



Review

含参广义积分的性质

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx, \quad D = [a, +\infty) \times [\alpha, \beta].$$

$$\bullet \begin{cases} f(x, y), f'_y(x, y) \in C(D); \\ \forall y \in [\alpha, \beta], I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \text{ 收敛}; \\ \int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx \text{ 关于 } y \in [\alpha, \beta] \text{ 一致收敛}; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \in C^1[\alpha, \beta], \text{ 且 } I'(y) = \frac{d}{dy} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx.$$



$$\bullet \begin{cases} f(x, y) \in C(D); \\ \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \text{ 关于 } y \in [\alpha, \beta] \text{ 一致收敛;} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I(y) \in C[\alpha, \beta], \text{ 即} \\ \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx. \\ I(y) \in R[\alpha, \beta], \\ \text{且 } \int_{\alpha}^{\beta} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dy. \end{cases}$$



Chap3 重积分

§ 1. 二重积分的概念和性质

二重积分是三重积分的基础. 只有掌握好了二重积分才能学好三重积分. 而且, 二重积分完全体现了重积分的所有思想.

- 二重积分的几何与物理背景
 - 曲顶柱体的体积
 - 平板质量
- 二重积分的概念
- 二重积分的性质



1. 二重积分的几何与物理背景

(1) 曲顶柱体的体积

设曲面 $S: z = f(x, y), (x, y) \in D$. 求以 D 为下底, 以曲面 S 为上顶的曲顶柱体 Ω 的体积 (有向) $V(\Omega)$.

• Step 1. 对 D 进行分划: 将 D 分成 n 个小区域 D_1, D_2, \dots, D_n , 称之为 D 的一个分划 $T = \{D_i\}_{i=1}^n$. 相应地, Ω 被分成了曲顶柱体 $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$. 记

$$d(D_i) \triangleq \sup \{d(P, Q) \mid P, Q \in D_i\}.$$

称 $\lambda(T) = \max_{1 \leq i \leq n} \{d(D_i)\}$ 为分划 T 的直径.



•Step2.取标志点 在 D_i 中任取一点 $P_i(\xi_i, \eta_i)$.

•Step3.求近似和 以 $\Delta\sigma_i$ 表示 D_i 的面积, 则

$$V(\Omega_i) \approx f(P_i)\Delta\sigma_i,$$

$$V(\Omega) = \sum_{i=1}^n V(\Omega_i) \approx \sum_{i=1}^n f(P_i)\Delta\sigma_i.$$

•Step4.取极限

直观上, 当 D 的分划越来越细, 即 $\lambda(T) \rightarrow 0$ 时,

$$\sum_{i=1}^n f(P_i)\Delta\sigma_i \rightarrow V(\Omega).$$



(2) 平板质量

薄板 D 上点 (x, y) 处的密度为 $m(x, y)$, 求薄板质量.

- Step1. 分划: 将 D 分成 n 个小区域 $D_i (i = 1, 2, \dots, n)$
- Step2. 取标志点: 在 D_i 中任取一点 $P_i(\xi_i, \eta_i)$.
- Step3. 求近似和: 用 $\Delta\sigma_i$ 表示 D_i 的面积, 薄板质量

$$m(D) = \sum_{i=1}^n m(D_i) \approx \sum_{i=1}^n m(P_i) \Delta\sigma_i.$$

- Step4. 取极限:

当 D 的分割越来越细时, $\sum_{i=1}^n m(P_i) \Delta\sigma_i \rightarrow m(D)$.



2. 矩形区域上的二重积分

Def. f 在 $D = [a, b] \times [c, d]$ 上有定义, 对 D 的任意分划

$$T : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_k = d,$$

及任意 $P_{ij}(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \in D_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], 1 \leq i \leq n,$

$1 \leq j \leq k$, 若 **Riemann** 和 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k f(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j$ 的极限

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k f(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j$$



存在, 则称 f 在 D 上 (*Riemann*) 可积, 记作 $f \in R(D)$, 并称该极限为 f 在 D 上的二重积分, 记作

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k f(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j.$$

其中 \iint 是二重积分号, D 是积分域, f 是被积函数.

