

微积分 A (2) 期末考题 (A)

一. 填空题 (每空 3 分, 共 15 空) (请将答案直接填写在横线上!)

1. 交换累次积分次序 $\int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x, y) dx =$ _____。

2. 设曲线 L 的参数方程为 $x = 1 - \sin t$, $y = 1 - \sqrt{2} \cos t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, 则第一类曲线积分 $\int_L \sqrt{x^2 - 2x + 2} dl =$ _____。

3. 设 S 为单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, 则 $\iint_S (x+1)^2 dS =$ _____。

4. $\vec{V}(x, y, z) = (x + y + z, xy + yz + zx, xyz)$, 则 $\operatorname{div} \vec{V} =$ _____。

5. $f(x, y, z) = e^{x+y+z}$, 则 $\operatorname{grad} f =$ _____, $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) =$ _____。

6. 设函数 $f(x) = x^2 + x + 2$ 在区间 $[0, 2)$ 上的 Fourier 展开为 $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x)]$, 则 $S(0) =$ _____。

7. 三重积分 $\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} x^{99} y^{100} z^{101} dx dy dz =$ _____。

8. 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}$ 的和为_____。

9. 函数 $\frac{1}{1-x}$ 在 $x_0 = 2$ 点的 Taylor 级数为_____。

10. 第二类曲线积分 $\int_{L^+} \frac{x^\lambda dy - y dx}{x^2 + y^2} = 0$ 对上半平面的任意光滑闭曲线 L 都成立, 则常数 $\lambda =$ _____。

11. S^+ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的外侧, 则第二类曲面积分 $\oiint_{S^+} x dy \wedge dz + \cos y dz \wedge dx + dx \wedge dy =$ _____。

12. 函数 $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ 在 $x_0 = 0$ 点的幂级数展开为_____。

13. 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n}$ 在 $x=3$ 处收敛, 且当 $x < 3$ 时发散, 则 $a =$ _____。

14. 设 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$, 则 D 的形心横坐标 $\bar{x} =$ _____。

二. 计算题 (每题 10 分, 共 40 分)

1. 设 S^+ 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ($0 \leq z \leq 1$) 的下侧, 求 $\iint_{S^+} (x+y)dy \wedge dz + (2y-z)dz \wedge dx$ 。

2. 求两个球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 、 $x^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 4$ 相交部分的体积。

3. 设 $f(x) = \sin^2(x^2)$,

(I) 求 $f(x)$ 在 $x_0 = 0$ 点的幂级数展开;

(II) 求 $f^{(n)}(0), n = 1, 2, 3, \dots$ 。

4. 设 $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-nx}$ ($x > 0$), 求 $\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x) dx$ 。

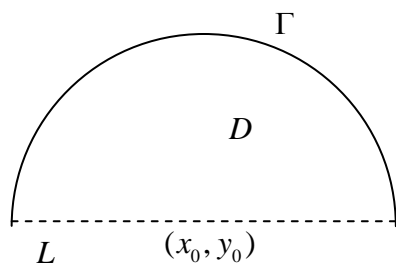
三. 证明题

1. (8 分) (I) 2π 为周期的函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的定义为 $f(x) = \cos \alpha x$ (α 不是整数),

将其展成 Fourier 级数 (提示: $\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$);

(II) 利用 (I) 证明: $\cot x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2 \pi^2}$, $x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 。

2. (7 分) 设函数 $P(x, y), Q(x, y) \in C^{(1)}(\mathbb{R}^2)$, 在以任意点 (x_0, y_0) 为中心, 任意正数 r 为半径的上半圆周 Γ 上的第二类曲线积分



$\int_{\Gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ 。求证: 在 \mathbb{R}^2 上有

$$P(x, y) \equiv 0, \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \equiv 0。$$

(提示: 用 Green 公式)