习题七

2. (a) $\because f$ 为单射 $\therefore \forall a_1, a_2 \in A$，若 $f(a_1)=f(a_2) \Rightarrow a_1=a_2$.

$\because g$ 为单射 $\therefore \forall b_1, b_2 \in B$，若 $g(b_1)=g(b_2) \Rightarrow b_1=b_2$.

$\therefore \forall a_1, a_2 \in A$，$g\circ f(a_1)=g\circ f(a_2) \Rightarrow f(a_1)=f(a_2) \Rightarrow a_1=a_2$.

$\therefore g\circ f$ 为单射

(b) $\because g$ 为满射，故 $\forall c\in C$，$\exists b\in B$，s.t. $g(b)=c$

又 f 为满射，故 $\forall b\in B$，$\exists a\in A$，s.t. $f(a)=b$

$\therefore \forall c\in C$，$\exists a\in A$ s.t. $g\circ f(a)=g(f(a))=g(b)=c$

(c) 由于 f, g 都为双射，故由定理7.12推论有：$\exists$ 逆映射 $f^{-1}: B\to A$，$g^{-1}: C\to B$

故 $g^{-1}f^{-1}$ 为 C 到 A 的映射，且 $(gf)(f^{-1}g^{-1})=((gf)f^{-1})g^{-1}=(g(ff^{-1}))g^{-1}=gg^{-1}=I_C$

$(f^{-1}g^{-1})(gf)=((f^{-1}g^{-1})g)f=(f^{-1}(gg^{-1}))f=f^{-1}f=I_A$.

故 $g\circ f$ 可逆，故 $g\circ f$ 为双射

10.

(1) 自反：$\forall a,b\in N$，$a+b=a+b$，故 $(a,b)\sim(a,b)$

(2) 对称：$\forall a,b,c,d\in N$ 若 $(a,b)\sim(c,d)$ 则 $a+d=b+c$，则 $c+b=d+a$ 故 $(c,d)\sim(a,b)$

(3) 传递：$\forall a,b,c,d,e,f\in N$ 若 $(a,b)\sim(c,d)$，$(c,d)\sim(e,f)$，则：$a+d=b+c$，$c+f=d+e$

$\therefore a+d+c+f=b+c+d+e$ $\therefore a+f=b+e$ $\therefore (a,b)\sim(e,f)$

故 $\sim$ 符合自反对称且传递，故 $\sim$ 为 N 上等价关系

12. 欲证 $(K,\cdot)$ 可结合，则只需证 $\forall x_1,x_2,x_3\in K$，$(x_1\cdot x_2)\cdot x_3=x_1\cdot(x_2\cdot x_3)$

又 $\because$ 表格对称，故 $\cdot$ 运算可交换，即 $x_1\cdot x_2=x_2\cdot x_1$

故仅考虑运算按照 e,a,b,c 顺序进行，若以 e,a,b,c 顺序进行运算后符合结合律，则交换顺序后仍符合结合律

① 考虑有重复元 A $x_1\cdot(x_2\cdot x_2)$ 与 $(x_1\cdot x_2)\cdot x_2$. 而 $x_2\cdot x_2=e$ 故 $x_1\cdot(x_2\cdot x_2)=x_1\cdot e=x_1$

而 $(e\cdot a)\cdot a=e$ $(e\cdot b)\cdot b=e$ $(e\cdot c)\cdot c=e$ $(a\cdot b)\cdot b=a$ $(a\cdot c)\cdot c=a$ $(b\cdot c)\cdot c=b$

故 $\forall x_1,x_2\in K$ $x_1\cdot(x_2\cdot x_2)=(x_1\cdot x_2)\cdot x_2$

B $(x_1\cdot x_1)\cdot x_2$ 与 $x_1\cdot(x_1\cdot x_2)$ $\because (x_1\cdot x_1)\cdot x_2=e\cdot x_2=x_2$

且 $e\cdot(e\cdot a)=a$ $e\cdot(e\cdot b)=b$ $e\cdot(e\cdot c)=c$ $a\cdot(a\cdot b)=b$ $a\cdot(a\cdot c)=c$ $b\cdot(b\cdot c)=c$

故 $\forall x_1,x_2\in K$ $(x_1\cdot x_1)\cdot x_2=x_1\cdot(x_1\cdot x_2)$

② 考虑无重复元

$e(a\cdot b)=c=(e\cdot a)\cdot b$ $e\cdot(a\cdot c)=b=(e\cdot a)\cdot c$ $e\cdot(b\cdot c)=a=(e\cdot b)\cdot c$ $(a\cdot b)\cdot c=e=a\cdot(b\cdot c)$

故 $\cdot$ 符合结合律

③ 又由表，$\forall x\in K$，$x\cdot e=e\cdot x=x$，故 e 为左单位元与右单位元，故 e 为单位元

④ 而 $\forall x\in K$，$x\cdot x=x\cdot x=e$，故 x 左可逆且右可逆，每个元都可逆

15. $*$与$\cdot$均为2元运算，故$(S,*)$与$(P,\cdot)$为同类型代数系统

令$f: S\to P$. $f(a)=3$, $f(b)=2$. $f(c)=1$.

