Functions of matrices

一、矩阵极限

1. If $lim A_n = A$ and $lim B_n = B$, then$lim(A_n B_n)$ exists and it isAB.
2. $lim(BA_nB^{-1}) = B(limA_n)B^{-1}$，**极限与换基无关。**
3. 可对角矩阵是连续的，所有矩阵都是可对角矩阵的极限。
    - Diagonalizable matrices are dense in n × n matrices.
    - Any matrix is a limit of diagonalizable matrices.
4. $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{Adj}(A)$，$Adj(AB) = Adj(B)Adj(A)$.

- 定义：**A**关于第*i*行第*j*列的**余子式**（记作$\mathbf{M}_{ij}$）是去掉**A**的第*i*行第*j*列之后得到的(n − 1)×(n − 1)矩阵的行列式。
- 定义：**A**关于第*i*行第*j*列的**代数余子式**是：

  $\mathbf{C}_{ij} = (-1)^{i+j}\mathbf{M}_{ij}$。
- 定义：**A**的**余子矩阵**是一个n×n的矩阵**C**，使得其第*i*行第*j*列的元素是**A**关于第*i*行第*j*列的**代数余子式**。

引入以上的概念后，可以定义：矩阵**A**的**伴随矩阵**是**A**的余子矩阵的**转置矩阵**：

$\mathrm{adj}(\mathbf{A}) = \mathbf{C}^T$，

二、矩阵函数

1. e^A的定义和泰勒展开完全一样。
2. **矩阵函数与基的选取无关**，$f(BAB^{-1}) = Bf(A)B^{-1}$
3. 对角分块阵经过f作用等于f对每个分块作用，$f\left(\begin{bmatrix} A & \\ & B\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} f(A) & \\ & f(B)\end{bmatrix}$
4. F(x)**连续**，则F(A)连续。

三、核心计算方法

注意这里说的是**一般的计算方法**，而不是理解方法。

如果一个函数在λ处可分析，也就是可以泰勒展开，那么对于一个$jordan\ block$

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$$

$$f(J) = \begin{bmatrix} f(\lambda) & \frac{1}{1!}f'(\lambda) & \dots & \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(\lambda) \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \frac{1}{1!}f'(\lambda) \\ & & & f(\lambda) \end{bmatrix}$$

就是泰勒展开！

故而先对一个矩阵分解为$jordan$矩阵，然后再利用计算方法即可。

$$f(A)=B\begin{bmatrix} f(J_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(J_t) \end{bmatrix}B^{-1}$$

$$A=B\begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_t \end{bmatrix}B^{-1}$$

四、理解方法

矩阵函数都理解为泰勒展开成多项式，然后验证矩阵的多项式是否满足这些性质即可。

五、矩阵函数的性质

1. f(A)g(A) = h(A) if f(x)g(x) = h(x), and f(A) + g(A) = h(A) if f(x) + g(x) = h(x).
2. if f(x) = x, then f(A) = A, and if f = 1 is a constant function, then f(A) = I.
3. If f is a polynomial, then f(A) is exactly as we have always defined it to be.所以对于多项式直接带入即可。
4. If f = g **at all eigenvalues of A** and they also equal at enough derivatives that are used in f(A) and g(A), then f(A) = g(A).（对同一个矩阵的矩阵函数，只关心函数在特征值附近的性质）
5. Fix a matrix A, then for any well-defined f(A), there is a polynomial p(x) such that f(A) = p(A)，注意这个是**固定了A**，然后对于f有了定义多项式，虽然这个定义多项式可以完全用泰勒公式来理解。但是，对于不同的矩阵，同一个函数虽然都对应着多项式，但对应的多项式可能不同。
6. $f(A^T)=[f(A)]^T$
7. If $f(x)=x^{-1}$, and A is invertible, then f(A) = A^{−1}.
8. $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ is complex differentiable and $f(\mathbb{R})\subseteq\mathbb{R}$, then $f(\bar{A})=\overline{f(A)}$ and $f(A^*)=f(A)^*$ for any complex matrix A，注意复可导的条件非常强，以及A*的定义：共轭转置。

六、矩阵函数的应用

1. If $AB=BA$, then $e^{A+B}=e^Ae^B=e^Be^A$.满足交换律的前提非常强，但是用泰勒展开很好理解。
2. $\frac{d}{dt}e^{At}=Ae^{At}$，泰勒展开，一步理解到位。
3. 向量函数$v(t)$也就是每个坐标都是t的函数的向量。$v'(t)=Av(t)$的唯一解为$c\cdot e^{At}$，其中c就是常微分方程里的初始条件，$c=v(0)$，同时e^{At}的列构成了解空间。
4. 关于旋转矩阵的讨论考到了就去看机经里的《高代——讲义与答疑》的第8页，**Traits of exponential of A**。
5. $det(e^A)=e^{traceA}$
6. 存在R上的反对称矩阵 B，使得$A=e^B$，当且仅当A是real orthogonal matrix，and|A|=1.（即A是一个rotation matrix）
7. skew-Hermitian：$A^*=-A$，类似于实矩阵的反对称，那么e^A是unitary的，unitary并不是单位矩阵的意思，而是指$A^*A=I$
8. If A is a real orthogonal matrix with determinant 1 ($i.e.$, a rotation matrix), then$A=e^B$ for some real skew-symmetric B.
9. 可导性要求，f(A)如果想在λ处有定义，必须在λ处复可导，仅仅实数可导是不行的，具体可以看《高代——讲义与答疑》的第13页。

10. If AB=BA and A,B are both diagnoalizeable,then they can be simultaneously diagonalized.
11. If AB=BA,then A,B can be simultaneously triangularized.However,they may not be able to put into Jordan Normal Form simultaneously.

七、$Commuting\ matrics$

完全由A决定的B可以与A交换。

1. $f(A), g(A)$ are both defined, then $f(A)g(A) = g(A)f(A)$.
2. 当A的特征值的几何重数都是1时，$AB = BA$ 则 $B = p(A)$ for some polynomial p.
3. 中国剩余定理，讲义《final class》的56页，[56(62/124)]。
4. A和B都是C的函数，那么A与B可以交换。

完全和A无关的B也可以和A交换。

在中间的部分**大多没法**交换，但是平行的事情能够交换。具体的参见讲义《final class》的58页，[58(64/124)]。注意到，平行的事情没法表达为共同的矩阵函数。也就是：

E_{13}与E_{23}平行，可以交换，但是没法找到共同的C，使得$E_{13} = f(C)E_{23} = g(C)$。