



Review

• $S: x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) \in D,$

简记为 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), (u, v) \in D$. 则曲面面积为

$$\iint_D \|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\| \, du dv.$$

• $S: z = f(x, y), (x, y) \in D$, 曲面面积为

$$\iint_D \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2} \, dx dy.$$

$L: x = x(t), y = y(t), z = z(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta),$

• 第一型曲线积分

$$\int_L f dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} \, dt.$$

清华大学



§ 2. 第二型曲线积分

1. 第二型曲线积分的物理背景与定义

设 L 为空间有向曲线(规定了正方向的曲线),从A到B的方向为正方向.质点在点 (x, y, z) 处所受力为: $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$.
求单位质量的质点沿曲线 L 从A运动到B时力对质点所做的功.



• Step 1. 分划: 在曲线 L 上依次插入节点

$$A = M_0, M_1, \dots, M_n = B$$

将曲线 L 分成 n 段弧 L_1, L_2, \dots, L_n .

Δl_i : L_i 的长度,

$\vec{\tau}(M_i)$: 曲线 L 在点 M_i 处的正向单位切向量.

• Step 2. 取点、求和: 力 F 所做的功

$$W \approx \sum_{i=1}^n \vec{F}(M_i) \cdot \vec{\tau}(M_i) \Delta l_i.$$

• Step 3. 取极限: 若 $\lim_{\max\{\Delta l_i\} \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \vec{F}(M_i) \cdot \vec{\tau}(M_i) \Delta l_i$

存在, 则该极限为 $\int_L \vec{F} \cdot \vec{\tau} dl$, 即 F 所做的功.

清华大学



Def. Ω 为 R^3 中区域, 设

$$\vec{v}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

为 Ω 中向量场, L 是 Ω 中一条逐段光滑的有向曲线 (由有限条光滑曲线连接而成), $\vec{\tau}$ 是 L 的正向单位切向量. 若第一型曲线积分 $\int_L \vec{v} \cdot \vec{\tau} dl$ 存在, 则称这个

积分为向量场 \vec{v} 在有向曲线 L 上的第二型曲线积分, 记作

$$\int_L \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_L \vec{v} \cdot \vec{\tau} dl.$$

L 为封闭曲线时记作 $\oint_L \vec{v} \cdot d\vec{l} = \oint_L \vec{v} \cdot \vec{\tau} dl.$



2. 第二型曲线积分 $\int_L \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_L \vec{v} \cdot \vec{\tau} dl$ 的计算

设 $L: x = x(t), y = y(t), z = z(t) (\alpha \leq t \leq \beta)$, 且参数 t 增加的方向与 L 的正向一致. 则 L 在点 $M(x, y, z)$ 处的单位切向量为

$$\vec{\tau} = \frac{(x'(t), y'(t), z'(t))}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}},$$

弧长微元为

$$dl = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt.$$

设 $\vec{v} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$, 则

$$\int_L \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_L \vec{v} \cdot \vec{\tau} dl = \int_{\alpha}^{\beta} [Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t)] dt.$$

清华大学



Remark. 若参数 t 增加的方向与 L 的正向相反, 则

$$\begin{aligned}\int_L \vec{v} \cdot d\vec{l} &= -\int_{\alpha}^{\beta} [Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t)] dt \\ &= \int_{\beta}^{\alpha} [Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t)] dt\end{aligned}$$

积分下限对应于曲线的起点, 上限对应于终点.

Remark. L^- 与 L 反向, 则 $\int_{L^-} \vec{v} \cdot d\vec{l} = -\int_L \vec{v} \cdot d\vec{l}$.

Remark. $\vec{v} \cdot d\vec{l} = \vec{v} \cdot \vec{\tau} dl$

$$= (Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t))dt = Pdx + Qdy + Rdz.$$

因此, 也将 $\vec{v} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ 沿曲线 L 的第二型曲线积分记为 $\int_L \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_L Pdx + Qdy + Rdz$.

清华大学



3. 第二型曲线积分的性质

第二型曲线积分 $\int_L \vec{v} \cdot d\vec{l}$ 可以化为第一型曲线积分 $\int_L \vec{v} \cdot \vec{\tau} dl$ 来计算, 因而具有以下性质:

(1)(积分存在的充分条件) 当 L 逐段光滑且 \vec{v} 的分量函数 P, Q, R 在 L 上连续时, $\int_L \vec{v} \cdot d\vec{l}$ 存在.

