第 13 周习题课：第二型曲线曲面积分

一、知识回顾与讨论

两类积分的回顾与对比

<table>
<tr><td></td><td>积分对象</td><td colspan="2">承载积分的几何对象</td></tr>
<tr><td>第一型</td><td>函数 f</td><td>曲线（无向）$\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$
$\int_\gamma f\,\mathrm{d}l$
微弧长
$\mathrm{d}l=\|\mathbf{r}'(t)\|\mathrm{d}t$
$=\sqrt{\langle\mathbf{r}'(t),\mathbf{r}'(t)\rangle}\mathrm{d}t$
$=\sqrt{\mathbf{r}'(t)^T\mathbf{r}'(t)}\mathrm{d}t$(直角坐标系)
背景：由线密度求质量</td><td>曲面（无向）$\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$
$\iint_\Sigma f\,\mathrm{d}\sigma$
面积微元
$\mathrm{d}\sigma=\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$
$=\sqrt{\begin{vmatrix}E & F\\ F & G\end{vmatrix}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\sqrt{\begin{vmatrix}\left\langle\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u},\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\right\rangle & \left\langle\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u},\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right\rangle\\ \left\langle\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v},\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\right\rangle & \left\langle\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v},\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right\rangle\end{vmatrix}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$
$=\sqrt{\det\left[\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial(u,v)}\right)^T\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial(u,v)}\right]}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ (直角坐标系)
背景：由面密度求质量</td></tr>
<tr><td rowspan="2">第二型</td><td>向量场 $\mathbf{F}$</td><td>路径（有向曲线）$\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$
物理背景：力场做功、流速场
环量 $\int_\gamma\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}=\int_\gamma\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}l$，（$\boldsymbol{\tau}$ 是路径的正向单位切向量场）
平面流速场通量 $\int_\gamma\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}l$</td><td>定向曲面：带有指定单位法向量场的曲面 $(\Sigma,\mathbf{n})$
物理背景：流速场通量、电场通量、磁场通量
$\iint_\Sigma\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}\sigma$</td></tr>
<tr><td>微分形式 ω</td><td>一阶微分形式
$\omega=X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y+Z\mathrm{d}z$
$\int_\gamma\omega$</td><td>二阶微分形式
$\omega=X\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+Z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$
$\iint_\Sigma\omega$</td></tr>
</table>

两类积分的转化

第二型积分转为第一型积分：$\int_\gamma\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}l$，$\int_\gamma\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}l$，$\iint_\Sigma\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}\sigma$

第一型积分转为第二型积分：给定函数 f 构造向量场 $\mathbf{F}=f\boldsymbol{\tau}$ 或 $\mathbf{F}=f\mathbf{n}$ 。

第二型曲线积分的计算

1、 代入适当的参数方程转为一元定积分

2、 构造原函数，$\omega = \mathrm{d}f$，则 $\int_\gamma \omega = f(B) - f(A)$。存在原函数的充分条件是：向量场 $\mathbf{F}$ 无旋（$\operatorname{rot}\mathbf{F} = 0$）/微分形式 ω 是恰当形式（$\mathrm{d}\omega = 0$），区域/曲面单连通。

3、 选择适当的平面区域或曲面用 Green 公式或 Stokes 公式转为平面重积分或第二型曲面积分

Green 公式/Stokes 公式（环量与旋度）$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_D \operatorname{rot}\mathbf{F}\mathrm{d}\sigma$，$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_\Sigma \operatorname{rot}\mathbf{F}\mathrm{d}\sigma$

Green 公式（通量与散度）$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}l = \iint_D \operatorname{div}\mathbf{F}\,\mathrm{d}\sigma$

$\int_\gamma \omega = \iint_\Sigma \mathrm{d}\omega$，

对 $\omega = X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y + Z\mathrm{d}z$，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega &= \left(\frac{\partial X}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial X}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial X}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial Y}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial Y}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y \\
&\quad + \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial Z}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial Z}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\wedge \mathrm{d}z \\
&= \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \\
&= \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z & \dfrac{\partial}{\partial x} & X \\ \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x & \dfrac{\partial}{\partial y} & Y \\ \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y & \dfrac{\partial}{\partial z} & Z \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

