第 3 次习题课题目解答

第 1 部分 课堂内容回顾

1. 向量值函数的微分

(1) **定义:** 向量值函数的微分, Jacobi 矩阵, Jacobi 行列式.

(2) **向量值函数微分的性质:** 微分的唯一性, 可微性蕴含连续性.

(3) **微分的链式法则 (矩阵表示):**

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\vec{f}\circ\vec{g})(X_0) &= \mathrm{d}\vec{f}(\vec{g}(X_0))\circ \mathrm{d}\vec{g}(X_0),\\
J_{\vec{f}\circ\vec{g}}(X_0) &= J_{\vec{f}}(\vec{g}(X_0))\cdot J_{\vec{g}}(X_0),\\
\frac{\partial f_i(g_1,\dots,g_m)}{\partial x_j} &= \frac{\partial f_i}{\partial y_1}(*)\frac{\partial g_1}{\partial x_j}+\frac{\partial f_i}{\partial y_2}(*)\frac{\partial g_2}{\partial x_j}+\cdots+\frac{\partial f_i}{\partial y_m}(*)\frac{\partial g_m}{\partial x_j}.
\end{aligned}$$

2. 隐函数定理、反函数定理及其应用

(1) **隐函数定理:**

(a) **两个变量的方程:** 设函数 $F(x,y)$ 为 $\mathscr{C}^{(1)}$ 类使得

$$F(x_0,y_0)=0,\ \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0.$$

则方程 $F(x,y)=0$ 在局部上有 $\mathscr{C}^{(1)}$ 类的解 $y=f(x)$, 并且

$$f'(x)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))}.$$

(b) **多个变量的方程:** 设函数 $F(x_1,x_2,\dots,x_n,y)$ 为 $\mathscr{C}^{(1)}$ 类使得

$$F(X_0,y_0)=0,\ \frac{\partial F}{\partial y}(X_0,y_0)\neq 0.$$

则方程 $F(x_1,x_2,\dots,x_n,y)=0$ 在局部上有 $\mathscr{C}^{(1)}$ 类解 $y=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$, 并且

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(X,f(X))}{\frac{\partial F}{\partial y}(X,f(X))}.$$

(c) **多个变量的方程组:** 设 $F_i(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)$ $(1\leqslant i\leqslant m)$ 为 $\mathscr{C}^{(1)}$ 类使得 $F_i(X_0,Y_0)=0$ $(1\leqslant i\leqslant m)$, $\frac{D(F_1,\dots,F_m)}{D(y_1,\dots,y_m)}(X_0,Y_0)\neq 0$. 则方程组

$$F_i(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)=0\ (1\leqslant i\leqslant m)$$

在局部上有 $\mathscr{C}^{(1)}$ 类解 $y_i=f_i(x_1,x_2,\dots,x_n)$ $(1\leqslant i\leqslant m)$, 且

$$J_{\vec{f}}(X)=-\left(\frac{\partial(F_1,\dots,F_m)}{\partial(y_1,\dots,y_m)}(X,\vec{f}(X))\right)^{-1}\cdot\frac{\partial(F_1,\dots,F_m)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}(X,\vec{f}(X)).$$

(2) **反函数定理:** 设 $X=\vec{g}(Y)$ 为 $\mathscr{C}^{(1)}$ 类使得 $X_0=\vec{g}(Y_0)$ 且 $J_{\vec{g}}(Y_0)$ 可逆. 则局部上存在 $\mathscr{C}^{(1)}$ 反函数 $Y=\vec{f}(X)$, 并且 $J_{\vec{f}}(X)=\left(J_{\vec{g}}(\vec{f}(X))\right)^{-1}$, 也即

$$\frac{\partial(f_1,f_2,\dots,f_n)}{\partial(x_1,x_2,\dots,x_n)}(X)=\left(\frac{\partial(g_1,g_2,\dots,g_n)}{\partial(y_1,y_2,\dots,y_n)}(\vec{f}(X))\right)^{-1}.$$