Remark: 定义中, *Riemann* 和的极限与对 D 的分划无关, 与标志点 $\{(\xi_{ij}, \eta_{ij})\}$ 的选取无关. 因此也可以用 $\varepsilon - \delta$ 语言定义二重积分:



Def. f 在 $D = [a, b] \times [c, d]$ 上有定义, $A \in \mathbb{R}$. 若 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, s.t. 对 D 的任意分划

$$T : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_k = d,$$

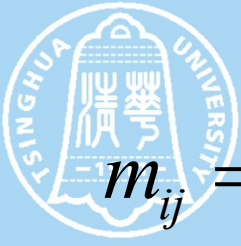
及任意 $P_{ij}(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \in D_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], 1 \leq i \leq n,$

$1 \leq j \leq k$, 只要 $\lambda(T) < \delta$, 就有

$$\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k f(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j - A \right| < \varepsilon,$$

则称 f 在 D 上 (Riemann) 可积, 称 A 为 f 在 D 上的二重

积分, 记为 $\iint_D f(x, y) dx dy = A$.



$$m_{ij} = \inf_{(x,y) \in D_{ij}} \{f(x,y)\}, M_{ij} = \sup_{(x,y) \in D_{ij}} \{f(x,y)\}.$$

Darboux下和:
$$L(f, T) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k m_{ij} \Delta x_i \Delta y_j$$

Darboux上和:
$$U(f, T) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j$$

Thm. f 为 $D = [a, b] \times [c, d]$ 上有界函数.

(1) T 是 D 的分划, T' 为 T 的加密分划, 则

$$L(f, T) \leq L(f, T') \leq U(f, T') \leq U(f, T);$$

(2) T_1, T_2 是 D 的分划, 则 $L(f, T_1) \leq U(f, T_2)$.



Darboux下积分: $\underline{\iint}_D f(x, y) dx dy = \sup_T L(f, T)$

Darboux上积分: $\overline{\iint}_D f(x, y) dx dy = \inf_T U(f, T)$

Thm. f 为 $D = [a, b] \times [c, d]$ 上有界函数, 则以下命题等价

(1) $f \in R(D)$;

(2) $\forall \varepsilon > 0, \exists D$ 的分划 $T, s.t. U(f, T) - L(f, T) < \varepsilon$;

(3) $\underline{\iint}_D f(x, y) dx dy = \overline{\iint}_D f(x, y) dx dy$.



Def. 称 $G \subset \mathbb{R}^2$ 为零面积集, 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists$ 有限个矩形 $\{I_i\}, i = 1, 2, \dots, n$, 使得 $G \subset \bigcup_{1 \leq i \leq n} I_i$, 且这些矩形的面积

和 $\sum_{i=1}^n \sigma(I_i) < \varepsilon$.

Thm. $D = [a, b] \times [c, d]$, 则

(1) $f \in R(D) \Rightarrow f$ 在 D 上有界;

(2) $f \in C(D) \Rightarrow f \in R(D)$;

(3) f 在 D 上的间断点集为零面积集 $\Rightarrow f \in R(D)$.



3. 一般有界闭集上的二重积分

Def. $D \subset \mathbb{R}^2$ 为有界闭集, f 为 D 上有界函数. 若存在 $E = [a, b] \times [c, d]$, s.t. $D \subset E$, 且

$$f_E(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \in E \setminus D \end{cases} \in R(E),$$

则称 f 在 D 上 Riemann 可积, 且 f 在 D 上的积分定义为

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_E f_E(x, y) dx dy.$$



Thm. $D \subset \mathbb{R}^2$ 为有界闭集, f 为 D 上有界函数. 若 f 在 D 上的间断点集为零面积集, ∂D 为零面积集, 则 $f \in R(D)$.

