9. G的域2着色的充要条件是G^*的点可2着色

G^*点可2着色的充要条件为G^*无奇回路

G无割边，故G^*无自环，记域的边界数不可被整除的域为K，在对偶图中对应点V_k

G^*中点除V_k外度均为d的倍数。

若G^*可二着色，记为着a色与b色，则G^*为二分图。着a色点与着b色点各自构成集合A与B，且二集合中点的度数之和必相等，但由于$V_k\in A$或B。假定$V_k\in A$，则A集合中点的度数之和不整除d，但B集合中点的度数之和整除d。

这与二集合中点的度数之和必相等矛盾。$V_k\in B$时也产生矛盾

故假设不成立。故G^*不可二着色，故G中域不可二着色

G度数全为偶 $\Longleftrightarrow$ G为欧拉图 $\Longleftrightarrow$ G^*点可二着色 $\Longleftrightarrow$ G^*为二分图

10. 假设G为平面图简单连通图 G的顶点度数全为偶数，则G为欧拉图，

则由定理4.6.1推论有G^*可二着色且G^*为平面二分图

而对偶图结点数 $n(G^*)=r(G)=m(G)+2-n(G)=(8\times4+6\times6+8)/2+2-15=25$

$m(G^*)=m(G)=(8\times4+6\times6+8)/2=38$

任意图K：K^*中有顶点度数≤2当且仅K中存在重边与自环

而此题G为简单连通平面图，故G无重边与自环，故G^*中点的度≥3。

而G^*中$\sum d(v_i)=2\cdot e=76$ $\quad\sum d(v_i)\geq3\cdot25=75$。

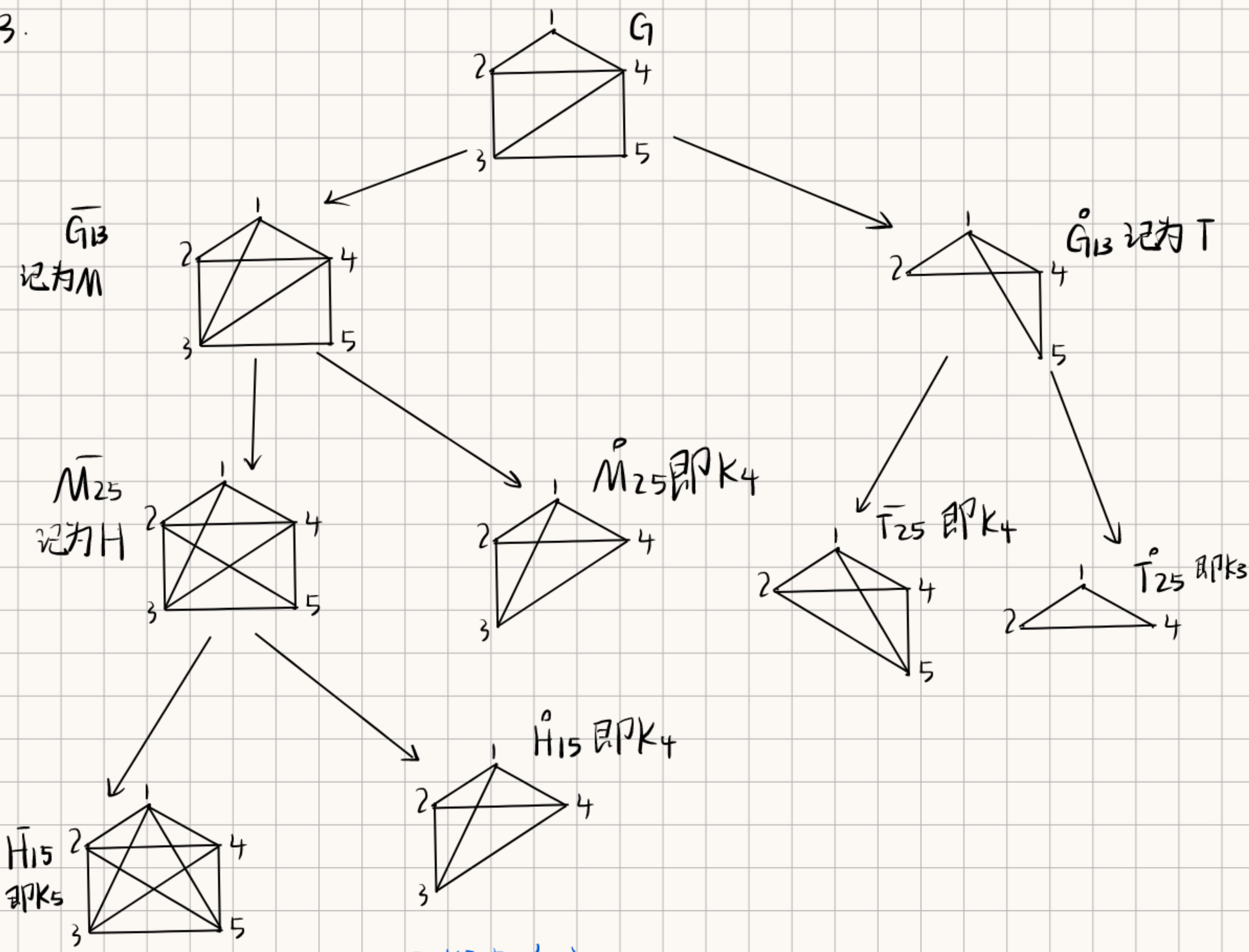
故仅有一节点d为4，记该点为V_k。其余节点d全为3。

G^*为平面二分图，可用色a与色b二着色，记着a色点与着b色点各自构成集合A与B，且二集合中点的度数之和必相等，但由于$V_k\in A$或B。假定$V_k\in A$，则A集合中点的度数之和不整除3，但B集合中点的度数之和整除3。

这与二集合中点的度数之和必相等矛盾。$V_k\in B$时也产生矛盾

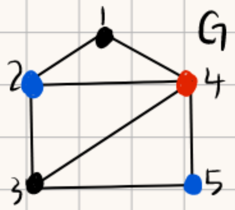
故假设不成立。故G^*不可二着色，故假设不成立

13.



r代表色数

由上图可知 $r(G)=\min\{r(\bar{G}_{ij}), r(\mathring{G}_{ij})\}$ 反复展开有 $r(G)=r(\mathring{T}_{25})=3$



另一方面，G有奇圈故 $r(G)\geq 3$.
故综上，$r(G)=3$

$$f(G,t)=f(\bar{G}_{13},t)+f(\mathring{G}_{13},t)$$

$$f(\bar{G}_{13},t)=f(\bar{M}_{25},t)+f(\mathring{M}_{25},t)=f(K_5,t)+f(K_4,t)+f(K_4,t)=f(K_5,t)+2f(K_4,t)$$

$$f(\mathring{G}_{13},t)=f(K_4,t)+f(K_3,t)$$

综上：
$$\begin{aligned}f(G,t)&=f(K_5,t)+3f(K_4,t)+f(K_3,t)\\&=t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)+3t(t-1)(t-2)(t-3)+t(t-1)(t-2)\\&=t(t-1)(t-2)(t^2-7t+12+3t-9+1)\\&=t(t-1)(t-2)^3\end{aligned}$$