第八次习题课　三重积分

例.1 设 V 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 所围成的区域，积分 $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz=$

例. 2 求 $\iiint\limits_\Omega (1+x^2+y^2)zdxdydz$，其中 $\Omega=\left\{(x,y,z)\mid \sqrt{x^2+y^2}\le z\le H\right\}$.

例. 3 设 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，$F(t)=\iiint\limits_\Omega \left(z^2+f(x^2+y^2)\right)dxdydz$ ，其中 $\Omega=\left\{(x,y,z)\mid 0\le z\le h, x^2+y^2\le t^2\right\}$ $(t>0)$. 求 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{F(t)}{t^2}$.

例. 4 求三重积分：$I=\iiint\limits_\Omega (x+y+z)dv$ ，其中

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|\begin{cases}0\le z\le\sqrt{1-y^2-z^2}\\ z\le\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}\right\}$$

例.5 求由曲面 $S:(x^2+y^2)^2+z^4=z^2$ 所围立体 Ω 的体积。

例.6 设 $A=(a_{ij})$ 为 3×3 实对称正定矩阵，$\sum\limits_{i.j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j=1$ 表示三维空间的一个椭球面。证明该椭球面所包围立体 V 的体积为 $|V|=\dfrac{4\pi}{3\sqrt{\det A}}$。

例.7 令曲面 S 在球坐标下方程为 $r=a(1+\cos\theta)$，Ω 是 S 围成的有界区域，计算 Ω 在直角坐标系下的形心坐标。

例.8 由六个平面 $3x-y-z=\pm1$，$-x+3y-z=\pm1$，$-x-y+3z=\pm1$ 所围立体的体积为___________________________$1/2$）

例. 9 设 $V=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le1\}$，$h=\sqrt{a^2+b^2+c^2}>0$，$f(u)$ 在区间 $[-h,h]$ 上连续，证明：$\iiint\limits_V f(ax+by+cz)dxdydz=\pi\int_{-1}^{1}(1-t^2)f(ht)dt$。