习题八: 21 27 30 33

21. σ^{-1}的意义: σ是个双射, σ^{-1}即逆映射.

$\sigma=(1\ 4\ 6\ 2\ 3\ 5)$ $\tau=(2\ 1)(3\ 5)(4\ 6)$

$\sigma\tau(1)=\sigma(2)=3$ $\sigma\tau(2)=\sigma(1)=4$ $\sigma\tau(3)=\sigma(5)=1$ $\sigma\tau(4)=\sigma(6)=2$

$\sigma\tau(5)=\sigma(3)=5$ $\sigma\tau(6)=\sigma(4)=6$

$\therefore \sigma\tau=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&4&1&2&5&6\end{bmatrix}=(1\ 3)(4\ 2)$

$\tau\sigma(1)=\tau(4)=6$ $\tau\sigma(2)=\tau(3)=5$ $\tau\sigma(3)=\tau(5)=3$ $\tau\sigma(4)=\tau(6)=4$

$\tau\sigma(5)=\tau(1)=2$ $\tau\sigma(6)=\tau(2)=1$

$\therefore \tau\sigma=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&5&3&4&2&1\end{bmatrix}=(1\ 6)(5\ 2)$

$\sigma^{-1}=[(1\ 5)(1\ 3)(1\ 2)(1\ 6)(1\ 4)]^{-1}=(1\ 4)(1\ 6)(1\ 2)(1\ 3)(1\ 5)$

对换的逆为自身. $\therefore \sigma^{-1}=(1\ 5\ 3\ 2\ 6\ 4)=(1\ 5)(5\ 3)(3\ 2)(2\ 6)(6\ 4)$

$\sigma^{-1}=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6\\5&6&2&1&3&4\end{bmatrix}$ 且$\sigma^{-1}=(1\ 4)(1\ 6)(1\ 2)(1\ 3)(1\ 5)$

$=(1\ 5)(5\ 3)(3\ 2)(2\ 6)(6\ 4)$

由$\sigma\tau=(1\ 3)(4\ 2)$与$\sigma^{-1}=(1\ 5\ 3\ 2\ 6\ 4)$有:

$\sigma\tau\sigma^{-1}=(1\ 3)(4\ 2)(1\ 5\ 3\ 2\ 6\ 4)=(1\ 3)(4\ 2)\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6\\5&6&2&1&3&4\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6\\5&6&4&3&1&2\end{bmatrix}$

$=(5\ 1)(6\ 2)(4\ 3)$

27. 由Lagrange定理有:

$[G:H]=[G:1]/[H:1]$ 而 $a=(1\ 3\ 2\ 4)$ $a^2=(1\ 3\ 2\ 4)^2=(1\ 4)(1\ 2)(1\ 3)\begin{bmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{bmatrix}=(1\ 2)(3\ 4)$

$a^3=(1\ 3\ 2\ 4)(1\ 2)(3\ 4)$

$=(1\ 3\ 2\ 4)\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{bmatrix}=(4\ 2\ 3\ 1)$ $a^4=(1\ 3\ 2\ 4)(4\ 2\ 3\ 1)=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{bmatrix}=e$

综上 $\langle a\rangle=\{e,(1\ 3\ 2\ 4),(1\ 2)(3\ 4),(1\ 4\ 2\ 3)\}$ 记为H. $|H|=4$

则: $[S_4:\langle a\rangle]=\dfrac{|S_4|}{|\langle a\rangle|}=6$

而由定理 8.5.1.4有 $\forall x\in aH$, 有$xH=aH$

故左陪集有

$eH=\{e,(1\ 3\ 2\ 4),(1\ 2)(3\ 4),(1\ 4\ 2\ 3)\}$

$(1\ 2)H=\{(1\ 2),(1\ 3)(2\ 4),(3\ 4),(1\ 4)(2\ 3)\}$

$(1\ 3)H=\{(1,3),(2\ 4\ 3),(1\ 2\ 3\ 4),(1\ 4\ 2)\}$

$(14)H=\{(14),(132),(1243),(423)\}$
$(24)H=\{(24)(134),(2143),(123)\}$
$(23)H=\{(2,3),(124),(2134),(143)\}$

同理，右陪集有：
$He=\{e,(1324),(12)(34),(1423)\}$
$H(12)=\{(12),(41)(23),(34),(31)(42)\}$
$H(13)=\{(13),(241),(2143),(342)\}$
$H(14)=\{(14),(432),(2134),(312)\}$
$H(24)=\{(24),(321),(1234),(431)\}$
$H(23)=\{(23),(341),(4312),(421)\}$

