Review

- 变量替换下二重积分的计算

$$u = u(x,y), v = v(x,y)$$

$$(x,y) \in D \leftrightarrow (u,v) \in \Omega$$

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\Omega f(x(u,v),y(u,v))\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

- $\det\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1 \Big/ \det\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$

清华大学

§4. 三重积分

- 三重积分的几何与物理背景
- 三重积分的定义
- 三重积分的性质
- 三重积分在直角坐标系下的计算
- 三重积分在柱坐标下的计算
- 三重积分的变量替换

1. 三重积分的几何与物理背景

设Ω为$\mathbb{R}^3$中有界闭区域. 与二重积分一样, 通过分划, 取点, 求*Riemann*和与取极限的过程, 可以定义三重积分.

- Ω的质量: $f(x,y,z)$为(x,y,z)处的点密度.

$$\sum_{i,j,k} f(\xi_i,\eta_j,\zeta_k)\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k \to \iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

- Ω的体积 $\iiint_\Omega \mathrm{dV} = \iiint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

体积微元

2. 三重积分的定义

Def. f在$\Omega=[a,A]\times[b,B]\times[c,C]$上有定义，对$\Omega$的任意分划 $T: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=A,$

$$b=y_0<y_1<y_2<\cdots<x_m=B,$$

$$c=z_0<z_1<z_2<\cdots<z_l=C,$$

及任意标志点$P_{ij}(\xi_{ij},\eta_{ij},\varsigma_{ij})\in\Omega_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]\times[z_{k-1},z_k],1\le i\le n,1\le j\le m,1\le k\le l,$若*Riemann*和

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{l}f(\xi_{ij},\eta_{ij},\varsigma_{ij})\Delta x_i\Delta y_j\Delta z_k$$

的极限

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} f(\xi_{ij},\eta_{ij},\varsigma_{ij})\Delta x_i\Delta y_j\Delta z_k$$

存在,则称 f 在 Ω 上(*Riemann*)可积,记作 $f\in R(\Omega)$,

并称该极限为 f 在 Ω 上的三重积分, 记作

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} f(\xi_{ij},\eta_{ij},\varsigma_{ij})\Delta x_i\Delta y_j\Delta z_k.$$

其中$\iiint$是三重积分号,Ω是积分域,f是被积函数.

Def. $\Omega\subset\mathbb{R}^3$为有界闭集, f为Ω上有界函数. 若存在

$\mathrm{E}=[a,\mathrm{A}]\times[b,B]\times[c,C], s.t.\ \Omega\subset\mathrm{E}$, 且

$$f_{\mathrm{E}}(x,y,z)=\begin{cases} f(x,y,z), & (x,y,z)\in\Omega \\ 0 & (x,y,z)\in\mathrm{E}\setminus\Omega \end{cases} \in R(\mathrm{E}),$$

则称f在Ω上Riemann可积, 且f在Ω上的积分定义为

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\mathrm{E}} f_{\mathrm{E}}(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

3. 三重积分的性质

1)(可积的充分条件)若$\mathbb{R}^3$中有界闭集Ω的边界为零体积集, f为定义在Ω上的有界函数, f在Ω上的间断点集合为零体积集, 则$f\in R(\Omega)$.

2)(线性性质)$f,g\in R(\Omega)$, 则$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha f+\beta g\in R(\Omega)$, 且

$$\iiint_{\Omega}(\alpha f+\beta g)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\alpha\iiint_{\Omega}f\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\beta\iiint_{\Omega}g\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

3)(区域可加性)Ω_1, Ω_2为$\mathbb{R}^3$中有界闭集,$\Omega_1 \cap \Omega_2$为零体积集,$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$,则

$$f \in R(\Omega) \Leftrightarrow f \in R(\Omega_i), i = 1, 2,$$

且 $$\iiint_{\Omega} f \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega_1} f \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iiint_{\Omega_2} f \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

4)(保序性)$f, g \in R(\Omega), f \le g$,则

$$\iiint_{\Omega} f \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \le \iiint_{\Omega} g \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

5)(积分中值定理) $\Omega\subset\mathbb{R}^3$连通、有界闭,$\partial\Omega$为零体积集,

$f\in C(\Omega), g\in R(\Omega), g$不变号,则存在$(\xi,\eta,\varsigma)\in\Omega, s.t.$

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)g(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=f(\xi,\eta,\varsigma)\iiint_\Omega g(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

