第七周习题课　条件极值、含参定积分

1. 求原点到曲面 $z^2 = xy + x - y + 4$ 的最短距离.

2. 求 $z = xy(4 - x - y)$ 在 $x = 1, y = 0, x + y = 6$ 所围闭区域 $\overline{D}$ 上的最大值与最小值.

3. 设 $u(x, y)$ 在 $x^2 + y^2 \le 1$ 上有二阶连续偏导数，在 $x^2 + y^2 < 1$ 内满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u$，

且在 $x^2 + y^2 = 1$ 上，$u(x, y) \ge 0$，证明：当 $x^2 + y^2 \le 1$ 时，$u(x, y) \ge 0$。

4. 求椭圆 $5x^2 + 4xy + 2y^2 = 1$ 的长半轴和短半轴长。

5. 函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $(x^2 + y^2)z + \ln z + 2(x + y + 1) = 0$ 确定. 求 $z(x, y)$ 的极值。

6. 证明：对任意的正数 x, y, z，恒有不等式成立：$xy^2z^3 \le 108(\frac{x + y + z}{6})^6$.

7. 求解下列问题：

(1) 设 $f(x) = \int_0^x \left[\int_t^x e^{-s^2} ds\right] dt$，求 $f'(x)$ 与 $f(x)$.

(2) 设 $f(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} e^{x\sqrt{1-y^2}} dy$，求 $f'(x)$.

(3) 求 $\lim\limits_{a \to 0} \int_a^{1+a} \frac{dx}{1 + x^2 + a^2}$

(4) 求极限 $I = \lim\limits_{y \to 0^+} \int_0^1 \frac{1}{1 + (1 + xy)^{\frac{1}{y}}} dx.$

8. 试求 a，b 之值，使积分 $\int_1^3 (a + bx - x^2)^2 dx$ 达到最小值。

9. 设 $f(x, y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上一阶偏导数存在。若 $f_y'(x, y)$，$f_{yx}''(x, y) \in C(\mathbb{R}^2)$，证明：

$f_{xy}''(x, y) = f_{yx}''(x, y)$，$(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

10. 计算积分 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1 + a\cos x}{1 - a\cos x} \frac{dx}{\cos x}$，$(|a| < 1)$

11. 设 $f(t) = \int_0^1 \ln\sqrt{x^2 + t^2} dx$，$(0 \le t \le 1)$，求 $f_+'(0)$。

思考：若将 t 的范围改为 $-1 \le t \le 1$，$f'(0)$ 是否存在？

12. 求定积分 $I = \int_0^1 \frac{\ln(1 + x)}{1 + x^2} dx.$

13. 计算积分 $I(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x} dx$。

======

以下供学有余力的同学选做。

14\. 假设 $f(x,y)$ 有连续的偏导数，在全平面除原点之外处处有 $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}>0$.

求证：原点是 $f(x,y)$ 的唯一极小值点．并且满足 $\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

15\. 设 $p>0$，$q>0$ 满足 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$。 求函数 $\dfrac{x^p}{p}+\dfrac{y^q}{q}$ 在平面第一象限 $x>0, y>0$ 里满足约束条件 $xy=1$ 的最小值。 由此进一步证明 Young 不等式 $\dfrac{x^p}{p}+\dfrac{y^q}{q}\ge xy$，$\forall x,y>0$。