第八章 群

刘世霞
shixia@tsinghua.edu.cn

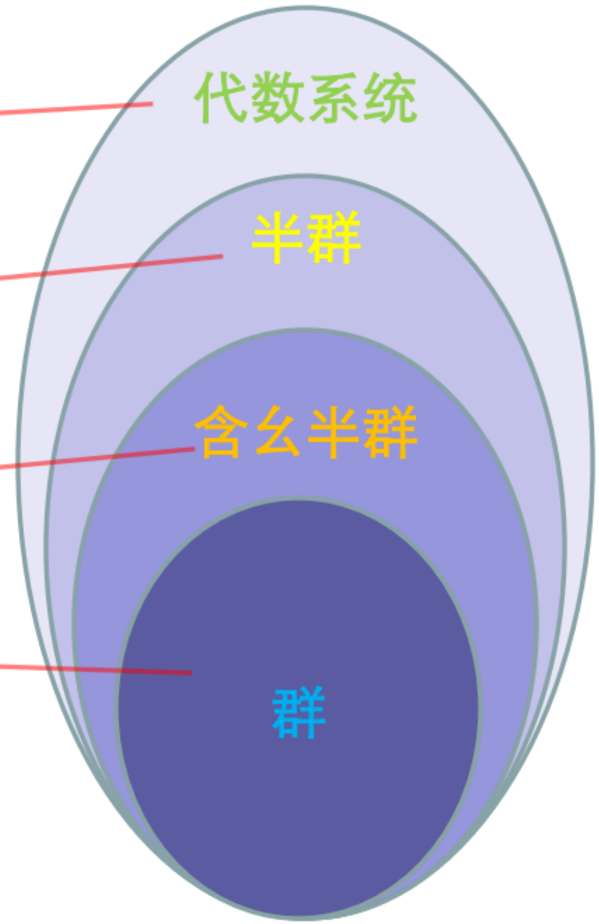
内容回顾：常用代数系统的比较

非空集合+代数运算

非空集合+代数运算+结合律

非空集合+代数运算+结合律+单位元

非空集合+代数运算+结合律+单位元+逆元



内容回顾：群的定义

封结幺逆

定义8.2.1

- 设G是非空集合，$\cdot$是G上的二元运算，若代数系统$(G,\cdot)$满足

  1. 适合结合律，即$\forall a,b,c\in G$,有$(ab)c=a(bc)$
  2. 存在单位元e，使得$\forall a\in G, ae=ea=a$
  3. G中的元素都是可逆元。即$\forall a\in G$,都$\exists a^{-1}\in G$，使得$aa^{-1}=a^{-1}a=e$

- 则称代数系统$(G,\cdot)$是一个群，或记为$(G,\cdot,e)$。
- 为了方便起见，常用G表示群$(G,\cdot,e)$

群的定义：封闭性、结合律、幺元、逆

封结幺逆 → 凤姐咬你

内容回顾：群的性质

性质1　设$(G,\cdot)$为群，则$\forall a\in G$，a的左逆元也是a的右逆元.

性质2 设$(G,\cdot)$为群，则G的左单位元e也是右单位元.

性质3 设$(G,\cdot)$为群，则$\forall a,b\in G$，方程$a\cdot x=b$和$y\cdot a=b$在G中的解唯一.

内容回顾：群的性质

性质4 设$(G, \cdot)$为群，则

(1) $\forall a \in G$，$(a^{-1})^{-1}=a$;

(2) $\forall a,b \in G$，$(a \cdot b)^{-1}=b^{-1} \cdot a^{-1}$.

性质5 群$(G, \cdot)$中的乘法满足消去律，即$\forall a,b,c \in G$有

(1) 若 $a \cdot b = a \cdot c$，则 $b = c$(左消去律)

(2) 若 $b \cdot a = c \cdot a$，则 $b = c$(右消去律)

内容回顾：群的性质

性质6 设G 为群，则G中的幂运算满足：

(1) $\forall a\in G$，$a^n a^m = a^{n+m}$，$n, m\in \mathrm{Z}$

(2) $\forall a\in G$，$(a^n)^m = a^{nm}$，$n, m\in \mathrm{Z}$

(3) 若G为交换群，则 $(ab)^n = a^n b^n$.

性质7 G为群，$a\in G$且 $|a| = r$. 设k是整数，则

(1) $a^k = e$当且仅当$r \mid k$.

(2) $O < a^{-1} > = O < a >$.

内容回顾：群、群的基本性质

定理8.2.6

- H是G的子群的充要条件是：
  1. H对G的乘法运算是封闭的，即$\forall a, b \in H$，都有$ab \in H$
  2. H中有单位元e'，且$e' = e$
  3. $\forall a \in H$，都有$a^{-1} \in H$，且a^{-1}是a在G中的逆元

内容回顾：满足子群的条件

封闭性、单位元、逆元素

非空的

封幺逆

内容回顾：群、群的基本性质

定理8.2.7

- G的非空子集H是G的子群的充要条件是$\forall a, b \in H$，都有$ab^{-1} \in H$

内容回顾：群、群的基本性质

例

- 设H_1, H_2是G的两个子群，则$H = H_1 \cap H_2$也是G的子群。

- 证明：
  - G单位元$e \in H_1, H_2$，所以$e \in H$，即H非空。
  - 任设$a, b \in H$，则$a, b \in H_1$， $a, b \in H_2$，由定理8.2.7有 $ab^{-1} \in H_1$，$ab^{-1} \in H_2$，因此$ab^{-1} \in H$，
  - 所以H是G的子群。

内容回顾：循环群定义

- 若群G中存在一个元素a，使得G中的任意元素g，都可以表示成a的幂的形式，即

$$G = \{a^k | k \in Z\},$$

- 则称G是循环群，记作$G = \langle a \rangle$，a称为G的生成元。

由一个元素生成的群

内容回顾：关于循环群的一个结论

- 所有的循环群都同构于(Z,+)或$(Z_n, +)$

- 当$o(a)$=∞时， $G \cong$ (Z,+)无限循环群
- 当$o(a)$=n时， $G \cong (Z_n, +)$$n$阶循环群

内容回顾：循环群 群的同构

定理8.3.1

- 设$G = \langle a \rangle$，则
- 1. 若$o\langle a \rangle = \infty$，则$G$中只有生成元$a$或$a^{-1}$
- 2. 若$o\langle a \rangle = n$，则G中有$\varphi(n)$个生成元
  – 其中$\varphi(n)$是欧拉函数，它表示小于n且与n互素的正整数个数。

循环群中，若某元素的幂次与n互素，则可以作为另一生成元！

内容回顾：群的同构

定义8.3.2

- 设$(G,\cdot)$和$(G',*)$是两个群，

  $f: G \to G'$是双射，如果$\forall a, b \in G$都有

$$f(ab) = f(a) * f(b)$$

- 则称f是G到G'的一个同构，记作$G \cong G'$

群同构的充分条件：1. 双射 2. 保持运算！

内容回顾：循环群和子群的关系

定理8.3.2

- 设$G = \langle a \rangle$是循环群，则
  1. G的子群H都是循环群。
  2. 若G是无限群，则子群$H(H \neq \{e\})$也是无限群，若G是有限群时，设$|G| = n$，且a^k是H中a的最小正幂，则$|H| = n/k$。

第八章 群

三维空间中有多少种正多面体

- 我们的证明方式是利用欧拉公式:

$$v+f-e=2$$

- 假设每个面的边数为n，每个顶点发射的边数为m:

$$\frac{vm}{2}=\frac{fn}{2}=e$$

- 因此带入v=2e/m以及f=2e/n，我们有:

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{m}=\frac{1}{2}+\frac{1}{e}>\frac{1}{2}$$