6)(轮换不变性)设$f\in R(\Omega)$,Ω关于x,y轮换不变, 即

$(x,y,z)\in\Omega\Leftrightarrow(y,x,z)\in\Omega$,则

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_\Omega f(y,x,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

清華大學

7)(对称性)设$f \in R(\Omega)$, Ω关于oxy平面对称,

- 若$f(x,y,z)$关于z为奇函数,则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0;$$

- 若$f(x,y,z)$关于z为偶函数,记Ω_1为Ω位于oxy平面上方的部分,则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 2\iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

4. 三重积分在直角坐标系下的计算

1) 化为"先一后二"型累次积分

若Ω为$\mathbb{R}^3$中柱体, 分别以$z_2(x,y)$和$z_1(x,y)$为上顶下底, 在平面oxy上的投影为D_{xy},即Ω可表示为

$$\Omega:\begin{cases}(x,y)\in D_{xy},\\ z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y).\end{cases}$$

设密度函数为$f(x,y,z)$, 为计算Ω的质量, 想象把Ω压缩成平行于xy平面的薄片, 则有

清华大学

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\triangleq\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z.$$

清華大學

若D_{xy}又可表示为$D_{xy}:\begin{cases} a\le x\le b, \\ y_1(x)\le y\le y_2(x), \end{cases}$则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

其意义是先固定x和y对z积分,再固定x,对y积分,最后对x积分.

2)化为"先二后一"型累次积分

用Ω_z表示平行于oxy坐标的平面截Ω得到的截面在oxy平面的投影, Ω可以表示为

$$\Omega:\begin{cases} c \le z \le d \\ (x,y) \in \Omega_z \end{cases}.$$

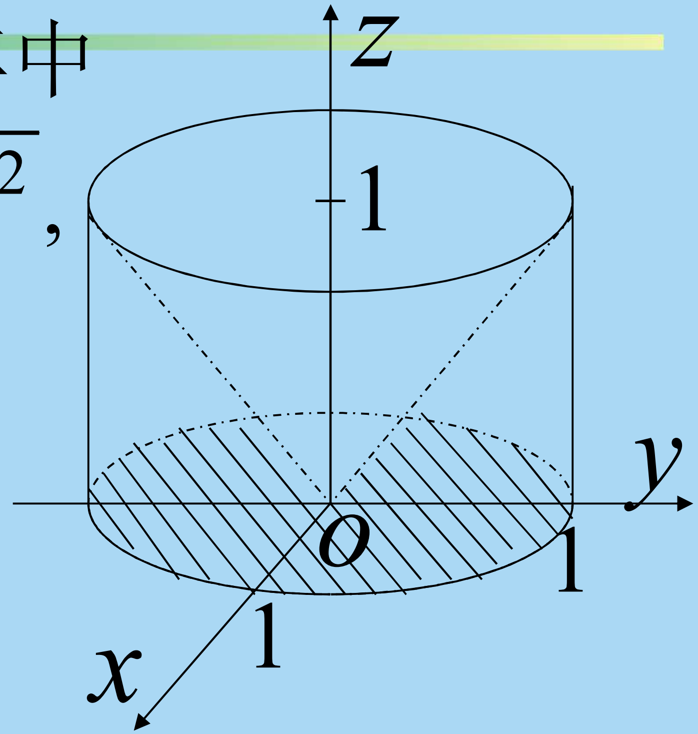
设密度函数为$f(x,y,z)$, 为计算Ω的质量, 想象把Ω压缩成平行于z轴的细线, 则有

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_c^d\left[\iint_{\Omega_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}z$$

$$\triangleq\int_c^d \mathrm{d}z\iint_{\Omega_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

例: $I=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Ω 由 $x^2+y^2=1$, 曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$, 和 $z=0$ 围成.



