第四次习题课解答：Taylor 展式、极值问题

一．Taylor 展式

1． 将函数$\ln(1+x+y+z)$在点$(x,y,z)=(0,0,0)$分别展开成带 Peano 余项的二阶泰勒展式和带有 Lagrange 余项的一阶 Taylor 展式。

解：将函数$\ln(1+x+y+z)$中的函数$x+y+z$看作一个整体，并记作$u=x+y+z$.

将一元函数$\ln(1+u)$在$u=0$处展开成带 Peano 余项的二阶 Taylor 展式:

$$\ln(1+u)=u-\frac{1}{2}u^2+o(u^2).$$

将$u=x+y+z$代入到上式即得

$$\ln(1+x+y+z)=(x+y+z)-\frac{1}{2}(x+y+z)^2+o(\rho^2).$$

上式即为所求的带 Peano 余项的二阶 Taylor 展式。

这里$\rho^2=x^2+y^2+z^2$. 注意$o((x+y+z)^2)=o(\rho^2)$.

为了求带 Lagrange 余项的 Taylor 展式，我们需要求函数的 Hesse 矩阵。

为此，我们将函数$\ln(1+x+y+z)$看作函数$\ln(1+u)$和函数$u=x+y+z$的复合函数。

于是$\operatorname{grad}(\ln(1+x+y+z))=\dfrac{1}{1+u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

由此进一步得$\ln(1+x+y+z)$的 Hesse 矩阵为$H(x,y,z)=\dfrac{-1}{(1+u)^2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}$.

于是所求的带 Lagrange 余项的一阶 Taylor 展式为

$$\ln(1+x+y+z)=(x+y+z)-\frac{1}{2}(x,y,z)H(\theta x,\theta y,\theta z)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=$$

$$=(x+y+z)-\frac{1}{2}\frac{(x+y+z)^2}{[1+\theta(x+y+z)]^2}.\text{（*）}$$

这里$\theta\in(0,1)$.

这是课本 p.82，1（3），课本所给出的答案为$\ln(1+x+y+z)=(x+y+z)-\dfrac{1}{2}(\xi+\eta+\varsigma)^2$.（**）

关于不确定的量ξ，η，ς，课本没有给出说明。如果在展式（*）中，令

$$\xi=\frac{x}{\sqrt{1+\theta^2(x+y+z)^2}}，\ \eta=\frac{y}{\sqrt{1+\theta^2(x+y+z)^2}}，\ \varsigma=\frac{z}{\sqrt{1+\theta^2(x+y+z)^2}}，$$

即得展式（**）。展式（*）比（**）更精确，更好一些。解答完毕。

2. 设 $D\subset\mathbb{R}^2$ 为凸的有界闭区域，$f(x,y)\in C^1(D)$．试证：$f(x,y)$ 在区域 D 上满足 Lipschitz 条件，即 $\exists L>0,\ s.t.\ \forall P_1,P_2\in D$，有 $|f(P_2)-f(P_1)|\le L\|P_2-P_1\|$（两点之间的距离）。

证明：因为有界闭区域上的连续函数是有界的，

因此存在 $M>0$ 使得 $|f_x^{'}(x,y)|\le M$，$|f_y^{'}(x,y)|\le M$，$\forall(x,y)\in D.$

因为 D 是凸的（即 D 中任意两点的凸组合在 D 中），

因此 $\forall\lambda\in[0,1],\ \forall P,\ Q\in D,\ \lambda P+(1-\lambda)Q\in D.$

由泰勒公式，对任意的 $P_1(x_1,y_1),\ P_2(x_2,y_2)\in D$，存在 $P^*\in\overline{P_1P_2}\subset D$ 使得

$$|f(P_2)-f(P_1)|=|f_x^{'}(P^*)(x_2-x_1)+f_y^{'}(P^*)(y_2-y_1)|\le M(|x_2-x_1|+|y_2-y_1|)$$
$$\le\sqrt{2}M\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{2}M\|P_1-P_2\|.$$

证毕。

二. 极值问题

3．求原点到曲面 $z^2=xy+x-y+4$ 的最短距离.