- 其中m,n>2，且为正整数

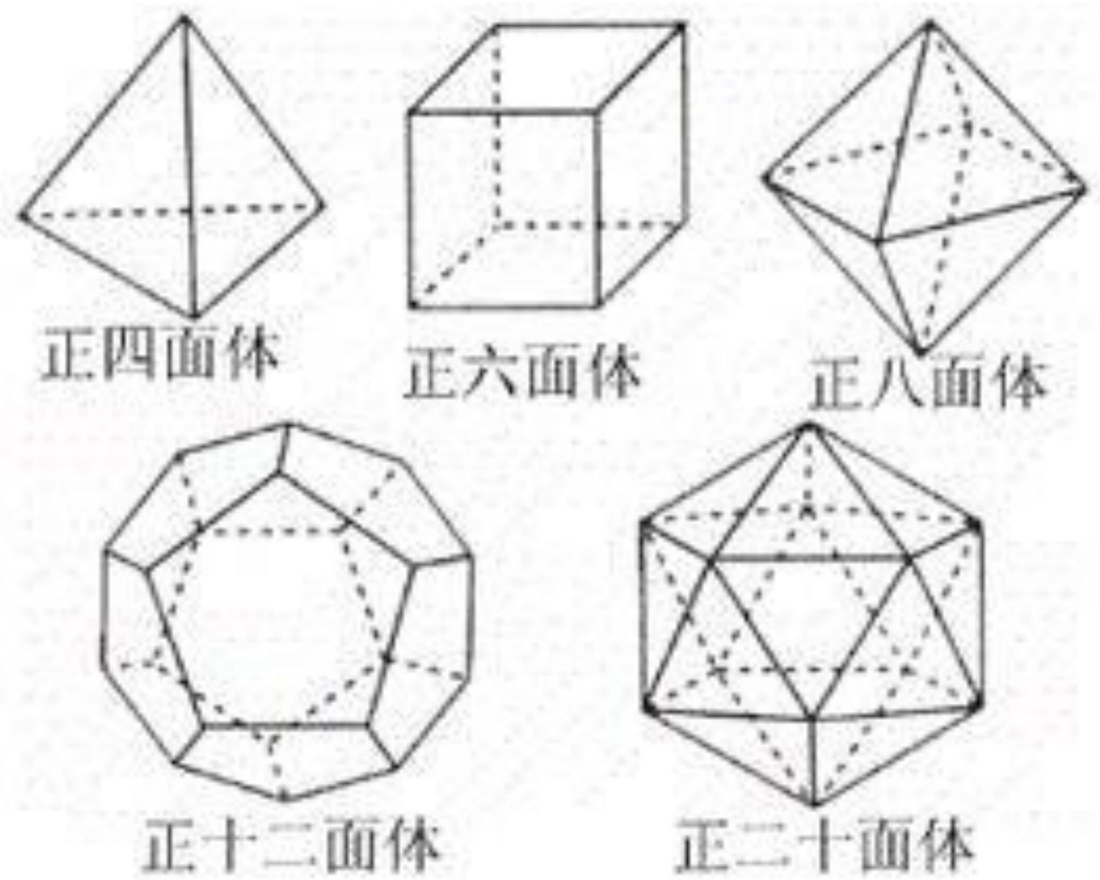
三维空间中有多少种正多面体

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{m}=\frac{1}{2}+\frac{1}{e}>\frac{1}{2}$$

- 该方程解有限：(3, 3)，(3, 4)，(4, 3)，(3, 5)，(5, 3)
- 因此只有五种正多面体
- 在本节课中，我们将会学到正多面体的旋转群都是三维旋转群SO3的子群
- SO3是将三维物体绕一定旋转轴旋转一定角度的变换组成的变换群

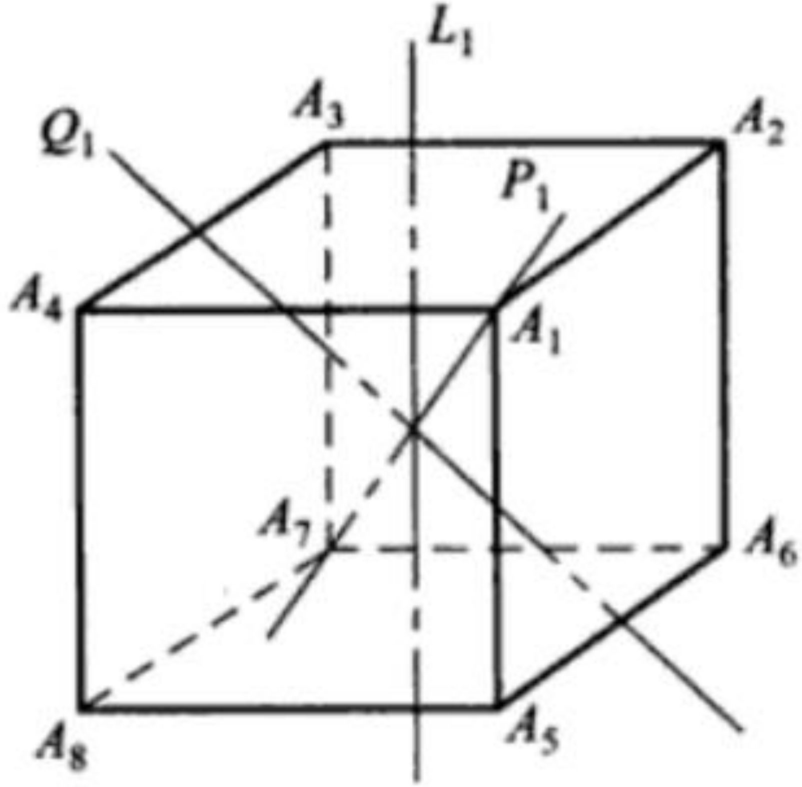
每个面的边数为n，每个顶点发射的边数为m

正多面体



(3,3),(3,4),(4,3),(3,5),(5,3)

旋转



8.4 变换群和置换群 Cayley定理

定义8.4.0

- 设$A=\{a_1,a_2,\cdots\}$是一个非空集合，A到A的一个映射f称为A的一个变换，记做

$$f\colon\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots \\ f(a_1) & f(a_2) & \cdots \end{bmatrix}$$

- 其中，恒等变换记为I

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

- 思考：

  变换有什么特点？

  – 定义域和值域为同一个集合

  – 如果变换是满射，则一定是单射，也就是双射

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

- 记集合A上全部变换的集合为$M(A)$
  - 若$|A| = n$，则$|M(A)| = n^n$

- 如果变换是双射的话，我们称之为一一变换。

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

- 对于A中的两个变换f, g，定义A的另一个变换gf为：

$$gf(a) = g\big(f(a)\big) \qquad \forall a \in A$$

- 称为变换f与g的乘积（或乘法运算）

- 对于代数系统$(M(A),\cdot)$：
  - 变换乘法运算符合结合律
  - $fI = If = f$

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

定义8.4.1

- 非空集合A的所有一一变换关于变换的乘法所作成的群叫做A的一一变换群，用$E(A)$表示，$E(A)$的子群叫做变换群

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

- 当集合A为有限集合时，即$|A| = n$时，A中的一个一一变换称为一个n元置换，由置换构成的群称为置换群。

- 思考：

  置换群与变换群的区别？

  变换群 一个集合A的一一变换所组成的群
  置换群 一个有限集合A的一一变换所组成的群

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

- 对于n元置换，可表示为：

$$\sigma: \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{bmatrix}$$

- 显然，$\sigma(1), \sigma(2), \cdots \sigma(n)$就是$1 \sim n$的一个排列。
- 反之，$1 \sim n$ 的一个排列，唯一对应一个 n 元置换，则共有$n!$个n元置换。
- 用S_n表示这$n!$个n元置换的集合

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

- 例
  - $A=\{1,2,3\}$，则$S_3=\{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_6\}$，其中

$$\sigma_1=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{bmatrix},\ \sigma_2=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{bmatrix},\ \sigma_3=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{bmatrix},$$

$$\sigma_4=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{bmatrix},\sigma_5=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{bmatrix},\ \sigma_6=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{bmatrix},$$

  - 计算置换乘法$\sigma_2\sigma_4$： $i\to\sigma_2(\sigma_4(i))$
  - $\sigma_2(\sigma_4(1))=\sigma_2(2)=3,\cdots$

$$\sigma_2\sigma_4=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{bmatrix}$$

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

定义8.4.2

- S_n对于置换乘法构成群，称为n次对称群。
- S_n的子群称为n元置换群。

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

- 对于一个置换σ，如果满足
$$\sigma(i_1)=i_2,\sigma(i_2)=i_3,\cdots,\sigma(i_l)=i_1$$
- 则称$(i_1,i_2,\cdots,i_l)$是一个长度为l的轮换
- 当$l=1$时，称为恒等置换
- 当$l=2$时，称为对换

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

- 例：
  - 置换

$$\sigma=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

$$\sigma(1)=3$$
$$\sigma(3)=2$$
$$\sigma(2)=4$$
$$\sigma(4)=1$$

  - 因此，该置换可写为轮换的形式：(1,3,2,4) (3,2,4,1) (2,4,1,3) (4,1,3,2)