解法一: (″先一后二″)

$$\Omega:\begin{cases} x^2+y^2\le 1, \\ 0\le z\le \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

$$I=\iint_{x^2+y^2\le 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}}(x^2+y^2)z\mathrm{d}z.$$

$$=\iint_{x^2+y^2\le 1}\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^5\mathrm{d}r=\frac{\pi}{6}.\square$$

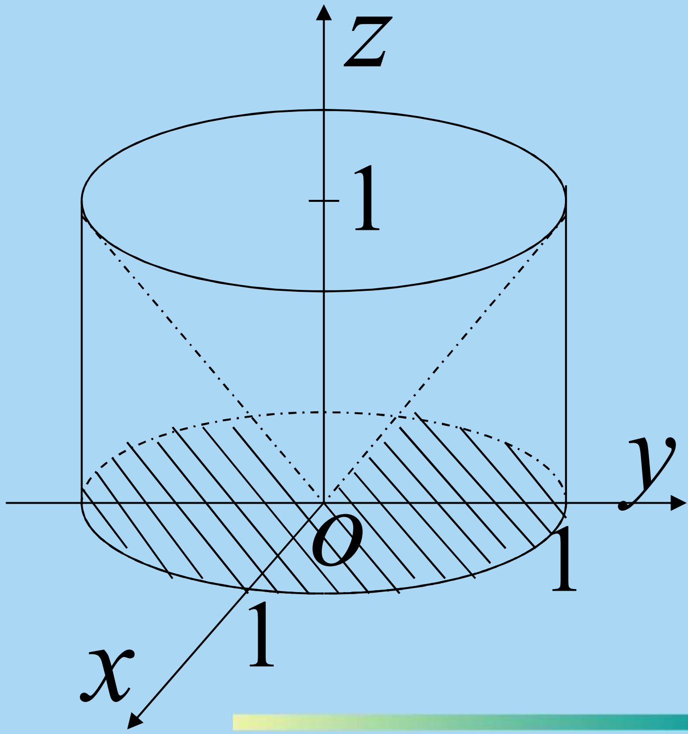
解法二: ("先二后一") $\Omega:\begin{cases}0\le z\le 1,\\ z^2\le x^2+y^2\le 1.\end{cases}$

$$I=\int_0^1 \mathrm{d}z\iint\limits_{z^2\le x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 z\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_z^1 r^2\cdot r\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\int_0^1 z\cdot\frac{1}{4}(1-z^4)\mathrm{d}z$$

$$=\pi/6.\square$$



清華大學

5. 用柱坐标计算三重积分

$$\Omega \leftrightarrow \Omega^*$$

$$(x, y, z) \leftrightarrow (r, \theta, z)$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

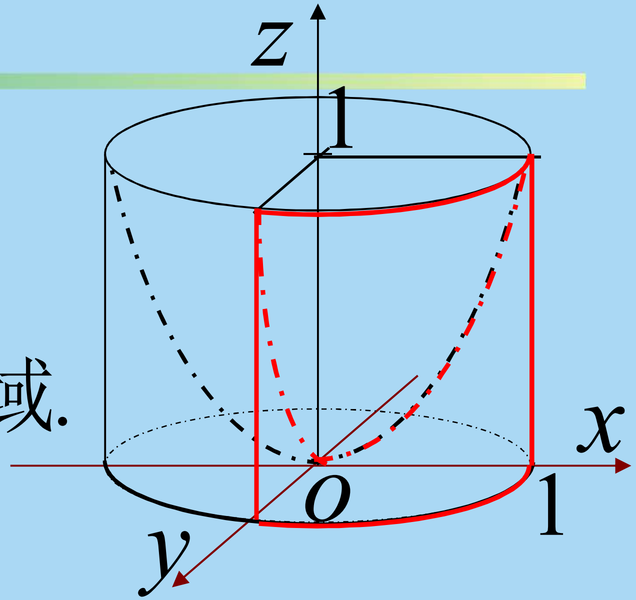
$$= \iiint_{\Omega^*} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

Remark: 当积分区域在坐标平面上的投影为圆域或圆域的一部分,而被积函数具有形如

$$f(x^2+y^2,z),f(x^2+z^2,y),f(y^2+z^2,x)$$

等形式时,宜用柱坐标代换.

例: $I=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Ω 为第一卦限中由曲面 $z=x^2+y^2$, $x^2+y^2=1$ 及三坐标平面围成的区域.