(2)(对积分曲线的可加性) 设曲线 L 由曲线 L_1, L_2, \dots, L_k 连接而成, 则

$$\int_L \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_{L_1} \vec{v} \cdot d\vec{l} + \int_{L_2} \vec{v} \cdot d\vec{l} + \dots + \int_{L_k} \vec{v} \cdot d\vec{l}.$$



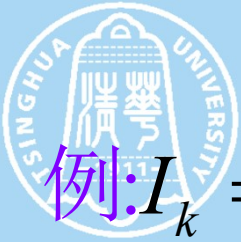
(3)(线性性质) 设 $\int_L \vec{u} \cdot d\vec{l}$ 和 $\int_L \vec{v} \cdot d\vec{l}$ 存在, 则 \forall 实数

α, β , 积分 $\int_L (\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) \cdot d\vec{l}$ 存在, 且

$$\int_L (\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) \cdot d\vec{l} = \alpha \int_L \vec{u} \cdot d\vec{l} + \beta \int_L \vec{v} \cdot d\vec{l}.$$

特别地,

$$\begin{aligned} & \int_L Pdx + Qdy + Rdz \\ &= \int_L Pdx + \int_L Qdy + \int_L Rdz. \square \end{aligned}$$



例: $I_k = \oint_{L_k} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$, L_k 逆时针方向.

$$L_1: x^2 + y^2 = R^2; \quad L_2: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

$$L_3: x^2 + xy + y^2 = R^2.$$

解: $L_1: x = R \cos t, y = R \sin t, t \in [0, 2\pi]$, 参数增加与曲线正向一致.

$$I_1 = \oint_{L_1} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$



$$L_2: x = a \cos t, y = b \sin t, t \in [0, 2\pi]$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{ab}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt$$

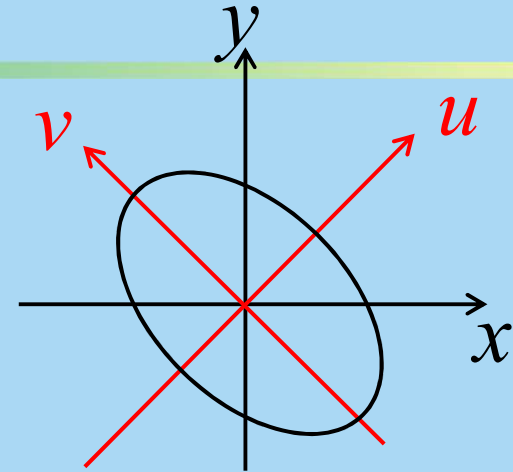
$$= ab \int_0^{2\pi} \frac{\sec^2 t}{a^2 + b^2 \tan^2 t} dt = 4ab \int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2 t}{a^2 + b^2 \tan^2 t} dt$$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \left(\frac{b}{a} \tan t\right)^2} d\left(\frac{b}{a} \tan t\right) = 4 \arctan\left(\frac{b}{a} \tan t\right) \Big|_0^{\pi/2} = 2\pi.$$



$$L_3: x^2 + xy + y^2 = R^2 \text{ (逆时针)}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$



$$L_3: 3u^2 + v^2 = 2R^2 \text{ (逆时针)}$$

$$u = \sqrt{\frac{2}{3}}R \cos t, v = \sqrt{2}R \sin t, t \in [0, 2\pi], t \uparrow \text{ 与正向一致.}$$

$$I_3 = \oint_{L_3} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{u(t)v'(t) - v(t)u'(t)}{u(t)^2 + v(t)^2} dt$$

$$= \oint_{\substack{3u^2 + v^2 = R^2 \\ \text{逆时针}}} \frac{u dv - v du}{u^2 + v^2} = 2\pi. \square$$