3. 空间曲面的切平面与法线

(1) **曲面** $S: z=f(x,y)$ **在点** (x_0,y_0,z_0) **的切平面方程:**

$$z-z_0=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0).$$

相应的法线方程为

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

(2) **曲面** $S:\begin{cases} x=f_1(u,v)\\ y=f_2(u,v)\\ z=f_3(u,v)\end{cases}$ **在参数** (u_0,v_0) **所对应点处的切平面方程为:**

$$\begin{pmatrix} x-x_0\\ y-y_0\\ z-z_0\end{pmatrix}=\frac{\partial(f_1,f_2,f_3)}{\partial(u,v)}(u_0,v_0)\begin{pmatrix} u-u_0\\ v-v_0\end{pmatrix},$$

该切平面也可以表示成:

$$\frac{D(f_2,f_3)}{D(u,v)}(u_0,v_0)(x-x_0)+\frac{D(f_3,f_1)}{D(u,v)}(u_0,v_0)(y-y_0)+\frac{D(f_1,f_2)}{D(u,v)}(u_0,v_0)(z-z_0)=0.$$

相应的法线方程为

$$\frac{x-x_0}{\frac{D(f_2,f_3)}{D(u,v)}(u_0,v_0)}=\frac{y-y_0}{\frac{D(f_3,f_1)}{D(u,v)}(u_0,v_0)}=\frac{z-z_0}{\frac{D(f_1,f_2)}{D(u,v)}(u_0,v_0)}.$$

(3) **曲面** $S: F(x,y,z)=0$ **在点** P_0 **处的切平面方程为:**

$$\frac{\partial F}{\partial x}(P_0)(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(P_0)(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}(P_0)(z-z_0)=0.$$

相应的法线方程为

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}(P_0)}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}(P_0)}=\frac{z-z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}(P_0)}.$$

第 2 部分 习题课题目解答

1. (微分形式的不变性) 设 $z=f(u,v)$, $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ 均为连续可微函数. 将 z 看成是 x,y 的函数. 求证:

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}y=\frac{\partial f}{\partial u}\,\mathrm{d}u+\frac{\partial f}{\partial v}\,\mathrm{d}v.$$

证明: 由复合求导法则可知

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}z &= \frac{\partial z}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}y=\big(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\big)\,\mathrm{d}x+\big(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\big)\,\mathrm{d}y\\
&= \frac{\partial f}{\partial u}\big(\frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y\big)+\frac{\partial f}{\partial v}\big(\frac{\partial v}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\,\mathrm{d}y\big)\\
&= \frac{\partial f}{\partial u}\,\mathrm{d}u+\frac{\partial f}{\partial v}\,\mathrm{d}v.
\end{aligned}$$

2. 设 $z=x^3f\big(xy,\frac{y}{x}\big)$, 其中 f 为可微函数. 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解: **方法 1.**

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= 3x^2f\big(xy,\frac{y}{x}\big)+x^3\partial_1f\big(xy,\frac{y}{x}\big)\cdot y+x^3\partial_2f\big(xy,\frac{y}{x}\big)\cdot\big(-\frac{y}{x^2}\big)\\
&= 3x^2f\big(xy,\frac{y}{x}\big)+x^3y\partial_1f\big(xy,\frac{y}{x}\big)-xy\partial_2f\big(xy,\frac{y}{x}\big),\\
\frac{\partial z}{\partial y} &= x^3\partial_1f\big(xy,\frac{y}{x}\big)\cdot x+x^3\partial_2f\big(xy,\frac{y}{x}\big)\cdot\big(\frac{1}{x}\big)\\
&= x^4\partial_1f\big(xy,\frac{y}{x}\big)+x^2\partial_2f\big(xy,\frac{y}{x}\big).
\end{aligned}$$

方法 2.