解法一: 在柱坐标 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta, z=z$ 变换下, Ω 在 oxy 平面的投影为

$$E_{r\theta}=\left\{(r,\theta)\middle|0\le r\le 1, 0\le\theta\le\pi/2\right\},$$

Ω 上下两边界面的方程为 $z=0$ 和 $z=r^2$. 于是, Ω 在柱坐标下的表示为

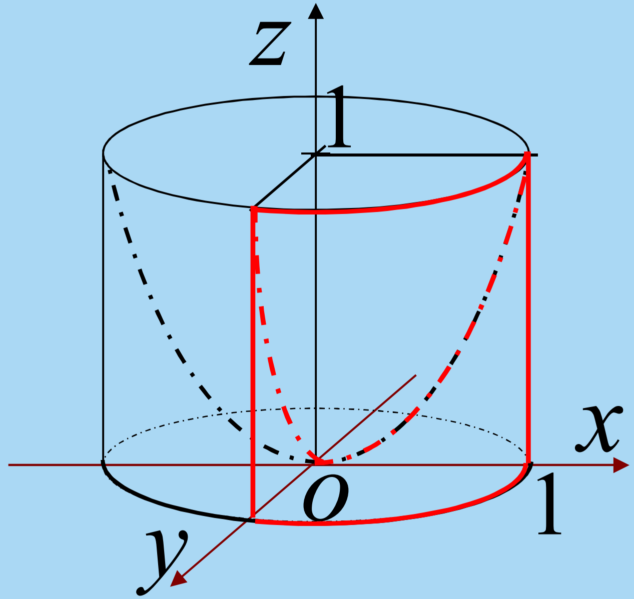
$$\Omega^*=\left\{(r,\theta,z)\middle|0\le r\le 1, 0\le\theta\le\pi/2, 0\le z\le r^2\right\}.$$

$$I=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega^*}(r^2+z)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

$$=\iint_{E_{r\theta}} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\int_0^{r^2}(r^2+z)\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{r^2}(r^2+z)\mathrm{d}z$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^1 r(r^4+\frac{1}{2}r^4)\mathrm{d}r=\pi/8. \square$$



解法二:"先二后一"

$$I=\int_0^1\mathrm{d}z\iint_{\Omega_z}(r^2+z)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\sqrt{z}}^1(r^2+z)r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^1\left[(1-z^2)/4+z(1-z)/2\right]\mathrm{d}z=\pi/8. \square$$

例: $I=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le R^2}\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+(z-h)^2}}$, $(h>R)$.

解: 令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, z=z.$

$$I=\int_{-R}^{R}\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}}\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2+(z-h)^2}}$$

$$=\pi\int_{-R}^{R}\mathrm{d}z\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}}\frac{\mathrm{d}r^2}{\sqrt{r^2+(z-h)^2}}$$

$$=2\pi\int_{-R}^{R}\left[\sqrt{R^2+h^2-2hz}-(h-z)\right]\mathrm{d}z=\frac{4\pi R^3}{3h}.\square$$

6. 三重积分的变量替换

与二重积分类似,对三重积分引入一一映射

$$\begin{cases} x = x(u,v,w), \\ y = y(u,v,w), \\ z = z(u,v,w), \end{cases} \det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \neq 0, \forall (u,v,w) \in \Omega^*.$$