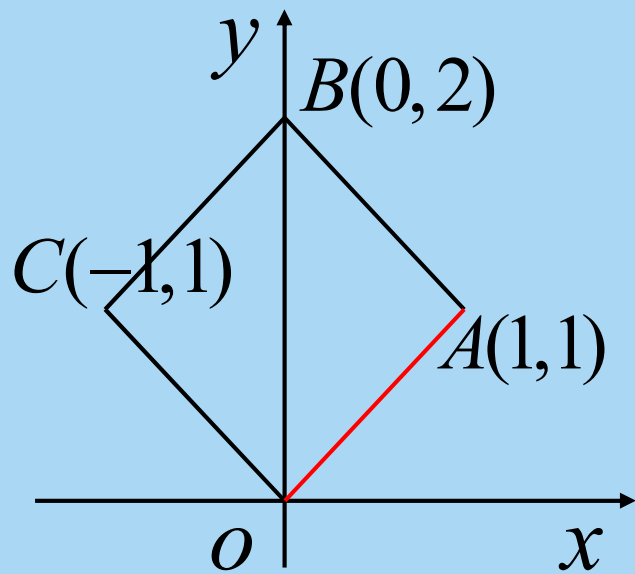
↑ 利用 I_2

清华大学



例: $I = \oint_L (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$, 其中 L 是由 $O(0,0)$, $A(1,1)$, $B(0,2)$, $C(-1,1)$ 为顶点的正方形的逆时针方向边界.

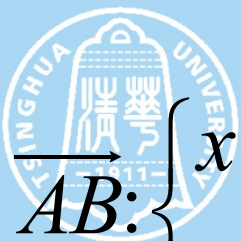
解: $I = \left(\int_{\overrightarrow{OA}} + \int_{\overrightarrow{AB}} + \int_{\overrightarrow{BC}} + \int_{\overrightarrow{CO}} \right) (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$.



$\overrightarrow{OA}: \begin{cases} x = x, \\ y = x, \end{cases} (0 \leq x \leq 1)$, 参数增加的方向与曲线的正向一致. 于是

$$\begin{aligned} \int_{\overrightarrow{OA}} (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy \\ = \int_0^1 2x^2 dx = 2/3. \end{aligned}$$

清华大学



$$\overrightarrow{AB}: \begin{cases} x = x, \\ y = 2 - x, \end{cases} \quad (0 \leq x \leq 1), \text{ 参数增加}$$

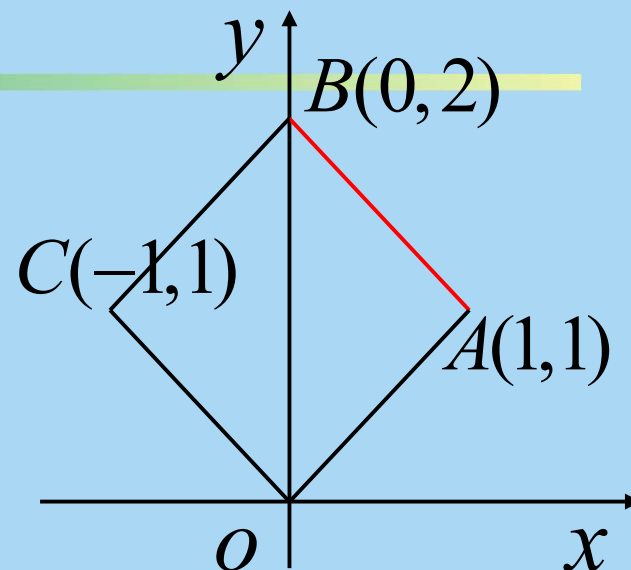
的方向与曲线的反向一致. 于是

$$\begin{aligned} & \int_{\overrightarrow{AB}} (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy \\ &= \int_1^0 \left\{ \left[x^2 + (2-x)^2 \right] - \left[x^2 - (2-x)^2 \right] \right\} dx = -14/3, \end{aligned}$$

$$\text{同理 } \int_{\overrightarrow{BC}} (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy = -2/3,$$

$$\int_{\overrightarrow{CO}} (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy = 2/3,$$

$$\text{于是 } I = 2/3 + (-14/3) + (-2/3) + 2/3 = -4. \square$$





例. 设 L 为曲线 $x^2 + y^2 = 4$, 逆时针方向为正, 则 L 上点 (x, y) 处的(正)单位切向量 $\vec{\tau}$ 为_____.

$$\oint_L \frac{dx}{y} - \frac{dy}{x} = \text{_____}, \oint_L ydx - xdy = \text{_____}.$$

解: $\vec{\tau} = \frac{1}{2}(-y, x)$, 记 $\vec{v} = (\frac{1}{y}, -\frac{1}{x})$, $\vec{u} = (y, -x)$, 则

$$\oint_L \frac{dx}{y} - \frac{dy}{x} = \oint_L \vec{v} \cdot \vec{\tau} dl = -\oint_L dl = -4\pi.$$

$$\begin{aligned} \oint_L ydx - xdy &= \oint_L \vec{u} \cdot \vec{\tau} dl = -\oint_L \frac{x^2 + y^2}{2} dl \\ &= -\oint_L 2dl = -8\pi. \square \end{aligned}$$

