by zhaochen20

for darling

第四章算法笔记

> 将 曲 线 或 曲 面 上 对 点 的 限 制 带 入 积 分 函 数

一、曲线

概述：$\mathrm{d}l$ 只有一种处理方式，单位切向量$\vec{\tau}$ 也只有一种可行的处理方式，二型曲线积分有两种处理方式。

一、一 如何处理$\mathrm{d}\vec{l}$与$\mathrm{d}l$

回顾：在上半学期，我们学习过两类曲线的切向量方法，分别是利用曲线的参数方程（曲线的参数方程只有一个参数），以及使用两个平面的法向量差积。看上去，我们的单位切向量$\vec{\tau}$ 将有两种处理方式。然而，由于我们只学习了$\mathrm{d}l=\sqrt{{x_t}'^2+{y_t}'^2+{z_t}'^2}dt$，所以这导致了我们处理单位切向量$\vec{\tau}$ 也只能用参数方程。

一、二 曲线积分

第一型曲线积分公式（处理dl）

$$\mathrm{d}l=\sqrt{{x_t}'^2+{y_t}'^2+{z_t}'^2}dt \tag{1}$$

$$\int_L f(x,y,z)dl=\int_{L_t} f(x_t,y_t,z_t)\sqrt{{x_t}'^2+{y_t}'^2+{z_t}'^2}dt \tag{2}$$

第二型曲线积分公式

$$\mathrm{d}\vec{l}=\vec{\tau}\,\mathrm{d}l$$

对单位切向量 $\vec{\tau}$ 的处理

$$\vec{\tau}=\frac{\left({x_t}'^2,{y_t}'^2,{z_t}'^2\right)}{\sqrt{{x_t}'^2+{y_t}'^2+{z_t}'^2}} \tag{3}$$

对$\mathrm{d}\vec{l}$的处理

$$\mathrm{d}\vec{l}=\vec{\tau}\,\mathrm{d}l=\left({x_t}'^2,{y_t}'^2,{z_t}'^2\right)\mathrm{dt}=(dx,dy,dz) \tag{4}$$

对$\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$的处理

对于$V=(P,Q,R)$，$P=P(x,y,z)=P(t)$，$Q=Q(x,y,z)=Q(t)$，$R=R(x,y,z)=R(t)$，则有：

$$\int_{L^+}\vec{v}\,\mathrm{d}\vec{l}=\int_{L^+}\vec{v}\cdot\vec{\tau}\,\mathrm{d}l=\int_{L_t^+}(p_t\cdot{x_t}'+q_t\cdot{y_t}'+r_t\cdot{z_t}')\mathrm{dt}=\int_{L^+}pdx+qdy+rdz \tag{5}$$

将该公式拆开来看，则有：

参 数 化 法

$$\int_{L^+}\vec{v}\,\mathrm{d}\vec{l}=\int_{L_t^+}(p_t\cdot{x_t}'+q_t\cdot{y_t}'+r_t\cdot{z_t}')\mathrm{dt} \tag{6}$$

将二型积分转化到了 t 轴上的有向积分，注意参数 t 的范围与方向。t的范围需要完全描绘出 L，并且每一个 t 对应 L 上唯一的一个点。（这是其实是函数性的要求。但是一般参数方程是满足函数性（也就是这种一一对应性），不满足函数性的往往是投影法。如果不满足一一对应，则应拆开来投影。）

一维投影法

$$\int_{L^+} \vec{v}\,\mathrm{d}\,\vec{l} = \int_{L^+} pdx + qdy + rdz \tag{7}$$

将二型曲线积分转化到了 x 轴、 y 轴 、z 轴上的有向积分，注意参数 x、y、z 的范围与方向，其实这一方法和参数化为 t 的本质完全相同。同样注意应当满足函数性，投影法往往不容易满足函数性，这是投影法经常要拆开的原因，无法一步到位。但是一般而言，投影法的计算会简单些。

是不是写的很棒，快夸夸人家

二、曲面

概述：$\mathrm{d}s$ 有两种处理方式，单位法向量 $\vec{n}$ 也有两种种可行的处理方式，二型曲面积分有两种处理方式。

二、一 如何处理 $\mathrm{d}\,\vec{s}$ 与 $\mathrm{d}s$

$\mathrm{d}s$ 的处理与 $\mathrm{d}l$ 不同，因为你很难通过 x, y, z 直接表达曲线的切线，往往需要借助参数方程，故而导致 $\vec{\tau}$ 与 $\mathrm{d}l$ 都只有一种表达方式，不过这种表达方式能够转换为投影罢了 。但是 $F(x,y,z) = const$ 的曲面，本身表达单位法向量 $\vec{n}$ 就有两种方式，参数方程与显函数直接求导，$\mathrm{d}s$ 也有对应的表达方式，进而产生了三种计算方式。

