参考答案

1. （20 分）设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$。回答以下问题，并说明理由。

（I）函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否连续？

（II）函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的两个一阶偏导数是否存在，若存在，求这两个偏导数。

（III）函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否可微？可微时，求出它的微分。

解：（I）函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续。

（II）两个偏导数存在，且 $f_x(0,0)=1$，$f_y(0,0)=1$

（III）函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微。理由如下：若可微，则

$\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=x+y+o(\rho)$，其中 $\rho^2=x^2+y^2$， 即 $\dfrac{-xy(x+y)}{x^2+y^2}=o(\rho)$，

亦即 $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{-xy(x+y)}{(x^2+y^2)^{3/2}}=0$。显然该极限不存在。矛盾。

2. （20 分）设函数 $z=z(x,y)$ 为由方程 $x^3+y^3+z^3=x+y+z$ 确定的二阶可微函数，

求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1-3x^2}{3z^2-1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1-3y^2}{3z^2-1}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-6z\frac{(1-3x^2)(1-3y^2)}{(3z^2-1)^3}$$

3. （20 分）在椭球曲面 $x^2+y^2+\dfrac{z^2}{4}=1$ 上寻找一点，位于第一卦限（即 $x>0,y>0,z>0$），使得该点处的切平面与三个坐标轴的交点到原点距离的平方和最小。

解：椭球面在点 (x,y,z) 处的切平面为

$2x(X-x)+2y(Y-y)+\frac{z}{2}(Z-z)=0$， 其中 (X,Y,Z) 为平面上的流动点。

该平面在三个坐标轴上的截距分别为 $1/x,\ 1/y,\ \ 4/z$ 。考虑如下极值问题：

$$\begin{cases} \min\ S(x,y,z) \\ s..t.\ x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1 \end{cases}$$

其中 $S(x,y,z)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{16}{z^2}$ 。作 Lagrange 函数

$$L(x,y,z,\lambda)=S(x,y,z)+\lambda(x^2+y^2+\frac{z^2}{4}-1)\text{。}$$

解方程组 $L_x=0$ ， $L_y=0$ ， $L_z=0$ ， $L_\lambda=0$ ，不难得到在在第一卦限内有唯一解

$(x,y,z)=(1/2,1/2,\sqrt{2})$ 。

这就是所要求的点。另外 $\lambda=16$ 。解答完毕。

4. （20 分）设函数 $f(x,y)$ 在全平面上连续可微的，且满足两个条件（1）两个一阶偏导数处处相等，即 $f_x(x,y)=f_y(x,y)$， $\forall(x,y)\in R^2$ ；(2) $f(x,0)>0$， $\forall x\in R$ 。

证明：对于 $\forall(x,y)\in R^2$， $f(x,y)>0$ 。

证明：对于 $\forall(x,y)\in R^2$，考虑函数 $g(t)=f(x+t,y-t)$ 。由于函数 f 连续可微，因此函数 g 也连续可微，且 $g'(t)=f_x(x+t,y-t)-f_y(x+t,y-t)=0$，即函数 $g(t)$ 是常数，与 t 无关。因此 $g(0)=g(y)$ 。此即 $f(x,y)=f(x+y,0)>0$ 。证毕

5. （20 分）计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan bx-\arctan ax}{x}dx$，其中 $b>a>0$.

解：记 $F(b)=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan bx-\arctan ax}{x}dx$，因为对于任意的 $\delta\ge a>0$， $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+b^2x^2}dx$ 关于 $b\in[\delta,+\infty)$ 一致收敛，所以

$$F'(b)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+b^2x^2}dx=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{b}\text{。}$$

而$F(a)=0$，所以$\int_{0}^{+\infty}\frac{\arctan bx-\arctan ax}{x}dx=\frac{\pi}{2}\ln\frac{b}{a}$。