清华大学



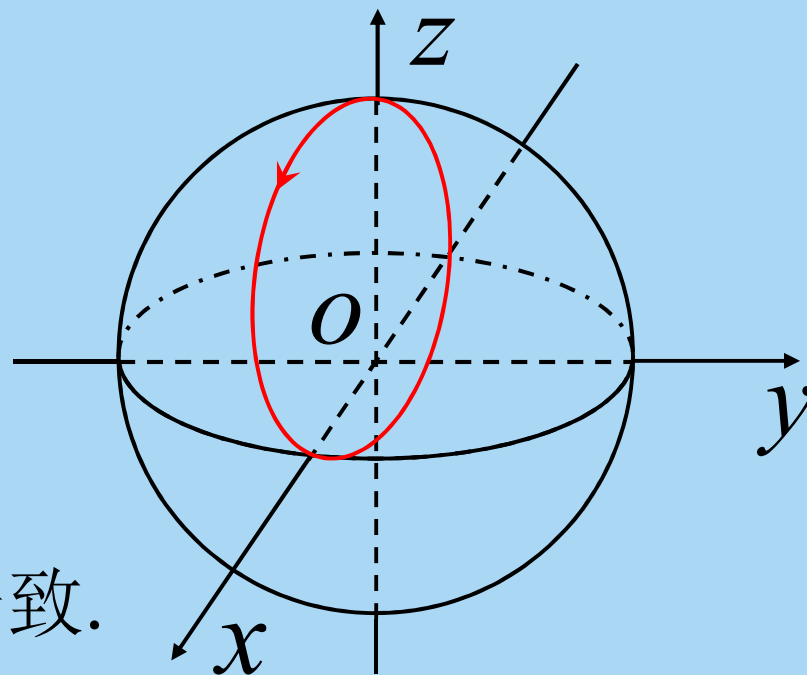
例. $I = \oint_L (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$, 其中 L 是柱面 $x^2 + y^2 = ax (a > 0)$ 与球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (z > 0)$ 的交线 (从 $x > a$ 看 L 取逆时针方向).

解: L 的参数方程为

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{2}(1 + \cos t), \quad y = \frac{a}{2}\sin t, \\ z &= a \sin \frac{t}{2}, \quad t \in [0, 2\pi], \end{aligned}$$

t 增加的方向与曲线的正向一致.

$$\begin{aligned} I &= \frac{a^2}{4} \int_0^{2\pi} \left[(\sin t - 2 \sin \frac{t}{2}) \cdot (-\sin t) + (2 \sin \frac{t}{2} - 1 - \cos t) \cdot \cos t \right. \\ &\quad \left. + (1 + \cos t - \sin t) \cdot \cos \frac{t}{2} \right] dt = -\frac{a^2}{6}(3\pi + 8). \quad \square \end{aligned}$$





例 $I = \oint_L ydx + zdy + xdz$, 其中 L 是 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 与 $x + y + z = 0$ 的交线, 从 x 轴正半轴看去为逆时针方向.

解: 将 $z = -x - y$ 代入 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, 有

$$x^2 + xy + y^2 = R^2/2, \text{ 即 } \left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2} + y\right)^2 = \left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

L 的参数方程为:

$$x = \frac{\sqrt{6}}{3} R \cos t, \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2} R \sin t - \frac{\sqrt{6}}{6} R \cos t,$$

$$z = -\frac{\sqrt{2}}{2} R \sin t - \frac{\sqrt{6}}{6} R \cos t, \quad t \in [0, 2\pi],$$

t 增加与曲线正向一致. 于是



$$\begin{aligned} I &= R^2 \int_0^{2\pi} \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin t - \frac{\sqrt{6}}{6} \cos t \right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{6}}{3} \sin t \right) \right. \\ &\quad + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \sin t - \frac{\sqrt{6}}{6} \cos t \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos t + \frac{\sqrt{6}}{6} \sin t \right) \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{6}}{3} \cos t \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \cos t + \frac{\sqrt{6}}{6} \sin t \right) \right\} dt \\ &= -\sqrt{3}\pi R^2. \square \end{aligned}$$



作业：习题4.4 No. 2, 4

清华大学