$D \subset \mathbb{R}^2$ 为有界闭集, 若 f 在 D 上有瑕点 (瑕点的邻域中 f 无界), 类比一元函数的瑕积分, 拓展 f 在 D 上的 Riemann 可积性.

$D \subset \mathbb{R}^2$ 为无界闭区域, 类比一元函数的无穷限积分, 拓展 f 在 D 上的可积性.



例. $f(x, y) = \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$ 在 $[-1, 1] \times [-1, 1]$ 上 Riemann 可积. 因为 f 仅有一个间断点 $(0, 0)$.

例. Dirichlet 函数 $D(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y) \in \mathbb{Q}^2 \\ 0 & (x, y) \notin \mathbb{Q}^2 \end{cases}$ 在 \mathbb{R}^2 中

任一有界区域 E 上均不可积. 因为对 E 的任意分划,

$$L(f, T) = 0 < \sigma(E) = U(f, T).$$



4. 二重积分的性质

1)(线性性质) $f, g \in R(D)$, 则 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha f + \beta g \in R(D)$, 且

$$\iint_D (\alpha f + \beta g) dx dy = \alpha \iint_D f dx dy + \beta \iint_D g dx dy.$$

2)(区域可加性) D_1, D_2 为 \mathbb{R}^2 中有界闭集, $D_1 \cap D_2$ 为零面积集, $D = D_1 \cup D_2$, 则 $f \in R(D) \Leftrightarrow f \in R(D_i), i = 1, 2$, 且

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy.$$

3)(保序性) $f, g \in R(D), f \geq g$, 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy \geq \iint_D g(x, y) dx dy.$$

特别地, $f \in R(D), f \geq 0$, 则 $\iint_D f(x, y) dx dy \geq 0$.



4) $f \in R(D)$, 则 $\left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_D |f(x, y)| dx dy$.

Proof: $\pm f \leq |f|$, 由线性性质和保序性,

$$\pm \iint_D f(x, y) dx dy \leq \iint_D |f(x, y)| dx dy. \quad \square$$

5)(估值定理) $f \in R(D)$, $m \leq f(x, y) \leq M$. 记 $\sigma(D)$ 为 D 的面积, 则

$$m\sigma(D) \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq M\sigma(D).$$



6)(对称性) 设 $f \in R(D)$, D 关于 OX 轴对称,

- 若 $f(x, y)$ 关于 y 为奇函数, 则 $\iint_D f(x, y) dx dy = 0$;
- 若 $f(x, y)$ 关于 y 为偶函数, 记 D_1 为 D 位于 OX 轴上方的部分, 则 $\iint_D f(x, y) dx dy = 2 \iint_{D_1} f(x, y) dx dy$.

7)(轮换不变性) 若 $D \subset \mathbb{R}^2$ 关于 x, y 是轮换对称的, 即 $(x, y) \in D \Leftrightarrow (y, x) \in D$, 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(y, x) dx dy.$$



例. $f \in C([a, b]), f > 0, D = [a, b] \times [a, b]$, 则

$$\iint_D \frac{f(x)}{f(y)} \, dx dy \geq (b-a)^2.$$

Proof: 由于区域 D 是轮换对称的, 因此

$$\iint_D \frac{f(x)}{f(y)} \, dx dy = \iint_D \frac{f(y)}{f(x)} \, dx dy.$$

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{f(x)}{f(y)} \, dx dy &= \frac{1}{2} \iint_D \left(\frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)} \right) \, dx dy \\ &\geq \frac{1}{2} \iint_D 2 \, dx dy = (b-a)^2. \quad \square \end{aligned}$$

