习题课资料

一．Fourier 级数

定义在$[0,l]$上的函数可以有多种方式展开成$2l$三角级数，但常用的方式只有三种，即：周期奇延拓、周期偶延拓、周期延拓。三种延拓方式得到的三角级数展开式分别为：

正弦级数展开　$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{l}x$，$x\in[0,l]$，（周期为$2l$）。

其中　$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx\quad(n=1,2,3,\cdots)$。

余弦级数展开　$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x$，$x\in[0,l]$，（周期为$2l$）。

其中　$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx\quad(n=0,1,2,\cdots)$。

(2)狄利克雷（Dirichlet）定理

设$f(x)$是周期为2π的可积函数，且满足

（1）$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上连续或只有有限个第一类间断点，

（2）$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上只有有限个单调区间，

则$f(x)$的以2π为周期的傅里叶级数收敛，且

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)=\frac{1}{2}(f(x^+)+f(x^-))$$

例 1.　已知$f(x)=x+1, x\in[0,1]$，$S(x)$是$f(x)$的周期为1的三角级数的和函数，则$S(0), S(\frac{1}{2})$的值分别为$\frac{3}{2}$，$\frac{3}{2}$。

例 2.　证明$\forall x\in(-\pi,\pi)$，成立$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx=\frac{\pi^2}{12}-\frac{x^2}{4}$.

例 3.　设$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x,\quad x\in(-\infty,+\infty)$，其中

$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi\, xdx,\qquad f(x)=x^2, x\in[0,1]\ (n=1,2,\cdots)$，求$S(-\frac{1}{2})$.

例 4. 将函数 $f(x)=x^2 \quad x\in(0,\pi)$ 按下列要求展开成 Fourier 级数:

(1) 按正弦 Fourier 展开; (2) 按余弦 Fourier 展开.