

第五次习题课 条件极值

例1 求原点到曲面 $z^2 = xy + x - y + 4$ 的最短距离.

例2 当 $x, y, z > 0$ 时, 求函数 $u = \ln x + 2 \ln y + 3 \ln z$ 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 6r^2$ 上的最大值, 这里 $r > 0$. 由此进一步证明, 对于任意正实数 a, b, c , 下述不等式成立

$$ab^2c^3 \leq 108 \left(\frac{a+b+c}{6} \right)^6.$$

例3 求抛物面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $x + y + z = 1$ 的交线 (椭圆) 的长轴、短轴的长.

例4 求 $z = xy(4 - x - y)$ 在 $x = 1, y = 0, x + y = 6$ 所围闭区域 \bar{D} 上的最大值.

例5 设 $u(x, y)$ 在 $x^2 + y^2 \leq 1$ 上有二阶连续偏导数, 在 $x^2 + y^2 < 1$ 内满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u$,

且在 $x^2 + y^2 = 1$ 上, $u(x, y) \geq 0$, 证明: 当 $x^2 + y^2 \leq 1$ 时, $u(x, y) \geq 0$. (提示: 可用反证法证明)

例6 假设 $f(x, y)$ 有连续的偏导数, 在全平面除原点之外处处满足等式

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} > 0.$$

求证原点是 $f(x, y)$ 的唯一极小值点. 并且满足 $\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$.

例7 设 $p > 0, q > 0$ 满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 求函数 $\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$ 在平面第一象限 $x > 0, y > 0$ 里

满足约束条件 $xy = 1$ 的最小值. 由此进一步证明 Young 不等式 $\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \geq xy$,

$\forall x, y > 0$.