任意项级数的收敛性：说明绝对 or 条件收敛

$$\sum_{k=1}^{n} \cos k = \frac{\sin(n+\frac{1}{2}) - \sin\frac{1}{2}}{2\sin\frac{1}{2}}.$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sin k = \frac{\cos\frac{1}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})}{2\sin\frac{1}{2}}.$$

对此类问题的本质解法：

$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{trig}\, tk$. 则乘以 $2\sin\frac{t}{2}$，步长的一半

$|\cos nx| \geq \cos^2 nx = \frac{1+\cos 2nx}{2}$

$\cos(n\pi+\alpha) = (-1)^n \cdot \cos\alpha$, $\sin(n\pi+\alpha) = (-1)^n \cdot \sin\alpha$

换极坐标／球／柱坐标后，φ，θ 的取值范围要格外注意

不要对 II 型积分用对称性，不要对 I 型积分换系

Poisson：$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

散度／div：$\nabla\cdot$，得到数量函数
旋度／rot：$\nabla\times$，得到向量函数
梯度／grad：∇，得到向量函数

① $\nabla\times(\nabla f) = 0$

② $\nabla\cdot(\nabla\times f) = 0$.

③ $\nabla\cdot(\nabla f) = \Delta f = f''_{xx} + f''_{yy}$

记不记得

$\mathrm{div}\,\mathrm{grad} f = f''_{xx} + f''_{yy}$

幂级数：
① 求展开：积分／微分 ⇒ 转化为已知形式
② 求和函数：积分／微分 ⇒ 同样也
③ 求收敛域：在端点处常用 taylor exp 证明 $\lim_{n\to\infty} a^n x^n \neq 0$.

1. 求 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \sqrt[n]{n}} \cdot \left(\frac{x}{1+2x}\right)^n$ 的收敛域

令 $\frac{x}{1+2x} = y$. $x \neq -\frac{1}{2}$ 变量替换 anyway you like

但反解要求对

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n} \cdot n}{(n+1)\sqrt[n+1]{n+1}} = 1$$

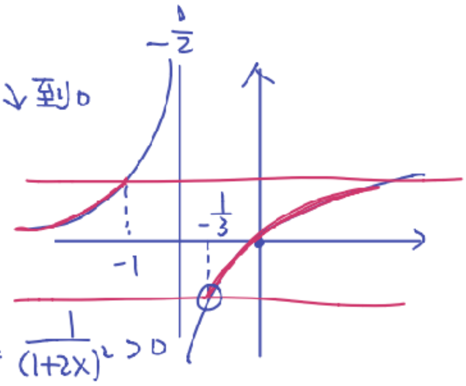
当 $y=1$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt[n]{n}}$ =

n足够大时，$\sqrt[n]{n}\to 1$. ∴ $\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ 关于n ↓到0

∴收敛

当 $y=-1$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ 发散

∴收敛域 $y\in(-1,1]$.



令 $f(x)=\frac{x}{1+2x}$，则 $f'(x)=\frac{1+2x-2x}{(1+2x)^2}=\frac{1}{(1+2x)^2}>0$

$\frac{x}{1+2x}=-1 \Rightarrow 1+2x=-x \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$，$\frac{x}{1+2x}=1 \Rightarrow 1+2x=x \Rightarrow x=-1$

∴ $x\le -1$ 或 $x>-\frac{1}{3}$.

2、 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+1}x^{4n+3}$ 的和函数?

$= x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$

一旦对一部分进行了积分/求导
则反求导/积分时当然就不能提系数了!

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n}=x^4+x^8+x^{12}+\dots=x^4(1+x^4+x^8+\dots)$$
$$=x^4\cdot\frac{1}{1-x^4}$$

$$\therefore \int_0^x\frac{t^4-1+1}{1-t^4}dt=\int_0^x -1+\frac{1}{1-t^4}dt$$
$$=-x+\frac{1}{2}\int_0^x\frac{1}{1+t^2}+\frac{1}{1-t^2}dt$$
$$=-x+\frac{1}{2}\cdot\arctan t\Big|_0^x+\frac{1}{4}\int_0^x\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}dt$$
$$=-x+\frac{1}{2}\arctan x+\frac{1}{4}\ln(1+x)-\frac{1}{4}\ln(1-x)$$

$$\therefore S(x)=-x^3+\frac{x^2}{2}\arctan x+\frac{x^2}{4}\ln(1+x)-\frac{x^2}{4}\ln(1-x)$$

$$x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}=x^2S_1(x)$$

$$S_1'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^4=\frac{x^4}{1-x^4} \quad \therefore S_1(x)=\int_0^x\frac{t^4}{1-t^4}dt$$
$$=\int_0^x 1-\frac{1}{1-t^4}dt$$
$$=x-\frac{1}{2}\int_0^x\frac{1}{1+t^2}+\frac{1}{1-t^2}dt$$
$$=x-\frac{1}{2}\arctan x-\cancel{\frac{1}{2}}\,\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

$$\int\frac{1}{1-x^2}dx=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

3、 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=?$

令 $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$，求 $S(1)$.

对 $S(x)$ 求导，$S'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot x^{2n}=1-x^2+x^4-\dots=\frac{1}{1+x^2}$

∴ $S(x)=\arctan x$　　$S(1)=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$.

