习题课　含参积分

一.　含参积分

例.1 设 $f(x)=\int_0^x\left[\int_t^x e^{-s^2}ds\right]dt$，求 $f'(x)$ 与 $f(x)$.

解: 考虑矩形 $|x|\le R,|t|\le R \quad (R>0)$，在矩形中，$\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_t^x e^{-s^2}ds\right]=e^{-x^2}$ 连续,故

$$f'(x)=\int_0^x\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_t^x e^{-s^2}ds\right]dt+\int_x^x e^{-s^2}ds=\int_0^x e^{-x^2}ds=xe^{-x^2}$$

$$f(0)=0$$

$$f(x)=\int_0^x te^{-t^2}dt=1-\frac{1}{2}e^{-x^2}$$

例.2 求 $f'(x)$，其中 $f(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}e^{x\sqrt{1-y^2}}dy$.

解:

$$\begin{aligned}f'(x)&=\int_{\sin x}^{\cos x}\frac{\partial}{\partial x}\left[e^{x\sqrt{1-y^2}}\right]dy+e^{x\sqrt{1-\cos^2 x}}(-\sin x)-e^{x\sqrt{1-\sin^2 x}}(\cos x)\\&=\int_{\sin x}^{\cos x}\sqrt{1-y^2}\,e^{x\sqrt{1-y^2}}dy+e^{x\sqrt{1-\cos^2 x}}(-\sin x)-e^{x\sqrt{1-\sin^2 x}}(\cos x)\end{aligned}$$

例.3 求 $\lim\limits_{a\to 0}\int_a^{1+a}\frac{dx}{1+x^2+a^2}$

解: $f(a,u,v)=\int_u^v\frac{dx}{1+x^2+a^2},\quad u=a,\quad v=1+a$，复合函数 $f(a,u,v)$ 为变量 a 的连续函数.

$$\lim_{a\to 0}\int_a^{1+a}\frac{dx}{1+x^2+a^2}=f(0,0,1)=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$$

例.4 能否交换顺序? $\lim\limits_{y\to 0}\int_0^1\frac{x}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y^2}}dx$

解: 不能.

$$\lim_{y\to 0}\int_0^1\frac{x}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y^2}}dx=\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{y^2}}d\left(\frac{x^2}{y^2}\right)=\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\left(1-e^{-\frac{1}{y^2}}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\int_0^1\lim_{y\to 0}\left(\frac{x}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y^2}}\right)dx=0$$

原因是在 $(0,0)$ 点，$f(x,y)=\frac{x}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y^2}}$ 不连续.

两个公式：

1． $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$

2. $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

例.5 求两个 Laplace 积分：$I(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{x^2+\alpha^2}dx,\quad J(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{x^2+\alpha^2}dx,\quad \alpha>0$ 。

解：

当$\delta>0$时，因为$\left|\int_0^A\sin\beta x dx\right|\le\frac{2}{\delta}$，并且$\frac{x}{x^2+\alpha^2}$在$\beta\in[\delta,+\infty)$上单调一致收敛趋于零，由 Dirichlet 判别法，积分$J(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{x^2+\alpha^2}dx$在$\beta\in[\delta,+\infty)$上一致收敛。

$$I'(\beta)=-\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{x^2+\alpha^2}dx \text{。}$$

$$I'(\beta)+\frac{\pi}{2}=-\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{x^2+\alpha^2}dx+\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}dx=\alpha^2\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x\left(x^2+\alpha^2\right)}dx$$

由于$I(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{x^2+\alpha^2}dx$对于$\beta\in[\delta,+\infty)$一致收敛，

$\left[I'(\beta)+\frac{\pi}{2}\right]'=\alpha^2\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{x^2+\alpha^2}dx$，即：$I''(\beta)=\alpha^2 I(\beta)$。

由此，我们得到：$I(\beta)=C_1e^{\alpha\beta}+C_2e^{-\alpha\beta}$ 。

又因为：$|I(\beta)|\le\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+\alpha^2}=\frac{\pi}{2\alpha}$，所以$\lim\limits_{\alpha\to+\infty}I(\beta)=0$，代回到上面$I(\beta)$的表达式中，我们有$C_1=0$，因此$I(\beta)=C_2e^{-\alpha\beta}$ 。

