homework 15.

习题八.

21. $\sigma\tau = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

$= (1\ 3)(2\ 4)$

$\tau\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$= (1\ 6)(2\ 5)$

$\sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = (5\ 3\ 2\ 6\ 4\ 1) = (5\ 1)(5\ 4)$

$(5\ 6)(5\ 2)(5\ 3)$

$\sigma\tau\sigma^{-1} = (\sigma\tau)\sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = (5\ 1)(2\ 6)(3\ 4)$

27. S_4 = 4! 个 4元置换的集合.

由 Lagrange 定理得 $|S_4| = |\langle\alpha\rangle|\,[S_4 : \langle\alpha\rangle]$, $[S_4 : \langle\alpha\rangle]$ 为 $\langle\alpha\rangle$ 在 S_4 中左陪集数目

$\because \alpha = (1\ 3\ 2\ 4) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\alpha^2 = (1\ 3)(1\ 2)(1\ 4)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

$= (1\ 2)(3\ 4)$

$\alpha^3 = (1\ 3)(1\ 2)(1\ 4)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = (4\ 2\ 3\ 1)$, $\alpha^4 = (i) = e$.

$\therefore |\langle\alpha\rangle| = 4$, $\therefore [S_4 : \langle\alpha\rangle] = \dfrac{4!}{4} = 3! = 6$. 即共有6个左陪集。

令 $H = \langle\alpha\rangle = \{e, \alpha, \alpha^2, \alpha^3\}$.

$$\left.\begin{array}{l}
\text{则 } eH = \{(1\ 3\ 2\ 4), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 4\ 2\ 3), e\} \\
(1\ 2)H = \{(1\ 3)(2\ 4), (3\ 4), (4\ 1)(2\ 3), (1\ 2)\}. \\
(1\ 3)H = \{(2\ 4\ 3), (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 4\ 2), (1\ 3)\}. \\
(1\ 4)H = \{(3\ 2\ 1), (2\ 4\ 3\ 1), (3\ 4\ 2), (1\ 4)\}. \\
(2\ 3)H = \{(2\ 4\ 1), (3\ 4\ 2\ 1), (4\ 3\ 1), (2\ 3)\}. \\
(2\ 4)H = \{(3\ 4\ 1), (4\ 3\ 2\ 1), (2\ 3\ 1), (2\ 4)\}
\end{array}\right\} \text{左陪集}$$

同理可得H的右陪集为：

$He=\{(1 3 2 4),(1 2)(3 4),(3 2 4 1),e\}.$

$H(1 2)=\{(4 1)(2 3),(3 4),(3 1)(4 2),(1 2)\}.$

$H(1 3)=\{(2 4 1),(2 1 4 3),(3 4 2),(1 3)\}.$

$H(1 4)=\{(4 3 2),(3 4 2 1),(3 1 2),(1 4)\}.$

$H(2 3)=\{(3 4 1),(2 4 3 1),(4 2 1),(2 3)\}.$

$H(2 4)=\{(3 2 1),(2 3 4 1),(4 3 1),(2 4)\}.$

右陪集

30.
由Lagrange定理，$[G:1]=[G:A][A:1]$

$[G:1]=[G:B][B:1]$

$\Rightarrow [G:B]=\dfrac{[G:A][A:1]}{[B:1]}$

下证B为A的子群。

由B为G的子群，得B上运算封闭且结合律成立，

因为B中含有G的单位元e．且A为G子群，A中单位元也为e．则B中含有A的幺元。

又$\because \forall b\in B, \exists b^{-1}\in B$ $\therefore$ B中任一元素有逆元。 $\therefore$ B为A的子群。

$\therefore [A:1]=[A:B][B:1]$

$\Rightarrow [G:B]=\dfrac{[G:A][A:B][B:1]}{[B:1]}=[G:A][A:B].$

33．要证 $H_1H \lhd H_2H$，

首先证明H_1H是H_2H的子集.

$\forall h_1h\in H_1H$，$h_1\in H_1, h\in H$． $\because H_1\subset H_2$ $\therefore h_1\in H_2, h\in H$

$\therefore h_1h\in H_2H$ $\therefore H_1H$是H_2H的子集。

再证H_1H是H_2H的子群。

对$\forall h_1h, h_1'h'\in H_1H$, $h_1, h_1'\in H_1$, $h, h'\in H$. 则$(h_1h)(h_1'h')^{-1}=h_1hh'^{-1}h_1'^{-1}$

$\because H\lhd G$，且$h'^{-1}\in H$，$h_1'^{-1}\in G$.

$\therefore \exists h_0\in H$, s.t. $h'^{-1}h_1'^{-1}=h_1'^{-1}h_0$

同理，$\because h\in H$，$h_1'^{-1}\in G$.

$\therefore \exists\, h_a \in H$, s.t. $h h_1'^{-1} = h_1'^{-1} h_a$

$\therefore (h_1 h)(h_1' h')^{-1} = h_1 h_1'^{-1} h_a h_b$, $h_a, h_b \in H$, $h_1, h_1'^{-1} \in H_1$

$\because H_1, H$ 均为G的正规子群 $\therefore$ 满足运算封闭

$\therefore h_a h_b \in H$, $h_1 h_1'^{-1} \in H_1$ $\therefore (h_1 h)(h_1' h')^{-1} \in H_1 H$ $\therefore H_1 H$ 为 $H_2 H$ 的子群。

下证 $H_1 H \lhd H_2 H$.

即证 $\forall\, h_2 h \in H_2 H$, $h_1' h' \in H_1 H$, $(h_2 h)(h_1' h')(h_2 h)^{-1} \in H_1 H$.

即证 $h_2 h h_1' h' h^{-1} h_2^{-1} \in H_1 H$, $\forall\, h, h' \in H$, $h_1' \in H_1$, $h_2 \in H_2$.

$\because h^{-1} \in H$, $h_2^{-1} \in H_2 \subseteq G$, $H \lhd G$

$\therefore \exists\, h_a \in H$, s.t. $h^{-1} h_2^{-1} = h_2^{-1} h_a$.

同理, $\exists\, h_b \in H$, s.t. $h' h_2^{-1} = h_2^{-1} h_b$

$\because H_1 \lhd G$, $\therefore \exists\, h_c \in H_1$, s.t. $h_1' h_2^{-1} = h_2^{-1} h_c$.

同理, $\exists\, h_d \in H$, s.t. $h h_2^{-1} = h_2^{-1} h_d$

$\therefore$ 原式 $= h_2 h_2^{-1} h_d h_c h_b h_a = h_d h_c h_b h_a$, $h_a, h_b, h_d \in H$, $h_c \in H_1$.

又 $\because h_d \in H \subseteq G$, $h_c \in H_1$, $H_1 \lhd G$

$\therefore \exists\, h_e \in H_1$, s.t. $h_d h_c = h_e h_d$

$\therefore$ 原式 $= h_e h_d h_b h_a$, $h_e \in H_1$, $h_a, h_b, h_d \in H$

又由 H 运算封闭性, $h_d h_b h_a \in H$. $\therefore$ 原式 $\in H_1 H$. 得证。

$\therefore H_1 H \lhd H_2 H$.