解：不难看出，所要求解的问题实际上是条件极值问题（*）

$$\min x^2+y^2+z^2，\ s.t.\ z^2=xy+x-y+4。$$

解法一：我们将这个条件极值问题转化为无条件极值。

（注： 一般说来，无条件极值问题求解要容易些）

显然条件极值问题(*)等价于无条件极值问题 $\min f(x,y)$，$(x,y)\in\mathbb{R}^2$，

其中 $f(x,y)=x^2+y^2+xy+x-y+4$.

解方程组 $\begin{cases}f_x^{'}=0\\ f_y^{'}=0,\end{cases}$ 容易得到唯一的一组解 $(x,y)=(-1,1)$.

将这一组解代入约束条件 $z^2=xy+x-y+4$ 立得 $z=\pm1$.

因此函数 $f(x,y)$ 在整个平面上有且仅有两个驻点 $(-1,1,1)$ 和 $(-1,1,-1)$.

由于函数 $f(x,y)$ 是二次多项式，

它的 Hesse 矩阵是常数阵$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$，这是正定矩阵，

因此函数 $f(x,y)$ 在这两个驻点均有极小值 3.

由此断言，所求的最短距离为$\sqrt{3}$．解答完毕。

解法二：用 Lagrange 乘子法来直接求解这个条件极值问题：

$\min x^2+y^2+z^2$，$s.t.\ z^2=xy+x-y+4$.

作 Lagrange 函数 $L(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2+\lambda(z^2-xy-x+y-4)$．令

$$\begin{cases} L'_x=2x-\lambda(y+1)=0 \\ L'_y=2y+\lambda(-x+1)=0 \\ L'_z=2z+2\lambda z=0 \\ L'_\lambda=z^2-xy-x+y-4=0 \end{cases}$$

由上述第三个方程可知$\lambda=-1$或$z=0$．讨论如下：

情形$\lambda=-1$．联立前两个方程得$\begin{cases} 2x+y=-1 \\ x+2y=1. \end{cases}$

不难解得唯一的解：$x=-1$，$y=1$.

将$x=-1$，$y=1$代入第四个方程得$z=\pm 1$.

这就得到问题的两个驻点$(-1,1,1)$和$(-1,1,-1)$.

情形$z=0$。 联立前两个方程得 $\begin{cases} 2x-\lambda y=\lambda \\ -\lambda x+2y=-\lambda. \end{cases}$

(i) 当$\lambda=2$时，容易解得$x=y+1$．代入方程$xy+x-y+4=0$得$y^2+y+5=0$，无实数解。

(ii) 当$\lambda\neq 2$时，由方程组 $\begin{cases} 2x-\lambda y=\lambda \\ -\lambda x+2y=-\lambda \end{cases}$ 立得$(2-\lambda)x+(2-\lambda)y=0$，即 $y=-x$.

代入方程$xy+x-y+4=0$，得$-x^2+2x+4=0$．其解为$x=1\pm\sqrt{5}$.

由此得到两个驻点：$(x,y,z)=(1+\sqrt{5},\ \ -1-\sqrt{5},\ \ 0)$，$(1-\sqrt{5},\ \ -1+\sqrt{5},\ \ 0)$.

综上我们得到四个驻点：$(-1,1,1)$，$(-1,1,-1)$，$(1+\sqrt{5},-1-\sqrt{5},0)$，$(1-\sqrt{5},-1+\sqrt{5},0)$.

这四个点与原点的距离分别为$\sqrt{3}$，$\sqrt{3}$，$2\sqrt{3+\sqrt{5}}$，$2\sqrt{3-\sqrt{5}}$.

容易验证，这四个值的最小值是$\sqrt{3}$.

因此，曲面上的两个点$(-1,1,1)$和$(-1,1,-1)$与原点的距离$\sqrt{3}$是所求的最短距离。

解答完毕。

4. 在周长为$2p$的三角形中求出满足下述要求的三角形：绕自己的一边旋转时所形成的旋转体的体积最大。

解：设三角形三边的长分别为$x,\ y,\ 2p-x-y.$

不妨设绕边长为x的边旋转，并假设该边上的高为h.
则三角形的面积为$S=xh/2$.

另一方面,根据三角形面积的海伦公式知$S=\sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}$.

于是所求旋转体的体积为$V=V(x,y)=\dfrac{1}{3}\pi h^2 x=\dfrac{4p\pi}{3}(p-x)(p-y)(x+y-p)/x$.

