第六次习题课　含参积分

一.　含参积分

例.1 设 $f(x)=\int_0^x\left[\int_t^x e^{-s^2}ds\right]dt$，求 $f'(x)$ 与 $f(x)$.

例.2 求 $f'(x)$，其中 $f(x)=\int_{\sin x}^{\cos x} e^{x\sqrt{1-y^2}}dy$.

例.3 求 $\lim\limits_{a\to 0}\int_a^{1+a}\dfrac{dx}{1+x^2+a^2}$

例.4 能否交换顺序? $\lim\limits_{y\to 0}\int_0^1 \dfrac{x}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y^2}}dx$

例.5 求两个 Laplace 积分：$I(\beta)=\int_0^{+\infty}\dfrac{\cos\beta x}{x^2+\alpha^2}dx,\quad J(\beta)=\int_0^{+\infty}\dfrac{x\sin\beta x}{x^2+\alpha^2}dx,\quad \alpha>0$。

例.6

计算积分 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos 2\beta x dx$。

例.7 设 $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$，　$(x,y)\in D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0<y\le 1\}$，$\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy$

与 $\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx$ 是否相等?

例.8 计算积分 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\dfrac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\dfrac{dx}{\cos x},\quad (|a|<1)$

例.9 设 $f(t)=\int_0^1\ln\sqrt{x^2+t^2}dx,\quad (0\le t\le 1)$，求 $f_+'(0)$。

例.10　证明积分 $I(t)=\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin(tx)}{x}dx$ 在区间 $[-a,a]$ 上非一致连续，其中 $a>0$。（注：这是习题 2.1 第 8 题，第 104 页）（提示：利用 Dirichlet 积分公式 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin u}{u}du=\dfrac{\pi}{2}$）。

例.11 利用积分号下求导方法，计算积分 $I(a)=\int_0^{\pi/2}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}dx$。（课本第二章总复习题第 4 题（2），page 115）.

例.12 设 $f(x,t)$ 在区域 $[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ 上连续。假设积分 $I(t)=\int\limits_a^{+\infty}f(x,t)dx$ 对任意 $t\in[\alpha,\beta)$ 均收敛，但积分 $\int\limits_a^{+\infty}f(x,\beta)dx$ 发散。证明积分 $I(t)$ 关于 $t\in[\alpha,\beta)$ 非一致收敛。（课本习题 2.1 题 6，page 103-104）.