将$ouvw$空间的区域Ω^*映成$oxyz$空间的区域Ω.则

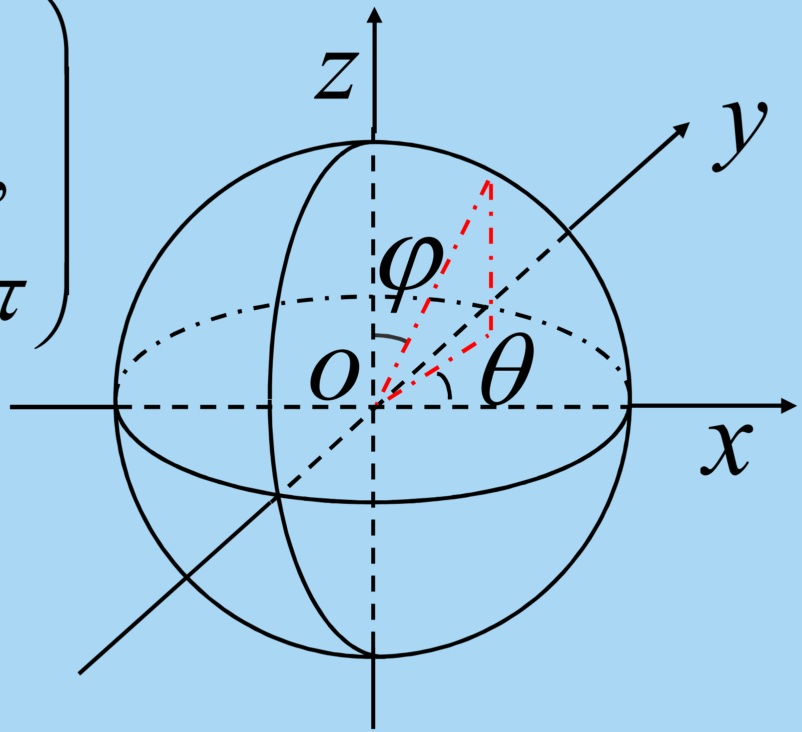
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint_{\Omega^*} f\big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\big) \cdot \left|\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w.$$

清華大學

特别地，在球坐标变换

$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta, \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta, \\ z = \rho \cos\varphi, \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \rho \geq 0, \\ 0 \leq \varphi \leq \pi, \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{pmatrix}$$



下，

$$\det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \rho^2 \sin\varphi.$$

于是 $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$= \iiint_{\Omega^*} f\big(x(\rho,\varphi,\theta), y(\rho,\varphi,\theta), z(\rho,\varphi,\theta)\big)$$

$$\cdot \rho^2 \sin\varphi \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta.$$

例: $I=\iiint\limits_{\Omega}\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\left|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\right.\right\}.$$

解: Ω关于oxy平面对称, 故z的奇函数$\dfrac{xz}{ac}$, $\dfrac{yz}{bc}$, 在Ω上的积分都为0. 同理$\dfrac{xy}{ab}$在Ω上的积分也为0. 于是

$$I=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

椭球坐标变换 $\begin{cases} x = a\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = b\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = c\rho\cos\varphi \end{cases}$ 下,Ω表示为

$$\Omega^* = \{(\rho,\varphi,\theta): 0 \le \rho \le 1, 0 \le \varphi \le \pi, 0 \le \theta \le 2\pi\}.$$

$$\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)} = abc\rho^2\sin\varphi.$$

故 $I = \iiint_\Omega \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 \rho^2\cdot abc\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho$$

$$= 2\pi abc\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1\rho^4\mathrm{d}\rho = 4\pi abc/5.\ \square$$

例: $I=\iiint_{\Omega}(x^2+2y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中$\Omega: 0\le z\le\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

解: 被积函数x^2+2y^2是z的偶函数, 可将积分扩展到整个球域$\Omega_1: x^2+y^2+z^2\le R^2$.

$$I=\frac{1}{2}\iiint_{\Omega_1}(x^2+2y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

由Ω_1的轮换对称性

$$\iiint_{\Omega_1}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega_1}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega_1}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

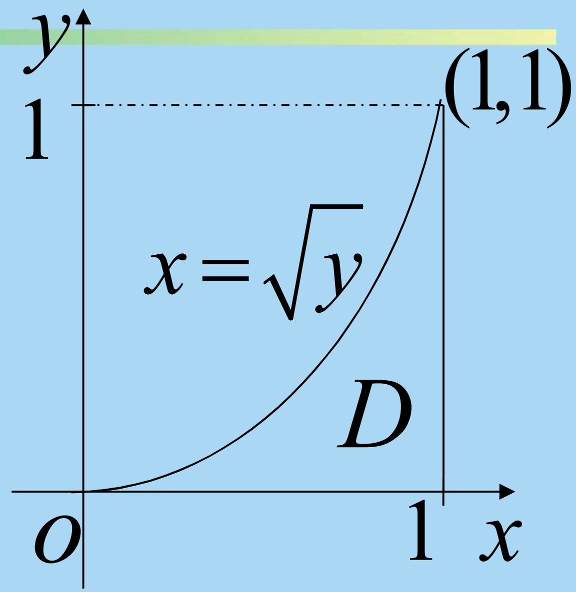
于是, $I=\dfrac{1}{2}\iiint_{\Omega_1}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{R}\rho^4\mathrm{d}\rho=2\pi R^5/5.\square$$

清华大学

Remark. 画出积分区域Ω的立体图是化重积分为累次积分的关键.但是有时Ω的边界比较复杂,其立体图难以作出.这时候就得寻求不画立体图,而只画投影区域或截面区域的平面图的方法来确定累次积分的积分限.

