第十一次习题课　曲线曲面积分 3

例1　设 $D_t=\{(x,y)\in R^2 \mid x^2+y^2\le t^2, t>0\}$， $f(x,y)$ 在 D_t 上连续，在 D_t 内存在连续偏导数． $f(0,0)=1$．若 $f(x,y)$ 在 D_t 上满足方程 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\dfrac{1}{2}f(x,y)$． $\vec{n}$ 为有向曲线 ∂D_t 的外单位法向量，求极限 $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{1}{1-\cos t}\oint_{\partial D_t}\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\mathrm{d}l=$

解： $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{n}}=\nabla f\cdot\vec{n}$．利用格林公式第二种形式得到

$\frac{1}{2}f(x,y)$

$$\oint_{\partial D_t}\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\mathrm{d}l=\oint_{\partial D_t}\nabla f\cdot\vec{n}\mathrm{d}l=\oint_{\partial D_t}(f_x'\vec{i}+f_y'\vec{j})\cdot\vec{n}\mathrm{d}l=\iint_{D_t}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\iint_{D_t}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\boxed{\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t f\cdot r\mathrm{d}r}=\pi\int_0^t f\cdot r\mathrm{d}r$$

$f(r,\theta)$　　$t\cdot 2\pi\cdot f(\xi_r,\varphi_0)\cdot\xi_r$

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{1-\cos t}\oint_{\partial D_t}\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\mathrm{d}l=\pi\lim_{t\to 0}\frac{\int_0^t f\cdot r\mathrm{d}r}{1-\cos t}=\pi\text{．（洛必达法则）}$$

$f(0,0)=1$

$xdx+ydy$

例2　设 $Q(x,y)$ 在全平面上连续可微, 已知曲线积分 $\int_L 2xydx+Q(x,y)dy$ 与路径无关, 并且对于任意的 t , 有 $\int_{(0,\ 0)}^{(1,\ t)}2xydx+Q(x,y)dy=\int_{(0,\ 0)}^{(t,\ 1)}2xydx+Q(x,y)dy$ ②．求函数 $Q(x,y)$．

$\boxed{\dfrac{\partial X}{\partial y}=\dfrac{\partial Y}{\partial x}}$ ①

解：根据条件得到 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial y}(2xy)=2x$，因此 $Q(x,y)=x^2+f(y)$．

另外算出两个曲线积分

$(0,0)\to(1,t)$

$(0,0)\to(1,0)\to(1,t)$

$\int Q(x,y)dy=0$　　$\int 2xydx=0$

$$\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xydx+Q(x,y)dy=\int_0^1 2x\cdot 0dx+\int_0^t Q(1,y)dy$$

$$=\int_0^t[1+f(y)]dy=t+\int_0^t f(y)dy\text{，}$$

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xydx+Q(x,y)dy=\int_0^1 Q(0,y)dy+\int_0^t 2x\cdot 1dx=\int_0^1 f(y)dy+t^2\text{，}$$

令两者相等得到　$t+\int_0^t f(y)dy=\int_0^1 f(y)dy+t^2$．

关于 t 求导数得到　$f(t)=2t-1$，于是 $Q(x,y)=x^2+2y-1$．

例3　已知积分 $\int_L(x+xy\sin x)dx+\dfrac{f(x)}{x}dy$ 与路径无关， $f(x)$ 为可微函数, 且 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$， ②

（1）求 $f(x)$；　$\dfrac{\partial X}{\partial y}=\dfrac{\partial Y}{\partial x}$ ①

(2) 对 (1) 中求得的 $f(x)$, 求函数 $u=u(x,y)$ 使得 $du=(x+xy\sin x)dx+\dfrac{f(x)}{x}dy$；

(3) 对 (1) 中求得的 $f(x)$，求上述积分，其中积分路径为从 $A(\pi,1)$ 到 $B(2\pi,0)$ 的任意路径.

