第一周习题课习题课（多元函数极限、连续、可微及偏导）

一．求累次极限与重极限

例.1 $f(x,y)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}, & x\cdot y\neq 0 \\ 0, & x\cdot y=0 \end{cases}$

例.2 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{3xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & x^2+y^2=0 \end{cases}$

例.3 $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$，证明：$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)=0$，而二重极限

?

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$不存在。

例.4 记$D=\{(x,y)\,|\,x+y\neq 0\}$， $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y},(x,y)\in D$。证明：

$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)=1,\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)=-1$，但是$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in D}}f(x,y)$不存在。

一般结论：

重极限与累次极限没有关系

重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$ 与累次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$, $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$ 均存在，则有

$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)=\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$

$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$, $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$ 均存在但不等，$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$ 不存在

二．多元函数的极限与连续，连续函数性质

例.5 求下列极限：

（1） $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}(x+y)^{\frac{x+y+1}{x+y-1}}$；（2） $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\ln(x^2+y^2)$；

（3） $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(xy)}{x}$；（4） $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$；

（5） $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$。

思考：$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-2xy+y^2}$是否存在？若存在，极限值是什么？

例.6 证明：极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)}\left(\dfrac{|xy|}{x^2+y^2}\right)^{x^2}=0$.

例. 7 若$z=f(x,y)$在R^2上连续，且 $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty}f(x,y)=+\infty$，证明 函数$f$在$R^2$上一定有最小值点。

例. 8 $f(\mathbf{x})$在R^n上连续, 且

（1） $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$时， $f(\mathbf{x})>0$

（2） $\forall c>0,\ \ f(c\mathbf{x})=cf(\mathbf{x})$

证明：存在$a>0,b>0$，使$a|\mathbf{x}|\le f(\mathbf{x})\le b\mathbf{x}$.

例. 9 若$f(x,y)$在$(0,0)$点的某个邻域内有定义，$f(0,0)=0$，且

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=a$$

a为常数。证明：

（1） $f(x,y)$在$(0,0)$点连续；

?（2）若$a\neq-1$，则$f(x,y)$在$(0,0)$点连续，但不可微；

?（3）若$a=-1$，则$f(x,y)$在$(0,0)$点可微。

例.10 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点是否连续?

__________(填是或否)；在 $(0,0)$ 点是否可微? ____________(填是或否).

三．多元函数的全微分与偏导数

例. 11 有如下做法：

设 $f(x,y)=(x+y)\varphi(x,y)$ 其中 $\varphi(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续，则

$$df(x,y)=[\varphi(x,y)+(x+y)\varphi_x(x,y)]dx+[\varphi(x,y)+(x+y)\varphi_y(x,y)]dy$$

令 $x=0, y=0$， $df(0,0)=\varphi(0,0)(dx+dy)$.

(1) 指出上述方法的错误；

(2) 写出正确的解法.

例.12 设二元函数 $f(x,y)$ 于全平面 $\Re^2$ 上可微，(a,b) 为平面 $\Re^2$ 上给定的一点，则极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(a+x,b)-f(a-x,b)}{x}=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$ 。

例.13 设函数 $f(x,y)$ 在 $(1,1)$ 点可微，$f(1,1)=1$，$f'_x(1,1)=2$，$f'_y(1,1)=3$，

$g(x)=f(x,f(x,x))$，求 $g'(1)$。

例.14 设 $z=f(x^2y,\dfrac{y}{x})$， 其中 $f\in C^2$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

例. 15 设 $z(x,y)$ 定义在矩形区域 $D=\{(x,y)|0\le x\le a, 0\le y\le b\}$ 上的可微函数。证明：

（1） $z(x,y)=f(y)\Leftrightarrow \forall (x,y)\in D, \dfrac{\partial z}{\partial x}\equiv 0$ ；

（2） $z(x,y)=f(y)+g(y)\Leftrightarrow \forall (x,y)\in D, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\equiv 0$

例.16　n 为整数，若任意 $t>0,\ f(tx,ty)=t^n f(x,y)$，则称 f 是 n 次齐次函数。证明：

$f(x,y)$ 是零次齐次函数的充要条件是

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

例.17　下列条件成立时能够推出 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点可微, 且全微分 $df=0$ 的是（ C ）.

(A) 在点 (x_0,y_0) 两个偏导数 $f'_x=0, f'_y=0$ ✗

(B) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全增量 $\Delta f=\dfrac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$, ✗

(C) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全增量 $\Delta f=\dfrac{\sin(\Delta x^2+\Delta y^2)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$ ✓

(D) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全增量 $\Delta f=(\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\dfrac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}$ ✗

例.18　设 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$, 则在 $(0,0)$ 点（ C ）

(A) 连续, 但偏导数不存在; ✗　　(B) 偏导数存在, 但不可微;

(C) 可微; ✓　　(D) 偏导数存在且连续 ✗

$\sqrt{|x|}\cdot\sqrt{|y|}$　$x>0$　$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{2}|x|^{-\frac{1}{2}}\sqrt{|y|}==\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}$

$\frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\frac{1}{2}$

例.19　设 $z=\arcsin\dfrac{x}{y}$，求 dz.

例.20　$u=\arctan\dfrac{x-y}{x+y}$，则 $\mathrm{d}u=$ ________________

例.21　设函数 $z=2\cos^2(x-\dfrac{y}{2})$，证明 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

例.22　设函数 $z=(x+2y)^{xy}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.