最后，考虑到$\lim\limits_{\beta\to0^+}I(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+\alpha^2}=\frac{\pi}{2\alpha}$，推出$C_2=\frac{\pi}{2\alpha}$，

即：$I(\beta)=\frac{\pi}{2\alpha}e^{-\alpha\beta}$ 。

而当$\beta>0$时，$J(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{x^2+\alpha^2}dx=-I'(\beta)=-\frac{\pi}{2}e^{-\alpha\beta}$，因此，一般地：

因而$J(\beta)=-\frac{\pi}{2}e^{-\alpha\beta}\operatorname{sgn}\beta$ 。

例.6

计算积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos 2\beta x dx$。

令：$I(\beta)=\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos 2\beta x dx$，

$I'(\beta)=-\int_0^{+\infty} 2xe^{-x^2}\sin 2\beta x dx$，对于 $\beta\in(-\infty,+\infty)$ 一致收敛。因此：

$$I'(\beta)=\int_0^{+\infty}\sin 2\beta x de^{-x^2}=-\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cdot 2\beta\cos 2\beta x dx=-2\beta I(\beta),$$

求得：$I(\beta)=Ce^{-\beta^2}$，再利用 $I(0)=\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$，

我们有：$I(\beta)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\beta^2}$，即：$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos 2\beta x dx=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\beta^2}$。

例.7 设 $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$，$(x,y)\in D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0<y\le 1\}$，$\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy$ 与 $\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx$ 是否相等？

解：$f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=-\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$

$$\int_0^1 f(x,y)dx=-\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)dx=-\left.\frac{x}{x^2+y^2}\right|_{x=0}^{x=1}=-\frac{1}{1+y^2}$$

$$\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx=-\int_0^1\frac{1}{1+y^2}dy=-\frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^1 f(x,y)dy=\int_0^1\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)dy=\left.\frac{y}{x^2+y^2}\right|_{y=0}^{y=1}=\frac{1}{1+x^2}$$

$$\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}$$

$\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy$ 与 $\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx$ 不相等。

例.8 计算积分 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\dfrac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\dfrac{dx}{\cos x}$，$(|a|<1)$

解：这是一个正常积分。

$$\frac{1}{a\cos x}\ln(1+a\cos x)=\int_0^1\frac{dy}{1+ay\cos x},\quad 0\le x<\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{1}{a\cos x}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}=2a\int_0^1\frac{dy}{1-a^2y^2\cos^2 x},\quad 0\le x\le\frac{\pi}{2}$$

$\dfrac{1}{1-a^2y^2\cos^2 x}$ 在 $0\le x\le \dfrac{\pi}{2}$，$0\le y\le 1$ 连续，故

$$I=2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^1\frac{dy}{1-a^2y^2\cos^2 x}=2a\int_0^1 dy\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1-a^2y^2\cos^2 x}$$
$$=2a\int_0^1 dy\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1-a^2y^2+t^2}\quad (t=\tan x)$$
$$=a\pi\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{1-a^2y^2}}=\pi\arcsin a$$

例.9 设 $f(t)=\int_0^1 \ln\sqrt{x^2+t^2}dx,\quad (0\le t\le 1)$，求 $f_+'(0)$。

解：函数 $\ln\sqrt{x^2+t^2}$ 和 $\dfrac{\partial}{\partial t}\ln\sqrt{x^2+t^2}=\dfrac{t}{x^2+t^2}$ 在 $(0,0)$ 点不连续，不能直接用公式。

$$f(0)=-1$$

$$f(t)=\ln\sqrt{1+t^2}-\int_0^1\frac{x^2}{x^2+t^2}dx=\ln\sqrt{1+t^2}+\int_0^1\frac{1}{\left(\frac{x}{t}\right)^2+1}dx-1$$
$$=\ln\sqrt{1+t^2}-1+t\arctan\frac{1}{t}$$
$$\frac{f(t)-f(0)}{t}=\frac{1}{t}\ln\sqrt{1+t^2}+\arctan\frac{1}{t}\to\frac{\pi}{2},t\to 0^+$$
$$f_+'(0)=\frac{\pi}{2}$$