令$\begin{cases} V_x^{'}=0 \\ V_y^{'}=0, \end{cases}$ 即$\begin{cases} (2p-2x-y)x-(p-x)(x+y-p)=0 \\ 2p-x-2y=0, \end{cases}$

解得$x=p/2$， $y=3p/4$. 解答完毕。

5. 假设$u(x,y)$在闭圆盘$\bar{D}=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\right\}$上连续，在开圆盘

$D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<1\right\}$上二阶连续可微，且满足 Lapalace 方程$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=u$.

若在圆盘边界$\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=1\right\}$上，$u(x,y)\ge 0$，证明：当$x^2+y^2\le 1$时， $u(x,y)\ge 0$.

（这是课本习题 1.9 第 5 题的第 2 小题， page 94）
证明：根据连续函数在有界闭域上可取到最值，

可知函数$u(x,y)$在有界闭域上的某点$(x_0,y_0)\in\bar{D}$上必取得最小值。

若最小值非负，则结论得证。假设最小值是负的，即$u(x_0,y_0)<0$.

由假设知函数在边界$\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=1\right\}$上非负。

因此点(x_0,y_0)不在边界上，即(x_0,y_0)位于开区域D内。

考虑函数$u(x,y)$在点(x_0,y_0)处的 Hesse 矩阵$J=\begin{bmatrix} u_{xx}^{''} & u_{xy}^{''} \\ u_{yx}^{''} & u_{yy}^{''} \end{bmatrix}_{(x_0,y_0)}$.

记矩阵J的两个特征值为λ和μ.

则据矩阵特征值之和等于矩阵的迹，有 $\lambda+\mu=(u_{xx}^{''}+u_{yy}^{''})|_{(x_0,y_0)}$.

由于函数 $u(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处是极小值，

因此它的 Hesse 矩阵 J 的两个特征值 λ 和 μ 必定都是非负的，即 $\lambda\ge 0$ 且 $\mu\ge 0$.

因为如果 λ 和 μ 之一为负数，则不难证明 $u(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处不可能取得极小值。

于是 $(u_{xx}^{''}+u_{yy}^{''})|_{(x_0,y_0)}\ge 0$. 另一方面根据假设，

$(u_{xx}+u_{yy})|_{(x_0,y_0)}=u(x_0,y_0)<0$. 这就得到了矛盾。证毕。

6. 假设 $f(x,y)$ 在全平面上有连续的偏导数，在全平面除原点之外处处满足 $xf_x^{'}+yf_y^{'}>0$.

证明原点是 $f(x,y)$ 的唯一极小值点，并且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

证明：

① 首先证明原点之外任意点 (x,y) 都不是驻点，从而不是极值点.

假设点 $(x_0,y_0)\ne(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的驻点，即在该点处 $f_x^{'}=0$， $f_y^{'}=0$.

因此考虑 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 沿着任何方向的方向导数均为零。

另一方面，函数 $f(x,y)$ 沿方向 $l=\dfrac{(x_0,y_0)}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$ 的方向导数为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=gradf(x_0,y_0)\cdot\frac{(x_0,y_0)}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}=\frac{x_0f_x^{'}+y_0f_y^{'}}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}>0.$$ 矛盾。

故原点之外任意点 (x,y) 都不是 $f(x,y)$ 的驻点。

② 下证原点是驻点.

对于任意的 $x>0$，考察点 $(x,0)$. 由题目条件推出 $x\dfrac{\partial f(x,0)}{\partial x}>0$，进而得到 $\dfrac{\partial f(x,0)}{\partial x}>0$.

令 $x\to 0^+$，因为偏导数连续，所以由极限保号性得 $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\partial f(x,0)}{\partial x}\ge 0$.

由题目条件又可以推出在点 $(-x,0)$ 满足 $-x\dfrac{\partial f(-x,0)}{\partial x}>0$，进而推出 $\dfrac{\partial f(-x,0)}{\partial x}<0$.

又得到 $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\partial f(-x,0)}{\partial x}\le 0$.

由 $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}\ge 0$ 和 $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}\le 0$ 推出 $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}=0$.

同样的方法可以推出 $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}=0$. 因此原点是驻点.

③ 证明 $f(0,0)$ 是极小值。

对于任意点 $(x_0,y_0)\ne(0,0)$， 我们来证明 $f(x_0,y_0)>f(0,0)$, 因此 $(0,0)$ 是函数 $f(x,y)$ 的极小值点.

