微积分 A2 第 1 次习题课答案（欧氏空间、多元函数的极限与连续）

1. 对 $p>0, x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n, y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$, 定义

$$d_p(x,y)=\left(\sum_{k=1}^n |x_k-y_k|^p\right)^{1/p},$$

证明：(1)当 $p\ge 1$时，d_p 是 $\mathbb{R}^n$ 上的距离；

(2) 当$0<p<1$时，d_p 不是 $\mathbb{R}^n$ 上的距离。

证明：（1） $p\ge 1$时，正定性和对称性显然。下面证明三角不等式，即

$$d_p(x,y)\le d_p(x,z)+d_p(y,z), \qquad \forall x,y,z\in\mathbb{R}^n.$$

记 $a_k=|x_k-z_k|, b_k=|y_k-z_k|, k=1,2,\cdots,n,$ 注意到

$$\left(d_p(x,y)\right)^p=\sum_{k=1}^n |x_k-y_k|^p\le\sum_{k=1}^n\left(|x_k-z_k|+|y_k-z_k|\right)^p,$$

只要证

$$\sum_{k=1}^n\left(a_k+b_k\right)^p\le\left(\left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^n b_k^p\right)^{1/p}\right)^p.$$

记 $t=\left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{1/p}, s=\left(\sum_{k=1}^n b_k^p\right)^{1/p}$. 若 $t=0$, 则 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$, 不等式成立。因此不妨设 $t\ne 0, s\ne 0$. 记 $\alpha_k=\frac{a_k}{t}, \beta_k=\frac{b_k}{s}$, 则上述不等式等价于

$$\sum_{k=1}^n\left(\frac{t}{t+s}\alpha_k+\frac{s}{t+s}\beta_k\right)^p\le 1.$$

当 $p\ge 1$时 $f(r)=r^p$ 是下凸函数，因此

$$\left(\frac{t}{t+s}\alpha_k+\frac{s}{t+s}\beta_k\right)^p\le\frac{t}{t+s}\alpha_k^p+\frac{s}{t+s}\beta_k^p.$$

注意到 $\sum_{k=1}^n\alpha_k^p=\sum_{k=1}^n\beta_k^p=1$, 上式对 k 求和即得 $\sum_{k=1}^n\left(\frac{t}{t+s}\alpha_k+\frac{s}{t+s}\beta_k\right)^p\le 1.$

（2）任取 $x,y\in\mathbb{R}^n$, 使得 $x_k\ne y_k, k=1,2,\cdots,n$, 令 $z=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y$, 沿用(1)中记号，有

$$a_k=|x_k-z_k|\ne 0, b_k=|y_k-z_k|\ne 0,$$

$$|x_k-y_k|=|x_k-z_k|+|y_k-z_k|=a_k+b_k,$$

$$t=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{1/p}\neq 0, s=\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^p\right)^{1/p}\neq 0,\ \alpha_k=\frac{a_k}{t}\neq 0,\beta_k=\frac{b_k}{s}\neq 0.$$

当$0<p<1$时, $f(r)=r^p$ 是严格上凸函数， $f''(r)=p(p-1)r^{p-2}<0,\forall r>0.$因此

$$\left(\frac{t}{t+s}\alpha_k+\frac{s}{t+s}\beta_k\right)^p>\frac{t}{t+s}\alpha_k^p+\frac{s}{t+s}\beta_k^p.$$

继而可用与（1）中相同的方法得到

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{t}{t+s}\alpha_k+\frac{s}{t+s}\beta_k\right)^p>1,$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_k+b_k\right)^p>\left(\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^p\right)^{1/p}\right)^p.$$

于是有

$$\left(d_p(x,y)\right)^p=\sum_{k=1}^{n}\left|x_k-y_k\right|^p=\sum_{k=1}^{n}\left(a_k+b_k\right)^p>\left(d_p(x,z)+d_p(y,z)\right)^p,$$

因此d_p不满足三角不等式，不是距离。 □

2. 下列极限是否存在？若存在，求出极限值；若不存在，说明理由。

（1） $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}(x+y)^{\frac{x+y+1}{x+y-1}}$；　　（2） $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\ln(x^2+y^2)$.

（3） $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y}$　　（4） $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$

（5） $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$　　（6） $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3-y^3}{x+y}$

解：（1） $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}(x+y)^{\frac{x+y+1}{x+y-1}}=\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}(1+(x+y-1))^{\frac{1}{x+y-1}\bullet(x+y+1)}=e^2$；

（2） $\left|(x+y)\ln(x^2+y^2)\right|\leq(|x|+|y|)\ln(|x|+|y|)^2=2(|x|+|y|)\ln(|x|+|y|)$，而

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(|x|+|y|)\ln(|x|+|y|)=0$，所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\ln(x^2+y^2)=0$.