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}z &= \mathrm{d}\Big(x^3f\big(xy,\frac{y}{x}\big)\Big)=3x^2f\big(xy,\frac{y}{x}\big)\mathrm{d}x+x^3\mathrm{d}\Big(f\big(xy,\frac{y}{x}\big)\Big)\\
&= 3x^2f\big(xy,\frac{y}{x}\big)\mathrm{d}x+x^3\Big(\partial_1f\big(xy,\frac{y}{x}\big)\mathrm{d}(xy)+\partial_2f\big(xy,\frac{y}{x}\big)\mathrm{d}\big(\frac{y}{x}\big)\Big)\\
&= 3x^2f\big(xy,\frac{y}{x}\big)\mathrm{d}x+x^3\partial_1f\big(xy,\frac{y}{x}\big)\big(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y\big)\\
&\quad +x^3\partial_2f\big(xy,\frac{y}{x}\big)\big(\frac{1}{x}\mathrm{d}y-\frac{y}{x^2}\mathrm{d}x\big)\\
&= \Big(3x^2f\big(xy,\frac{y}{x}\big)+x^3y\partial_1f\big(xy,\frac{y}{x}\big)-xy\partial_2f\big(xy,\frac{y}{x}\big)\Big)\mathrm{d}x\\
&\quad +\Big(x^4\partial_1f\big(xy,\frac{y}{x}\big)+x^2\partial_2f\big(xy,\frac{y}{x}\big)\Big)\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

由此立刻可得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= 3x^2f\big(xy,\frac{y}{x}\big)+x^3y\partial_1f\big(xy,\frac{y}{x}\big)-xy\partial_2f\big(xy,\frac{y}{x}\big),\\
\frac{\partial z}{\partial y} &= x^4\partial_1f\big(xy,\frac{y}{x}\big)+x^2\partial_2f\big(xy,\frac{y}{x}\big).
\end{aligned}$$

3. 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (a,a) 处可微, 并且 $f(a,a)=a$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,a)=\frac{\partial f}{\partial y}(a,a)=b.$$

令 $\varphi(x)=\big(f(x,f(x,f(x,x)))\big)^2$. 求 $\varphi'(a)$.

解: 由题设可得

$$\begin{aligned}
&\varphi'(x)=2f(x,f(x,f(x,x)))\frac{\mathrm{d}f(x,f(x,f(x,x)))}{\mathrm{d}x}\\
&=2f(x,f(x,f(x,x)))\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x,f(x,f(x,x)))+\frac{\partial f}{\partial y}(x,f(x,f(x,x)))\frac{\mathrm{d}f(x,f(x,x))}{\mathrm{d}x}\Big)\\
&=2f(x,f(x,f(x,x)))\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x,f(x,f(x,x)))\\
&\qquad+\frac{\partial f}{\partial y}(x,f(x,f(x,x)))\big(\frac{\partial f}{\partial x}(x,f(x,x))+\frac{\partial f}{\partial y}(x,f(x,x))\frac{\mathrm{d}f(x,x)}{\mathrm{d}x}\big)\Big)\\
&=2f(x,f(x,f(x,x)))\bigg(\frac{\partial f}{\partial x}(x,f(x,f(x,x)))+\frac{\partial f}{\partial y}(x,f(x,f(x,x)))\\
&\qquad\cdot\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x,f(x,x))+\frac{\partial f}{\partial y}(x,f(x,x))\big(\frac{\partial f}{\partial x}(x,x)+\frac{\partial f}{\partial y}(x,x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}\big)\Big)\bigg),
\end{aligned}$$

于是我们有 $\varphi'(x)=2a\big(b+b\big(b+b(b+b)\big)\big)=2ab(1+b+2b^2)$.

4. 考虑三元方程 $xy-z\log y+e^{xz}=1$, 由隐函数定理, 存在点 $(0,1,1)$ 的某个邻域使得在此邻域内, 该方程 (D)

(A) 只能确定一个连续可导的隐函数 $z=z(x,y)$;

(B) 可确定两个连续可导的隐函数 $y=y(x,z)$ 和 $z=z(x,y)$;

(C) 可确定两个连续可导的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $z=z(x,y)$;

(D) 可确定两个连续可导的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $y=y(x,z)$.