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

- 例：
  - 置换 $\sigma=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 4 & 1 & 7 & 6 & 5 & 2 & 3\end{bmatrix}$

$$\begin{cases}\sigma(1)=4\\ \sigma(4)=6\\ \sigma(6)=2\\ \sigma(2)=1\end{cases} \Rightarrow (4,6,2,1) \qquad \begin{cases}\sigma(3)=7\\ \sigma(7)=3\end{cases} \Rightarrow (7,3)$$

$$\{\sigma(5)=5 \Rightarrow (5)$$

  - 因此，该置换可写为：$(4,6,2,1)(7,3)(5)$
  - 通常，恒等置换不写入置换的表达式中

$$(4,6,2,1)(7,3)$$

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

定义8.4.3

- 设α,β是S_n中的两个轮换，如果α和β中的元素都不相同，则称α和β是不相交的。

定理8.4.1

- 设α,β是两个不相交的轮换，则$\alpha\beta=\beta\alpha$。

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

例

- $\alpha = (1\ 3\ 6), \beta = (2\ 5)$, 不相交
- 对于$\beta(i) = i, \alpha\beta(i) = \alpha(i), \beta\alpha(i) = \alpha(i)$
- 对于$\alpha(i) = i, \alpha\beta(i) = \beta(i), \beta\alpha(i) = \beta(i)$
- 对任意$i, \alpha\beta(i) = \beta\alpha(i), \alpha\beta = \beta\alpha$

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

- 思考：

  置换群和轮换的关系？

  – 轮换是某种特定形式的置换。

  – 轮换的乘积，仍然是置换。

  – 置换是否一定是轮换的乘积？

    如果是，有多少种表现形式？

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

定理8.4.2

- S_n中任意一个n元置换，一定可以表示成不相交轮换的乘积的形式，并且表示法是唯一的。即：
  $\forall \sigma \in S_n, \sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_t$
- 假如 $\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_t = \tau_1,\tau_2\cdots\tau_l$
- 则有 $\{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_t\} = \{\tau_1,\tau_2\cdots\tau_l\}$

- 事实上，一个置换如果写为可相交的轮换的乘积，表达式将是无穷多个

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

例

- S_4的全部置换可用轮换及其乘积表示为：
- 1. 都不变：$e=(i)$
- 2. 两个元素变：$(1\ 2),(3,4),(1\ 3),(2\ 4),(1\ 4),(2\ 3)$
- 3. 三个元素变：$(1\ 2\ 3),(1\ 3\ 2),(1\ 3\ 4),(1\ 4\ 3),$
  $(1\ 2\ 4),(1\ 4\ 2),(2\ 3\ 4),(2\ 4\ 3)$
- 4. 四个元素变：$(1\ 2\ 3\ 4),(1\ 2\ 4\ 3),(1\ 3\ 2\ 4),$
  $(1\ 3\ 4\ 2),(1\ 4\ 2\ 3),(1\ 4\ 3\ 2)$
- 5. 四个元素变：$(12)(34),(13)(24),(14)(23)$

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

引理8.4.1

- 设$\sigma = (i_1, i_2, \cdots, i_k)$是$S_n$上的$k$阶轮换，$k > 1$，则

$$\sigma = (i_1\ \ i_k)(i_1\ \ i_{k-1})\cdots(i_1\ \ i_2)$$

- 比如，任意一个轮换σ，都可以表示为对换的乘积，且可以无穷多个。例如：

$$\sigma = (1\ 2\ 3\ 4) = (2\ 3)(3\ 4)(4\ 1) = (1\ 4)(1\ 3)(1\ 2)$$

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

- 对于一个n元置换：
  - 表示成不相交轮换的乘积时，表示法是唯一的
  - 表示为对换乘积时，表示法并不唯一
  - 对换的个数也不是确定的

- 问题：
  - 一个置换表示为对换乘积时，确定的是什么？

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

定义8.4.4

- 设$i_1 i_2 \cdots i_n$是$1,2,\cdots,n$的一个排列，若$i_k > i_l$且$k < l$，则称$i_k i_l$是一个逆序
- 排列中逆序的总数称为这个排列的逆序数

- 例如：25431的逆序数？
  - 21, 54, 53, 51, 43, 41, 31共7个
  - 25431的逆序数为7

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

引理8.4.2

- 设$\sigma \in S_n$且$\sigma(j) = i_j, j = 1,2,\cdots,n$，则在$\sigma$的对换表示中，对换个数的奇偶性与排列$\pi = i_1 i_2 \cdots i_n$的逆序数奇偶性相同，记为$N(\sigma)$
- 如果$N(\sigma)$为奇数，则称σ为奇置换，否则称之为偶置换。

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

定理8.4.3

- N次对称群S_n中所有偶置换的集合，对于S_n中的置换乘法构成子群，记为A_n，称为交错群，若$n \geq 2$，则$|A_n| = \frac{1}{2}n!$

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

定理8.4.3

- 证明：
  - S_n是有限群，任意两个偶置换的乘积仍然是偶置换
  - 由定理8.2.7得S_n中所有偶置换构成S_n的一个子群
  - 偶置换数n_1，奇置换数n_2
  - 某奇置换去乘不同偶置换，得到互异奇置换，$n_1 \le n_2$
  - 某奇置换去乘不同奇置换，得到互异偶置换，$n_1 \ge n_2$
  - $n_1 = n_2, A_n = \frac{1}{2}n!$

定理8.2.7：G的非空子集H是G的子群的充要条件是$\forall a, b \in H$，都有$ab^{-1} \in H$

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

定理8.4.4（Cayley定理）

- 任意群G与一个变换群同构。

- 证明：首先构造一个变换群：
  - 任取$a \in G$ 定义G上的一个变换$f_a: x \to ax, \forall x \in G$
  - 定义$\overline{G} = \{f_a | a \in G\}$，想办法证明其为变换群
  - 再想办法证明$(G,\cdot) \cong (\overline{G},\circ)$

一一变换？

非空集合A的所有一一变换关于变换的乘法所作成的群叫做A的一一变换群，用$E(A)$表示，$E(A)$的子群叫做变换群

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

定理8.4.4（Cayley定理）

- 证明（续）：证$f_a: x \to ax$是双射
  - 考察$\forall b \in G$，是否存在$x \in G$，使得$f_a(x) = b$

    实际上，群G中方程$ax = b$有唯一解
  - 因此f_a是满射。 ⟹ f_a是双射。
  - 以下证明$\overline{G} = \{f_a | a \in G\}$关于变换乘法成群

8. 4 变换群和置换群 Cayley定理

定理8. 4. 4（Cayley定理）

- 证明（续）：证$\overline{G} = \{f_a | a \in G\}$关于变换乘法成群
  - $\forall f_a, f_b \in \overline{G}, (f_a f_b)(x) = f_a\big(f_b(x)\big) = f_a(bx) = abx = f_{ab(x)}$

封闭性

结合律 – $\forall f_a, f_b \in \overline{G} \iff a, b \in G \Longrightarrow ab \in G \Longrightarrow f_{ab} \in \overline{G}$

单位元 – $f_e: x \to ex$，是变换中的单位元

逆元素 – 由于f_a是一一变换，因此必定存在逆元素

$f_a{}^{-1}: x \to a^{-1}x \qquad f_a{}^{-1} = f_{a^{-1}}$

因此 $\overline{G}$ 关于变换乘法成群，即它是一个变换群！

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

定理8.4.4（Cayley定理）

- 证明（续）：证G和$\overline{G}$同构
  - 构造映射关系$\varphi: a \to f_a$

单射 – $\forall a, b, x \in G, a \neq b \Longrightarrow ax \neq bx \Longrightarrow f_a \neq f_b \Longrightarrow \varphi(a) \neq \varphi(b)$

满射 – $\forall f_a \in \overline{G}$，一定存在$a \in G$，使得$\varphi(a) = f_a$

保持运算 – $\varphi(ab) = f_{ab} = f_a f_b = \varphi(a)\varphi(b)$

  - 因此，$G \cong \overline{G}$ 证毕！

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

定理8.4.4（Cayley定理）任意群G与一个变换群同构

- 任何一个群G，都与一个变换群同构

推论：

- 设G是n阶有限群，则G与S_n的一个子群同构。
- 任何一个有限群G，都与一个置换群同构

S_n表示这$n!$个n元置换的集合

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

- 小结：
  - 变换、一一变换
  - 一一变换群、变换群、对称群、置换群
  - 置换：轮换、对换、恒等变换
  - 逆序、逆序数、置换的逆序数性质
  - Cayley定理

