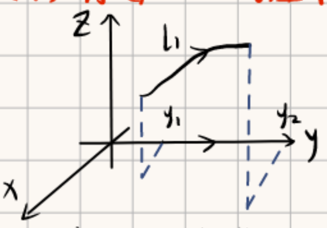
二型积分的投影

一、什么时候可以投影?

只要符合一一对应性，任何时候都可以投影!



对于三维曲线积分：$\int_{L^+} pdx+qdy+rdz$

$$= \int_{x_1}^{x_2} P(x,y(x),z(x))dx + \int_{y_1}^{y_2} P(x(y),y,z(y))dy + \int_{z_1}^{z_2} P(x(z),y(z),z)dz$$

比如对此曲线

$$\int_{L^+} q(x,y,z)\,dy = \int_{y_1}^{y_2} q(x(y),y,z(y))dy$$

二、投影的方向

①曲线积分：思考投影前后线的方向，而线的方向由每一点处的正向切向量决定

例一、右边的曲线 L_1

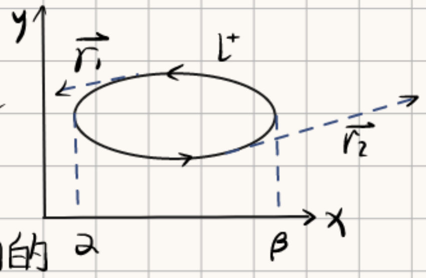
假定 L_1 方向如右，

对应在 x 轴上的投影线方向为 $\alpha \to \beta$。x 轴正向切向量即为 x 轴正方向与 L_1 方向相反

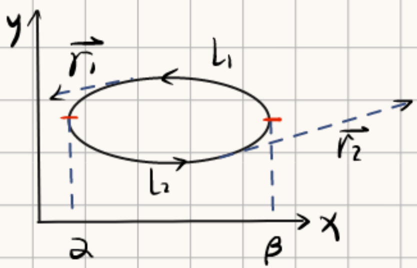
$$\int_{L^+} P(x,y)\,dx = -\int_\alpha^\beta P(x,y(x))dx$$

其中，$y(x)$ 代入的是 L_1 上的约束

例二、如右图，直接向 x 轴上如此投影是不合法的，因为这不符合投影前后的一一对应性



从另一个角度，如果观察 L^+ 正方向的切向量，会发现从 $\vec{r_1}$ 到 $\vec{r_2}$，L^+ 正方向切向量相对 x 轴上 $\alpha \to \beta$ 这一一维曲线的正方向切向量夹角发生了变化，故而不可如此投影



将其拆为 L_1^+ 与 L_2^+，则在两段上可分别投影

$$\int_{L^+} P(x,y)dx = \int_{L_1^+} P(x,y)dx + \int_{L_2^+} P(x,y)dx = \int_\alpha^\beta P(x,y_{L_2^+}(x))dx + \left(-\int_\alpha^\beta P(x,y_{L_1^+}(x))dx\right)$$

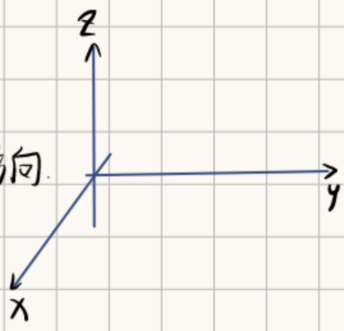
如果 $P(x,y_{L_1^+}(x))$ 与 $P(x,y_{L_2^+}(x))$ 还有对称性，那么还有更好的性质

② 曲面积分 思考投影前后面的方向，而面的方向由法向量决定

$\int_{S^+} Pdy\wedge dz+q\,dz\wedge dx+z\,dx\wedge dy$. 为什么要写成 $dz\wedge dx$ 而非 $dx\wedge dz$？

PPT上指出，若 S^+ 正方向的法向量与X轴正向成锐角，则 $dy\wedge dz=dydz$.
成钝角则 $dy\wedge dz=-dydz$，成直角则 $dy\wedge dz=0$
这只是给出了结论，没有给出理解

$dy\wedge dz$ 实则在判定投影前后面的方向变化.
yoz面的方向为 $\vec{oy}\times\vec{oz}=\vec{ox}$
也就是说与之前将L投到X轴上 $\alpha\to\beta$ 一样，
X轴上的 $[\alpha,\beta]$ 是有向的，需衡量 L^+ 与 $[\alpha,\beta]$ 的方向.
在曲面投影中，xoy面上 $[\alpha,\beta]\times[r,\theta]$ 是有向，
需衡量这一方向与 S^+ 的方向
以上的 $[\alpha,\beta]$ $[r,\theta]$ 有 $\alpha<\beta$，$r<\theta$



③ 曲线积分 为什么要引入参数方程？
A 因为投影在处理复杂曲线时过于繁琐
B. $d\vec{r}=\vec{n}\,dl$，但我们只学过用 $(x'(t),y'(t),z'(t))$ 来表示切向量
$\therefore d\vec{r}=\frac{(x_t',y_t',z_t')}{\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}}dl$
而 $dl=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}\,dt$
$\therefore d\vec{r}=(x_t',y_t',z_t')dt=(dx,dy,dz)$

法一：$\int_{L^+}(P,q,r)\,d\vec{r}=\int_{L^+}Pdx+qdy+rdz$ 分别投影

法二：$\int_{L^+}Pdx+qdy+rdz=\int_{L^+}P(t)x'(t)dt+q(t)y'(t)dt+r(t)z'(t)dt$
$=\int_{L^+}(P(t)x'(t)+q(t)y'(t)+r(t)z'(t))dt$
这一转化的优点，不必讨论 L^+ 与x,y,z正方向的方向问题
相当于将x,y,z轴又投到了t轴.
但仍然注意到，t轴上也是有向的，也即t的增长方向需与 L^+ 方向相同

回顾一型曲线积分：
$\int_{L^+}\vec{v}\cdot d\vec{r}=\int_L \vec{v}\,\vec{\tau}\,dl$ 此一步 $\vec\tau$ 已经表示了 L^+ 的方向，L^+ 退化为无向曲线L.

但注意到 $\int_L f(x,y,z)dl$ 转化为关于t的参方后限定了 $t\in[a,b]$
而积分是 $\int_a^b f(t)\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt$ 这里不是在讨论无向曲线吗？为什么是 $\int_a^b$ 而非 $\int_b^a$？
这恰是因为物理意义，dl是正的长度微元，只有从a积到b，dt才为正，dl才为正