习题课 级数

一．常数项级数

1. 设级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，则必收敛的级数为［　　　　］.

2. （A）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{u_n}{n}$。（B）$\sum_{n=1}^{\infty} {u_n}^2$。（C）$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n - u_{2n})$。（D）$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + u_{n+1})$。

3. 已知$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n = 2, \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n-1} = 5$，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n =$________.

4. 设$0 < a_n < \frac{1}{n},$ 则下列级数中肯定收敛的是［　　　　］.

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$；　(B) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$；　(C) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$；　(D) $\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2 \ln n$

5. 设常数$\lambda \neq 0$，$a_n > 0$，级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n (n\tan\frac{\lambda}{n}) a_{2n}$［　　　　］.

（A）绝对收敛。（B）条件收敛。（C）发散。（D）收敛性与λ有关。

6. 设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，则［　　　　］

(A) 极限$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$小于 1；　(B) 极限$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$小于等于 1；

(C) 若极限$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$存在，其值小于 1；(D) 若极限$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$存在，其值小于等于 1；

7. 设参数$a \neq 0$，则$\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2 + a^2})$收敛性的结论是［　　　］

（A）绝对收敛。（B）条件收敛。
（C）发散。　　（D）与参数$\boldsymbol{a}$取值有关。

8. （正常数项级数收敛的判定与其项趋于零阶的估计问题）

设$a_n > 0$，$p > 0$，$\lim_{n\to\infty}\left[n^p (e^{\frac{1}{n}} - 1) a_n\right] = 1$，若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，则$p$的取值范围是____________________.

9. 判断$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n}$ 的收敛性.

10. 设$a_n>0$，单调减且级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$发散，试问$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{a_n+1})^n$是否收敛？证明结论。

11. 讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)$ 的收敛性（$p>0$）.

12. 常数项级数和积分的估值

设$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xdx$，讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^p}$ 的收敛性.

13. 设两条抛物线$y=nx^2+\frac{1}{n}$和$y=(n+1)x^2+\frac{1}{n+1}$，

记他们交点坐标的绝对值为a_n。

（1）求这两条抛物线所围成的平面图形的面积

（2）求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n}{a_n}$的和。

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+x}$ （$x\neq -n$）

15. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{x}{n}$;

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4^n\sin^{2n}x}{n}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n+1)x\cos(n-1)x}{n^p}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{a}{1+a^n}$ $(a>0)$.

20. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛，{ x_n } 单调减少，利用 Cauchy 收敛原理证明：$\lim_{n\to\infty}nx_n=0$。

21. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛，$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=1$，问级数 $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ 是否收敛?

22. 设正项数列 $\{x_n\}$ 单调减少，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x_n$ 发散。问级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+x_n}\right)^n$ 是否收敛？并说明理由。

23. 若 { nx_n } 收敛，$\sum_{n=2}^{\infty}n(x_n-x_{n-1})$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛。

24. 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有二阶连续导数，且

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0\ 。$$

证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛。

25. 已知任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 发散，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)x_n$ 也发散。

26. 利用

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\ \to\ \gamma\ \ (n\to\infty),$$

其中 γ 是 Euler 常数，求下述 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 的更序级数的和：

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots。$$