为 f 的 Hesse 矩阵处处正定,所以 p,q 均为 f 的极小值点.令

$$g(t)=f(tp+(1-t)q),\qquad t\in\mathbb{R}.$$

f 二阶连续可微，则 g 在 $\mathbb{R}$ 上二阶连续可微。$g(0)=f(q), g(1)=f(p)$, 因此 $g(t)$ 在 $t=0, t=1$ 均取得极小值，从而

$$g'(0)=g'(1)=0.$$

由 Rolle 定理，存在 $t_0\in(0,1)$, 使得

$$g''(t_0)=0.$$

另一方面，由 $H_f(t_0p+(1-t_0)q)$ 的正定性， $p\neq q$, 及链式法则，有

$$g''(t_0)=(q-p)^{\mathrm{T}}H_f(t_0p+(1-t_0)q)(q-p)>0.$$

矛盾。因此 f 至多有一个驻点.

证法二: 反证法. 设 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ 为 f 的驻点, $(x_1,y_1)\neq(x_2,y_2)$. 由带 Lagrange 余项的 1 阶 Taylor 公式, $\exists t\in(0,1), \xi=\left(x_2+t(x_1-x_2), y_2+t(y_1-y_2)\right), s.t.$

$$f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2)+(x_1-x_2,y_1-y_2)H_f(\xi)(x_1-x_2,y_1-y_2)^{\mathrm{T}}.$$

而 f 的 Hesse 矩阵处处正定,$(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$,所以

$$f(x_1, y_1) > f(x_2, y_2).$$

同理,$f(x_2, y_2) > f(x_1, y_1)$,矛盾。