第八章 群

8.5 陪集和群的陪集分解 Lagrange定理

- 群内的子群反映了群的结构和性质，因此我们需要进一步研究有关群内子群的性质
- G是一个群，H是G的一个子群，利用H可以在G的元素之间确定一个二元关系R

$$a\ R\ b \quad \text{当且仅当} ab^{-1} \in H$$

R是G中的一个二元关系，是等价关系

因此由等价关系就可以确定G的一个划分，其划分块就是子群H的陪集

8.5 陪集和群的陪集分解 Lagrange定理

定义8.5.1

- 设H是群G的一个子群，对任意的$a \in G$，集合

$$aH = \{ah | h \in H\}$$

- 称为子群H在G中的一个左陪集。同理，H在G中的一个右陪集是

$$Ha = \{ha | h \in H\}$$

思考：左陪集和右陪集是否相等？

实例

设 $G=S_3$，H={e,(1 2)}，取a为e，(1 3)和(2 3)时，

eH=H={e,(1 2)},

(1 3)H={(1 3),(1 2 3)},

(2 3)H={(2 3),(1 3 2)},

He=H,

H(1 3)={(1 3),(1 3 2)},

H(2 3)={(2 3),(1 2 3)},

$\mathrm{G}=eH\cup(1\ 3)H\cup(2\ 3)H$

显然一般情况下

$$aH\neq Ha$$

实例

$G = (Z, +)$, $H =\{km \mid k\in Z\}$, H是G的子群，因为G是交换群，H的左、右陪集相等，它们是

$$0+H = H+0 = \{km \mid k\in Z\},$$

$$1+H = H+1 = \{1+km \mid k\in Z\},$$

$$2+H = H+2 = \{2+km \mid k\in Z\},$$

$$\ldots$$

$$m-1+H = H+m-1 = \{m-1+km \mid k\in Z\},$$

每个陪集正好与一个同余类对应

8.5 陪集和群的陪集分解 Lagrange定理

定理8. 5. 1

- 设H是G的子群，则H的左陪集具有下述性质

1. $H = eH, a \in aH$。

因H为G的子群，故消去率成立。则$\forall h_1, h_2 \in H$，若$h_1 \neq h_2$，则$\forall a \in G$必定有$ah_1 \neq ah_2$，故aH中没有共同元素，故$|aH| = |H|$

2. $|aH| = |H|$。

H的任意一个左陪集，其元素个数与H相同

3. $a \in H \Leftrightarrow aH = H$。

又因为$a \in H$，所以$aH = \{ah|h \in H\} \subseteq H$，又由于$|aH| = |H|$，故$aH = H$

子群中任意一个元素和子群自身作用，得到的左陪集仍为子群自身

8.5 陪集和群的陪集分解 Lagrange定理

4. $\forall x \in aH$，都有$xH = aH$，并叫a是aH的一个陪集代表

- 证明：左陪集中任意一个元素和子群H作用，得到的左陪集不变

$\forall x \in aH$，必定有$x = ah_1$，其中$h_1 \in H$

$\forall xh \in xH$，有$xh = (ah_1)h = a(h_1h) = ah'$，其中$h' \in H$

因此$ah' \in aH$ 即$\forall xh \in xH$，有$xh \in aH$ 即$xH \subseteq aH$

$\forall ah' \in aH, \because x = ah_1, \therefore a = x{h_1}^{-1}$

故$ah' = \left(x{h_1}^{-1}\right)h' = x\left({h_1}^{-1}h'\right) \in xH$ 即$aH \subseteq xH$

8.5 陪集和群的陪集分解 Lagrange定理

5. $aH = bH \Leftrightarrow a \in bH$或$b \in aH$

$$\Leftrightarrow b^{-1}a \in H\text{或}a^{-1}b \in H$$

- 证明：
  - 充分性：由性质1可知，$a \in aH = bH$
  - 故 $\exists h' \in H$，使得$a = bh'$　即$b^{-1}a = h' \in H$
  - 必要性：因$b^{-1}a \in H$　所以$\exists h_1 \in H$ 使得$b^{-1}a = h_1$
  - 即 $a = bh_1$，即$a \in bH$。 由性质4，$bH = aH$
  - 性质的另一半，显然！

思考：说明了什么？

8.5 陪集和群的陪集分解 Lagrange定理

6. $\forall a, b \in G$，若非$aH = bH$，必有$aH \cap bH = \emptyset$

- 证明：
  - 假如 $aH \cap bH \neq \emptyset$，则必定$\exists x \in aH \cap bH$
  - 也就是$x \in aH$，同时$x \in bH$
  - 则根据性质4，一定有$xH = aH = bH$

同一子群的两个左陪集要么相等、要么交集为空！

思考：该性质意味着什么？

$$G = \bigcup_{a \in G} aH$$

8.5 陪集和群的陪集分解 Lagrange定理

定理8.5.1

- 设H是G的子群，则H的左陪集具有下述性质

1. $H = eH, a \in aH$。2. $|aH| = |H|$。

H的任意一个左陪集，其元素个数与H相同

3. $a \in H \Leftrightarrow aH = H$。

子群中任意一个元素和子群自身作用，得到的左陪集仍为子群自身

4. $\forall x \in aH$，都有$xH = aH$，并叫a是aH的一个陪集代表

左陪集中任意一个元素和子群H作用，得到的左陪集不变

5. $aH = bH \Leftrightarrow a \in bH$或$b \in aH$

$\Leftrightarrow b^{-1}a \in H$或$a^{-1}b \in H$

同一子群的两个左陪集要么相等、要么交集为空！

6. $\forall a, b \in G$，若非$aH = bH$，必有$aH \cap bH = \emptyset$

8.5 陪集和群的陪集分解 Lagrange定理

定理8. 5. 2

- 设G是有限群，H是G的子群，则存在一个正整数k，满足

$$G = a_1H \cup a_2H \cup \cdots \cup a_kH$$

- 其中　$a_iH \cap a_jH = \emptyset, i \neq j, i,j = 1,2,\cdots,k$

- 思考：
  - 单位元e在哪个陪集中？

8.5 陪集和群的陪集分解 Lagrange定理

定义8.5.2

- 群G关于其子群H的左陪集的个数，称为H在G中的**指数**，记作$[G:H]$。

- 观察G的子群$H = \{e\}$：
  - H的左陪集个数为$|G|$
  - $[G:H] = [G:1] = |G|$

8.5 陪集和群的陪集分解 Lagrange定理

Lagrange定理

- 设G是有限群，H是G的子群，则

$$[G:1] = [G:H][H:1]$$

有限群中，子群的阶只能是群的阶的因子！

8.5 陪集和群的陪集分解 Lagrange定理

推论1

- 设有限群G的阶为n，则G中任意元素的阶都是n的因子，且适合$x^n = e$。

- 证明：
  - $\forall a \in G$，可以得到G的循环子群$H = \langle a \rangle$
  - 则根据Lagrange定理，$p|H| = |G| = n$
  - 又有$a^{|H|} = e$ $\Longrightarrow$ $a^n = a^{p|H|} = (a^{|H|})^p = e^p = e$

8.5 陪集和群的陪集分解 Lagrange定理

推论2

- 阶为素数p的群G是循环群。

- 证明：
  - 取G 中一非单位元a，可以得到G的循环子群$H = \langle a \rangle$
  - 根据推论1，a的阶为p的因子，因此只能为p，所以 $\mathrm{O}\langle a \rangle = p$
  - 所以$G = \langle a \rangle$

8.5 陪集和群的陪集分解 Lagrange定理

推论3

- 设A, B是群G的两个有限子群，则

$$|AB| = \frac{|A||B|}{|A \cap B|}$$

其中$AB = \{ab | a \in A, b \in B\} = \bigcup_{a \in A} aB$。

8.5 陪集和群的陪集分解 Lagrange定理

推论3

- 证明:
  - 因为$B \leq G$，所以aB是B的左陪集
  - 令$S_1 = \{aB|a \in A\} = \{a_1B, a_2B, \cdots, a_mB\}$，$D = A \cap B$
  - 故$A = \cup aD$，令$S_2 = \{aD|a \in A\} = \{a_1D, a_2D, \cdots, a_mD\}$
  - 构造S_1与S_2的一一映射关系$\sigma: a_iB \to a_iD$
  - $\forall a_i, a_j \in A$，若$a_iB = a_jB$，必有$a_i^{-1}a_j \in B$
  - 且$a_i^{-1}a_j \in A$，故$a_i^{-1}a_j \in A \cap B = D \Leftrightarrow a_iD = a_jD$
  - 故σ是映射，且是单射，也是满射

