周期为T的函数可表示为如下级数：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega x+b_n\sin n\omega x)\quad \omega=\frac{2\pi}{T}$$

若此级数收敛，则其和函数以 $\frac{2\pi}{\omega}$ 为周期

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx=0\qquad \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cdot\cos mx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cdot\sin mx\,dx=\begin{cases}\pi & n=m\\ 0 & n\neq m\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx=0$$

2π周期 Fourier

对：$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega x+b_n\sin n\omega x)$

① 直接 $[-\pi,\pi]$ 上积分：$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$

② 两边同乘 $\cos kx$，$k=n=1,2,3\cdots$，则 $a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx$，一步给出 a_n 通式

③ 两边同乘 $\sin kx$，$k=n=1,2,3\cdots$，则 $b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx$，一步给出 b_n 通式

设 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或广义绝对可积

则按上述方式算出的 a_0, a_k, b_k 与：

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos n\omega x+b_n\sin n\omega x)$$ 称为 $f(x)$ 的形式 Fourier 级数

① $f(x)$ 为奇，则 $a_k=0\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin kx\,dx$

$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}b_n\sin nx$ 正弦Fourier级数

② $f(x)$ 为偶，则 $b_k=0\quad a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos kx\,dx$

$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx$ 余弦Fourier级数

任意周期Fourier

$f(x)$ 以 $2L$ 为周期，在 $[-L,L]$ 上可积或广义绝对可积，令 $t=\frac{\pi}{L}x$，$\varphi(t)=f(x)=f(\frac{L}{\pi}t)$

也即令 $x=\frac{L}{\pi}t$ 也即 $\pi x=Lt$，则 $\varphi(t)$ 以 2π 为周期

$\varphi(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)$ 则 $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos nt\,dt\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sin nt\,dt$

$t=\frac{\pi}{L}x$，则 $a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx\quad n=0,1,2\cdots\quad b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\frac{\sin(n\pi x)}{L}dx\quad n=1,2\cdots$

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\tfrac{\pi}{L}x+b_n\sin n\tfrac{\pi}{L}x)$$

$f(x)=x^2$, $\forall x\in[-1,1]$ $T=2$,

$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos n\frac{\pi}{l}x\,dx$ $n=0$时，$a_0=0$ $n\neq0$时，$a_n=\int_{-1}^{1}x^2\cos n\pi x\,dx=\frac{1}{n\pi}\int_{-1}^{1}x^2 d\sin n\pi x$

$=\frac{1}{n\pi}\left(x^2\sin n\pi x\Big|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}2x\sin n\pi x\,dx\right)=+\frac{2}{n\pi}\int_{-1}^{1}x\cdot\frac{1}{n\pi}d\cos n\pi x=\frac{2}{n^2\pi^2}\int_{-1}^{1}x\,d\cos n\pi x$

$=\frac{2}{n^2\pi^2}\left(x\cos n\pi x\Big|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\cos n\pi x\,dx\right)=\frac{2}{n^2\pi^2}\cdot\left(2\cos n\pi-\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\Big|_{-1}^{1}\right)=\frac{4}{n^2\pi^2}\cos n\pi$

$=(-1)^n\frac{4}{n^2\pi^2}$

$b_n=\int_{-1}^{1}x^2\sin n\pi x\,dx=-\int_{-1}^{1}x^2 d\cos n\pi x=-\left(x^2\cos n\pi x\Big|_{-1}^{1}\right)+\int_{-1}^{1}\cos n\pi x\cdot 2x\,dx$

后者为奇，故为0