赵晨阳 软01／计06 2020012363

习题 6.1：

(1) $x>0$时，$S_N=\sum_{n=1}^{+N} n e^{-nx}=(e^{-x}+e^{-2x}+\cdots+e^{-Nx})+(e^{-2x}+\cdots+e^{-Nx})+\cdots+(e^{-Nx})$

$=e^{-x}\cdot\frac{1-(e^{-x})^N}{1-e^{-x}}+e^{-2x}\cdot\frac{1-(e^{-x})^{N-1}}{1-e^{-x}}+\cdots+e^{-Nx}\cdot\frac{1-e^{-x}}{1-e^{-x}}=\frac{e^{-x}+e^{-2x}+\cdots+e^{-Nx}-Ne^{-(N+1)x}}{1-e^{-x}}$

$=\frac{e^{-x}\cdot\frac{1-(e^{-x})^N}{1-e^{-x}}-N\cdot e^{-(N+1)x}}{1-e^{-x}}$ $\lim_{N\to+\infty}S_N=\frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}=\frac{1}{e^{x}-2+e^{-x}}$ 故 $\sum_{n=1}^{+\infty}|ne^{-nx}|=\frac{1}{e^{x}-2+e^{-x}}$ 绝对收敛

$x\le 0$时，$\lim_{n\to+\infty}n\cdot e^{-nx}=+\infty$. 故不收敛.

综上，收敛域为$(0,+\infty)$，条件收敛域为ϕ，绝对收敛域为$(0,+\infty)$

(3) $\forall x\in R-\{0\}$，$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{x}\right)^n=+\infty$. 故 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n+1}{x}\right)^n$不收敛，无收敛域

(5) 1° $x>1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{x^n+1}\right|<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n}=\frac{1}{1-x}$. 故绝对收敛

2° $x=1$时，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^n+1}=\frac{1}{2}$. 故而不收敛

3° $-1<x<1$时，$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{x^n+1}=1$，故而不收敛

4° $x=-1$时，无定义

5° $x<-1$时，$\left|\frac{1}{1+x^n}\right|=\begin{cases}\frac{1}{1+x^n} & n为偶\\ \frac{1}{|x|^n-1} & n为奇\end{cases}$ 故 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{1}{1+x^n}\right|\le\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{|x|^n-1}$

$\exists N\in N^+$，当$n>N$时，有 $\frac{1}{|x|^n-1}<\frac{2}{|x|^n}$ $\sum_{n=N}^{+\infty}\frac{1}{|x|^n-1}<\sum_{n=N}^{+\infty}2\cdot\frac{1}{|x|^n}$ 收敛

故而 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+x^n}$ 绝对收敛

收敛域为$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$，条件收敛域为$\phi$，绝对收敛域为$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

(7)

1° $x>1$时，$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{1}{n+x^n}\right|<\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{x^n}$ 绝对收敛.

2° $x=1$时，$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{1}{n+x^n}\right|=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散

3° $-1<x<1$时，$\frac{1}{n+x^n}$为正；$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n+x^n}}{\frac{1}{n}}=1$，而 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$发散. 故原式发散

4° $x=-1$时，$n=1$时无定义

5° $x<-1$时，$\exists N\in N^+$，$\forall n\ge N$，有：$\frac{1}{|n+x^n|}<\frac{2}{|x^n|}$ $\sum_{n=N}^{+\infty}\frac{2}{|x^n|}=\frac{2}{|x^N|}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{|x|}}$ 收敛

故原式收敛 综上：

收敛域为$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$，条件收敛域为$\phi$，绝对收敛域为$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

(9) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n$一致有界 $\frac{1}{n+x^2}$对于每个固定的x关于n单调收敛到0，

故由Dirichlet判别法，原级数在R上一致收敛

$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^n\frac{1}{n+x^2}\right|=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+x^2}$ $\frac{1}{n+x^2}$为正；$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n+x^2}}{\frac{1}{n}}=1$，且$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$发散，故 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+x^2}$发散