8.5 陪集和群的陪集分解 Lagrange定理

推论3

- 证明（续）：

  $S_1 = \{a_1B, a_2B, \cdots, a_mB\}$ $S_2 = \{a_1D, a_2D, \cdots, a_mD\}$

  – $\sigma: a_iB \to a_iD$为双射。

  – 显然$|S_1| = |S_2| = k = [A: D] = |A|/|D|$

  – 因此$|AB| = |\cup_{a\in A} aB| = |S_1||B| = k|B|$,

  – 两式合并，即得$|AB| = \frac{|A||B|}{|A\cap B|}$ 证毕！

8.5 陪集和群的陪集分解 Lagrange定理

- 推论1　　设有限群G的阶为n，则G中任意元素的阶都是n的因子，且适合$x^n = e$。
- 推论2　　阶为素数p的群G是循环群。
- 推论3　　设A, B是群G的两个有限子群，则

$$|AB| = \frac{|A||B|}{|A \cap B|}$$

利用Lagrange定理可以确定一个群内的可能存在的子群、元素的阶等，从而搞清一个群的结构

根据$|G|$的因子来确定可能存在子群的阶数或元素的阶数

8.5 陪集和群的陪集分解 Lagrange定理

- 小结：
  - 左陪集
  - 左陪集6个性质
  - 群的陪集分解
  - Lagrange定理
  - 几个重要推论

第八章 群

8.6 正规子群与商群

- 如果存在群G的一个子群H，根据它的左陪集可以完成群的分解。
- 事实上，子群H的右陪集，也有对称的性质
- 但是，在许多情况下，群G的子群的左右陪集并不相等
- 思考：
  - 任意给定一个群G，它是否存在子群H，使得其左右陪集相等？
  - 子群$\{e\}$，子群G

8.6 正规子群与商群

定义8.6.1

- 设H是G的一个子群，如果对任意的$a \in G$，都有$aH = Ha$，则称H是G的一个正规子群（亦称不变子群），用符号$H \lhd G$表示。
- 因此，对正规子群H就不必区分其左右陪集，而简称为H的陪集

8.6 正规子群与商群

定理8.6.1

- 设H是G的子群，则以下几个条件等价：

1. $H \lhd G$
2. $\forall g \in G, gHg^{-1} = H$
3. $\forall g \in G, gHg^{-1} \subseteq H$
4. $\forall g \in G, h \in H, ghg^{-1} \in H$

8.6 正规子群与商群

证明：1. $H \lhd G \Longrightarrow$ 2. $\forall g \in G, gHg^{-1} = H$

- 因为H为正规子群，因此$\forall g \in G, gH = Hg$
- 因此

$$gHg^{-1} = (gH)g^{-1} = (Hg)g^{-1} = H(gg^{-1}) = He = H$$

8.6 正规子群与商群

证明：2. $\forall g \in G, gHg^{-1} = H$ $\Longrightarrow$

3. $\forall g \in G, gHg^{-1} \subseteq H$

- $\forall g \in G, \quad gHg^{-1} = H$

$$\Downarrow$$

- $\forall g \in G, \quad gHg^{-1} \subseteq H$

8.6 正规子群与商群

证明：3. $\forall g \in G, gHg^{-1} \subseteq H$ ⟶

4. $\forall g \in G, h \in H, ghg^{-1} \in H$

- $gHg^{-1} \subseteq H$

  ⇓

- $\forall g \in G, h \in H, \ ghg^{-1} \in H$

8.6 正规子群与商群

证明：4. $\forall g \in G, h \in H, ghg^{-1} \in H$ ⟹ 1. $H \lhd G$

- 求证 $\forall g \in G, \quad gH = Hg$
- 据已知条件，$\forall g \in G, \forall h \in H$，都有$ghg^{-1} = h_1 \in H$
- 即$gh = h_1 g \in Hg$。因此$\forall g \in G, gH \subseteq Hg$
- 反之，易证 $\forall g \in G, Hg \subseteq gH$
- 因此 $\forall g \in G, \quad gH = Hg$

8.6 正规子群与商群

定理8.6.1

- 设H是G的子群，则以下几个条件等价：

1. $H \lhd G$
2. $\forall g \in G, gHg^{-1} = H$
3. $\forall g \in G, gHg^{-1} \subseteq H$
4. $\forall g \in G, h \in H, ghg^{-1} \in H$

8.6 正规子群与商群

定理8.6.2

- 设A,B是G的两个子群

  1. 若$A \lhd G, B \lhd G$，则$A \cap B \lhd G, AB \lhd G$
  2. 若$A \lhd G, B \leq G$，则$A \cap B \lhd B, AB \leq G$

8.6 正规子群与商群

证明：1. 若$A \lhd G, B \lhd G$，则$A \cap B \lhd G, AB \lhd G$

- $\forall h \in A \cap B \Longrightarrow h \in A, h \in B$
- $\forall g \in G,\ ghg^{-1} \in A,\ ghg^{-1} \in B$
- $\forall g \in G, \forall h \in A \cap B, ghg^{-1} \in A \cap B \Longrightarrow A \cap B \lhd G$
- 首先证明AB是G的子群
- $\forall h \in AB \Longrightarrow h = ab, a \in A, b \in B$
- $\forall g \in G, ghg^{-1} = gabg^{-1} = gag^{-1}gbg^{-1} = a'b' \in AB$
- $AB \lhd G$

4.$\forall g \in G, h \in H, ghg^{-1} \in H$

8.6 正规子群与商群

证明：2. 若$A \lhd G, B \leq G$，则$A \cap B \lhd B, AB \leq G$

- $\forall h \in A \cap B \Longrightarrow h \in A, h \in B$
- $\forall g \in B \Longrightarrow ghg^{-1} \in A,\ ghg^{-1} \in B$
- $\forall g \in B, \forall h \in A \cap B, ghg^{-1} \in A \cap B \Longrightarrow A \cap B \lhd B$

$4. \forall g \in G, h \in H, ghg^{-1} \in H$

8.6 正规子群与商群

证明：2. 若$A \lhd G, B \leq G$，则$A \cap B \lhd B, AB \leq G$

- $e \in A, e \in B \Rightarrow e \in AB$ 单位元！ 结合律！
- $\forall ab, a_1 b_1 \in AB$ $A \lhd G \Rightarrow bA = Ab \Rightarrow ba = a'b$
- $(ab)(a_1 b_1) = a(ba_1)b_1 = a({a_1}'b)b_1 = (a{a_1}')(bb_1) \in AB$ 封闭性！
- $\forall ab \in AB, (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = (a^{-1})'b^{-1} \in AB$
- $AB \leq G$ 证毕！ 逆元素！

8.6 正规子群与商群

定理8.6.2

- 设A,B是G的两个子群

1. 若$A \lhd G, B \lhd G$，则$A \cap B \lhd G, AB \lhd G$
2. 若$A \lhd G, B \leq G$，则$A \cap B \lhd B, AB \leq G$

正规子群的乘积仍然是正规子群！
正规子群的交集仍然是正规子群！

正规子群与普通子群的乘积是普通子群！
正规子群与普通子群的交集是普通子群的正规子群！

8.6 正规子群与商群

定理8.6.3

- 设H是G的一个正规子群，G/H表示H的所有陪集构成的集合，即

$$G/H = \{gH | g \in G\}$$

- 则G/H关于陪集乘法作成群。称之为G关于H的商群

8.6 正规子群与商群

证明：

陪集乘法对于G/H是一个二元运算

- $\forall aH, bH \in G/H, aHbH = \{ah_1bh_2 | h_1, h_2 \in H\}$
- $bH = Hb \Rightarrow ah_1bh_2 = a(h_1b)h_2 = a(bh_1{}')h_2 = (ab)(h_1{}'h_2) \in abH$
- 故$aHbH \subseteq abH$
- 又$\forall h \in H, (ab)h \in abH$，$(ab)h = (ae)(bh) \in aHbH$
- 故$abH \subseteq aHbH$