解：(1) $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(x+xy\sin x)$$

$$x\sin x=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2},\quad f'(x)-\frac{1}{x}f(x)=x^2\sin x$$

这是一阶线性微分方程. 通解为 $f(x)=x(\sin x-x\cos x+C)$，由初始条件得 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，$C=-1$，于是 $f(x)=x(\sin x-x\cos x-1)$.

F $\quad \frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy$

不定积分

(2) 解法一：$\overset{X}{\boxed{(x+xy\sin x)}}dx+\overset{Y}{\boxed{\frac{f(x)}{x}}}dy=(x+xy\sin x)dx+(\sin x-x\cos x-1)dy$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=x+xy\sin x,\quad u=\frac{x^2}{2}-xy\cos x+y\sin x+\varphi(y)$$

$\int x+xy\sin x\,dx$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-x\cos x+\sin x+\varphi'(y)=\sin x-x\cos x-1$$

$\frac{\partial u}{\partial y}$

$$\varphi'(y)=-1,\quad \varphi(y)=-y+C$$

$$u=\frac{x^2}{2}-xy\cos x+y\sin x-y+C$$

其中 C 为任意常数.

$$u=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(x+xy\sin x)dx+(\sin x-x\cos x-1)dy+C$$

解法二：$=\int_0^x xdx+\int_0^y(\sin x-x\cos x-1)dy+C$

$\int_{(0,0)}^{(x,y)}(x+xy\cdots)$

$$=\frac{x^2}{2}-xy\cos x+y\sin x-y+C$$

$\int_{(\pi,1)}^{(2\pi,0)}(x+xy\cdots)$

(3) 解法一：积分与路径无关，由 A 到 B 取平行与坐标轴的两条路径，

$$I=\int_1^0(-\pi\cos\pi-1)dy+\int_\pi^{2\pi}xdx=(1-\pi)+\frac{3\pi^2}{2}$$

解法二：$I=u(x,y)\big|_A^B=u(B)-u(A)=(1-\pi)+\frac{3\pi^2}{2}$。

例4 计算积分：$\int_{(1,\pi)}^{(2,\pi)}\overset{X}{\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)}dx+\overset{Y}{\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)}\cancel{ydx}$ dy，

$\int_1^2\left(1-\frac{\pi^2}{x^2}\cos\frac{\pi}{x}\right)dx$

路径为沿任一条不与轴相交的曲线。

解：由于 $\frac{\partial X}{\partial y}=-\frac{2y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^3}\sin\frac{y}{x}=\frac{\partial Y}{\partial x}$，

$$\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy=dx+y\cos\frac{y}{x}\left(-\frac{y}{x^2}dx+\frac{1}{x}dy\right)+\sin\frac{y}{x}dy$$

$$=dx+y\cos\frac{y}{x}d\left(\frac{y}{x}\right)+\sin\frac{y}{x}dy=dx+yd\left(\sin\frac{y}{x}\right)+\sin\frac{y}{x}dy=d\left(x+y\sin\frac{y}{x}\right),$$

$$\int_{(1,\pi)}^{(2,\pi)}\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)ydx$$

$$=\int_{(1,\pi)}^{(2,\pi)} d\left(x+y\sin\frac{y}{x}\right)=\left(x+y\sin\frac{y}{x}\right)\Bigg|_{(1,\pi)}^{(2,\pi)}=\pi+1$$

例5 设在上半平面 $D=\{(x,y)|y>0\}$ 内，函数 $f(x,y)$ 具有连续偏导数,且对任意的 $t>0$ 都有 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$，证明：对 L 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L,都有 $\oint_L yf(x,y)dx-xf(x,y)dy=0$。