直角坐标系下，

$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial Z}{\partial y} - \dfrac{\partial Y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial X}{\partial z} - \dfrac{\partial Z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial Y}{\partial x} - \dfrac{\partial X}{\partial y} \end{pmatrix}$ 是向量场 $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ 的旋度。（对应 Stokes 公式）

对平面向量场 $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$，旋度 $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \dfrac{\partial Y}{\partial x} - \dfrac{\partial X}{\partial y}$。（对应环量-旋度 Green 公式）

$$\int_\gamma X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

对平面向量场 $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$，散度 $\operatorname{div}\mathbf{F} = \dfrac{\partial X}{\partial x} + \dfrac{\partial Y}{\partial y} = \operatorname{tr}\dfrac{\partial(X,Y)}{\partial(x,y)}$。（对应通量-散度 Green 公式）

$$\int_\gamma -Y\mathrm{d}x + X\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

注：微分形式表达的 Green 公式只有一个，但物理意义的 Green 公式有两个。

使用 Green 公式/Stokes 公式时，要把曲线作为一个平面区域/曲面的边界，并且注意曲线定向与曲面定向相协调（站在曲线上沿曲线正向前进时，平面区域/曲面位于左手一侧，想一想在运动场跑道上跑步的人就知道了）

第二型曲面积分的计算

1、 选择适当的参数方程，代入并转为二维重积分
2、 利用向量场的特殊性和第二型曲面积分的物理含义（通量）
3、 利用 Gauss 公式（散度定理），把曲面积分转成关于散度的三重积分，要注意曲面定向与空间定向相协调。

一些建议

1、利用对称性，但如何利用（坐标变换会带来曲线曲面的变化、定向的变化以及向量场的变化）

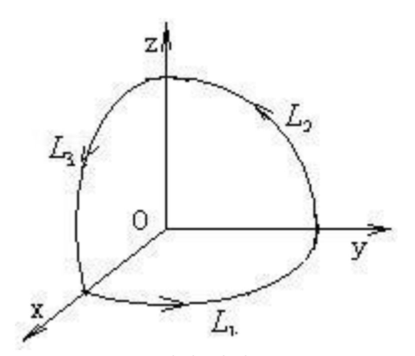
2、利用积分对曲线曲面的可加性，以及对向量场/微分形式的线性，对积分进行分解。比如曲线积分时分离出其中具有原函数的部分，对积分进行化简。

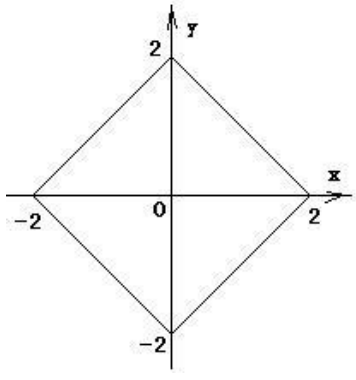
二、习题

第二型曲线积分

1. $\displaystyle\int_{L:从(1,\pi)到(2,\pi)}\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}y$

2. 计算积分 $I=\displaystyle\int_\Gamma (y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z$， 其中 Γ 为第一卦限中球面片 $x^2+y^2+z^2=1\ (x,y,z\ge 0)$ 的边界曲线绕球面外法向量逆时针旋转。（课本习题 4.4 题 3（4），page 192）





3. 设 C 为闭曲线：$|x|+|y|=2$，逆时针为正向。
计算（ⅰ）$\displaystyle\oint_{C^+}\frac{ax\mathrm{d}y-by\mathrm{d}x}{|x|+|y|}$，（ⅱ）$\displaystyle\oint_{C^+}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$。

