第十二次习题课 级数

一．常数项级数

1. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则必收敛的级数为［　　　　］.

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{u_n}{n}$。（B）$\sum_{n=1}^{\infty} u_n{}^2$。（C）$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n - u_{2n})$。（D）$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + u_{n+1})$。

2. 已知 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n = 2, \sum_{n=1}^{\infty}u_{2n-1} = 5$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n =$________.

3. 设 $0 < a_n < \frac{1}{n},$ 则下列级数中肯定收敛的是［　　　　］.

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$； (B) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$； (C) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$； (D) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^2 \ln n$

4. 设常数 $\lambda \neq 0$， $a_n > 0$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n (n\tan\frac{\lambda}{n})a_{2n}$［　　　　］.

（A）绝对收敛。（B）条件收敛。（C）发散。（D）收敛性与 λ 有关。

5. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则［　　　　］

(A) 极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 小于 1; (B) 极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 小于等于 1;

(C) 若极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在, 其值小于 1; (D) 若极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在, 其值小于等于 1;

6. 设参数 $a \neq 0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2 + a^2})$ 收敛性的结论是［　　　］

（A）绝对收敛。（B）条件收敛。
（C）发散。　　（D）与参数 $\boldsymbol{a}$ 取值有关。

7. （正常数项级数收敛的判定与其项趋于零阶的估计问题）

设 $a_n > 0, p > 0, \lim_{n\to\infty}\left[n^p (e^{\frac{1}{n}} - 1)a_n\right] = 1$, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 p 的取值范围是____________________.

8. 判断$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n}$ 的收敛性.

9. 设$a_n > 0$，单调减且级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散，试问$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{a_n+1})^n$ 是否收敛？证明结论。

10. 讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)$ 的收敛性 $(p>0)$.

11. 常数项级数和积分的估值

设$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xdx$，讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^p}$ 的收敛性.

12. 设两条抛物线$y=nx^2+\frac{1}{n}$和$y=(n+1)x^2+\frac{1}{n+1}$，

记他们交点坐标的绝对值为a_n。

（1）求这两条抛物线所围成的平面图形的面积

（2）求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n}{a_n}$的和。

13. 讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+x}$ （$x\neq -n$）的收敛性

14. 讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{x}{n}$的收敛性

15. 讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}$的收敛性

16. 讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4^n\sin^{2n}x}{n}$的收敛性

17. 讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n+1)x\cos(n-1)x}{n^p}$的收敛性

18. 讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{a}{1+a^n}$ （$a>0$）的收敛性

19. 设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$收敛，{ x_n } 单调减少，利用 Cauchy 收敛原理证明：$\lim_{n\to\infty}nx_n=0$。

20. 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$收敛，$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=1$，问级数$\sum_{n=1}^{\infty}y_n$是否收敛?

21. 设正项数列$\{x_n\}$单调减少，且级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x_n$发散。问级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+x_n}\right)^n$是否收敛？并说明理由。

22. 若 { nx_n } 收敛，$\sum_{n=2}^{\infty}n(x_n-x_{n-1})$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$收敛。

23. 设 $f(x)$ 在$[-1,1]$上具有二阶连续导数，且

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0\text{ 。}$$

证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$绝对收敛。

24. 已知任意项级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$发散，证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)x_n$也发散。

25. 利用

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\ \rightarrow\ \gamma\quad(n\to\infty),$$

其中γ是 Euler 常数，求下述$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$的更序级数的和：

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots\text{。}$$