（3）令 $x=y$, $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y}}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3}{x^2+x}=0;$

令 $y=x^3-x^2$, $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^3-x^2}}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+(x^3-x^2)^3}{x^3}=1$; 故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y}$ 不存在。

（4）当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时,

$$0\le\left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right|\le\left|\frac{x}{x^2-xy+y^2}\right|+\left|\frac{y}{x^2-xy+y^2}\right|$$

$$=\frac{|x|}{\frac{3}{4}x^2+(\frac{1}{2}x-y)^2}+\frac{|y|}{\frac{3}{4}y^2+(\frac{1}{2}y-x)^2}=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|y|}\right),$$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}=0.$

（5）令 $x=y$, $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y}}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=1$, 令 $y=0$, $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=0$, 故

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ 不存在。

（6）令 $x+y=y^n, n>3$, 则

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x+y=y^n}}\frac{x^3-y^3}{x+y}=\lim_{y\to 0}\frac{(y^n-y)^3-y^3}{y^n}=\lim_{y\to 0}\frac{(y^{n-1}-1)^3-1}{y^{n-3}}\text{不存在.}$$

因此 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3-y^3}{x+y}$ 不存在。

3. 讨论 $(x,y)\to(0,0)$ 时，以下无穷小的阶：

（1）$x+y+2xy$　　　　（2）$(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

解：（1）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x+y+2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 不存在，因为

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx,x>0}}\frac{x+y+2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x+kx+2kx^2}{\sqrt{(1+k^2)x^2}}=\frac{1+k}{\sqrt{(1+k^2)}}.$$

$\forall 0<\alpha\neq 1$, $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0,x>0}}\dfrac{x+y+2xy}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\alpha}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x^{\alpha}}=\begin{cases}0 & 0<\alpha<1\\ +\infty & \alpha>1\end{cases}$, 因此不存在非零常数 c, 使

得 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x+y+2xy}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\alpha}}=c.$

综上，$(x,y)\to(0,0)$时，无穷小量$x+y+2xy$没有阶。

（2） $\forall 0<\alpha<1,\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{1+\alpha}}=0,$ 因此 $(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 是比 $1+\alpha$高阶的无穷小量。而对$\alpha=1,$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{1+\alpha}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\text{不存在。}$$

因此，$(x,y)\to(0,0)$时，该无穷小量没有阶。

4. 二元函数$f(x,y)$是x,y的n次多项式，且$(x,y)\to(0,0)$时，$f(x,y)=o((\sqrt{x^2+y^2})^n).$

证明：$f(x,y)=0.$

证明：反证法。记

$$f(x,y)=f_0(x,y)+f_1(x,y)+\cdots+f_n(x,y),$$

其中 $f_k(x,y)$为x,y的k次齐次多项式。若 $f(x,y)\neq 0,$ 则存在$0\le k\le n, s.t.$

$$f_0=f_1(x,y)=\cdots=f_{k-1}(x,y)=0,\quad f_k(x,y)\neq 0$$

$$f(x,y)=f_k(x,y)+f_{k+1}(x,y)+\cdots+f_n(x,y).$$

令$x=r\cos\vartheta, y=r\sin\vartheta,$ 则 $f_k(x,y)=r^k f_k(\cos\vartheta,\sin\vartheta).$ 而 $f_k(x,y)\neq 0,$ 故存在ϑ_0,使得

$$f_k(\cos\vartheta_0,\sin\vartheta_0)\neq 0.$$

于是，

$$\lim_{\substack{(x,y)=r(\cos\vartheta_0,\sin\vartheta_0)\\ r\to 0}}\frac{f(x,y)}{f_k(x,y)}=\sum_{i=k}^{n}\lim_{r\to 0}r^{i-k}\frac{f_i(\cos\vartheta_0,\sin\vartheta_0)}{f_k(\cos\vartheta_0,\sin\vartheta_0)}=1.$$

进而存在$\delta>0,$使得

$$\frac{f(r\cos\vartheta_0,r\sin\vartheta_0)}{f_k(\cos\vartheta_0,\sin\vartheta_0)}>\frac{1}{2},\ \forall\ 0<r<\delta.$$

特别地，有

$$f(r\cos\vartheta_0, r\sin\vartheta_0)\neq 0,\qquad \forall\ 0<r<\delta.$$

已知$(x,y)\to(0,0)$时， $f(x,y)=o((\sqrt{x^2+y^2})^n)$, 因此

$$\lim_{\substack{(x,y)=r(\cos\vartheta_0,\sin\vartheta_0)\\ r\to 0}}\frac{f(x,y)}{(\sqrt{x^2+y^2})^n}=0.$$