故$f: S\to P$为双射.且

$f(a*a)=f(a)=3=3\cdot 3=f(a)\cdot f(a)$

$f(a*b)=f(b)=2=3\cdot 2=f(a)\cdot f(b)$

$f(a*c)=f(c)=1=3\cdot 1=f(a)\cdot f(c)$

$f(b*a)=f(b)=2=2\cdot 1=f(b)\cdot f(a)$

$f(b*b)=f(b)=2=2\cdot 2=f(b)\cdot f(b)$

$f(b*c)=f(b)=2=2\cdot 3=f(b)\cdot f(c)$

$f(c*a)=f(c)=1=1\cdot 3=f(c)\cdot f(a)$

$f(c*b)=f(c)=1=1\cdot 2=f(c)\cdot f(b)$

$f(c*c)=f(c)=1=1\cdot 1=f(c)\cdot f(c)$

故f为$(S,*)$到$(P,\cdot)$的同构映射，且$(S,*)\cong(P,\cdot)$

习题八 2.

① 运算封闭性：

$\because (S,\cdot)$为半群，故$\forall a_1,b_1,a_2,b_2\in S$，$a_1 b_1\in S$. $a_2\cdot b_2\in S$.

$\forall (a_1,a_2),(b_1,b_2)\in S\times S$. $(a_1,a_2)\cdot(b_1,b_2)=(a_1b_1,a_2b_2)\in S\times S$

故$\cdot$符合在$S\times S$上封闭

② 结合律.

令$(a_1,a_2)\ (b_1,b_2)\ (c_1,c_2)\in S\times S$ $((a_1,a_2)\cdot(b_1,b_2))\cdot(c_1,c_2)=(a_1b_1,a_2b_2)\cdot(c_1,c_2)$

$=((a_1\cdot b_1)\cdot c_1,(a_2\cdot b_2)\cdot c_2)$ 又$\because (S,\cdot)$为半群 故S对$\cdot$符合结合律

原式$=(a_1\cdot(b_1\cdot c_1),a_2\cdot(b_2\cdot c_2))=(a_1,a_2)\cdot(b_1\cdot c_1,b_2\cdot c_2)=(a_1,a_2)\cdot((b_1,b_2)\cdot(c_1,c_2))$

$\therefore ((a_1,a_2)\cdot(b_1,b_2))\cdot(c_1,c_2)=(a_1,a_2)\cdot((b_1,b_2)\cdot(c_1,c_2))$

即$\cdot$符合结合律

③ 单位元. 设S中单位元为e.则$\forall a_1,a_2\in S$，$a_1\cdot e=e\cdot a_1=a_1$. $a_2\cdot e=e\cdot a_2=a_2$

$\because (a_1,a_2)(e,e)=(a_1\cdot e,a_2\cdot e)=(a_1,a_2)$ $(e,e)\cdot(a_1,a_2)=(e\cdot a_1,e\cdot a_2)=(a_1,a_2)$

故(e,e)即为$S\times S$中单位元

4.

① $(Z,\times)$为幺群.

1. 运算封闭性：$\forall a,b\in Z$. 则$a\times b$仍为整数. $a\times b\in Z$. 故$\times$符合运算封闭性
2. 结合律. $\forall a,b,c\in Z$. $(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$ 故$\times$符合结合律
3. 单位元. $1\in Z$. $\forall a\in Z$. $1\times a=a\times 1=a$. 故1为单位元.

$\therefore (Z,\times)$为幺群

② $\{0\}\subseteq Z$，且$\forall a,b\in\{0\}$. $a\times b=0\times 0=0\in\{0\}$ 故$\times$符合运算封闭性

$\therefore (\{0\},\times)$为子半群. 但$(Z,\times)$中单位元$1\notin\{0\}$，若$(\{0\},\times)$为子幺群

则同一幺群中单位元唯一，则$1\in\{0\}$. 矛盾 故$(\{0\},\times)$不为子幺群