二、二 曲面积分

第一型曲面积分公式（处理 $\mathrm{d}s$）

A. 使用参数方程

x, y, z 均是 u, v 的函数。

$$ds = \left\| r'_u \times r'_v \right\| du \cdot dv \tag{8}$$

$$ds = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du \cdot dv \tag{9}$$
$$A = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\ B = \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\ C = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

$$ds = \sqrt{E \cdot F - G^2}\, du \cdot dv \tag{10}$$
$$E = {r'_u}^2,\ F = {r'_v}^2,\ G = r'_u \cdot r'_v$$

(8), (9), (10) 是完全等价的三种形式，从计算的快捷角度，(10) 式最为优化。

B. 使用显函数

$Z = f(x,y)$，则有：

$$ds = \sqrt{1 + {f'_x}^2 + {f'_y}^2}\, dx \cdot dy \tag{11}$$

第二型曲面积分公式

$\mathrm{d}\overrightarrow{s} = \overrightarrow{n}\,ds$

此处单位法向量 $\overrightarrow{n}$ 与单位切向量 $\overrightarrow{\tau}$ 也有不同，前文提到过直接表达曲线的切向量需要用参数方程，但是直接表达曲面的法向量既可以用参数方程，还可以用显函数。从而给出下式：

对单位法向量 $\overrightarrow{n}$ 的处理

$A.$ 使用参数方程

x, y, z 均是 u, v 的函数。

$$\overrightarrow{n} = \frac{r'_u \times r'_v}{\|r'_u \times r'_v\|} \tag{12}$$

$B.$ 使用显函数

$Z = f(x, y)$，则有：

$$\overrightarrow{n} = \frac{(f'_x, f'_y, -1)}{\sqrt{1 + {f'_x}^2 + {f'_y}^2}} \tag{13}$$

注意到两个式子均需考虑 $\overrightarrow{n}$ 与曲面正向的夹角。

对 $\mathrm{d}\overrightarrow{s}$ 的处理

$$\mathrm{d}\overrightarrow{s} = \overrightarrow{n}\,ds = \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) du \cdot dv = (dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy) \tag{14}$$

对 $\overrightarrow{v} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{s}$ 的处理

对于 $V = (P, Q, R)$，$P = P(x, y, z) = P(u, v)$，$Q = Q(x, y, z) = Q(u, v)$，$R = R(x, y, z) = R(u, v)$，则有：

$$\int_{s^+} \overrightarrow{v}\,\mathrm{d}\overrightarrow{s} = \int_{s^+} \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n}\,\mathrm{d}s = \int_{s^+_{u,v}} (p_{u,v} \cdot \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + q_{u,v} \cdot \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + r_{u,v} \cdot \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)})\mathrm{d}u \cdot dv \tag{15}$$

(15)将二型积分投影到uov平面上积分，注意参数 u，v 的范围与法向量的方向。u, v 的范围需要完全描绘出 S，并且每一对 u, v 对应 S 上唯一的一个点。（同上文，一般参数方程是满足函数性（也就是这种一一对应性），不满足函数性的往往是投影法。如果不满足一一对应，则应拆开来投影。）

对于此参数形式的法向量的方向，直观上很难直接把握。但是我们完全可以用特殊点来尝试，比如：

$$\text{椭球面 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ 的内侧：} \tag{16}$$
$$\mathrm{r}'_\varphi \times \mathrm{r}'_\theta = \left(bc\sin^2\varphi\cos\theta, ac\sin^2\varphi\sin\theta, ab\sin\varphi\cos\varphi\right)$$

这个式子当然很难直接看出夹角，但是我们带入$\varphi=\frac{\Pi}{2},\Theta=0$之后，$\mathrm{r}'_\varphi\times\mathrm{r}'_\theta=(bc,0,0)$，从而可以得出曲面的法向量在某一点与x轴正向平行，再结合曲面的正向是椭球面的内侧，可以看出这个法向量要取负号。

对于$V=(P,Q,R)$，$z=f(x,y)$，$P=P(x,y,z)=P(x,y)$，$Q=Q(x,y,z)=Q(x,y)$，$R=R(x,y,z)=R(x,y)$，则有：

$$\int_{s^+}\vec{v}\,\mathrm{d}\,\vec{s}=\int_{s^+}\vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{ds}=\int_{s^+_{x,y}}(p_{x,y}\cdot f'_x+q_{x,y}\cdot f'_y-r_{x,y})\mathrm{d}x\cdot dy \tag{17}$$

这个式子注意 x,y 的范围和法向量的方向，不再赘述。

$$\int_{s^+_{u,v}}(p_{u,v}\cdot\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}+q_{u,v}\cdot\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}+r_{u,v}\cdot\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)})\mathrm{d}u\cdot dv=\int_s pdy\wedge dz+qdz\wedge dx+rdx\wedge dy \tag{18}$$

投影法讨论的已经很多了，参见下一节的笔记。一般的经验表明，二型曲线积分往往用参数方程，而二型曲面积分往往用投影。