

题目

系名_____ 班级_____ 姓名_____ 学号_____

一. 填空题 (每空 3 分, 共 10 题) (请将答案直接填写在横线上!)

1. 设 f 连续, 交换累成积分的次序 $\int_1^2 dx \int_0^x f(x, y) dy =$ _____。
2. 马鞍面 $z = xy$ 被圆柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 所截, 截得的有界部分曲面的面积为_____。
3. 设曲面 $S^+ : z = 1 (x^2 + y^2 \leq 1)$, 方向向下, 则 $\iint_{S^+} x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy =$ _____。
4. 设 $L : x^2 + y^2 = 1$, 则 $\int_L (x + y)^2 dl =$ _____。
5. 设 L^+ 为从 $(0, 0)$ 点到 $(1, 2)$ 点的有向线段, 则 $\int_{L^+} xy^2 dx + x^2 y dy =$ _____。
6. 设 $f(x, y) = x^2 y^2$, 则在点 $(1, 1)$ 处, $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) =$ _____。
7. 设 $\vec{F}(x, y, z) = (yz, zx, xy)$, 则 $\operatorname{rot} \vec{F}(x, y, z) =$ _____。
8. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n!}$ 的收敛性为_____。(填“绝对收敛”, “条件收敛”或“发散”)
9. 设 2π 周期函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-\pi, 0) \\ 0, & x \in [0, \pi) \end{cases}$ 的形式 Fourier 级数的和函数为 $S(x)$, 则 $S(0) =$ _____。
10. 设 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数, $f(x) = x, x \in [0, 1]$ 。若 $f(x)$ 的形式 Fourier 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$, 则 $b_n =$ _____。

二. 解答题 (共 6 题) (请写出详细的计算过程和必要的根据!)

11. 已知曲线积分 $\int_{L(A)}^{(B)} (e^x \sin y - x - y) dx + (e^x \cos y - ax) dy$ 与路径无关。
(I) 求 a 的值;
(II) 求 $\int_{(0,0)}^{(2,\pi)} (e^x \sin y - x - y) dx + (e^x \cos y - ax) dy$ 。
12. 设 Ω 为由 $z = 1 - (x^2 + y^2)$ 和 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 围成的空间有界区域, 求 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$ 。
13. 求幂级数 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ 的收敛半径及和函数。

14. 设 S^+ 为包含两点 $(-1,0,0), (1,0,0)$ 在其内的逐片光滑的正则闭曲面, 方向向外, 记

$$\vec{r}_1 = (-1,0,0), \quad \vec{r}_2 = (1,0,0), \quad \vec{r} = (x,y,z), \quad \text{函数 } \vec{F}(x,y,z) = a \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{\|\vec{r} - \vec{r}_1\|^3} + b \frac{\vec{r} - \vec{r}_2}{\|\vec{r} - \vec{r}_2\|^3}, \quad \text{其中 } a, b$$

为常数。求 $\iint_{S^+} \vec{F} \cdot d\vec{S}$ 。

15. 计算 $\iint_D \cos \frac{x}{x+y} dx dy$, 其中 $D = \left\{ (x,y) \mid 1 \leq x+y \leq 3, 0 \leq \frac{x}{x+y} \leq 1 \right\}$ 。

16. 设 $\Omega = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, $0 < T \leq +\infty$ 。

(I) 若 $u, v \in C^{(2)}(\Omega)$, 记 $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right)$, \vec{n} 为 Ω 边界 $\partial\Omega$ 的外

法向量, 证明: $\iiint_{\Omega} v \Delta u dx dy dz = \iint_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS - \iiint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx dy dz$;

(II) 设 $f(x,y,z,t) \in C^{(1)}(\Omega \times [0,T])$, 证明: $\forall t \in [0,T]$,

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} f(x,y,z,t) dx dy dz = \iiint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial t} dx dy dz;$$

(III) 设 $w(x,y,z,t) \in C^{(2)}(\Omega \times [0,T])$, 满足:

(1) $\frac{\partial w}{\partial t} = \Delta w + w^3$; (2) 当 $(x,y,z) \in \partial\Omega$ 时, $\frac{\partial w}{\partial t}(x,y,z,t) \equiv 0, \quad \forall t \in [0,T]$;

记 $\|\nabla w\| = \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2}$, 证明:

$$F(t) = \iiint_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \|\nabla w\|^2 - \frac{1}{4} w^4 \right) dx dy dz \text{ 在 } [0,T] \text{ 上为单调递减函数。}$$

三. 附加题

称向量场 $\vec{F}: D \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ 是以 O 为中心的有心力场, 若 $\vec{F}(\vec{r}) \parallel \vec{r}$ ($\forall \vec{r} \in D$)。

(I) 证明 $C^{(1)}$ 类有心力场 \vec{F} 是保守场当且仅当 $\|\vec{F}(\vec{r})\|$ 只与 $r = \|\vec{r}\|$ 有关;

(II) (I) 中结论对 3 维空间中的 $C^{(1)}$ 类有心力场是否依然成立?