令 $g(t)=f(tx_0,ty_0)$. 易知函数 $g(t)$ 是连续可微的。

由一元函数的 Lagrange 中值定理知 $g(1)-g(0)=g'(\xi)$， $\xi\in(0,1)$.

另一方面由链式法则有 $g'(t)=f_x(tx_0,ty_0)x_0+f_y(tx_0,ty_0)y_0$.

由假设 $xf_x^{'}+yf_y^{'}>0$ 知， $g'(t)=\dfrac{1}{t}\Big(f_x(tx_0,ty_0)tx_0+f_y(tx_0,ty_0)ty_0\Big)>0$， $\forall t>0$.

于是 $f(x_0,y_0)-f(0,0)=g(1)-g(0)=g'(\xi)>0$. 证毕。

④ 证明 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

注意到 $f(x,y)$ 有连续的偏导数， $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}=0$ 且 $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}=0$,

所以 $\mathrm{d}f(0,0)=0$. 函数全改变量与微分之差是 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ 的高阶无穷小量，即

$f(x,y)-f(0,0)=o(\rho)$. 于是 $\lim\limits_{x\to0,y\to0}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$. 证毕。

7. 设二元函数 $f(x,y)$ 在全平面上处处可微，且满足条件

$$\lim_{x^2+y^2\to+\infty}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=+\infty. \qquad (*)$$

证明：对于任意给定的向量 $(a,b)\in\mathbb{R}^2$，均存在一点 $(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2$ 使得 $\mathrm{gradf}(\xi,\eta)=(a,b)$.

证明：根据假设 $(*)$ 可知，对于任意给定的向量 $(a,b)\in\mathbb{R}^2$，

我们有 $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty}\dfrac{f(x,y)-ax-by}{\sqrt{x^2+y^2}}=+\infty$.

故当 $x^2+y^2\to+\infty$ 时，函数 $f_1(x,y)=f(x,y)-ax-by\to+\infty$.

任取 $P\in R^2$， 设 $f_1(P)=M$ ；

则 $\exists d>0,\ \forall(x,y),$ 当 $\sqrt{x^2+y^2}>d$ 时，有 $f_1(x,y)>M$ ；
故存在 $Q\in B=\{(x,y)|x^2+y^2\le d^2\}$ 使得 $f_1(Q)=\min\limits_{(x,y)\in B}f_1(x,y)$.
显然，$f_1(Q)=\min\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}f_1(x,y)$． 故 Q 是 $f_1(x,y)$ 的极小值点，
从而由极值的必要条件知 $gradf_1(Q)=(0,0)$．从而 $gradf(Q)=(a,b)$． 证毕。

8. 求函数 $z=xy(4-x-y)$ 在由三条直线 $x=1$， $y=0$ 和 $x+y=6$ 所围有界闭区域上的最大值。

解：记由三条直线 $x=1$， $y=0$ 和 $x+y=6$ 所围的有界开区域为 D， 有界闭区域为 $\overline{D}$.

（I） 求函数 $z(x,y)$ 在区域 D 内的极值．令

$$\begin{cases} z'_x=4y-2xy-y^2=0 \\ z'_y=4x-x^2-2xy=0 \end{cases}$$

求得驻点 $(0,0),\ \left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right),\ (0,4),\ (4,0)$，在 D 内的驻点为 $\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$.

（II） 求函数 $z(x,y)$ 在边界上的最值。区域 D 的边界由三条直线段构成。

这对应着三个条件极值问题如下：

(1) $\begin{cases}\text{Max } xy(4-x-y) \\ s.t.\quad x=1\end{cases}$

(2) $\begin{cases}\text{Max } xy(4-x-y) \\ s.t.\quad y=0\end{cases}$

(3) $\begin{cases}\text{Max } xy(4-x-y) \\ s.t.\quad x+y=6\end{cases}$

解问题(1)．将 $x=1$ 代入 $z=xy(4-x-y)$ 得一元函数 $z=y(3-y)$.

令 $z'=3-2y=0$，解得驻点 $(1,\ 3/2)$．对应函数值为 $z=\frac{9}{4}$.

解问题(2)．将 $y=0$ 代入 $z=xy(4-x-y)$，得 $z=0$.