验证 $\dfrac{\partial X}{\partial y}=\dfrac{\partial Y}{\partial x}$

$\Downarrow$

解：由 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$ 两边对 t 求导得：

$$xf_x'(tx,ty)+yf_y'(tx,ty)=-2tf(x,y)$$

令 $t=1$, 则 $xf_x'(x,y)+yf_y'(x,y)=-2f(x,y)$

记 $X=yf(x,y),Y=-xf(x,y)$

$$\frac{\partial X}{\partial y}=f(x,y)+yf_y'(x,y)\,;\quad \frac{\partial Y}{\partial x}=-f(x,y)-xf_x'(x,y)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}=-f(x,y)-xf_x'(x,y)-[f(x,y)+yf_y'(x,y)]$$

$$=-2f(x,y)-[xf_x'(x,y)+yf_y'(x,y)]=0\,,$$

由于是单连通域，又有满足 $\dfrac{\partial Y}{\partial x}-\dfrac{\partial X}{\partial y}=0$，这样，于是对 L 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L，都有 $\oint_L yf(x,y)dx-xf(x,y)dy=0$。

例6 设 Ω 为由圆锥面 $S:x^2+y^2=z^2$ 和平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 所围成的圆锥体。

(i) 证明设此圆锥体的体积 V 可以表示为 $V=\boxed{\dfrac{1}{3}\iint_{\partial\Omega}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}^0)dS}$，其中 $\partial\Omega$ 为 Ω 区域的边界曲面，$\mathbf{n}^0$ 为其单位外法向量，$\mathbf{r}=(x,y,z)$.

(ii) 圆锥体的体积 V 也可以表示为 $V=\dfrac{Ah}{3}$，其中 A 为圆锥的底面积，h 为圆锥的高.

证明： (i) 根据 Gauss 公式得 $\iint_{\partial\Omega}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}^0)dS=\iint_{\partial\Omega^+}(x,y,z)\cdot d\mathbf{S}=\iiint_{\Omega}3dxdydz=3V$

$V=\frac{1}{3}(x,y,z)$

$\operatorname{div}V=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$

故 $V=\dfrac{1}{3}\iint\limits_{\partial\Omega}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}^0)dS$。（注：这个结论不仅仅对圆锥体成立，而是一个一般性结论：任何有界立体 Ω，其体积均可以表为 $|\Omega|=\dfrac{1}{3}\iint\limits_{\partial\Omega}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}^0)dS$，其中 $\mathbf{n}^0$ 为 $\partial\Omega$ 单位外法向量。）

(ii) 由于 $\partial\Omega=S_1\cup S_2$，其中 S_1 记锥面部分，S_2 记底面部分．因为锥面的顶点在原点，其上每一点的法向量与径向垂直，故 $\iint\limits_{S_1}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}^0)dS=0$。$S_2$ 为平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的

(x,y,z) S_1 法向量 $\vec{n_1}\perp(x,y,z)$

一部分，其单位法向量为 $\dfrac{\pm(A,B,C)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$．注意到在 S_2 上，点的位置向量与正法向成锐角。

(x,y,z)

因此

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{S_2}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}^0)dS&=\iint\limits_{S_2}\left|(x,y,z)\cdot\frac{(A,B,C)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|dS\\
&=\iint\limits_{S_2}\left|\frac{\overset{D}{Ax+By+Cz}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|dS=\iint\limits_{S_2}\left|\frac{-D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|dS\\
&=\left|\frac{-D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|\boxed{\iint\limits_{S_2}dS}=Ah
\end{aligned}$$

其中 $A=\iint\limits_{S_2}dS$ 为圆锥的底面积，而 $h=\left|\dfrac{-D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|$ 为原点到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离，也就是圆锥的高．故

$$V=\frac{1}{3}\iint\limits_{\partial\Omega}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}^0)dS=\frac{1}{3}\left(\iint\limits_{S_1}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}^0)dS+\iint\limits_{S_2}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}^0)dS\right)=\frac{1}{3}\iint\limits_{S_2}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}^0)dS=\frac{Ah}{3}$$ 。解答完毕。

例7 设一元函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续可导，且对于任何位于半空间

$R_x^+=\{(x,y,z),\quad x>0\}$ 中

的光滑有向封闭曲面 $S\subset R_x^+$，有 $\oint\!\!\oint\limits_{S}xf(x)dydz-xyf(x)dzdx-e^{2x}zdxdy=0$。进一步假设 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$。求 $f(x)$。