例: $I=\iiint_{\Omega}\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中$\Omega$由$y=0, z=0, x+z=1, x=\sqrt{y}$围成.



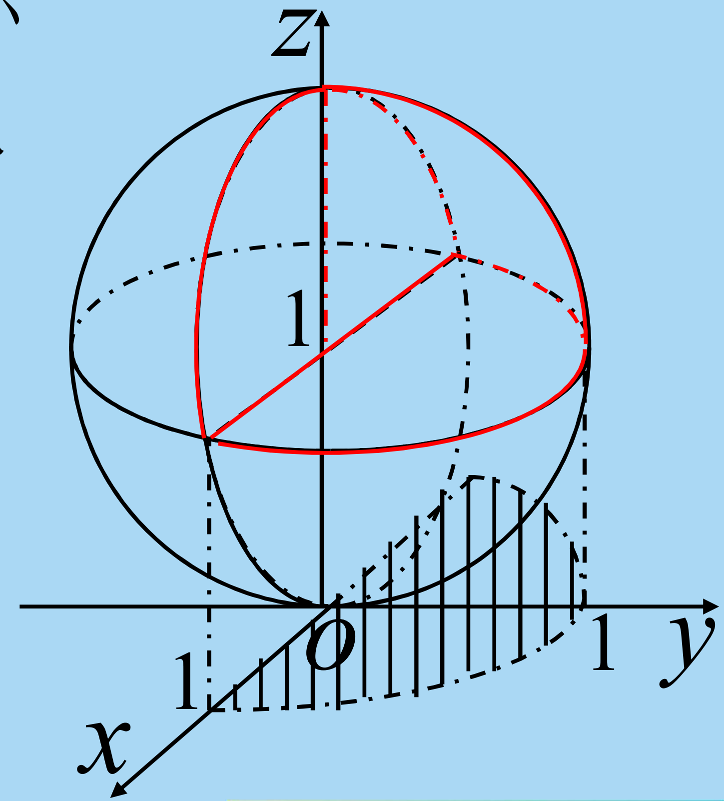
解: 被积函数不含z,先对z积分比较方便.故先将Ω向oxy投影,设投影区域为D.则D应由$y=0, x=\sqrt{y}$,及由$z=0, x+z=1$消去z后得到的$x=1$所围成. 于是

$$I=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{1-x}\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}z=\iint_D(1-x)\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1(1-x)\mathrm{d}x\int_0^{x^2}\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}y=\frac{2}{3}\int_0^1(1-x)x^3\mathrm{d}x=1/30.\square$$

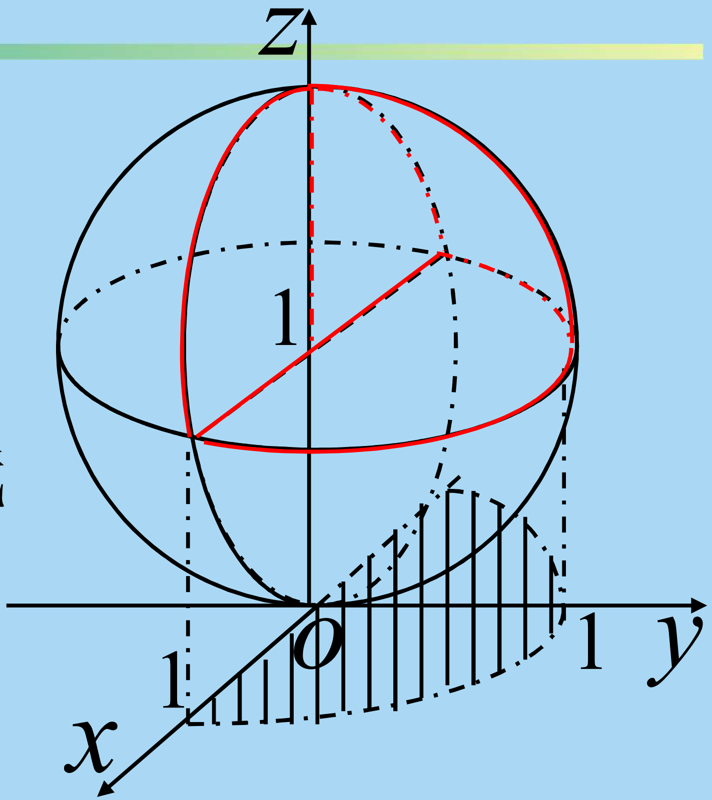
例. $I=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{1}^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}z.$

