第九周习题课　三重积分

例.1 （三重积分）设 V 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 所围成的区域，积分

$$\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz =$$

答案：$\underline{\dfrac{\pi R^5}{5}(2-\sqrt{2})}$ 。原式=$2\pi\int_0^a \rho^4 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta d\theta$ 。

例. 2　　求 $\iiint\limits_{\Omega}(1+x^2+y^2)zdxdydz$,

其中 $\Omega=\left\{(x,y,z)\,|\,\sqrt{x^2+y^2}\le z\le H\right\}$.

解：用柱坐标系,

$$\Omega=\{(\rho,\varphi,z)\,|\,0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\rho\le H,\ \rho\le z\le H\}$$

$$\iiint\limits_{\Omega}(1+x^2+y^2)zdxdydz\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^H d\rho\int_\rho^H(1+\rho^2)z\rho dz=\pi\left(\frac{H^4}{4}+\frac{H^6}{12}\right)$$

例. 3　　设 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, $F(t)=\iiint\limits_{\Omega}\left(z^2+f(x^2+y^2)\right)dxdydz$ ，其中

$\Omega=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le h, x^2+y^2\le t^2\right\}$　$(t>0)$. 求 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{F(t)}{t^2}$.

解:用柱坐标系, $F(t)=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^t d\rho\int_0^h\left[z^2+f(\rho^2)\right]\rho dz=\dfrac{\pi h^3}{3}t^2+2\pi h\int_0^t\rho f(\rho^2)d\rho$,

用 L’Hospital 法则, $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{F(t)}{t^2}=\dfrac{\pi h^3}{3}+2\pi h\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\int_0^t\rho f(\rho^2)d\rho}{t^2}=\dfrac{\pi h^3}{3}+\pi hf(0)$.

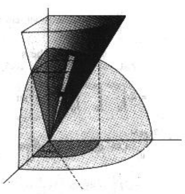
例. 4　　求三重积分: $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)dv$ ，其中

$\Omega=\{(x,y,z)|\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2}\}$

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|\begin{cases}0\le z\le\sqrt{1-y^2-z^2}\\ z\le\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}\right\}$$

解：由函数与域的对称性;　　$I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)dv=\iiint\limits_{\Omega}z\,dv$

球坐标系： $I=\iiint\limits_{\Omega}z\,dv=\int\limits_0^{\pi/4}d\theta\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1 r\cos\theta\, r^2\sin\theta\, dr=\dfrac{\pi}{8}$;



柱坐标系：$I=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}/2}\rho\,d\rho\int_\rho^{\sqrt{1-\rho^2}}zdz=\frac{\pi}{8}$；

直角坐标系：$I=\int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2}dx\int_{-\sqrt{1/2-x^2}}^{\sqrt{1/2-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}}zdz=\frac{\pi}{8}$

先对 xy 积分： $I=\int_0^1 dz\iint_{D(z)}dxdy=\int_1^{\sqrt{2}/2}z\pi z^2dz+\int_{\sqrt{2}/2}^1 z\cdot\pi\left(1-z^2\right)dz=\frac{\pi}{8}$

例.5 求由曲面 $S:(x^2+y^2)^2+z^4=z^2$ 所围立体 Ω 的体积。

解：记立体 Ω 的体积为 $|\Omega|$。由观察可知平面 $z=z\in[0,1]$ 截立体 Ω 所得的截面为圆盘 D_z

圆心位于 $(0,0,z)$，半径为 $r_z=(z-z^4)^{1/4}$，其面积为 $\pi(z^2-z^4)^{1/2}$。于是

$|\Omega|=\iiint_\Omega dxdydz=\int_0^1 dz\iint_{D_z}dxdy=\int_0^1\pi(z^2-z^4)^{1/2}dz=\pi\int_0^1 z(1-u^2)^{1/2}dz=\cdots$ =\pi/3。

解答完毕。

例.6 设 $A=(a_{ij})$ 为 3×3 实对称正定矩阵，$\sum_{i.j=1}^3 a_{ij}x_ix_j=1$ 表示三维空间的一个椭球面。证明该

椭球面所包围立体 V 的体积为 $|V|=\frac{4\pi}{3\sqrt{\det A}}$。

证明：由于 A 对称正定，因此存在可逆矩阵 P，使得 $A=P^tP$。在线性变换 $y=Px$ 下，V 的象 U 为单位球。这是因为

$1=\sum_{i.j=1}^3 a_{ij}x_ix_j=x^tAx=x^tP^tPx=y^ty=y_1^2+y_2^2+y_3^3$。 于是

$|V|=\iiint_V dx_1dx_2dx_3=\iiint_U|\det P^{-1}|dy_1dy_2dy_3=|\det P^{-1}||U|=\frac{4\pi}{3}|\det P^{-1}|$。根据关系

$A=P^tP$，我们有 $(\det P)^2=\det A$，于是 $|\det P^{-1}|=\frac{1}{|\det P|}=\frac{1}{\sqrt{\det A}}$。故

$|V|=\frac{4\pi}{3\sqrt{\det A}}$。证毕。

例.7 令曲面 S 在球坐标下方程为 $r=a(1+\cos\theta)$，Ω 是 S 围成的有界区域，计算 Ω 在

直角坐标系下的形心坐标。

解： Ω 的体积 $V=\iiint\limits_{\Omega}dV=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{a(1+\cos\theta)}r^2dr=\frac{8}{3}\pi a^3$，

Ω 关于 z=0 平面的静力矩

$$V_{xy}=\iiint\limits_{\Omega}zdV=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\cos\theta\sin\theta d\theta\int_0^{a(1+\cos\theta)}r^3dr=\frac{32}{15}\pi a^4,$$

Ω 的形心坐标为 $\bar{x}=\bar{y}=0,\bar{z}=\frac{4}{5}a$；

例.8 由六个平面 $3x-y-z=\pm1$，$-x+3y-z=\pm1$，$-x-y+3z=\pm1$ 所围立体的体积为____________________________

解：作线性变换 $u=3x-y-z$，$v=-x+3y-z$，$w=-x-y+3z$，则

$\det\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\begin{vmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{vmatrix}=16$。于是所求体积为

$|V|=\iiint\limits_{V}dxdydz=\iiint\limits_{U}\left|\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|dudvdw=\frac{1}{16}|U|$，其中 U 为 $|u|\le1$，$|v|\le1$，$|w|\le1$，其体积为 8。故所得结论为 $1/2$。

例. 9 设 $V=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le1\}$，$h=\sqrt{a^2+b^2+c^2}>0$，$f(u)$ 在区间 $[-h,h]$ 上连续，证明：$\iiint\limits_{V}f(ax+by+cz)dxdydz=\pi\int_{-1}^{1}(1-t^2)f(ht)dt$。

证明：作变量代换

$$\begin{aligned}u&=\frac{1}{h}(ax+by+cz)\\v&=a_2x+b_2y+c_2z\\w&=a_3x+b_3y+c_3z\end{aligned}$$

其中系数矩阵为正交矩阵。则

$$\iiint\limits_{V}f(ax+by+cz)dxdydz=\int_{-1}^{1}du\iint\limits_{D_u}f(hu)dvdw$$

其中 $D_u=\left\{(v,w)\middle|v^2+w^2\le 1-u^2\right\}$。故 $\iiint\limits_V f(ax+by+cz)dxdydz=\pi\int_{-1}^{1}(1-t^2)f(ht)dt$ 。