解：对于 $\forall(x_0,y_0,z_0)\in R_x^+$。作以 (x_0,y_0,z_0) 为球心，以 $r>0$ 为半径的闭球 B_x。取 $r>0$ 充分小，可以使得 $B_r\subset R_x^+$。于是由假设得

$$\oint\!\!\oint\limits_{\partial B_r}xf(x)dydz-xyf(x)dzdx-e^{2x}zdxdy\equiv0$$。根据 Gauss 公式有

$$\iiint\limits_{B_r}[(xf(x))_x+(-xyf(x))_y+(-e^{2x}z)_z]dxdydz=0$$，即

divV

$$\iiint_{B_r}\boxed{[xf'(x)+(1-x)f(x)-e^{2x}]}dxdydz=0。$$

再根据三重积分的中值定理可知存在 $\xi\in[x_0-r,x_0+r]$，使得

$$\xi f'(\xi)+(1-\xi)f(\xi)-e^{2\xi}=0。令 r\to0^+ 即得$$

$$x_0f'(x_0)+(1-x_0)f(x_0)-e^{2x_0}=0。$$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x(c+e^x)}{x}=1$$

由于 $x_0>0$ 是任意的，故 $xf'(x)+(1-x)f(x)-e^{2x}=0$，$\forall x>0$。

这是一阶线性常微分方程，根据求解公式得可知其通解为 $\boxed{f(x)=\frac{e^x}{x}(c+e^x)}$。进一步由假设 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$，可以确定 $c=-1$。因此 $f(x)=\frac{e^x}{x}(e^x-1)$。解答完毕。

例8 利用 Stokes 公式计算积分 $I=\oint\limits_{L^+}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$，其中 L^+ 为圆周

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\ y=x\tan\alpha\quad\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$

从 0x 轴的正向看去，圆周的正向为逆时针方向.

解:前面（见第一部分题 1）我们利用 L^+ 的参数方程直接计算出了积分。利用 Stokes 公式计算则更简单。记 S^+ 为由圆周 L^+ 在平面 $y=x\tan\alpha$ 上所围的部分（闭圆盘），其正法向与 x 轴正向成锐角。由 Stokes 公式得

$$I=\oint_{L^+}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz=\iint_{S^+}rot(y-z,z-x,x-y)\cdot d\mathbf{S}$$

$$=\iint_S rot(y-z,z-x,x-y)\cdot\mathbf{n}^0dS$$

其中 $\mathbf{n}^0$ 为 S^+ 的单位正法向。由假设知 $\mathbf{n}^0=(\sin\alpha,-\cos\alpha,0)$. 简单计算知

$rot(y-z,z-x,x-y)=-2(1,1,1)$

$$于是 I=\iint_S rot(y-z,z-x,x-y)\cdot\mathbf{n}^0dS=-2\iint_S(1,1,1)\cdot(\sin\alpha,-\cos\alpha,0)dS$$

$$=2(\cos\alpha-\sin\alpha)\boxed{\iint_S dS}=2\pi a^2(\cos\alpha-\sin\alpha)$$

其中 $\iint\limits_S dS=\pi a^2$ 为平面 $y=x\tan\alpha$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 部分内的面积. 解答完毕。

例9 设有向曲线 L^+ 是平面 $x+y+z=0$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的交线，从 z 轴正向看去为逆时针为正向。求第二类曲线积分 $I=\int\limits_{L^+}\frac{(y+1)dx+(z+2)dy+(x+3)dz}{x^2+y^2+z^2}$。 $=1$

解：首先注意 $I=\int\limits_{L^+}(y+1)dx+(z+2)dy+(x+3)dz$。

记 S^+ 为平面 $x+y+z=0$ 上包含于球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 内的部分，规定 S^+ 的正法向与 z

轴的正向成锐角。记 $\vec{F}=(y+1,z+2,x+3)$。则积分 I 可写作 $I=\int_{L^+}\vec{F}(r)\cdot d\,\vec{r}$。简单计算得 $rot\,\vec{F}=(-1,-1,-1)$。根据 Stokes 公式得 $I=-\iint_{S^+}dydz+dzdx+dxdy$. 注意到 S 的单位正法向 $\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$。于是 $I=-\iint_S(1,1,1)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)dS=-\sqrt{3}\iint_S dS=-\sqrt{3}\pi$。解答完毕。