解: $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, 定义 $F(x,y,z)=xy-z\log y+e^{xz}-1$. 则

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}(0,1,1)&=&(y+ze^{xz})\Big|_{(0,1,1)}=2,\\
\frac{\partial F}{\partial y}(0,1,1)&=&\big(x-\frac{z}{y}\big)\Big|_{(0,1,1)}=-1,\\
\frac{\partial F}{\partial z}(0,1,1)&=&(-\log y+xe^{xz})\Big|_{(0,1,1)}=0.
\end{aligned}$$

于是由隐函数定理知, 由方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 $(0,1,1)$ 的某个邻域内只能确定两个连续可导的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $y=y(x,z)$.

5. 假设由方程组 $\begin{cases}F(y-x,y-z)=0,\\ G(xy,\frac{z}{y})=0,\end{cases}$ 可确定隐函数 $x=x(y)$, $z=z(y)$, 其中 F,G 均为连续可导. 求 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$.

解: 将方程组两边关于 y 求导可得

$$\partial_1 F(y-x,y-z)\Big(1-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\Big)+\partial_2 F(y-x,y-z)\Big(1-\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\Big)=0,$$
$$\partial_1 G\Big(xy,\frac{z}{y}\Big)\Big(y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+x\Big)+\partial_2 G(xy,\frac{z}{y}\Big)\Big(\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}-\frac{z}{y^2}\Big)=0.$$

出于简便, 将 $\partial_1 F(y-x,y-z),\partial_2 F(y-x,y-z),\partial_1 G\big(xy,\frac{z}{y}\big),\partial_2 G\big(xy,\frac{z}{y}\big)$ 分别简记为 $\partial_1 F,\partial_2 F,\partial_1 G,\partial_2 G$, 则我们有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} &= \frac{y\partial_1 F\partial_2 G+(y-z)\partial_2 F\partial_2 G+xy^2\partial_2 F\partial_1 G}{y(\partial_1 F\partial_2 G-y^2\partial_2 F\partial_1 G)},\\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} &= \frac{-(x+y)y^2\partial_1 F\partial_1 G+z\partial_1 F\partial_2 G-y^3 z\partial_2 F\partial_1 G}{y(\partial_1 F\partial_2 G-y^2\partial_2 F\partial_1 G)}.\end{aligned}$$

6. 若隐函数 $y=y(x)$ 由 $ax+by=f(x^2+y^2)$ 确定, 而 a,b 为常数. 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解: 将方程 $ax+by=f(x^2+y^2)$ 两边对 x 求导可得

$$a+by'=f'(x^2+y^2)\cdot(2x+2yy'),$$

于是我们有 $y'=\frac{a-2xf'(x^2+y^2)}{2yf'(x^2+y^2)-b}$.

7. 设 $f\in C(0,+\infty)$, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 只是 $\frac{b}{a}$ 的函数. 请用多元函数微分法证明: 存在常数 k, 使得 $f(x)=\frac{k}{x}$.

解: 因为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 只是 $\frac{b}{a}$ 的函数, 所以映射

$$\begin{cases} u=u(a,b)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \\ v=v(a,b)=\frac{b}{a}\end{cases}$$

不是一一映射.由逆映射定理可知

$$0=\det\frac{\partial(u,v)}{\partial(a,b)}=\det\begin{pmatrix}-f(a) & f(b)\\ -\frac{b}{a^2} & \frac{1}{a}\end{pmatrix}=\frac{-af(a)+bf(b)}{a^2}.$$

由 a,b 的任意性, 可得 $xf(x)=k$.

