

3. 设  $G$  图有  $m$  条边,  $\bar{G}$  有  $m'$  条边。

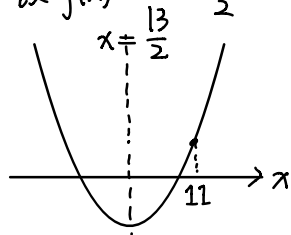
若  $G$  为平面图, 由推论 4.2.1 知  $m \leq 3n-6$ .

由于  $k_n$  有  $\frac{n(n-1)}{2}$  条边.

$$\text{则 } m' = \frac{n(n-1)}{2} - m \geq \frac{n(n-1)}{2} - 3n + 6 = \frac{n^2 - 7n + 12}{2}.$$

$$\therefore m' - (3n-6) \geq \frac{n^2 - 13n + 24}{2}.$$

$$\text{设 } f(x) = \frac{x^2 - 13x + 24}{2}, \quad f(11) = \frac{121 - 143 + 24}{2} = 1, \quad f(x) \text{ 示意图如下,}$$



$\therefore n \geq 11$  时,  $f(n) > 0$ , 即  $m' > 3n-6$ .

$\therefore \bar{G}$  图不是平面图。

$\therefore G$  与  $\bar{G}$  至少有一个不是平面图。

4. 若存在这样的平面图,

则可作出它的对偶图  $G^*$ , 且  $G^*$  仍为平面图。

设对偶图顶点为  $v_1^*, v_2^*, v_3^*, v_4^*, v_5^*$

由于任两域之间至少有一条公共边界, 则  $G^*$  中任两点间有边相连。

则  $K_5$  为  $G^*$  的支撑子图。

又  $\because K_5$  不是平面图

$\therefore$  由非平面图的任意母图不是平面图, 知  $G^*$  不是平面图, 矛盾

$\therefore$  不存在这样的平面图。