例10 设 Σ^+ 是锥面的一个部分：$z=\sqrt{x^2+y^2}$，$0\le z\le 1$，规定其正法线向下，求面积分

$$I=\iint_{\Sigma^+}xdydz+2ydzdx+3(z-1)dxdy。$$

解：为了用 Gauss 公式来计算上述积分。我们关于锥面 Σ^+ 补上一单位圆盘 Σ_1^+：$x^2+y^2\le 1$，$z=1$，正法线向上。记由锥面 Σ^+ 和圆盘 Σ_1^+ 所围成的立体为 Ω。于是应用 Gauss 公式得

$$\iint_{\Sigma^+}+\iint_{\Sigma_1^+}=\iiint_\Omega divF=\iiint_\Omega 6dxdydz=6|\Omega|=2\pi。$$

而积分 $\iint_{\Sigma_1^+}xdydz+2ydzdx+3(z-1)dxdy=0$。　　$z=1,\ x^2+y^2\le 1$

因此原积分 $I=\iint_{\Sigma^+}xdydz+2ydzdx+3(z-1)dxdy=2\pi$。解答完毕。

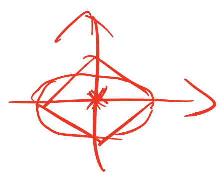
例11 计算高斯积分 $I=\oiint_S\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}\mathrm{d}S$，其中 S 为一个不经过原点的光滑封闭曲面，其中 $\vec{n}$ 为 S 上点 (x,y,z) 处的单位外法线向量，$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$，$r=|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.　　$\frac{\vec{r}}{r^3}dS$

解：记 $\vec{V}=\vec{r}/r^3=(x,y,z)/r^3$。则 $\oiint_S\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}\mathrm{d}S=\oiint_S\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S=\oiint_S\vec{V}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S$. 简单计算表明，证向量场 V 的散度恒为零，即 $divV=0$. 因此当 S 不包围原点时，向量场 V 在由 S 所包围的闭区域内连续可微。因此利用 Gauss 公式立知面积分 $\iint_S V\cdot ndS=0$。

$\vec{V}=\frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$

当 S 包含围原点时，原积分等于向量场 $\vec{V}$ 关于球面 $\Sigma^+:x^2+y^2+z^2=\delta^2$（外侧）上的第二型面积分．于是

$$I=\oiint_S\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}\mathrm{d}S=\oiint_{\Sigma^+}\vec{V}\cdot\vec{n}dS=\oiint_{\Sigma^+}\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\frac{\vec{r}}{r}dS=\frac{1}{\delta^2}\oiint_\Sigma dS=4\pi。$$



解答完毕。

$\overline{\quad\quad\quad}$
$3x^2+4y^2$

X Y

例12 确定常数 α，使得积分 $\int_A^B (x^4+4xy^\alpha)dx+(6x^{\alpha-1}y^2-5y^4)dy$ 与路径无关， 并求原函数 $\varphi(x,y)$，使得 $d\varphi=(x^4+4xy^\alpha)dx+(6x^{\alpha-1}y^2-5y^4)dy$。 $\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x}\Rightarrow\alpha=3$

解：记 $P(x,y)=x^4+4xy^\alpha$， $Q(x,y)=6x^{\alpha-1}y^2-5y^4$。令 $P_y=Q_x$， 得

$4\alpha xy^{\alpha-1}=6(\alpha-1)x^{\alpha-2}y^2$。由此解得 $\alpha-2=1$，且 $4\alpha=6(\alpha-1)$，$\alpha-1=2$，所以 $\alpha=3$。

当 $\alpha=3$ 时， 对微分形式 $(x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy$ 作适当组合得

$$(x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy=x^4dx-5y^4+(4xy^3dx+6x^2y^2dy)$$