我认为：当分母为$n!$的邻项，如$(n-1)!$，$(n+1)!$时，几乎会有相同的思路
——凑展开

① $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{(n+1)!}$ 联想到e^x的展开，但如何凑回去？

$\to A$　　$2A=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$ 很好，不过少了项，一开始我竟换元为了 $t=n+1$，则 $\sum_{t=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}$ 这错的离谱，因为 $t=n+1$，则 $n=1$时，$t=2$．　$2A=\sum_{t=2}^{\infty}\frac{2^t}{t!}$ 掉了两项

但本质上，检测掉了几项的方法为写一下，看分母

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\cdots$ 分母从$0!$开始才是e^x．

2．为什么这道题不适合用 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n+1)!}x^n$ 求$n+1$次导再积回去？

因为$n+1$是在变的，我们用的求导 or 积分法均应求有限次

② $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!\,2^n}x^n$ 求收敛域与和函数

① 换元 $y=\frac{x}{2}$，$a_n=\frac{n^2}{n!}$　$\frac{a_{n+1}}{a_n}=+\infty$．收敛域为R（实际上因为我们已知了必与$e^x$有关，而$e^x$收敛域为R，则一定收敛域R，但其他题算出的收敛域不为R还应 $\frac{x}{2}=y$还元x）

② 如果没有n^2，剩下部分非常好，那么如何处理n^2？

A．$\frac{n^2}{n!}=\frac{n}{(n-1)!}$　　B．分母上的$n-1$，可以通过$\frac{x^{n-1}}{n-1}$求导处理　C．分子上的$n-1$，可以通过对x^{n-2}积分处理　C．而由于x与积分无关，故x的指数可自由控制

方法一．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot y^n}{(n-1)!}=y\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot y^{n-1}}{(n-1)!}=y\cdot S_1(y)$ 接下来先积分再求导处理 $S_1(y)$

写一写，没漏项

$\int_0^y S_1(t)\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^y\frac{n\cdot t^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{(n-1)!}=y\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^{n-1}}{(n-1)!}=y\left(\frac{y^0}{0!}+\frac{y^1}{1!}\cdots\right)=y\cdot e^y$

故 $S_1(y)=(y\cdot e^y)'=e^y(1+y)$　∴原式$=y\cdot S_1(y)=(y^2+y)\cdot e^y$

代入 $y=\frac{x}{2}$ 有$\left(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{x}{2}}$

C．如果想不到处理n^2，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\cdot y^n}{n!}=y\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\cdot y^{n-1}}{n!}=y\cdot S_1(y)$

$\int_0^y S_1(t)\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot y^n}{n!}=y\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot y^{n-1}}{n!}=y\cdot S_2(y)$　$\int_0^y S_2(t)\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n!}=e^y-1$

$\therefore S_2(y)=e^y$　$\therefore\int_0^y S_1(t)\,dt=e^y\cdot y$　$\therefore S_1(y)=e^y(y+1)$　∴原式$=e^y(y^2+y)$

积两次分也可以．

总体上：把握大方向，e^x展开变形．

细节上：有限次求导处理杂项

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$ 大方向不变 e^x

写一写,漏2项

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot x^{n-1}}{(n+1)!}=S(x)$ $\int_0^x S(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}=\frac{1}{x}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)$

$=\frac{1}{x}(e^x-x-1)$ $\therefore S(x)=\left(\int_0^x S(t)dt\right)'=\left(\frac{e^x}{x}-1-\frac{1}{x}\right)'=e^x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{x^2}$

代入 $x=1$ 为1.

特例: $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$ 叫

①有限求导 ② $n=0\to n=1$, 换项 ③写一写 ④ODE

ODE复习

① 积分因子法:

$y'+P(x)y=Q(x)$ (y'前系数为1)

① 先算积分因子:

$e^{\int P(x)dx}=f(x)$

② $y'f(x)+P(x)\cdot f(x)\cdot y=f(x)\cdot Q(x)$

$\therefore (y\cdot e^{\int P(x)dx})'=e^{\int P(x)dx}Q(x)$

$\therefore y\cdot e^{\int P(x)dx}=\int[Q(x)\,e^{\int P(x)dx}]$

例: $x'+\frac{1-2y}{y^2}x-1=0$

$x'+\frac{1-2y}{y^2}x=1$

积分因子: $e^{\int\frac{1-2y}{y^2}dy}=e^{-\frac{1}{y}-2\ln|y|}=\frac{1}{e^{\frac{1}{y}}\cdot y^2}=f(y)$

$(f(y)\cdot x)'=f(y)$

$\int f(y)dy=\int e^{-\frac{1}{y}}\cdot y^{-2}dy=\int e^{-\frac{1}{y}}d\left(-\frac{1}{y}\right)=e^{-\frac{1}{y}}$

$\therefore e^{-\frac{1}{y}}\cdot\frac{1}{y^2}\cdot x=e^{-\frac{1}{y}}+C$

$\therefore x=y^2+C\cdot y^2e^{\frac{1}{y}}$

② 高阶常系数 $x=x(t)$

$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_nx^{(0)}=0$

n是求导次数

特征根方程:

$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n=0$

$\Rightarrow \lambda_1\ (AM=m_1)$

$\lambda_2\ (AM=m_2)$

……

复根成对出现 $\lambda_n=\alpha\pm\beta i$.(重数为$m_n$)

解空间:

$e^{\lambda_1t},\ t\cdot e^{\lambda_1t},\ \cdots,\ t^{m_1-1}\cdot e^{\lambda_1t}$

$e^{\alpha}\cos(\beta t),\ \cdots,\ t^{m_n-1}e^{\alpha}\cos(\beta t)$

$e^{\alpha}\sin(\beta t),\ \cdots,\ t^{m_n-1}e^{\alpha}\sin\beta(t)$

EX. $S^{(4)}(x)-S(x)=0$, 则 $\lambda^4-1=0$

$(\lambda^2+1)(\lambda-1)(\lambda+1)=0$

$\lambda=1, AM=1$ $\lambda=-1, AM=1$

$\lambda=\pm i, AM=1$

$S(x)=C_1e^{-x}+C_2e^x+C_3\cos x+C_4\sin x$