（科目：　　）清华大学数学作业纸

编号：　　　班级：　　　姓名：　　　第　　页

21. $\sigma\tau=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&4&1&2&5&6\end{bmatrix}=(1\ 3)(2\ 4)$

$\tau\sigma=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&5&3&4&2&1\end{bmatrix}=(1\ 6)(2\ 5)$

$\sigma^{-1}=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6\\5&6&2&1&3&4\end{bmatrix}=(1\ 2)(3\ 5)(4\ 6)(1\ 3)(2\ 4)$

$\sigma\tau\sigma^{-1}=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6\\5&6&4&3&1&2\end{bmatrix}=(1\ 5)(2\ 6)(3\ 4)$

~~$(1\ 3)(3\ 2)(2\ 4)(4\ 1)$~~

~~27. $a=(1\ 3\ 2\ 4)=$ ……$(1\ 3)$…… 均未出现在 a 中，故有4个陪集：~~

~~$(1\ 2)$, $(3\ 4)$ 均未出现在 a 中 …… $(1\ 2)(3\ 4)H$.~~

~~H, $(1\ 2)H$, $(3\ 4)H$,~~

30. 由Lagrange定理，$[G:1]=[G:A][A:1]=[G:B][B:1]$

$\therefore \dfrac{[G:B]}{[G:A]}=\dfrac{[A:1]}{[B:1]}$. 　又 $B\subseteq A$ 且 B 是群，即 B 是 A 的子群，故 $[A:1]=[A:B][B:1]$.

$\therefore \dfrac{[A:1]}{[B:1]}=[A:B]$. 　$\therefore [G:B]=[G:A][A:B]$.

33. $H_1H=\{h_1h \mid h_1\in H_1, h\in H\}$

$H_2H=\{h_2h \mid h_2\in H_2, h\in H\}$.

$\forall x\in H_1H$, $\exists h_1\in H_1$, $h\in H$, s.t. $h_1h=x$.

由 $H_1\subset H_2$ 得 $h_1\in H_2$. 又 $h\in H$. 故 $x=h_1h\in H_2H$.

$\therefore H_1H\subset H_2H$.

又 H_1H 是群，故 H_1H 是 H_2H 的子群，下证 $H_1H\lhd H_2H$.

$\forall x\in H_2H$, $y\in H_1H$. 令 $x=h_2h_3$, $y=h_1h_4$, $h_1\in H_1$, $h_2\in H_2$, $h_3,h_4\in H$.

$xyx^{-1}=h_2h_3h_1h_4(h_2h_3)^{-1}=h_2h_3h_1h_4h_3^{-1}h_2^{-1}$ ~~$=h_2h_1h_4h_2$~~.

由H是正规子群得，$h_2 h_3 h_1 h_4 h_3^{-1} h_2^{-1} = h_2 h_3 h_1 h_2^{-1} h_5$

$= h_6 h_2 h_1 h_2^{-1} h_5 \quad (h_5, h_6 \in H)$.

再由H是正规子群得 $h_6 h_2 h_1 h_2^{-1} h_5 = h_6 h_1' h_2 h_2^{-1} h_5 = h_6 h_1' h_5 \quad (h_1' \in H_1)$

再由H是正规子群得 $h_6 h_1' h_5 = h_1' h_7 h_5 = h_1' h_8 \quad (h_7, h_8 \in H)$.

$\therefore h_2 h_3 h_1 h_4 h_3^{-1} h_2^{-1} \in H_1 H$. $\quad H_1 H \lhd H_2 H$.

$xyx^{-1} =$

27. $\alpha = (1\ 3\ 2\ 4)$ $\quad \alpha^2 = (1\ 2)(3\ 4)$ $\quad \alpha^3 = (1\ 4\ 2\ 3)$

$\alpha^4 = (1)(2)(3)(4)$ $\therefore \alpha$的阶是4.

~~置换的~~乘法满足交换律，故只需写出所有左陪集.

令$\gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ $\gamma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ $\gamma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

$\gamma_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ $\gamma_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

则有6个左陪集，分别为 $\langle\alpha\rangle, \gamma_1\langle\alpha\rangle, \gamma_2\langle\alpha\rangle, \gamma_3\langle\alpha\rangle, \gamma_4\langle\alpha\rangle, \gamma_5\langle\alpha\rangle$.