思考：若将 t 的范围改为 $-1\le t\le 1$，$f'(0)$ 是否存在？

例.10 证明积分 $I(t)=\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin(tx)}{x}dx$ 在区间 $[-a,a]$ 上非一致连续，其中 $a>0$。（注：这是习题 2.1 第 8 题，第 104 页）（提示：利用 Dirichlet 积分公式 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin u}{u}du=\dfrac{\pi}{2}$）。

证明：显然 $I(0)=0$。$t>0$ 时，$I(t)=\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin(tx)}{tx}d(tx)=\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin u}{u}du=\dfrac{\pi}{2}$。

又易见 $I(t)$ 是奇函数。因此，当 $t<0$ 时，$I(t)=-\pi/2$。因此如果积分 $I(t)=\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin(tx)}{x}dx$ 在区间 $[-a,a]$ 上是一致收敛的，则根据连续性定理知 $I(t)$ 应该在区间 $[-a,a]$ 上连续。但很明显，$I(t)$ 在 $t=0$ 处有间断。这就得到了一个矛盾。证毕。

例.11 利用积分号下求导方法，计算积分 $I(a)=\int_0^{\pi/2}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}dx$。（课本第二章总复习题第 4 题（2）， page 115）.

解：显然 $I(0)=0$，且 $I(a)$ 是奇函数。容易验证，对于上述积分，积分号下求导定理的条件满足。于是我们有 则 $I'(a)=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+a^2\tan^2 x}$ 。以下我们设法算出这个积分。

当 $a>0$ 时，做变换 $u=a\tan x$ 。则 $dx=\frac{adu}{a^2+u^2}$ 。 于是

$I'(a)=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+a^2\tan^2 x}=\int_0^{+\infty}\frac{adu}{(1+u^2)(a^2+u^2)}$ 。对被积函数作分式分解：

$\frac{a}{(1+u^2)(a^2+u^2)}=\frac{a}{1-a^2}\left(\frac{1}{a^2+u^2}-\frac{1}{1+u^2}\right)$。由此不难求出 $I'(a)=\frac{\pi}{2}\frac{1}{1+a}$ 。

注意到 $I(0)=0$ 。于是我们得到 $I(a)=\int_0^{\pi/2}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}dx=\frac{\pi}{2}\ln(1+a)$ 。

又 $I(a)$ 是奇函数。故

$$I(a)=\int_0^{\pi/2}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}dx=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(a)\ln(1+|a|)，\ \forall a\in(-\infty,+\infty)。$$

解答完毕。

例.12 设 $f(x,t)$ 在区域 $[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ 上连续。假设积分 $I(t)=\int_a^{+\infty}f(x,t)dx$ 对任意 $t\in[\alpha,\beta)$ 均收敛，但积分 $\int_a^{+\infty}f(x,\beta)dx$ 发散。 证明积分 $I(t)$ 关于 $t\in[\alpha,\beta)$ 非一致收敛。（课本习题 2.1 题 6， page 103-104）.

证明：反证。假设积分 $I(t)$ 关于 $t\in[\alpha,\beta)$ 一致收敛，则根据 Cauchy 一致收敛准则可知，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists B=B(\varepsilon)\geq a$，使得

$$\left|\int_{b_1}^{b_2}f(x,t)dx\right|<\varepsilon，\ \forall b_2,\ b_1\geq B，\ \forall t\in[\alpha,\beta)。（*）$$

对于积分 $\int_{b_1}^{b_2}f(x,t)dx$，令 $t\to\beta^-$，并应用连续性定理得 $\left|\int_{b_1}^{b_2}f(x,\beta)dx\right|\leq\varepsilon$ 。

这表明积分 $\int_a^{+\infty}f(x,\beta)dx$ 收敛，与假设相矛盾。证毕。