

微积分 A(2)期末试题答案(A 卷)

2017 年 6 月 13 日 上午 8:00-10:00

一. 填空题 (每空 3 分, 共 15 题) (请将答案直接填写在横线上!)

1. 向量值函数 $\vec{F} = (xy, e^{yz}, \sin(zx))$ 的梯度 $\text{div}\vec{F} =$ _____。 $y + ze^{yz} + x \cos(zx)$

2. 向量值函数 $\vec{F} = (1 - y^2, x - 2z, yz)$ 的旋度 $\text{rot } \vec{F} =$ _____。 $(z + 2, 0, 2y + 1)$

3. 交换积分次序: $\int_0^1 dx \int_0^2 f(x, y) dy + \int_1^4 dx \int_{\log_2 x}^2 f(x, y) dy =$ _____。 $\int_0^2 dy \int_0^{2^y} f(x, y) dx$

4. 由曲线 $x + y = 1, x + y = 2, x - 2y = 0, x - 2y = 3$ 围成的区域面积为 _____。 1

5. 设 Ω 为单位球 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, 则三重积分 $\iiint_{\Omega} [x^2 + \sin(y^3 e^{z^2})] dV =$ _____。 $\frac{4\pi}{15}$

6. 设 L 是由点 $A(-1, 0)$ 到点 $B(1, 2)$ 的直线段, 则 $I = \int_L (x + 2y) dl =$ _____。 $4\sqrt{2}$

7. 设 S 为平面 $x + y + z = 1$ 包含在第一卦限中的部分, 则 $\iint_S \frac{dS}{(1 + x + y)^2} =$ _____。

$\sqrt{3}(\ln 2 - 1/2)$

8. 全微分方程 $(3x^2 + 2xy^3)dx + (3x^2y^2 - 2y)dy = 0$ 的通解为 _____。

$x^3 + x^2y^3 - y^2 = C$

9. 求级数的和: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} =$ _____。 $1/2$

10. 判断级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} (e^{n^{-2}} - 1)$ 的敛散性: _____。(填收敛或发散)。收敛

11. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n+1}}{(2n-1)}$ 的收敛域为 _____。 $[-1, 1)$

12. $\int_0^x \cos t^2 dt$ 在 $x_0 = 0$ 处的 Taylor 级数为 _____。 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+1}}{(4n+1) \cdot (2n)!}$

13. 将 e^x 在区间 $(-1, 1)$ 上的函数展成周期为 2 的 Fourier 级数, 记 $S(x)$ 为此级数的和函数, 则 $S(5) =$ _____。 $\frac{1}{2}(e + \frac{1}{e})$

14. 将函数 $f(x) = x^2, x \in [0, \pi]$, 展开成周期为 2π 的正弦级数: $\sum_{k=1}^{+\infty} b_n \sin nx$, 则 $b_2 =$

_____。 $-\pi$

15. 设 L^+ 为有向曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + z = 0 \end{cases}$, 从 z 轴正向看去, 逆时针方向为正方向。则第二类曲

线积分 $\int_{L^+} 2zdx + 3dy + (x + 2y)dz =$ _____。 ($\sqrt{2}\pi$)

二. 计算题 (每题 10 分, 共 4 题) (请写出详细的计算过程和必要的根据!)

1. 设 $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 9, y - 3 \leq z \leq 0\}$, 曲面 S^+ 是 Ω 的外表面, 取外侧为正侧。

试计算曲面积分 $I = \oiint_{S^+} yzdy \wedge dz + 2y^2dz \wedge dx + x^2dx \wedge dy$.

解: 应用 Gauss 公式,

$$I = \iiint_{\Omega} 4y dV \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \leq 9} dx dy \int_{y-3}^0 4y dz \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \leq 9} (12y - 4y^2) dx dy = -81\pi \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

2. 求 $f(x) = \ln(x^2 - 8x + 20)$ 在 $x_0 = 4$ 点处的 Taylor 级数, 并求其收敛半径与收敛域.

解: $f(x) = \ln(x^2 - 8x + 20) = \ln[4 + (x - 4)^2] = \ln 4 + \ln[1 + (\frac{x - 4}{2})^2] \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

$$= \ln 4 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x - 4)^{2n}}{n 2^{2n}} \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

收敛半径 $R = 2$, 收敛域为区间 $[2, 6]$ 2 分

3. 设 $f(x, y)$ 在闭区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上连续, 且

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} + \frac{1}{2\pi} \iint_D f(x, y) dx dy,$$

求 $f(x, y)$.

