（科目：　　　）清华大学数学作业纸

编号：　　　　班级：　　　　姓名：　　　　第　　页

7. 对任意 a, b，$ab = a^{-1}b \overset{(*)}{=} (b^{-1}a)^{-1} = b^{-1}a = ba$.

故 G 是交换群.

$(*)$：$(b^{-1}a)x = e$，$bb^{-1}ax = be$，$eax = be$，

$a^{-1}ax = a^{-1}b$，$x = a^{-1}b$.

8. $\{km \mid k \in Z\}$ 非空. $km_1 + km_2 = k(m_1 + m_2) \in \{km \mid k \in Z\}$ ∴ $(G, +)$ 是代数结构.

$(km_1 + km_2) + km_3 = km_1 + (km_2 + km_3) = k(m_1 + m_2 + m_3)$

∴ G 对 $+$ 满足结合律，$(G, +)$ 是半群.

G 中有单位元 0，$0 + km_1 = km_1 + 0 = km_1$.

任意元素 km_1 都有逆元 $k(-m_1)$. $k(-m_1) + km_1 = km_1 + k(-m_1) = 0$.

∴ $(G, +)$ 是群.

11. 设 $S = \{(a,b) \mid a, b \in R, a \neq 0\}$. 则 $S \neq \phi$，

∵ $a, b, c, d \in R$，$a \neq 0, c \neq 0$ $\Rightarrow ac \in R$ 且 $cb + d \in R$，$ac \neq 0$ ∴ S 对该运算封闭.

$((a,b)(c,d))(e,f) = (ac, cb+d)(e,f) = (ace, ecb + ed + f)$

$(a,b)((c,d)(e,f)) = (a,b)(ce, ed+f) = (ace, bce + ed + f)$

∴ 二者相等，该运算满足结合律.

$(a,b)(1,0) = (a,b)$　$(1,0)(a,b) = (a,b)$　∴ $(1,0)$ 是单位元.

$\forall a, b \in R\ (a \neq 0)$，$(a,b)$ 的逆元是 $\left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right)$，$\frac{1}{a} \neq 0$，故 $\left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right) \in S$.

∴ G 是群.

必要性

12. 若 b 是 a 的逆元，则 $aba=(ab)a=ea=a$.

$ab^2a=(ab)(ba)=ee=e$

充分性. 若 $aba=a$ 且 $ab^2a=e$.

则 a 存在左逆元 ab^2，右逆元 b^2a. $\therefore a$ 可逆，且 $ab^2=b^2a$.

设 a^{-1} 为 a 的逆元，则 $abaa^{-1}=aa^{-1}$，$ab=e$.

$\therefore b$ 是 a 的右逆元，即 a 的逆元.

$\because x^{-1}hx\in G \ \therefore H_1\in G$.

13. $\forall h_1,h_2\in H$，$(x^{-1}h_1x)(x^{-1}h_2x)=x^{-1}h_1h_2x$.

$\because h_1h_2\in H \ \therefore x^{-1}h_1h_2x\in H_1$. $\therefore H_1$ 满足封闭性.

G 中的单位元 e 在 H 中. $\because x^{-1}ex=e \ \therefore e\in H_1$

$\therefore x^{-1}ex\in H_1$

H_1 中的任一元素 $x^{-1}h_1x$，都有逆元 $x^{-1}h_1^{-1}x$.

$\because h_1^{-1}\in H \ \therefore x^{-1}h_1^{-1}\in H_1$. $\therefore H_1$ 中任一元素都在 H_1 内有逆元

$\therefore H_1$ 是 G 的子群.

15. Klein 四元群的运算数集合为 (e,a,b,c)，运算规则为

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

$e^1=e^2=e^3=e^4=e$

$a^1=a \quad a^2=e \quad a^3=a \quad a^4=e$

$b^1=b \quad b^2=e \quad b^3=b \quad b^4=e$

$c^1=c \quad c^2=e \quad c^3=c \quad c^4=e$

$\therefore$ Klein 四元群没有生成元. 是非循环群.