综上：

收敛域为R，条件收敛域为R，绝对收敛域为ϕ

3.(1) $\left|\frac{1-\cos nx}{n^2}\right| \le \frac{2}{n^2}$ 而 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2}$ 收敛，故由Weierstrass判别法有：
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos nx}{n^2}$ 一致收敛

(3) 令 $u(x)=x^3 e^{-nx^2}$ $u'(x)=3x^2\cdot e^{-nx^2}+e^{-nx^2}(-2nx)\cdot x^3=x^2\cdot e^{-nx^2}\cdot(3-2nx^2)$
故 $u(x)$ 在 $(-\infty,-\sqrt{\frac{3}{2n}})$ 上递减，$(-\sqrt{\frac{3}{2n}},\sqrt{\frac{3}{2n}})$ 上递增，$(\sqrt{\frac{3}{2n}},+\infty)$ 上递减
由于 $u(x)$ 为奇函数，故 $|u(x)|$ 在 $x=\pm\sqrt{\frac{3}{2n}}$ 处取max，$|u(x)|_{max}=\frac{3\sqrt{3}}{(2n)^{\frac{3}{2}}}\cdot e^{-\frac{3}{2}}$
故 $\forall x\in R$，$|u_n(x)|\le\left(\frac{3}{2e}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{n\sqrt{n}}$ 而 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{2e}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{n\sqrt{n}}$ 收敛。
故由Weierstrass判别法有：$\sum_{n=1}^{\infty} x^3\cdot e^{-nx^2}$ 一致收敛

(5) $\left|\frac{\cos nx+\sin n^x}{n^{1.001}}\right| < \frac{2}{n^{1.001}}$ 而 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n^{1.001}}$ 收敛，故由Weierstrass判别法有：
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx+\sin n^x}{n^{1.001}}$ 一致收敛

6. $S_N=\sum_{n=}^{N} x^{n-1}(x-1)^2=(x-1)^2(x^1+x^2+\cdots x^{N-1})=(x-1)^2\cdot x\cdot\frac{1-x^{N-1}}{1-x}=(x-1)\cdot x\cdot(x^{N-1}-1)$
$\lim_{N\to+\infty} S_N=(1-x)x$ $(x\in[0,1])$

$x^{n-1}(x-1)^2=\left(\frac{n-1}{2}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{2x}{n-1}\right)^{n-1}\cdot(1-x)^2\le\left(\frac{n-1}{2}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{\frac{2x}{n-1}\cdot n-1+(1-x)\cdot 2}{n+1}\right)^{n+1}=\left(\frac{n-1}{2}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{2}{n+1}\right)^{n+1}$
$=4\cdot\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{n+1}\right)^2<\frac{4}{(n+1)^2}$ 而 $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{4}{(n+1)^2}$ 收敛
故由Weierstrass判别法有：$\sum_{n=2}^{\infty} x^{n-1}(x-1)^2$ 一致收敛

9. $\forall x\in[0,+\infty)$ e^{-nx} 关于 n 单调递减且一致有界 $|e^{-nx}|<1$
而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. a_n 与 x 无关，故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 上一致收敛
故由Abel判别法有 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot e^{-nx}$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 上一致收敛

10. 可知 $|u_n(x)|\le\max\{|u_n(a)|,|u_n(b)|\}<|u_n(a)|+|u_n(b)|$
故 $\sum_{n=1}^{+\infty}|u_n(x)|<\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(a)|+\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(b)|$ 而后两者收敛. 故
$\sum_{n=1}^{+\infty}|u_n(x)|$ 绝对收敛，且由Weierstrass判别法有：
$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 在 $x\in[a,b]$ 上一致收敛

习题5.3

4. 记通项为a_n，部分和为S_n.