清华大学



8) (积分中值定理) $D \subset \mathbb{R}^2$ 为连通有界闭集, ∂D 为零面积集, g 不变号, $f, g \in C(D)$. 则存在 $(\xi, \eta) \in D, s.t.$

$$\iint_D f(x, y)g(x, y)dxdy = f(\xi, \eta)\iint_D g(x, y)dxdy.$$

特别地, 若 $g \equiv 1$, 记 D 的面积为 $\sigma(D)$, 则

$$\iint_D f(x, y)g(x, y)dxdy = f(\xi, \eta)\sigma(D).$$

Proof. $f, g \in C(D)$, 则 $fg \in C(D)$, 从而 $fg \in R(D)$.

g 不变号, 不妨设 $g \geq 0$. 记

$$m = \min_{(x, y) \in D} f(x, y), M = \max_{(x, y) \in D} f(x, y),$$

清华大学



则 $mg(x, y) \leq f(x, y)g(x, y) \leq Mg(x, y)$.

由二重积分的保序性, 有

$$\begin{aligned} m \iint_D g(x, y) dx dy &\leq \iint_D f(x, y)g(x, y) dx dy \\ &\leq M \iint_D g(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

• 若 $\iint_D g(x, y) dx dy \neq 0$, 则

$$m \leq \mu \triangleq \frac{\iint_D f(x, y)g(x, y) dx dy}{\iint_D g(x, y) dx dy} \leq M,$$

由连续函数的介值定理, $\exists(\xi, \eta) \in D, s.t. f(\xi, \eta) = \mu$,

$$\iint_D f(x, y)g(x, y) dx dy = f(\xi, \eta) \iint_D g(x, y) dx dy.$$

清华大学



• 若 $\iint_D g(x, y) dx dy = 0$, 由 $g \in C(D)$, $g \geq 0$ 得 $g \equiv 0$.

于是 $\forall (\xi, \eta) \in D$, 有

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) g(x, y) dx dy \\ = f(\xi, \eta) \iint_D g(x, y) dx dy = 0. \square \end{aligned}$$

Remark: g 变号时, 结论不一定成立.

例如, $D = [-1, 1] \times [-1, 1]$, $f(x, y) = g(x, y) = x$. 则

$$\iint_D f(x, y) g(x, y) dx dy = \iint_D x^2 dx dy > 0.$$



事实上,

$$\iint_D x^2 dx dy \geq \iint_{\frac{1}{2} \leq x, y \leq 1} x^2 dx dy \geq \iint_{\frac{1}{2} \leq x, y \leq 1} \frac{1}{4} dx dy = \frac{1}{16} > 0.$$

而区域 D 关于 y 轴对称, $g(x, y) = x$ 关于 x 为奇函数,
所以 $\iint_D g(x, y) dx dy = \iint_D x dx dy = 0$.

故 $\forall (\xi, \eta) \in D$,

$$0 < \iint_D f(x, y) g(x, y) dx dy$$

$$\neq f(\xi, \eta) \iint_D g(x, y) dx dy = 0. \quad \square$$

清华大学



例. 求 $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{x^2+y^2 \leq r^2} e^{x^2-y^2} \cos(x+y) dx dy.$

分析: 将被积函数看成薄板点密度, 则所求为原点处的点密度, 即被积函数在点(0,0)的值, 结果应为1.

解: 由积分中值定理, $\exists(\xi_r, \eta_r), s.t. \xi_r^2 + \eta_r^2 \leq r^2, s.t.$

$$\frac{1}{\pi r^2} \iint_{x^2+y^2 \leq r^2} e^{x^2-y^2} \cos(x+y) dx dy$$

$$= e^{\xi_r^2 - \eta_r^2} \cos(\xi_r + \eta_r) \rightarrow 1, \text{当 } r \rightarrow 0 \text{ 时. } \square$$

清华大学



基本的二重积分的计算很重要, 大家要熟练掌握

- 二重积分的基本性质
- 二重积分化累次积分
- 交换积分次序
- 由累次积分给出积分区域
- 极坐标下二重积分的计算
- 二重积分的变量替换方法



作业:

习题3.1 No. 3, 4, 10

习题3.2 No. 4.

清华大学