于是

$$0=1\cdot 0=\lim_{\substack{(x,y)=r(\cos\vartheta_0,\sin\vartheta_0)\\ r\to 0}}\frac{f_k(x,y)}{f(x,y)}\cdot\lim_{\substack{(x,y)=r(\cos\vartheta_0,\sin\vartheta_0)\\ r\to 0}}\frac{f(x,y)}{(\sqrt{x^2+y^2})^n}$$

$$=\lim_{\substack{(x,y)=r(\cos\vartheta_0,\sin\vartheta_0)\\ r\to 0}}\frac{f_k(x,y)}{(\sqrt{x^2+y^2})^n}$$

$$=\lim_{r\to 0}\frac{r^k f_k(\cos\vartheta_0,\sin\vartheta_0)}{r^n}=f_k(\cos\vartheta_0,\sin\vartheta_0)\lim_{r\to 0}\frac{1}{r^{n-k}},$$

而 $f_k(\cos\vartheta_0,\sin\vartheta_0)\neq 0$, 因此

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r^{n-k}}=0.$$

这与$k\le n$矛盾。 □

5. 证明：若 $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)}f(x,y)=\mathrm{A}$, 且 $\lim\limits_{x\to a}f(x,y)=h(y)$ 对任意 $y\neq b$ 成立，则 $\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a}f(x,y)$存在，且$\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a}f(x,y)=\mathrm{A}.$

证明：由 $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)}f(x,y)=\mathrm{A}$ 知：$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$ 使得

$$|f(x,y)-\mathrm{A}|<\varepsilon,\qquad \forall(x,y)\neq(a,b),|x-a|<\delta,|y-b|<\delta.$$

任意固定y, 使得$0<|y-b|<\delta$, 令$x\to a$, 得

$$|h(y)-\mathrm{A}|=\left|\lim_{x\to a}f(x,y)-\mathrm{A}\right|\le\varepsilon.$$

因而有$\lim\limits_{y\to b}h(y)=\mathrm{A}$, 也即$\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a}f(x,y)=\mathrm{A}.$ □

6. $f=(f_1,f_1,\ldots,f_m):\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, 则

$$f\text{在点}x_0\text{连续}\Leftrightarrow f_i\text{在点}x_0\text{连续},i=1,2,\cdots m.$$

证明：提示：$\|f(x+x_0)-f(x_0)\|\le\sum_{i=1}^{m}|f_i(x+x_0)-f_i(x_0)|\le\|f(x+x_0)-f(x_0)\|$. □

7. 对任意正整数 n 及向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, 记 $\|x\|_n=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}x_k^2}$. 矩阵 $\mathrm{A}\in\mathrm{M}_{mn}$, 则存在 $\mathrm{C}\ge 0$, 使得

$$\|\mathrm{A}x\|_m\le \mathrm{C}\|x\|_n,\forall x\in\mathbb{R}^n.$$

(使得此不等式成立的最小的C记为$\|\mathrm{A}\|$.)

证明： $f(x)=\|\mathrm{A}x\|_m$ 为 n 元连续函数，因而在有界闭集 $\{x\in\mathbb{R}^n:\|x\|_n=1\}$ 上有最大值，记

$$\mathrm{C}=\max\{\|\mathrm{A}x\|_m:x\in\mathbb{R}^n,\|x\|_n=1\}.$$

于是

$$\|\mathrm{A}x\|_m=\left\|\mathrm{A}\left(\|x\|_n\frac{x}{\|x\|_n}\right)\right\|_m=\left\|\mathrm{A}\frac{x}{\|x\|_n}\right\|_m\|x\|_n\le \mathrm{C}\|x\|_n,\forall x\in\mathbb{R}^n.\ \square$$

8. （1） $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续，且 $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty}f(x,y)=+\infty$, 则 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上有最小值。

（2） $g(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$, $a>0,c>0,b^2-4ac<0$, 则 $g(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上有最小值。

证明：(1) 记 $M=f(0,0)$. 由已知条件 $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty}f(x,y)=+\infty$ 可知，存在 $d>0$, 当 $\sqrt{x^2+y^2}>d$ 时，有 $f(x,y)>M$. 连续函数f在有界闭集 $B=\{(x,y)|x^2+y^2\le d^2\}$ 上有最小值, 即存在 $Q\in B$, 使得 $f(Q)=\min\limits_{(x,y)\in B}f(x,y)\le M$. 于是 $f(Q)=\min\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}f(x,y)$.