二元运算！

- 因此$\forall aH, bH \in G/H, aHbH = abH = G/H$

关于乘法是封闭的

8.6 正规子群与商群

证明（续）：

G/H对陪集乘法成群

- $\forall aH, bH, cH \in G/H$ 结合律！

  $(aHbH)cH = (abH)cH = (ab)cH = a(bc)H$

  $= aH(bc)H = aH(bHcH)$

- $eHaH = eaH = aH, aHeH = aeH = aH \Rightarrow eH = H$是单位元 单位元！

- $a^{-1}HaH = aHa^{-1}H = eH$，因此$aH$的逆元为$a^{-1}H$

  逆元素！

证毕！

8.6 正规子群与商群

定理8.6.3

- 设H是G的一个正规子群，G/H表示H的所有陪集构成的集合，即

$$G/H = \{gH | g \in G\}$$

- 则G/H关于陪集乘法作成群。称之为G关于H的商群。

8.6 正规子群与商群

小结

- 正规子群
- 正规子群的等价性质
- 正规子群与子群的交、乘积性质
- 商群

第八章 群

8.1 半群

8.2 群、群的基本性质

8.3 循环群 群的同构

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

8.5 陪集和群的陪集分解 Lagrange定理

8.6 正规子群与商群

8.7 群的同态、同态基本定理

8.7 群的同态、同态基本定理

定义8.7.1

- 设G_1, G_2是两个群，f是G_1到G_2的一个映射。如果对任意的$a, b \in G_1$都有

$$f(ab) = f(a)f(b),$$

- 则称f是G_1到G_2的一个同态映射，或简称同态。

8.7 群的同态、同态基本定理

- 若映射f分别是单射、满射、双射时，分别称之为G_1到G_2的单一同态、满同态、同构
- 用$G_1 \sim G_2$表示满同态，并称G_2是f作用下G_1的同态象

8.7 群的同态、同态基本定理

引理8.7.1

- 设H是G的正规子群，$\forall a \in G$令 $f: a \to aH$，则f是G到G/H的满同态。
- 证明：
  - 显然，f是G到G/H的一个映射
  - 同时，$\forall aH \in G/H$，总是$\exists a \in G$, 满足$f(a) = aH$
  - 因此f是G到G/H的一个满射

8.7 群的同态、同态基本定理

引理8.7.1

- 设H是G的正规子群，$\forall a \in G$令 $f: a \rightarrow aH$，则f是G到G/H的满同态。
- 证明（续）：
  - 由于$\forall a, b \in G, f(ab) = abH$
  - 且群G/H中的运算满足$aHbH = abH$
  - 故$f(ab) = abH = aHbH = f(a)f(b)$ 保持运算！
  - 因此f是G到G/H的满同态

8.7 群的同态、同态基本定理

引理8.7.1

- 设H是G的正规子群，$\forall a \in G$令 $f: a \to aH$，则f是G到G/H的满同态。

8.7 群的同态、同态基本定理

定理8.7.1

- 若f是G_1到G_2的同态，g是G_2到G_3的同态，则gf是G_1到G_3的同态。
- 证明：显然gf是G_1到G_3的映射，以下只证明它保持运算，对任意$a, b \in G_1$

$$gf(ab) = g\big(f(ab)\big) = g\big(f(a)f(b)\big)$$
$$= g\big(f(a)\big)g\big(f(b)\big) = gf(a)gf(b)$$

- 因此gf是G_1到G_3的同态。

8.7 群的同态、同态基本定理

定理8.7.2

- 设G是一个群，$(G',\cdot)$是一个有二元运算的代数系统，若$f: G \to G'$是满射，且保持运算，则G'也是群，而且$G \sim G'$

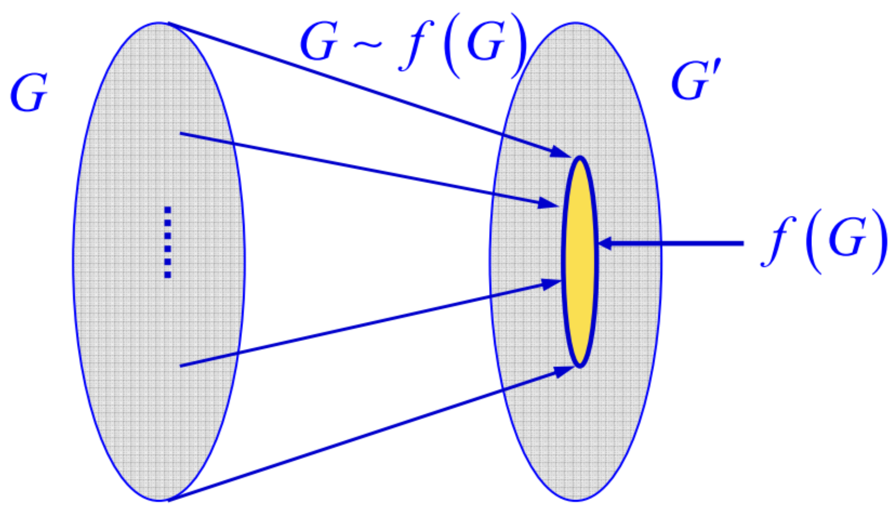
群的同态象，仍然是群！

8.7 群的同态、同态基本定理

引理8.7.2

- 设f是G到G'的同态，则G的象集$f(G)$是群G'的子群！

  且f是G到$f(G)$的满同态



8.7 群的同态、同态基本定理

定理8.7.3

- 设f是G到G'的同态，则
  1. 若e和e'分别是G和G'的单位元，则$f(e) = e'$
  2. $\forall a \in G$，f将a的逆元映射到G'中的逆元，即 $f(a^{-1}) = f^{-1}(a)$
  3. 如果H是G的子群，则H在f下的象$f(H) = \{f(a)|a \in H\}$是G'的子群，且$H{\sim}f(H)$

8.7 群的同态、同态基本定理

证明： 1.若e和e'分别是G和G'的单位元 ⟹ $f(e)=e'$

- $f: G \sim f(G)$ $\forall a, b \in G, f(ab)=f(a)f(b)$
- $\forall a' \in f(G)$, 由于f为满射，因此必定$\exists a \in G$使得$f(a)=a'$
- 因此，$a'f(e)=f(a)f(e)=f(ae)=f(a)=a'$
- 同理，$f(e)a'=a'$。因此$f(e)$是$f(G)$中单位元
- 因为单位元唯一，故$f(e)=e'$

8.7 群的同态、同态基本定理

证明： $\boxed{2. \forall a \in G, f(a^{-1}) = f^{-1}(a)}$

- $\forall a \in G$, 有$a^{-1} \in G$
- 因此，$f(aa^{-1}) = f(e) = e' = f(a)f(a^{-1})$
- 同理，$f(a^{-1}a) = f(e) = e' = f(a^{-1})f(a)$
- 故$f^{-1}(a) = f(a^{-1})$

8.7 群的同态、同态基本定理

证明：　3. $H \le G \Longrightarrow f(H) \le G'$, 且$H \sim f(H)$

- $\forall a, b \in f(H)$，由于f为满射，因此必定存在$a', b' \in H$，使得$f(a') = a, f(b') = b$。
- 则$ab = f(a')f(b') = f(a'b') \in f(H)$　　封闭性！
- $e \in H \Longrightarrow f(e) \in f(H)$　　单位元！

8.7 群的同态、同态基本定理

证明： 3. $H \leq G \Rightarrow f(H) \leq G'$, 且$H \sim f(H)$

- $\forall a \in f(H)$，由于f为满射，因此必定$\exists a' \in H$, 使得$f(a') = a$
- 显然$(a')^{-1} \in H$，则$f((a')^{-1}) \in f(H)$
- $f\big((a')^{-1}\big)a = f\big((a')^{-1}\big)f(a') = f\big((a')^{-1}(a')\big) = f(e) = e'$
- 同理，$af\big((a')^{-1}\big) = e'$ 逆元素！
- 即$\forall a \in f(H)$，在$f(H)$中有逆元素

