P36 2 3 4 6

2. Def: 简单图: 无重边与自圈的无向图.

证明若G连通则结论已成立;

若其不连通,则必存在两个及以上连通支; 下证 $\bar{G}$ 连通

对G中所有结点.任取两点 v_1, v_2. 假定 (v_1,v_2) 不在 $\bar{G}$ 中.则 (v_1,v_2) 在G中.处于G中同一连通支; 则取另一连通支中结点 v_3. (v_1,v_3) 与 (v_2,v_3) 均不在G中 则 (v_1,v_2) (v_2,v_3) 在 $\bar{G}$ 中. 即 v_1 与 v_2 在 $\bar{G}$ 中通过 v_3 形成通路

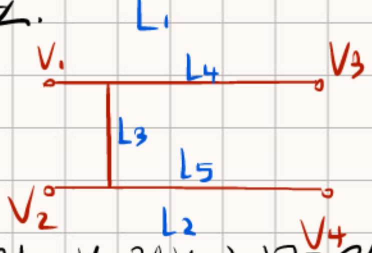
即G不连通时任意 v_1,v_2 两点必在 $\bar{G}$ 中存在通路 即 $\bar{G}$ 连通

证毕.

3. 假定图 $G=(V,E)$ 其中四个结点 v_1,v_2,v_3,v_4. v_1 至 v_3 与 v_2 至 v_4 均为最长通路且通路不相交,则由G为连通图, v_3 与 v_4 之间存在通路,则 v_1 至 v_2 的通路为之前三条通路之和,故 v_1 至 v_3, v_2 至 v_4 之间均不为最长通路,也即假设矛盾 (X)

故题设结论成立.

思路有问题,比如:



此时 v_1 到 v_2 不为最长通路

记 v_1,v_3 之间通路为 L_1, v_2 到 v_3 之间通路为 L_2. 由图的连通性. v_3 与 v_4 相连则 L_1 上至少有一结点与 L_2 上另一结点相连通 记此通路为 L_3.

而 L_3 的两结点将 L_1, L_2 分别分为了两部分. 记其中较长者为 L_4 与 L_5.

则 $L_4+L_3+L_5$ 形成了一条更长的通路.与假设矛盾.

故题设成立

3. 施归纳法证明:

$n=4$ 时. $m\ge 5$. 若 $\exists$ 一节点 v_1. $d(v_1)=1$. 则余下三点之间连接了至少四条边 这与简单图矛盾. 故所有节点度数均 ≥ 2. 且图中形成一完全四边形,且对角线上至少有一条边. 故含有带弦的边

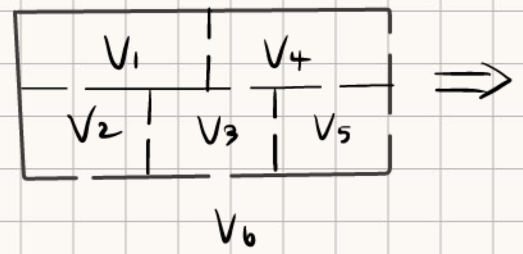
假定节点个数为n时成立,则对于节点个数为n+1时.

① 若某一节点 $d(v_i)=1$. 则去掉此节点与其关联边后,余下n个节点且 $m\ge 2n-2$, 按n情形则结论成立

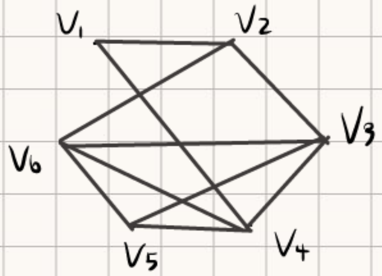
② 若某一节点 $d(v_i)=2$, 则记其邻接点为 v_k, v_t. 去掉 v_i 与 (v_i,v_k) (v_i,v_t) 后, 则余下n个节点至少有 $2n-3$ 条边, 结论成立

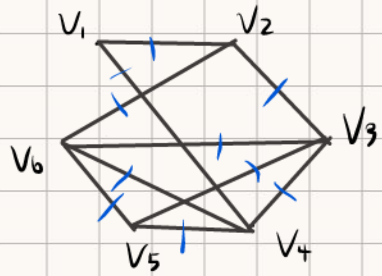
③ 若 $\forall v_i\in V$. 均有 $d(v_i)\ge 3$. 则由例1.2.1.3, 结论成立

6.



$\Longrightarrow$





remark: 原题仅说明存在欧拉通路，不要求为欧拉回路
故路径为:

$$V_5 \to V_3 \to V_6 \to V_2 \to V_1 \to V_4 \to V_6 \to V_5 \to V_4 \to V_3 \to V_2$$