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}>\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散. 而由Leibnitz判别法有: $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$单调递减且趋于0

故而原级数条件收敛

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}$ 不存在，故原级发散

(5) $\left|\sum_{n=1}^{N}\sin\frac{n\pi}{4}\right|<\sqrt{2}+1$，故级数有界，而$\frac{1}{2^n}$单调递减趋于0

故由Dirichlet判别法有原级数收敛

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 而后者收敛. 故原级数绝对收敛

(7) 对于 $x_n=\frac{2^{n^2}}{n!}$ $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{2^{(n+1)^2}}{(n+1)\cdot n!}\cdot\frac{n!}{2^{n^2}}=\frac{2^{2n+1}}{n+1}>2$. 而 $x_1=2$. 故

$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\cdot x_n$ 不收敛. 故级数发散

(9) 对于 $x_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ 单调递减趋于0，故由Leibnitz判别法有

原级数收敛，而 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\cdots$ 可知 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散

故原级数条件收敛

(11) $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{n}}}=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)^n}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}+o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$

故原级数 $=\sum_{n=2}^{\infty}a_n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}+o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ 而三项分别收敛

故原级数收敛

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=1$，$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散，故 $\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|$ 发散

故原级数条件收敛

(13) 记 $a_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}-1}+\frac{1}{\sqrt{n+1}+1}=\frac{2\sqrt{n+1}}{n}$ a_n非负且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=2$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散

故原级数发散

5. $\frac{(-1)^n}{(n+(-1)^n)^p}=\frac{(-1)^n}{n^p}\cdot\frac{1}{(1+\frac{(-1)^n}{n})^p}=\frac{(-1)^n}{n^p}\cdot(1-p\cdot\frac{(-1)^n}{n}+o(\frac{1}{n}))$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}-p\cdot\frac{1}{n^{p+1}}+o(\frac{1}{n^{p+1}})$

1° $p\le 0$ 时，$\lim_{n\to+\infty}a_n$ 不存在，发散

2° $0<p\le 1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ 条件收敛 $\sum_{n=1}^{\infty}p\frac{1}{n^{p+1}}$，$\sum_{n=1}^{\infty}o(\frac{1}{n^{p+1}})$ 绝对收敛

故 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛

3° $p>1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ 绝对收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}p\frac{1}{n^{p+1}}$，$\sum_{n=1}^{\infty}o(\frac{1}{n^{p+1}})$ 绝对收敛

故 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛

综上：$\begin{cases} p\le 0，\text{发散} \\ 0<p\le 1，\text{条件收敛} \\ 1<p，\text{绝对收敛} \end{cases}$

$\frac{(-1)^n}{(\sqrt{n}+(-1)^n)^p}=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}^p}\cdot\frac{1}{(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})^p}=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}^p}\cdot(1-p\cdot\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+o(\frac{1}{\sqrt{n}}))$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}^p}-p\cdot\frac{1}{\sqrt{n}^{p+1}}+o(\frac{1}{\sqrt{n}^{p+1}})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}^p}-p\cdot\frac{1}{\sqrt{n}^{p+1}}+\frac{p(p-1)}{2}\cdot\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}^{p+2}}+o(\frac{1}{\sqrt{n}^{p+3}})$

1° $p\le 0$ 时，$\lim_{n\to+\infty}a_n$ 不存在，发散

2° $0<p\le 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}^p}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p(p-1)}{2}\cdot\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}^{p+2}}+o(\frac{1}{\sqrt{n}^{p+3}})$ 收敛 而 $\sum_{n=1}^{\infty}-p\cdot\frac{1}{\sqrt{n}^{p+1}}$ 发散

故原级数发散

3° $1<p\le 2$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}^p}$ 条件收敛 $\sum_{n=1}^{\infty}p\cdot\frac{1}{\sqrt{n}^{p+1}}+o(\frac{1}{\sqrt{n}^{p+1}})$ 绝对收敛，故原级数条件收敛

4° $2<p$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}^p}$、$\sum_{n=1}^{\infty}p\cdot\frac{1}{\sqrt{n}^{p+1}}+o(\frac{1}{\sqrt{n}^{p+1}})$ 绝对收敛 故原级数绝对收敛

综上：$\begin{cases} p\le 1\text{时，发散} \\ 1<p\le 2\text{时，条件收敛} \\ 2<p\text{时，绝对收敛} \end{cases}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty}|(a_n+b_n)|^2=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+2a_nb_n+b_n^2)\le\sum_{n=1}^{\infty}2a_n^2+\sum_{n=1}^{\infty}2b_n^2$ 而后二者收敛