8.7 群的同态、同态基本定理

证明： $3.\ H \le G \Longrightarrow f(H) \le G'$，且$H \sim f(H)$

- $\forall a \in f(H)$，根据$f(H)$的定义，必定存在$a' \in H$，使得$f(a') = a$

满射！

- 说明f是从H到$f(H)$的满射！
- $\forall a, b \in H, f(ab) = f(a)f(b) \in f(H)$

保持运算！

- 故$H \sim f(H)$

8.7 群的同态、同态基本定理

定理8.7.3

- 设f是G到G'的同态，则

1. 若e和e'分别是G和G'的单位元，则$f(e)=e'$

在同态映射下，单位元的象仍然是单位元

2. $\forall a \in G$，f将a的逆元映射到G'中的逆元，即

$f(a^{-1}) = f^{-1}(a)$ 在同态映射下，逆元素的象是象的逆元素

3. 如果H是G的子群，则H在f下的象$f(H) = \{f(a)|a \in H\}$是G'的子群，且$H \sim f(H)$

在同态映射下，子群的象仍然是子群，且该同态映射形成二者之间的满同态

8.7 群的同态、同态基本定理

定理8.7.5

- 设f是G到G'的同态，e是G的单位元，令$K = \{a \in G | f(a) = f(e)\}$，则$K$是$G$的正规子群，$K$称为同态$f$的**核**，记作$Ker\ f$

8.7 群的同态、同态基本定理

证明：

- 显然，e为K中的元素
- 由于f是同态，因此$f(e) = e'$是G'的单位元
- $\forall k, k_1 \in K, f(kk_1) = f(k)f(k_1) = f(e)f(e) = e' = f(e)$
- $\forall k \in K, f(k^{-1}) = f^{-1}(k) = f^{-1}(e) = e' = f(e) \Longrightarrow k^{-1} \in K$
- 因此，K为G的子群。

8.7 群的同态、同态基本定理

证明：

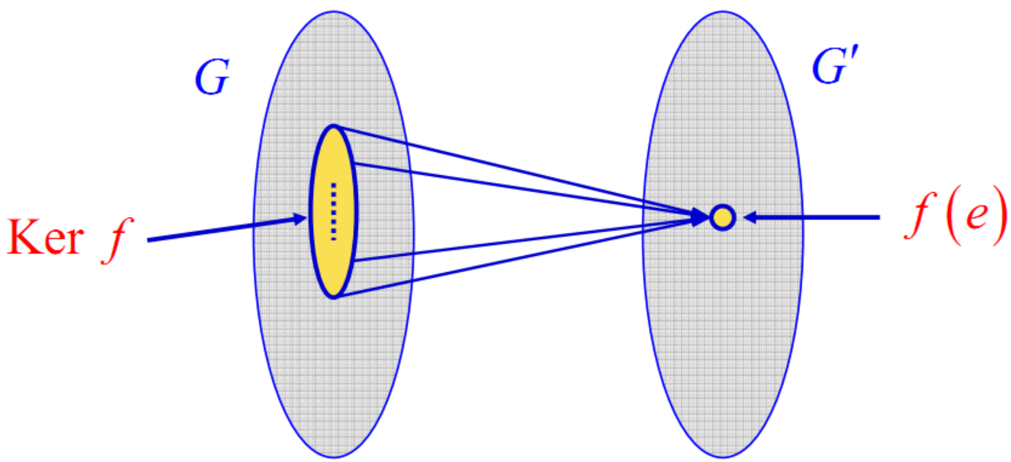
- $\forall g \in G, \forall k \in K$
- $f(g^{-1}kg) = f(g^{-1})f(k)f(g) = f^{-1}(g)f(k)f(g) = f^{-1}(g)f(g) = e' = f(e)$
- 即$\forall g \in G, \forall k \in K, g^{-1}kg \in K$
- 因此，$K \lhd G$

证毕！

8.7 群的同态、同态基本定理

定理8.7.5

- 设f是G到G'的同态，e是G的单位元，令$K=\{a\in G|f(a)=f(e)\}$，则K是G的正规子群，K称为同态f的核，记作$Ker\ f$



8.7 群的同态、同态基本定理

定理8.7.6

- 设f是G到G'的同态，K是同态的核，那么对任意的$a, b \in G$, $f(a) = f(b)$的充要条件是$b \in aK$。

8.7 群的同态、同态基本定理

证明：

- 充分性：已知$b \in aK$ $\Longrightarrow$ $\forall a, b \in G, f(a) = f(b)$
  - $\exists k \in K$,使得$b = ak$
  - $f(b) = f(ak) = f(a)f(k) = f(a)f(e) = f(a)$
- 必要性：已知$\forall a, b \in G, f(a) = f(b)$ $\Longrightarrow$ $b \in aK$
  - $e' = f^{-1}(a)f(a) = f^{-1}(a)f(b) = f(a^{-1})f(b) = f(a^{-1}b)$
  - 说明$a^{-1}b \in K$, 即$b \in aK$

8.7 群的同态、同态基本定理

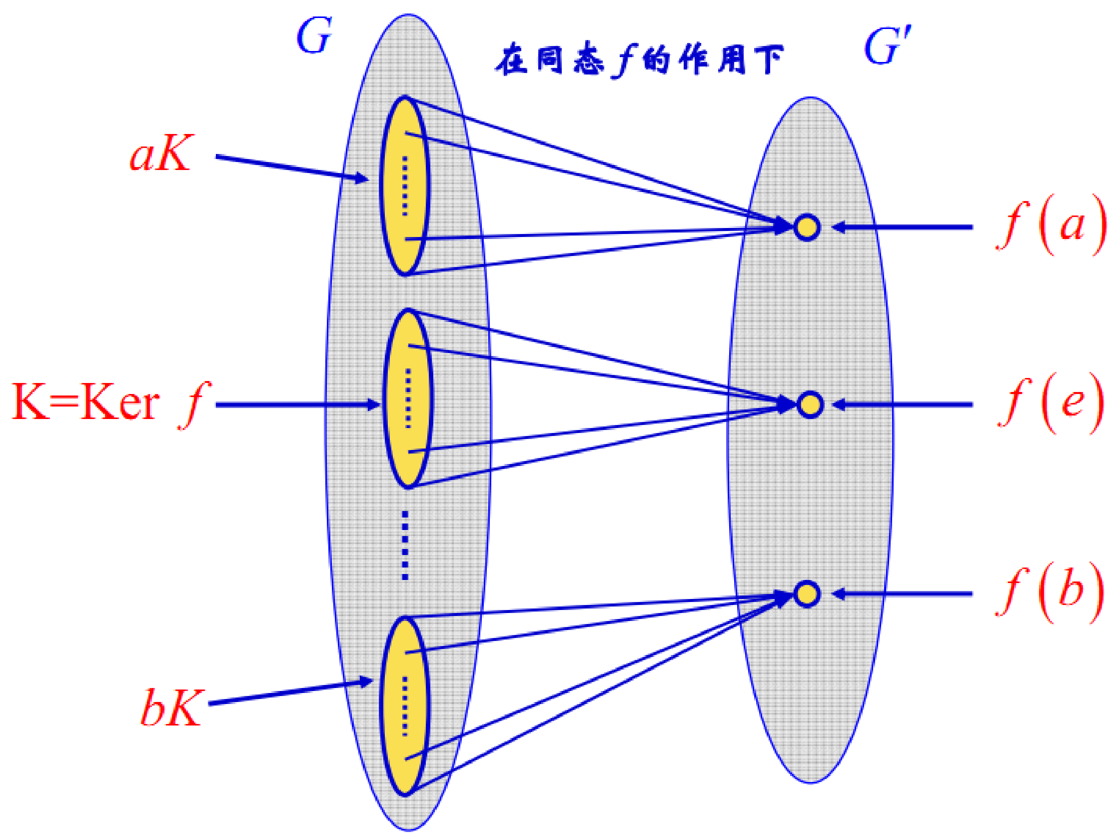
定理8.7.6

- 设f是G到G'的同态，K是同态的核，那么对任意的$a, b \in G, f(a) = f(b)$的充要条件是$b \in aK$ $a \in bK$

$b \in aK \Leftrightarrow bK = aK$

同态核的陪集所有元素映射到一个象！
同态核不同陪集的象一定不同！

8.7 群的同态、同态基本定理



8.7 群的同态、同态基本定理

定理8.7.7

- 设f是G到G'的同态，则f是单同态的充要条件是$Ker\ f=\{e\}$。

8.7 群的同态、同态基本定理

证明：

- 必要性：已知f为单同态 $\Rightarrow$ $Ker\ f = \{e\}$
  - G'中单位元e'在G中只有一个原象e, 即$Ker\ f = \{e\}$
- 充分性：已知$Ker\ f = \{e\}$ $\Rightarrow$ f为单同态
  - $\forall a, b \in G$，若$f(a) = f(b)$
  $f(a)f^{-1}(b) = f(a)f(b^{-1}) = f(ab^{-1}) = f(b)f^{-1}(b) = e'$
  - 由已知条件，$ab^{-1} = e$ $\Rightarrow$ $a = b$