8. 通过曲面 $S:\ e^{xyz}+x-y+z=3$ 上的点 $(1,0,1)$ 的切平面 (B).
(A) 通过 y 轴; (B) 平行于 y 轴; (C) 垂直于 y 轴; (D) A, B, C 都不对.

解: 曲面在点 $(1,0,1)$ 的法向量为

$$\vec{n}=\begin{pmatrix} yze^{xyz}+1\\ xze^{xyz}-1\\ xye^{xyz}+1\end{pmatrix}\Big|_{(1,0,1)}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

该向量与 y 轴垂直, 故曲面在点 $(1,0,1)$ 处的切平面与 y 轴平行, 其方程为

$$(x-1)+(z-1)=0,$$

也即 $x+z-2=0$, 故该切平面不经过 y轴.

9. 求曲线

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-6=0 \\ z-x^2-y^2=0 \end{cases}$$

在点 $M(1,1,2)$ 处的切线与法平面.

解: 由题设可知, 曲线在点 $M(1,1,2)$ 处的切线方向为

$$\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}\Bigg|_{(1,1,2)} \times \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix}\Bigg|_{(1,1,2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix},$$

故切线方程为 $\frac{x-1}{10}=\frac{y-1}{-10}=\frac{z-2}{0}$, 相应的法平面方程为 $10(x-1)-10(y-1)=0$, 也即我们有 $x-y=0$.

10. 求曲线 $\begin{cases} x=t \\ y=t^2 \\ z=t^3 \end{cases}$ 上的点使曲线在该点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$.

解: 设所求曲线上的点为 (t_0,t_0^2,t_0^3), 曲线在该点的切线方向为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2t_0 \\ 3t_0^2 \end{pmatrix}$, 则该切线与平面 $x+2y+z=4$ 平行当且仅当

$$0=\begin{pmatrix} 1 \\ 2t_0 \\ 3t_0^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1+4t_0+3t_0^2,$$

也即 $t_0=-1$ 或 $-\frac{1}{3}$. 则所求点为 $(-1,1,-1)$ 或 $\big(-\frac{1}{3},\frac{1}{9},-\frac{1}{27}\big)$.

11. 设 ℓ 为光滑曲面 $S: F(x,y,z)=0$ 上在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面上过点 P_0 的直线, 求证: 在 S 上存在过点 P_0 的曲线在点 P_0 处的切线为 ℓ.

证明: 由于 S 为光滑曲面, 则 $\mathrm{grad}F(P_0)\neq\vec{0}$. 不失一般性, 设 $\frac{\partial F}{\partial z}(P_0)\neq 0$. 由隐函数定理可知, 方程 $F(x,y,z)=0$ 可在点 P_0 的邻域内确定隐函数 $z=f(x,y)$, 其中 $|x-x_0|<\delta$, $|y-y_0|<\delta$, $\delta>0$. 设直线 ℓ 的单位方向为 (a,b,c). 因 ℓ 位于曲面 S 在点 P_0 处的切平面上, 则

$$a\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+b\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)-c=0,$$

也即我们有 $c=a\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+b\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$.

$\forall t \in (-\delta, \delta)$, 我们有 $|at| < \delta$, $|bt| < \delta$, 由此定义

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + at, \\ y(t) = y_0 + bt, \\ z(t) = f(x_0 + at, y_0 + bt), \end{cases}$$

进而我们得到曲面 S 上的一条过 P_0 的曲线且该曲线在点 P_0 的切线为

$$\frac{x - x_0}{x'(0)} = \frac{y - y_0}{y'(0)} = \frac{z - z_0}{z'(0)}.$$

但 $x'(0) = a$, $y'(0) = b$, $z'(0) = a\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + b\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = c$, 因此上述切线就是题设直线 ℓ, 于是曲线 Γ 满足题设条件, 故所证成立.

12. 过直线

$$\begin{cases} 10x + 2y - 2z = 27 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

作曲面 $3x^2 + y^2 - z^2 = 27$ 的切平面, 求该切平面的方程.