故 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$ 收敛

$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a_n}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a_n}{n}\right|$ 由柯西不等式有 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a_n}{n}\right|\le\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2}$ 而后两者收敛

故原级数绝对收敛

7. $\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1\in N^+$，s.t. $\forall n>N_1$ $\forall p\in N^+$，$|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k|<\varepsilon$ $\exists N_2\in N^+$，s.t. $\forall n>N_2$ $\forall p\in N^+$，$|\sum_{k=n+1}^{n+p}b_k|<\varepsilon$ 取 $N=N_1+N_2$，则 $\forall n>N$，$\forall p\in N^+$，$\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k<\sum_{k=n+1}^{n+p}c_k<\sum_{k=n+1}^{n+p}b_k$

而 $|\sum_{k=n+1}^{n+p}b_k|<\varepsilon$ $|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k|<\varepsilon$，故 $|\sum_{k=n+1}^{n+p}c_k|<\varepsilon$

即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in N^+$，s.t. $\forall n>N$ $\forall p\in N^+$，$|\sum_{k=n+1}^{n+p}c_k|<\varepsilon$ 即 $\sum_{k=1}^{\infty}c_k$ 收敛

8. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n} - \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n-1}$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 收敛,故 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n-1}$ 收敛,故 $\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^n u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n-1}$ 收敛

故 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 绝对收敛,矛盾

故 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}$ 发散

9. 由题知 $\lim_{n\to\infty} u_n$ 存在,令之为 t,则 $t>0$,否则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 收敛

则 $\lim_{n\to+\infty}(1+u_n)^{-n}/(1+t)^{-n}=1$,而 $(1+t)^{-n}>0$,由正项级数的Cauthy根式判敛法

$\sqrt[n]{\left(\frac{1}{1+t}\right)^n} = \frac{1}{1+t} < 1$ 故 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+t}\right)^n$ 收敛

综上所述,$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+u_n}\right)^n$ 收敛

10.

1° $P\le 0$ 时,$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n^p+\sin n}$ 不存在,故级数发散

2° $0<P\le 1$ 时,$\frac{\sin n}{n^p+\sin n} = \frac{\sin n}{n^p}\cdot\frac{1}{1+\sin n/n^p} = \frac{\sin n}{n^p}\cdot\left(1-\frac{\sin n}{n^p}+O\left(\frac{\sin^2 n}{n^{2p}}\right)\right)$

$= \frac{\sin n}{n^p} - \frac{\sin^2 n}{n^{2p}} + O\left(\frac{\sin^3 n}{n^{3p}}\right) = \frac{\sin n}{n^p} - \frac{1}{2n^{2p}} + \frac{\cos 2n}{2n^{2p}} + O\left(\frac{\sin^3 n}{n^{3p}}\right)$

2.1° $0<P\le\frac{1}{2}$ 时,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^p}+\frac{\cos 2n}{2n^{2p}}+O\left(\frac{\sin^3 n}{n^{3p}}\right)$ 收敛,但 $\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{2n^{2p}}$ 发散,故原式发散

2.2° $\frac{1}{2}<P\le 1$ 时,$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n}{n^p}\right| > \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos 2n}{2n^p}$ 发散,而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^p}$ 由Dirichelet判别法收敛,$\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{2n^{2p}}$ 收敛,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{2n^{2p}}+O\left(\frac{\sin^3 n}{n^{3p}}\right)$ 收敛,故级数条件收敛

2.3° $p>1$ 时,$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n}{n^p+\sin n}\right| < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p-1}$ 故级数绝对收敛

综上:
$$\begin{cases} p\le\frac{1}{2}, & \text{级数发散} \\ \frac{1}{2}<p\le 1, & \text{条件收敛} \\ p>1, & \text{绝对收敛}\end{cases}$$

11. $u_n^+ = \frac{u_n+|u_n|}{2}$ $u_n^- = \frac{|u_n|-u_n}{2}$

① $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$ 收敛,$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$ 收敛

$\because \sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 均收敛,故有 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$,$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$ 收敛

② $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$ 收敛,$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛

$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^+ + u_n^-$ 收敛,故 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