第二次习题课：

方向导数,链式法则(高阶导),隐函数偏导

方向导数,链式法则

例1. 求函数 $f(x,y)=x^2-y^2$ 在 $P(1,1)$ 点沿与 x 轴成 $\frac{\pi}{3}$ 角方向的方向导数。

例2. 求函数 $f(x,y)=1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$ 在 $P(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}})$ 点沿曲线 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在该点的内法方向的方向导数。

例3. 设函数 $z=\arctan\frac{x-y}{x+y}$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$， $\frac{\partial z}{\partial y}$， dz， $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

例4. 若函数 $f(u)$ 有二阶导数，设函数 $z=\frac{1}{x}f(xy)+yf(x+y)$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

例5. 已知 $y=(\frac{1}{x})^{-\frac{1}{x}}$，求 $\frac{dy}{dx}$.

例6. 设 $f(x,y)$ 定义在 R^2 上，若它对 x 连续,对 y 的偏导数在 R^2 上有界，证明 $f(x,y)$ 连续.

例7. 设 $z=f(xy,\frac{x}{y})$， f 二阶连续可微，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

例8. 设 $z=z(x,y)$ 二阶连续可微，并且满足方程

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

若令$\begin{cases} u = x+\alpha y \\ v = x+\beta y \end{cases}$，试确定$\alpha, \beta$为何值时能变原方程为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}=0$.

例9. 设$u(x,y)\in C^2$，又$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, $u(x,2x)=x$，$u'_x(x,2x)=x^2$,求 $u''_{xx}(x,2x)$，

$u''_{xy}(x,2x)$ $u''_{yy}(x,2x)$

隐函数的求导法

隐函数 若函数$y=y(x)$，由方程$F(x,y)=0$确定，求导函数？

按隐函数定义有恒等式：$F(x,y(x))\equiv 0 \Rightarrow \dfrac{d}{dx}F(x,y(x))=0$，

$$\Rightarrow F'_x(x,y(x))+F'_y(x,y(x))\cdot y'(x)=0 \Rightarrow y'(x)=-\frac{F'_x(x,y(x))}{F'_y(x,y(x))}。$$

从这是可见：函数$y=y(x)$可导有一个充分条件是，$F'_y(x,y)\neq 0$.

例10. 已知函数$y=f(x)$由方程$ax+by=f\left(x^2+y^2\right), a,b$ 是常数，求导函数。

一般来说，若函数$y=y(\vec{x})$，由方程$F(\vec{x},y)=0$确定，求导之函数？

将y看作是$x_1,\ldots,x_n$的函数$y=y(\vec{x})=y(x_1,\ldots,x_n)$, 对于方程

$$F(x_1,\ldots,x_n,y(x_1,\ldots,x_n))=0$$

两端分别关于x_i求偏导数得到，并解$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, 可得到公式 ：$\dfrac{\partial y}{\partial x_i}=-\dfrac{F'_{x_i}(\vec{x},y)}{F'_y(\vec{x},y)}$

例11. 设$F\in C^{(1)}$，证明：方程$F\left(x+\dfrac{z}{y}, y+\dfrac{z}{x}\right)=0$所确定的隐函数$z=z(x,y)$满足

$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z-xy$。

例12. 设函数$x=x(z),\ y=y(z)$由方程组$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-1=0 \\ x^2+2y^2-z^2-1=0 \end{cases}$ 确定， 求

$\dfrac{dx}{dz}, \dfrac{dy}{dz}$.

例13.　已知函数 $z=z(x,y)$ 由参数方程: $\begin{cases} x=u\cos v \\ y=u\sin v \\ z=uv \end{cases}$, 给定，试求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

例14.　**隐函数**函数 $u=u(x,y)$ 由方程 $\begin{cases} u=f(x,y,z,t) \\ g(y,z,t)=0 \\ h(z,t)=0 \end{cases}$ 确定，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y}$