解: 直角坐标系下所给累次积分十分困难,改变积分顺序也无法简化计算. 积分区域为球域$x^2+y^2+(z-1)^2\le 1$在平面$z=1$上方满足$y\ge 0$的部分.



故考虑球坐标变换.

令 $\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta, \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \\ z = \rho\cos\varphi. \end{cases}$



则 •$0 \le \theta \le \pi$.(这是因为$y \ge 0$.)

•$0 \le \varphi \le \pi/4$. 这是因为交线

$\begin{cases} z = 1 \\ x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1 \end{cases}$ 上

$\begin{cases} \rho\cos\varphi = z = 1 \\ \rho^2\sin^2\varphi = x^2 + y^2 = 2z - z^2 = 1, \end{cases}$ 此时 $\varphi = \pi/4$.

•$1/\cos\varphi \le \rho \le 2\cos\varphi$. 因为平面$z = 1$上, $\rho = 1/\cos\varphi$,

球面$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$上, $\rho = 2\cos\varphi$.

故变量替换后积分区域为

$$\left\{(\rho,\theta,\varphi)\middle|\begin{array}{l}0\le\theta\le\pi,0\le\varphi\le\pi/4,\\ 1/\cos\varphi\le\rho\le 2\cos\varphi.\end{array}\right\}$$

$$I=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{1}^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\varphi\int_{1/\cos\varphi}^{2\cos\varphi}\rho\sin\varphi\mathrm{d}\rho$$

$$=\pi\int_0^{\pi/4}\frac{1}{2}\sin\varphi\left[4\cos^2\varphi-1/\cos^2\varphi\right]\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{2\pi}{3}(1-\frac{1}{2\sqrt{2}})-\frac{\pi}{2}(\sqrt{2}-1).\square$$

清华大学

例：设f可导，且$f(0)=0, \Omega: x^2+y^2+z^2 \le t^2$.

求 $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{1}{\pi t^4} \iiint_\Omega f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

解：$\iiint_\Omega f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi \mathrm{d}\varphi \int_0^t f(\rho)\rho^2 \mathrm{d}\rho = 4\pi \int_0^t f(\rho)\rho^2 \mathrm{d}\rho$$

$\to 0, (t \to 0^+$时.$)$ 故可用L'Hospital法则求极限.

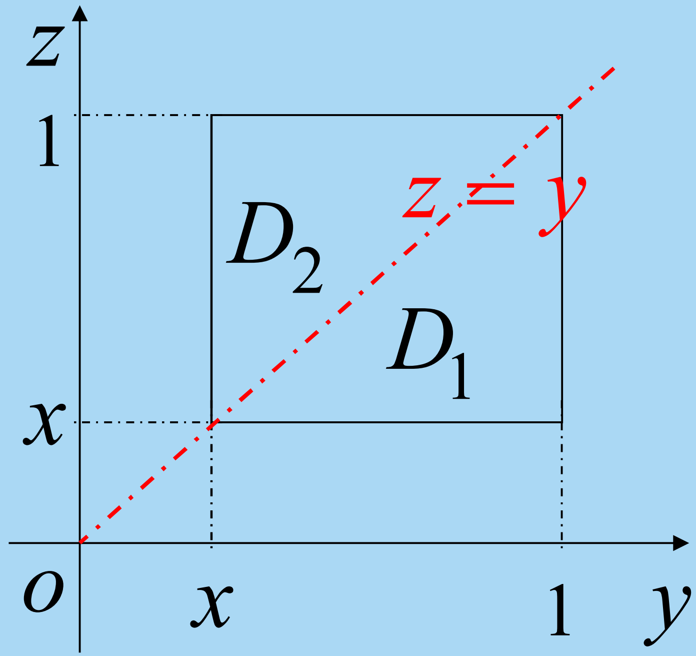
$$原式 = \lim_{t\to 0^+} \frac{4\pi \int_0^t f(\rho)\rho^2 \mathrm{d}\rho}{\pi t^4} = \lim_{t\to 0^+} \frac{4\pi f(t) t^2}{4\pi t^3}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)-f(0)}{t-0} = f'_+(0) = f'(0).\square$$