证毕！

8.7 群的同态、同态基本定理

定理8.7.7

- 设f是G到G'的同态，则f是单同态的充要条件是$Ker\ f = \{e\}$。

推论

- 设f是G到G'的满同态，则f为同构的充要条件是$Ker\ f = \{e\}$。

8.7 群的同态、同态基本定理

同态基本定理

- 设G是一个群，则G的任一商群都是G的同态象；反之，若G'是G的同态象，f是G到G'的满同态，则$G' \cong G/K$，其中$K = Ker\ f$

8.7 群的同态、同态基本定理

证明： $G \sim G/H$

- G/H为任一商群，则$H \lhd G$　　（商群的定义）
- 则可构造映射 $g: a \to aH(\forall a \in G)$
- 由引理8.7.1可知，g为满同态。
- 而G/H为G在g下的同态象
- 即$G \sim G/H$

引理8.7.1：设H是G的正规子群，$\forall a \in G$令$f: a \to aH$，则f是G到G/H的满同态。

8.7 群的同态、同态基本定理

证明： f是G到G'的满同态 $\Longrightarrow$ $G/K \cong G'(K = Ker\ f)$

- 令$\varphi: aK \rightarrow f(a)$，显然符合映射条件
- $\forall x \in G'$, 由于f是满同态，因此必定$\exists a \in G$，使得$f(a) = x$，即$\varphi(aK) = f(a) = x$
- 因此φ是G/K到G'的满射
- 据定理8.7.6，$\varphi(aK) = \varphi(bK) \Leftrightarrow f(a) = f(b) \Leftrightarrow aK = bK$
- 因此φ是G/K到G'的单射

定理8.7.6：设f是G到G'的同态，K是同态的核，那么对任意的$a, b \in G, f(a) = f(b)$的充要条件是$b \in aK$。

8.7 群的同态、同态基本定理

证明： f是G到G'的满同态 $\Longrightarrow$ $G/K \cong G'(K = Ker\ f)$

- $\varphi(aKbK) = \varphi(abK) = f(ab) = f(a)f(b) = \varphi(aK)\varphi(bK)$
- 因此φ是G/K到G'的同构映射，即$G/k \cong G'$

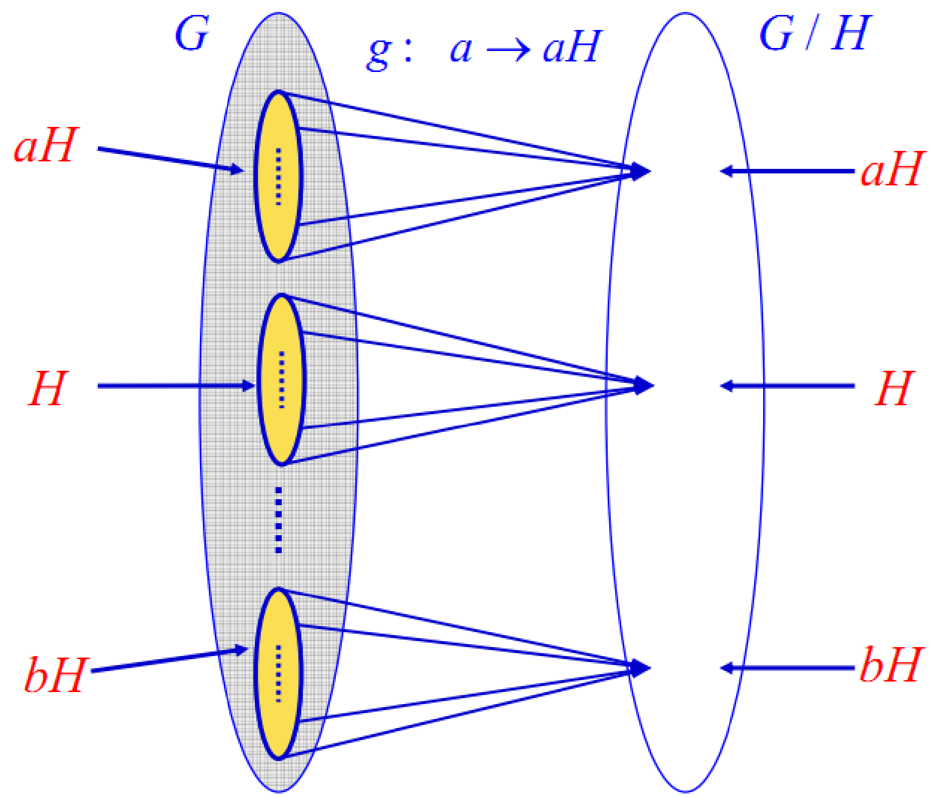
8.7 群的同态、同态基本定理

同态基本定理

- 设G是一个群，则G的任一商群都是G的同态象；反之，若G'是G的同态象，f是G到G'的满同态，则$G' \cong G/K$，其中$K = Ker\ f$

群的商群可以成为其同态象！

8.7 群的同态、同态基本定理



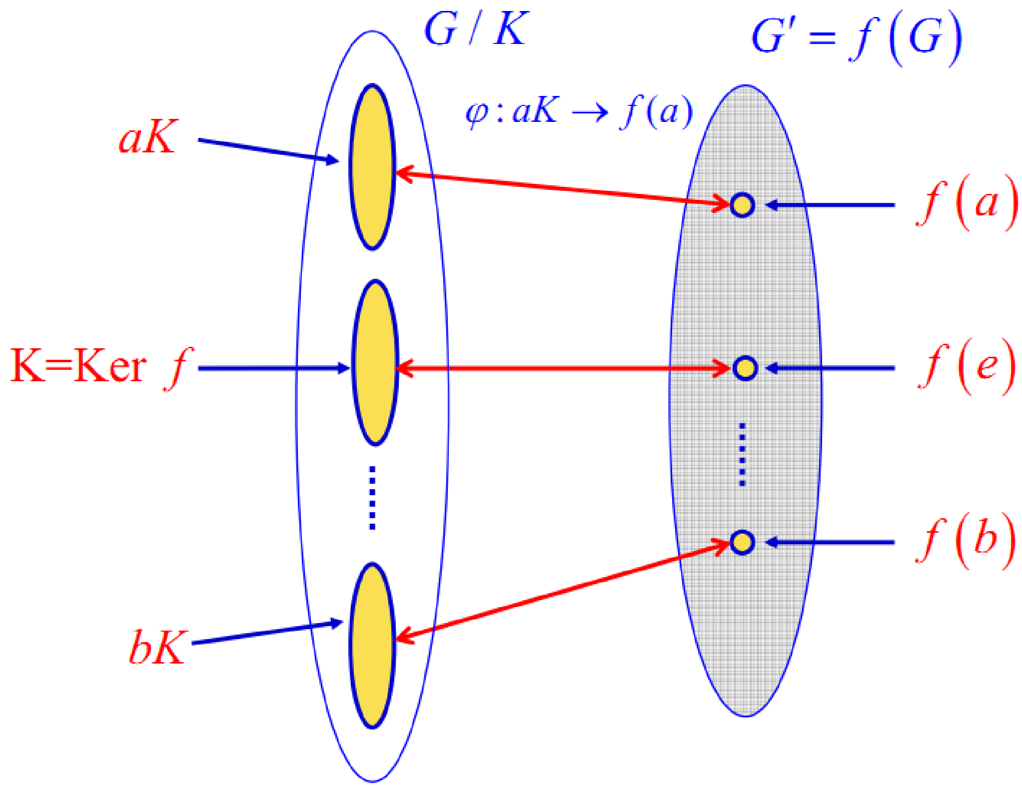
8.7 群的同态、同态基本定理

同态基本定理

- 设G是一个群，则G的任一商群都是G的同态象；反之，若G'是G的同态象，f是G到G'的满同态，则$G' \cong G/K$，其中$K = Ker\ f$

群（关于某个满同态）的同态象与该同态核的商群同构！

8.7 群的同态、同态基本定理



8.7 群的同态、同态基本定理

小结

- 群的同态、同态象
- 同态性质：单位元、逆元、子群
- 同态核，同态核性质
- 同态基本定理

谢谢

shixia@tsinghua.edu.cn