(2) 由(1)中结论，只要证 $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty}g(x,y)=+\infty$. 由 $a>0,c>0,b^2-4ac<0$, 有

$$ax^2+bxy+cy^2=\left(\sqrt{a}x+\frac{by}{2\sqrt{a}}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}y^2=\left(\frac{bx}{2\sqrt{c}}+\sqrt{c}y\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4c}x^2$$

可得，当 $|y|\ge|x|$ 时， $\dfrac{ax^2+bxy+cy^2}{x^2+y^2}\ge\dfrac{4ac-b^2}{4a}\dfrac{y^2}{x^2+y^2}\ge\dfrac{4ac-b^2}{8a}>0;$

当 $|y|\le|x|$ 时， $\dfrac{ax^2+bxy+cy^2}{x^2+y^2}\ge\dfrac{4ac-b^2}{4c}\dfrac{x^2}{x^2+y^2}\ge\dfrac{4ac-b^2}{8c}>0.$

从而有

$$\frac{g(x,y)}{x^2+y^2} \ge \begin{cases} \dfrac{4ac-b^2}{8a} + \dfrac{dx+ey+f}{x^2+y^2}, & |y| \ge |x|, \\ \dfrac{4ac-b^2}{8c} + \dfrac{dx+ey+f}{x^2+y^2}, & |y| \le |x|. \end{cases}$$

记 $\lambda = \dfrac{1}{2}\min\left\{\dfrac{4ac-b^2}{8a}, \dfrac{4ac-b^2}{8c}\right\}$, 则

$$\frac{g(x,y)}{x^2+y^2} \ge 2\lambda + \frac{dx+ey+f}{x^2+y^2}, \quad \forall (x,y) \ne (0,0).$$

因 $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty} \dfrac{dx+ey+f}{x^2+y^2} = 0$, 存在 $R>0$, 使得

$$\left|\frac{dx+ey+f}{x^2+y^2}\right| \le \lambda, \quad \forall x^2+y^2 \ge R^2.$$

从而有

$$\frac{g(x,y)}{x^2+y^2} \ge \lambda, \quad \forall x^2+y^2 \ge R^2.$$

故 $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty} g(x,y) = +\infty.$

9. $f(x,y)$ 为连续函数, $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty} f(x,y) = -\infty.$ 证明：对任意常数 C , $f(x,y)=C$ 的解集合为空集或有界闭集。

证明：不妨设 $A \triangleq \{(x,y): f(x,y)=C\} \ne \phi$。

先证 A 为闭集。任取 A 的聚点 (x_0,y_0), 存在 A 中收敛子列 $\{(x_n, y_n)\}$ 使得 $(x_n,y_n)\to(x_0,y_0)$. 于是, $f(x_n,y_n)=C$ 。令 $n\to+\infty$, 由 f 的连续性有

$$f(x_0,y_0) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n,y_n) = C.$$

即 $(x_0,y_0)\in A$. 故 A 为闭集。

再证 A 为有界集。由 $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty} f(x,y) = -\infty$ 可知，存在 $R>0$, 使得

$$f(x,y) < C-1, \quad \forall x^2+y^2 > R^2.$$

10. 已知 $f(x,y)=\dfrac{x}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y^2}},(x,y)\in[0,1]\times(0,1]$. 试问：$f(x,y)$ 是否可以连续延拓到 $(x,y)\in[0,1]\times[0,1]$？请说明理由。

解法一：若 $f(x,y)$ 可以连续延拓到 $(x,y)\in[0,1]\times[0,1]$, 则

$$f(x,0)=\lim_{y\to 0^+}\frac{x}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y^2}}=0,\qquad \forall x\in[0,1],$$

即连续延拓后的函数必为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y^2}}, & x\in[0,1],y\neq 0,\\ 0, & x\in[0,1],y=0.\end{cases}$$

而对此 $f(x,y)$，有

$$\lim_{x=y^2,y\to 0}f(x,y)=\lim_{x=y^2,y\to 0}\frac{x}{y^2}e^{\frac{-x^2}{y^2}}=\lim_{y\to 0}e^{-y^2}=1\neq f(0,0)=0.$$

即 $f(x,y)$ 在原点不连续。因此，$f(x,y)$ 不能连续延拓到 $[0,1]\times[0,1]$.

解法二：$\displaystyle\lim_{x=y^2,y\to 0}f(x,y)=\lim_{x=y^2,y\to 0}\frac{x}{y^2}e^{\frac{-x^2}{y^2}}=\lim_{y\to 0}e^{-y^2}=1,$

$$\lim_{x=0,y\to 0}f(x,y)=\lim_{x=0,y\to 0}\frac{x}{y^2}e^{\frac{-x^2}{y^2}}=0,$$

因此 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在，$f(x,y)$ 不能连续延拓到 $[0,1]\times[0,1]$.