4. 已知函数 $f(x)$ 在整个实轴 $\mathbf{R}$ 上二次连续可微，满足 $f'(0)=0$，且使得一阶微分形式 $[f(x)+y(x-f(x))]\mathrm{d}x+f'(x)\mathrm{d}y$ 是全微分，求 $f(x)$，并使上述一阶微分形式由 $A(0,0)$ 到 $B(\frac{\pi}{2},\pi)$ 逐段光滑曲线 L 上积分的值为 $\dfrac{\pi^2}{8}$。

5. 设 $Q(x,y)$ 在全平面上连续可微, 已知曲线积分 $\int_L 2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 与路径无关, 并且对于任意的 t, 有 $\int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$. 求函数 $Q(x,y)$.

6. 已知积分 $\int_L (x+xy\sin x)\mathrm{d}x+\dfrac{f(x)}{x}\mathrm{d}y$ 与路径无关， $f(x)$ 为可微函数, 且 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$,

（1） 求 $f(x)$;

（2） 对(1)中求得的 $f(x)$, 求函数 $u=u(x,y)$ 使得 $\mathrm{d}u=(x+xy\sin x)\mathrm{d}x+\dfrac{f(x)}{x}\mathrm{d}y$;

（3） 对(1)中求得的 $f(x)$, 求上述积分, 其中积分路径为从 $A(\pi,1)$ 到 $B(2\pi,0)$ 的任意路径.

第二型曲面积分

7. 计算第一型曲面积分 $I=\iint\limits_S |z|\mathrm{d}\sigma$, 以及第二型曲面积分 $J=\iint\limits_{S^+}|z|\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ ， 其中曲面 S 为球面 $S: x^2+y^2+z^2=a^2$ ；定向曲面 S^+ 的外侧。

8. 记 S 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2x$ 所截的有限部分。规定曲面 S 的正向向下，所得的定向曲面记为 S^+ 。求下面两个积分的值。

（i）$\iint\limits_S z\mathrm{d}\sigma$ 。 （ii） $\iint\limits_{S^+}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\left(x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\right)$.

9. 求积分 $I=\iint\limits_\Sigma f(x)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+g(y)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+h(z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ ，其中 Σ 为长方体 $[0,a]\times[0,b]\times[0,c]$ 的边界外侧，函数 $f(x)$, $g(y)$ 和 $h(z)$ 均为连续函数。

10. 记 S^+ 为圆柱面 $x^2+y^2=1$ 位于 $0\le z\le 2$ 的部分，外法向为正，计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{S^+} x(y-z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(x-y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

11. 计算高斯积分 $I=\oiint\limits_S \dfrac{\cos(\mathbf{r},\mathbf{n})}{\|\mathbf{r}\|^2}\mathrm{d}\sigma$ ，其中 S 为一个不经过原点的光滑封闭曲面，其中 $\mathbf{n}$ 为 S 上点 $\mathbf{r}=(x,y,z)$ 处的单位外法线向量.

12. 设 $f:[0,+\infty)\to\mathbf{R}$ 是 $C^{(1)}$ 函数，满足 $f(0)=1$，且对区域 $R^+=\{(x,y,z)\,|\,x>0\}$ 内任何一个光滑有向封闭曲面 S ，都有 $\oiint\limits_S xf(x)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z-xyf(x)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x-\mathrm{e}^{2x}z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=0$ 。求 $f(x)$ 。

13. 设 $D\subset\mathbf{R}^2$ 为开集，$u(x,y)$ 为调和函数$\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,(x,y)\in D\right)$，证明

（i）$u(x_0,y_0)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{\partial D}\left(u\dfrac{\partial\ln r}{\partial\mathbf{n}}-\ln r\dfrac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\right)\mathrm{d}l$ ，其中 $(x_0,y_0)\in D$ ， $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ ，$\mathbf{n}$ 为 D 的外法向量；

（ii）$u(x_0,y_0)=\dfrac{1}{2\pi R}\int_{\partial B((x_0,y_0),R)}u(x,y)\mathrm{d}l$ ，其中 $B((x_0,y_0),R)\subset D$ 。