$=d(\frac{x^5}{5}-y^5+2x^2y^3)$。由此可得所求原函数为 $\varphi(x,y)=\frac{x^5}{5}-y^5+2x^2y^3+c$。解答完毕。

例13 （P.229 9）设 $D\subset R^2$ 为开集， $u(x,y)$ 为调和函数 $\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0,(x,y)\in D\right)$， 证明

（1） $u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D}\left(u\frac{\partial\ln r}{\partial\mathbf{n}}-\ln r\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\right)dl$，其中 $(x_0,y_0)\in D$， $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$， $\mathbf{n}$ 为 D 的外法向量； $\Rightarrow \int_{\partial L_\varepsilon^+}$

（2） $u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi R}\int_L u(x,y)dl$， 其中 L 为以 (x_0,y_0) 为圆心， R 为半径的圆。

证明：（1） $\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D}\left(u\frac{\partial\ln r}{\partial\mathbf{n}}-\ln r\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\right)dl=\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D}\left(u\frac{\partial\ln r}{\partial x}-\ln r\frac{\partial u}{\partial x},u\frac{\partial\ln r}{\partial y}-\ln r\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\mathbf{n}^0dl$。

而 $\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial\ln r}{\partial x}-\ln r\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial\ln r}{\partial y}-\ln r\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0,\quad (x,y)\neq(x_0,y_0)$， ① $\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x}$

所以令 $L_\varepsilon:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\varepsilon^2$，

$$\int_{\partial D}\left(u\frac{\partial\ln r}{\partial x}-\ln r\frac{\partial u}{\partial x},u\frac{\partial\ln r}{\partial y}-\ln r\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\mathbf{n}^0dl=\int_{L_\varepsilon}\left(u\frac{\partial\ln r}{\partial x}-\ln r\frac{\partial u}{\partial x},u\frac{\partial\ln r}{\partial y}-\ln r\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\mathbf{n}^0dl$$

$$=\boxed{\int_{L_\varepsilon}\left(u\frac{\partial\ln r}{\partial x},u\frac{\partial\ln r}{\partial y}\right)\cdot\mathbf{n}^0dl}-\boxed{\int_{L_\varepsilon}\left(\ln r\frac{\partial u}{\partial x},\ln r\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\mathbf{n}^0dl}\to 0$$

$2\pi u(x_0,y_0)$

$$\int_{L_\varepsilon}\left(\ln r\frac{\partial u}{\partial x},\ln r\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\mathbf{n}^0dl=\ln\varepsilon\int_{L_\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\mathbf{n}^0dl=\ln\varepsilon\iint_{D_\alpha}\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)dxdy=0$$

0

因为 $\frac{\partial\ln r}{\partial x}=\frac{x-x_0}{\varepsilon^2},\frac{\partial\ln r}{\partial y}=\frac{y-y_0}{\varepsilon^2}$， 所以

第二类　　　　第一类

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\int_L u\frac{\partial \ln r}{\partial n}dl=\frac{1}{2\pi R}\int_L u(x,y)dl$$

$$\boxed{\int_{L_\varepsilon}\left(u\frac{\partial \ln r}{\partial x},u\frac{\partial \ln r}{\partial y}\right)\cdot \mathbf{n}^0 dl}=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{L_\varepsilon}u\cdot(x-x_0,y-y_0)\cdot\mathbf{n}^0 dl$$

$\varepsilon\to 0$　　$u(x_0,y_0)$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{L_\varepsilon}u\cdot(x-x_0,y-y_0)\cdot\frac{(x-x_0,y-y_0)}{\varepsilon}dl=\frac{1}{\varepsilon}\int_{L_\varepsilon}u(x,y)dl=\frac{1}{\varepsilon}u(\xi,\eta)\int_{L_\varepsilon}dl=2\pi u(\xi,\eta)$$

$\varepsilon\to 0$，$u(x_0,y_0)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\partial D}\left(u\frac{\partial \ln r}{\partial \mathbf{n}}-\ln r\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)dl$。

（2）略