解问题(3)．作 Lagrange 函数 $L=xy(4-x-y)+\lambda(x+y-6)$．令

$$\begin{cases} L'_x = 4y - 2xy - y^2 + \lambda = 0 \\ L'_y = 4x - x^2 - 2xy + \lambda = 0 \\ L'_\lambda = x + y - 6 = 0 \end{cases}$$

解这个方程组求得函数在边界 $x+y=6$ 上有驻点 $(3,3)$.

于是我们得到函数在闭区域 $\overline{D}$ 上有驻点 $(4/3, 4/3)$，$(1, 3/2)$ 和 $(3,\ 3)$。

函数也可能在三个角点 $(1,0),(6,0),(1,5)$ 上取得最值。

由于函数 $z = xy(4-x-y)$ 在有界闭区域 $\overline{D}$ 上连续，

故函数在 $\overline{D}$ 上的最大值和最小值都在这六个点上取得。

计算函数 $z = xy(4-x-y)$ 在六个点上的值可知，

函数 $z(x,y)$ 在点 $(4/3,\ 4/3)$ 处取得最大值 $z(4/3, 4/3) = 64/27$.

在点 $(3,\ 3)$ 处取得最小值 $z(3,3) = -18$． 解答完毕。

9. 设 $p>0$，$q>0$ 满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 求函数 $\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}$ 在平面第一象限 $x>0, y>0$ 里满足约束条件 $xy=1$ 的最小值。由此进一步证明 Young 不等式 $\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q} \ge xy$，$\forall x, y>0$.

（注：这是课本第一章总复习题第 16 题，page 97）

解：考虑条件极值问题 $\min\ \frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}$， $s.t.\ xy=1$， $x>0, y>0$.

作 Lagrange 函数 $L(x,y,\lambda) = \frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q} - \lambda(xy-1)$.

解方程组

$$\begin{cases} L_x = x^{p-1} - \lambda y = 0 \\ L_y = y^{q-1} - \lambda x = 0 \\ L_\lambda = -(xy-1) = 0, \end{cases}$$

不难解得方程组在第一象限 $x>0, y>0$ 有唯一解 $x=1, y=1, \lambda=1$.

当 $x \to 0^+$，或 $y \to 0^+$ 时，由于函数 $\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}$ 在双曲线 $xy=1$ 上的函数值趋于正无穷，

因此函数 $\dfrac{x^p}{p}+\dfrac{y^q}{q}$ 在双曲线 $xy=1$ 的最小值点就是 $x=1, y=1$，最小值为 1.

以下我们来证明 Young 不等式。

要证 $\dfrac{x^p}{p}+\dfrac{y^q}{q}\ge xy$，$\forall x,y>0$，

即要证 $\dfrac{1}{p}\dfrac{x^p}{xy}+\dfrac{1}{q}\dfrac{y^q}{xy}\ge 1$.

记 $a=\dfrac{x}{(xy)^{1/p}}$，$b=\dfrac{y}{(xy)^{1/q}}$，则 $ab=\dfrac{xy}{(xy)^{(1/p)+(1/q)}}=1$.

根据第一部分条件极值的结论得 $\dfrac{a^p}{p}+\dfrac{b^q}{q}\ge 1$.

此即 $\dfrac{1}{p}\dfrac{x^p}{xy}+\dfrac{1}{q}\dfrac{y^q}{xy}\ge 1$. 这表明 Young 不等式成立。证毕。

Young 不等式传统证明方法：

左边$= e^{\ln\left(\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}\right)} \ge e^{\frac{1}{p}\ln x^p+\frac{1}{q}\ln y^q} = xy$（凹函数性质）

10. 求平面 $x+y-z=0$ 与圆柱面 $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx-1=0$ 相交所成椭圆的面积。

分析：(1)如果求得椭圆的长短半轴长分别为 a,b，则椭圆的面积 $S=\pi ab$.

(2) 由圆柱面方程看到，此圆柱关于坐标原点是对称的，故此圆柱的中心轴为通过坐标原点的某一直线.