解: 方法 1. 设切平面的切点为 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, 则曲面在该点的法向量为 $\vec{n} = (3x_0, y_0, -z_0)$, 切平面方程为

$$3x_0x + y_0y - z_0z = 27.$$

直线 L 落在切平面上, 在直线 L 取两个不同的点 $(\frac{27}{8}, 0, \frac{27}{8})$, $(\frac{27}{8}, -\frac{27}{8}, 0)$, 分别代入切平面方程, 得

$$3x_0 - z_0 = 8,\ 3x_0 - y_0 = 8.$$

由这两个条件以及切点所满足的曲面方程 $3x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 = 27$, 得

$$(x_0, y_0, z_0) = (3, 1, 1) \text{ 或 } (-3, -17, -17).$$

相应的切平面方程为

$$9x + y - z = 27 \text{ 或 } 9x + 17y - 17z + 27 = 0.$$

方法 2. 设所求切平面的切点为 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, 则

$$3x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 = 27,$$

曲面在该点的法向量为 $\vec{n} = (3x_0, y_0, -z_0)$, 切平面方程为

$$3x_0x + y_0y - z_0z = 27.$$

直线 L 的切向量为 $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$, 其中

$$\vec{n}_1 = (10, 2, -2),\ \vec{n}_2 = (1, 1, -1).$$

直线 L 落在切平面上, 与切平面的法向量垂直, 即 $\vec{n}\perp(\vec{n}_1\times\vec{n}_2)$, 因此

$$\det\begin{pmatrix} 3x_0 & y_0 & -z_0 \\ 10 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}=0,\quad \text{解得 } y_0=z_0.$$

直线 L 落在切平面上, 则直线 L 上一点 $(\frac{27}{8},0,\frac{27}{8})$ 落在切平面上, 代入切平面方程得 $3x_0-z_0=8$. 求解方程组

$$\begin{cases} 3x_0^2+y_0^2-z_0^2=27 \\ y_0=z_0 \\ 3x_0-z_0=8 \end{cases}$$

得切点

$$(x_0,y_0,z_0)=(3,1,1) \text{ 或 } (-3,-17,-17).$$

相应的切平面方程为

$$9x+y-z=27 \text{ 或 } 9x+17y-17z+27=0.$$

方法 3. 设所求切平面的切点为 $P_0(x_0,y_0,z_0)$. 曲面在该点的法向量为 $\vec{n}=(6x_0,2y_0,-2z_0)$, 从而相应切平面方程为

$$6x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)-2z_0(z-z_0)=0.$$

该切平面包直线 L,而过直线 L 的平面总是可以表示成

$$\lambda(10x+2y-2z-27)+\mu(x+y-z)=0$$

的形式, 因此 $\exists\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ 使得

$$\begin{aligned} &6x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)-2z_0(z-z_0) \\ =&\lambda(10x+2y-2z-27)+\mu(x+y-z). \end{aligned}$$

比较两边的系数可得

$$\begin{gathered} 6x_0=10\lambda+\mu,\ 2y_0=2\lambda+\mu,\ -2z_0=-2\lambda-\mu, \\ -6x_0^2-2y_0^2+2z_0^2=-27\lambda. \end{gathered}$$

也即 $x_0=\frac{5}{3}\lambda+\frac{1}{6}\mu$, $y_0=z_0=\lambda+\frac{1}{2}\mu$. 代入曲面方程可得

$$3\Big(\frac{5}{3}\lambda+\frac{1}{6}\mu\Big)^2=27,\ -54=-27\lambda,$$

故 $\lambda=2$, $\mu=-2$ 或 -38, 从而所求切点为 $(3,1,1)$ 或 $(-3,-17,-17)$, 相应的切平面方程为 $18(x-3)+2(y-1)-2(z-1)=0$ 或

$$-18(x+3)-34(y+17)+34(z+17)=0,$$

也即 $9x+y-z=27$ 或 $9x+17y-17z+27=0$.