解: 记 $C = \iint_D f(x, y) dx dy$, 则有

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} + \frac{C}{2\pi} \quad (*) \quad \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

注意 D 的面积为 π ，对 $(*)$ 式两端在 D 上积分得

$$C = \iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy + \frac{C}{2} \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

D 可以表示为 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, |\theta| \leq \pi$ ，于是 $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

$$C = 2 \iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy = 2 \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{1 - r^2} r dr = \frac{4\pi}{3} \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

代入 $(*)$ 式即得 $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} + \frac{2}{3} \quad \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

4. 设 $f \in C^1(\mathbb{R})$ ， $f(0) = 0$ ，且曲线积分 $\int_{L^+} y[e^x + 2f(x)]dx - f(x)dy$ 在 \mathbb{R}^2 上与路径无关。

(1) 求函数 $f(x)$ ；

(2) 若 L 是从点 $A(0,0)$ 到点 $B(1,1)$ 的光滑有向曲线，求 $I = \int_{L^+} y[e^x + 2f(x)]dx - f(x)dy$ 。

解：(1) 由于曲线积分在 \mathbb{R}^2 上与路径无关，从而 $y[e^x + 2f(x)]dx - f(x)dy$ 是全微分，故有

$$f'(x) + 2f(x) + e^x = 0 \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

此方程的通解为 $f(x) = Ce^{-2x} - \frac{1}{3}e^x$ ， $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

而 $f(0) = 0$ ，从而 $C = \frac{1}{3}$ ， $f(x) = \frac{1}{3}e^{-2x} - \frac{1}{3}e^x$ 。 $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

(2) 由(1)进而得

$$\begin{aligned} y[e^x + 2f(x)]dx - f(x)dy &= \frac{1}{3}y(e^x + 2e^{-2x})dx + \frac{1}{3}(e^x - e^{-2x})dy \\ &= d\left[\frac{y}{3}(e^x - e^{-2x})\right]. \end{aligned} \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\therefore I = \int_L y[e^x + 2f(x)]dx - f(x)dy = \frac{y}{3}(e^x - e^{-2x}) \Big|_{(0,0)}^{(1,1)} = \frac{1}{3}(e - e^{-2}) \quad \dots\dots 2 \text{ 分}$$

三. 证明题 (请写出详细的证明过程!)

1 (8 分) 设数列 $\{a_n\}$ 单调下降且级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n-1}$ 收敛，求证：级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛。

证明：由 a_n 单调下降且级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n-1} = A$ 收敛可得， $\{a_{2n-1}\}$ 非负且收敛于 0。于是 $\{a_n\}$ 非负，

并且 $\forall n \geq 1, 0 \leq \sum_{k=1}^n a_{2k} \leq \sum_{k=1}^n a_{2k-1} \leq A$, 进而得

$$0 \leq \sum_{k=1}^n a_k \leq 2A, \quad \forall n \geq 1.$$

所以 (非负项) 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛。

2. (7 分) 设 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$, $f \in C^1(D)$, 且 $f(x, y) = 0, \forall (x, y) \in \partial D$ 。

求证: (1) $\iint_D f(x, y) dx dy = - \iint_D y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx dy$;

$$(2) \left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq \frac{2\pi}{3} \max_{(x, y) \in D} \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)^2}.$$

证明: (1)
$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy \\ &= \int_0^2 \left(yf(x, y) \Big|_0^{\sqrt{4-x^2}} - \int_0^{\sqrt{4-x^2}} yf'_y(x, y) dy \right) dx \\ &= - \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} yf'_y(x, y) dy = - \iint_D yf'_y(x, y) dx dy. \end{aligned}$$
4 分

(2) 与 (1) 同理可得,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = - \iint_D xf'_x(x, y) dx dy.$$

\therefore
$$\begin{aligned} \left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| &= \frac{1}{2} \left| \iint_D [xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y)] dx dy \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{[f'_x(x, y)]^2 + [f'_y(x, y)]^2} dx dy \\ &\leq \frac{1}{2} \max_{(x, y) \in D} \sqrt{[f'_x(x, y)]^2 + [f'_y(x, y)]^2} \cdot \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy \\ &= \frac{2\pi}{3} \max_{(x, y) \in D} \sqrt{[f'_x(x, y)]^2 + [f'_y(x, y)]^2}. \end{aligned}$$
3 分