(3) 因为平面 $x+y-z=0$ 也是通过坐标原点的，所以此平面上的椭圆截线以坐标原点为其中心点。

据此分析，椭圆上任意一点到坐标原点距离的最大最小值即为所求。

解：令 $L(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2-\lambda(x+y-z)-\mu(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx-1)$，

解方程组 $\begin{cases} L_x'=2x-\lambda-2\mu x+\mu y+\mu z=0 \\ L_y'=2y-\lambda-2\mu y+\mu x+\mu z=0 \\ L_z'=2z+\lambda-2\mu z+\mu y+\mu x=0 \\ x+y-z=0 \\ x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx-1=0 \end{cases}$

得 $\begin{cases}(2-2\mu)x-\lambda+\mu y+\mu z=0 & (1)\\ (2-2\mu)y-\lambda+\mu x+\mu z=0 & (2)\\ (2-2\mu)z+\lambda+\mu y+\mu x=0 & (3)\\ x+y-z=0 & (4)\\ x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx-1=0 & (5)\end{cases}$

将 $(1)x+(2)y+(3)z$，得

$$2(x^2+y^2+z^2)-\lambda(x+y-z)-2\mu(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=0,$$

将 $(4),(5)$ 带入上式，得 $x^2+y^2+z^2=\mu$，故 μ 是 $x^2+y^2+z^2$ 的极值，

问题转而去求 μ，为此，从方程 $(1)-(4)$ 中消去 λ，(2)+(3), (1)+(3)与(4)联立，得

$$\begin{cases}2\mu x+(2-\mu)y+(2-\mu)z=0\\ (2-\mu)x+2\mu y+(2-\mu)z=0\\ x+y-z=0\end{cases}$$

上述方程组有非零解的充要条件是系数矩阵行列数为零，

故 $\begin{vmatrix}2\mu & 2-\mu & 2-\mu\\ 2-\mu & 2\mu & 2-\mu\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=0$，

所以 $\mu^2-\dfrac{20}{3}\mu+4=0$，从而上述方程的两个根就是 $x^2+y^2+z^2$ 的极大极小值，

而两根之积为 4，所以椭圆的面积是 2π .

解法二、在上述解法中求得 $x^2+y^2+z^2=\mu$ 之后，为求 μ，将上述方程(1)-(4)看成是关于变量 (x,y,z,λ) 的方程，由于方程(5)表明 $(x,y,z)\neq(0,0,0)$,因此方程(1)-(4)构成的齐次线性方程组有非零解，故 $\begin{vmatrix}2-2\mu & \mu & \mu & -1\\ \mu & 2-2\mu & \mu & -1\\ \mu & \mu & 2-2\mu & 1\\ 1 & 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=0$，解得 $\mu_1=6,\ \mu_2=\dfrac{2}{3}$，所以椭圆的面积是 2π .

11. 若 $f''_{xy}(x,y)=2(y+1)\mathrm{e}^x$， $f'_x(x,0)=(x+1)\mathrm{e}^x$， $f(0,y)=y^2+2y$。求 $f(x,y)$ 的极值。

解：因为 $f''_{xy}(x,y)=2(y+1)\mathrm{e}^x$，因此

$$f_x'(x,y) = f_x'(x,0) + \int_0^y f_{xy}''(x,v)\mathrm{d}v$$
$$= (x+1)\mathrm{e}^x + \int_0^y 2(v+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}v$$
$$= (x+1)\mathrm{e}^x + (y^2+2y)\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x[x+(y+1)^2],$$

从而

$$f(x,y) = f(0,y) + \int_0^x f_x'(u,y)\mathrm{d}u$$
$$= y^2 + 2y + \int_0^x (u\,\mathrm{e}^u + (y+1)^2\,\mathrm{e}^u)\mathrm{d}u$$
$$= x\,\mathrm{e}^x + (y^2+2y)\mathrm{e}^x .$$

所以 $f_y'(x,y) = 2(y+1)\mathrm{e}^x$.

令 $f_y'(x,y)=0$ 解得 $y=-1$，再由 $f_x'(x,y)=0$ 解得 $x=0$.

故唯一的驻点是 $(x,y)=(0,-1)$.

由于 $f_{xx}''(0,-1)=2,\ \ f_{xy}''(0,-1)=0,\ \ f_{yy}''(0,-1)=2$，

这样 $f_{xx}''(0,-1)f_{yy}''(0,-1)-(f_{xy}''(0,-1))^2=4>0,\ \ f_{xx}''(0,-1)=2>0$，

所以 $(x,y)=(0,-1)$ 是函数的极小值点，且极小值 $f(0,-1)=-1$.