例：设$f \in C([0,1])$，证明：

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 \mathrm{d}y \int_x^y f(x)f(y)f(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{6}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^3.$$

解：$\forall x \in [0,1]$，



$$\int_x^1 \mathrm{d}y \int_x^y f(y)f(z)\mathrm{d}z$$

$$= \iint_{D_1} f(y)f(z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iint_{D_2} f(y)f(z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{2}\iint_{D_1 \cup D_2} f(y)f(z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{2}\int_x^1 \mathrm{d}y \int_x^1 f(y)f(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\left(\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y\right)^2.$$

清華大學

记$F(x)=\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y$，则$F'(x)=-f(x)$. 于是

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 \mathrm{d}y\int_x^y f(x)f(y)f(z)\mathrm{d}z$$

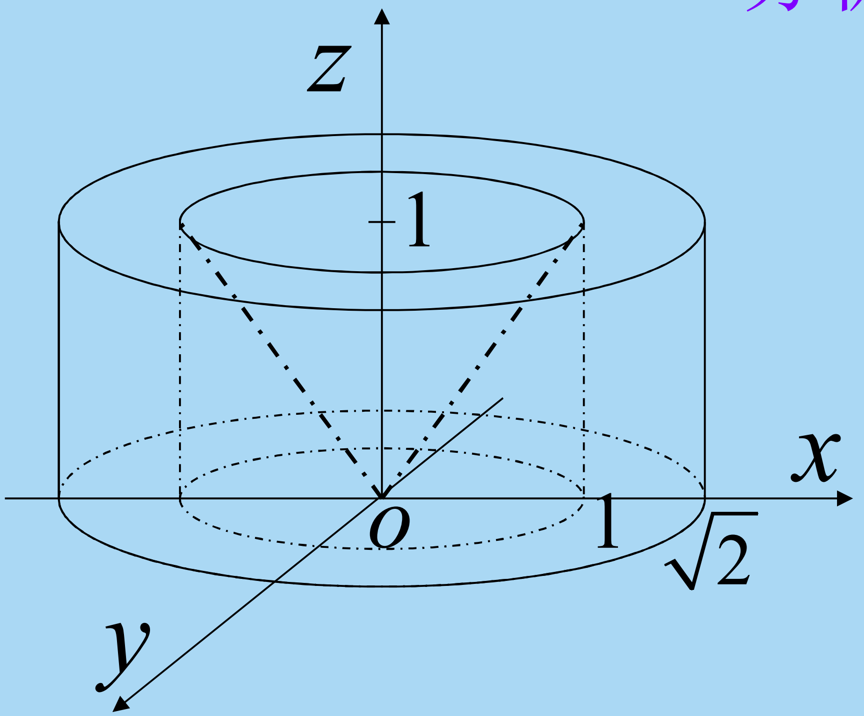
$$=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_x^1 \mathrm{d}y\int_x^y f(y)f(z)\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1 f(x)\cdot\frac{1}{2}\left[\int_x^1 f(y)dy\right]^2\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_0^1 F'(x)F^2(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{-1}{6}F^3(x)\Big|_0^1=\frac{1}{6}F^3(0)=\frac{1}{6}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^3 \square$$

例: 求$\iiint_{\Omega}\left|z-\sqrt{x^2+y^2}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中$\Omega$由平面$z=0, z=1$及曲面$x^2+y^2=2$围成.

分析: 关键在于去绝对值.



锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$将积分区域Ω分成两部分,应分别积分.

以下留为练习.

作业：习题3.4 No.5-8

(每道大题中单序号小题)