习题课　二重积分

二重积分理论

例.1 证明 $\iint\limits_{[0,1]^2}(xy)^{xy}dxdy=\int_0^1 t^t dt$（第三章的总复习题题 9， page 171）

例.2 利用二重积分理论，证明以下积分不等式。设 $f(x)$， $g(x)$ 于 $[a,b]$ 上连续，则

（1） $\left(\int\limits_a^b f(x)dx\right)^2 \le (b-a)\int\limits_{a,}^b f^2(x)dx$。

（2） $\left(\int\limits_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int\limits_a^b f^2(x)dx\int\limits_{a,}^b g^2(x)dx$.

（3） $\iint\limits_{[a,b]^2}\dfrac{f(x)}{f(y)}dxdy \ge (b-a)^2$，这里补充假设 $f(x)>0$， $\forall x\in[a,b]$。

例.3 改变累次积分顺序 $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy+\int_1^3 dx\int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x,y)dy$；

例.4 设 $f(x,y)$ 为连续函数,且 $f(x,y)=f(y,x)$. 证明:

$\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy=\int_0^1 dx\int_0^x f(1-x,1-y)dy.$

例.5 对积分 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$， $D=\{(x,y)\big|0\le x\le 1,\ 0\le x+y\le 1\}$ 进行极坐标变换并写出变换后不同顺序的累次积分

例.6 计算二重积分： $\iint\limits_D |xy|dxdy$,其中 D 为圆域: $x^2+y^2\le a^2$。

例.7 在下列积分中引入新变量 u,v 后，试将它化为累次积分：

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy,\text{其中}D=\{(x,y)\mid\sqrt{x}+\sqrt{y}\le\sqrt{a},x\ge 0,y\ge 0\},$$

若 $x=u\cos^4 v, y=u\sin^4 v.$

例.8 试作适当变换,计算下列积分:

(1) $\iint\limits_D (x+y)\sin(x-y)dxdy, D=\{(x,y)\mid 0\le x+y\le\pi, 0\le x-y\le\pi\};$

(2) $\iint\limits_{D} e^{\frac{y}{x+y}} dxdy, D = \{(x, y) \mid x + y \le 1, x \ge 0, y \ge 0\}$.

例.9 求由曲线所围的平面图形面积：$(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}) = x^2 + y^2$。

例.10 试作适当变换,把 $\iint\limits_{D} f(x + y) dxdy$,其中 $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \le 1\}$ 化为单重积分。

例.11 计算积分 $\iint\limits_{\substack{0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 2}} [x + y] d\sigma$;：

例. 12 计算 $I = \iint\limits_{D} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} \right) d\sigma$，其中 $D = \left\{ (x, y) \middle| x^2 + y^2 \le R^2 \right\}$.