30. 由Lagrange定理有：
$[G:B]=[G:1]/[B:1]$
$[A:B]=[A:1]/[B:1]$
$[G:A]=[G:1]/[A:1]$
$\therefore [G:1]=[G:A][A:1]$
$\therefore [G:B]=[G:A][A:1]/[B:1]$
$=[G:A][A:B]$

33. $\forall a\in H_1H$ 有 $a=h_1h$. $h_1\in H_1$ 且 $h\in H$. 而 $H_1\subset H_2$，故 $h_1\in H_2$. 故 $a\in H_2H$
故 $H_1H\subseteq H_2H$

$\forall \alpha\in H_1H,\ \beta\in H_1H$. 则有 $\alpha=h_ah_x$ $\beta=h_bh_y$ $h_a,h_b\in H_1$ $h_y,h_x\in H$
$\alpha\beta^{-1}=h_ah_xh_y^{-1}h_b^{-1}$ $\because H\lhd G$，且 $h_y^{-1}\in H$ 故 $\exists\ h_z\in H$ 有：$h_y^{-1}h_b^{-1}=h_b^{-1}h_z$
$\therefore \alpha\beta^{-1}=h_ah_xh_b^{-1}h_z$ 同理，$H\lhd G$，且 $h_x\in H$，故 $\exists h_q\in H$ 有：$h_xh_b^{-1}=h_b^{-1}h_q$
$\therefore \alpha\beta^{-1}=h_ah_b^{-1}h_qh_z$ $h_ah_b^{-1}\in H_1$、$h_q,h_z\in H$ 而 H_1,H 均为 G 正规子群，满足封闭性
故 $(h_ah_b^{-1})\in H_1$ 且 $(h_qh_z)\in H$. 故 $\alpha\beta^{-1}\in H_1H$
故 H_1H 为 H_2H 子群

下证其正规：
$\forall g\in H_2H,\ f\in H_1H$ 有 $g=h_2h_x$ $f=h_1h_y$ $h_2\in H_2$ $h_1\in H_1$ $h_x,h_y\in H$
$gfg^{-1}=h_2h_xh_1h_yh_x^{-1}h_2^{-1}$
$H\lhd G$，而 $h_x\in H$，故 $\exists h_z\in H$，s.t. $h_2h_x=h_zh_2$
$gfg^{-1}=h_zh_2h_1h_yh_x^{-1}h_2^{-1}$
$H_1\lhd G$ 而 $h_1\in H_1$，故 $\exists h_3\in H_1$ 有 $h_2h_1=h_3h_2$，而 $h_y,h_x^{-1}\in H$ 故 $h_yh_x^{-1}=h_p\in H$
$gfg^{-1}=h_zh_3h_2h_ph_2^{-1}$ $H\lhd G$，而 $h_p\in H$，故 $h_2h_ph_2^{-1}=h_4\in H$
$gfg^{-1}=h_zh_3h_4$ $h_3\in H_1$，$h_z,h_4\in H$
$H\lhd G$，且 $h_z\in H$，故 $\exists h_t\in H$，s.t. $h_zh_3=h_3h_t$
$gfg^{-1}=h_3h_th_4=h_3(h_th_4)$ $h_3\in H_1$，$h_th_4\in H$
$\therefore gfg^{-1}\in H_1H$
综上 $\forall g\in H_2H,\ f\in H_1H$ 有 $gfg^{-1}\in H_1H$，即 $H_1H\lhd H_2H$