xSylvestor方程

杨sir说了必考，考到就用wps的查找功能直接搜索

Sylvester’s equation :page 40 of lecture note && page 52 of lecture note

内容：对$m \times m$矩阵A和$n \times n$矩阵B，且A，B没有共同特征值，那么对于任意的$m \times n$矩阵C，方程AX-XB=C总**有且仅有**一个解，解即为一个$m \times n$的矩阵X。

前期工作

Sylvester’s equation 本身用于解决这样的问题：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} .$$

$$\text{1. Find a matrix P such that PAP }^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} .$$

看看题目需不需要我们证明解唯一，如果不需要证明，仍然需要说明

$\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$的**A与B没有相同的特征值。**然后就可以设

$$P = \begin{bmatrix} I & X \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} I & -X \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

来解$AX - XB = C$，注意，说明了方程的解唯一后，**还是需要硬解这个方程。**

详见第四次作业第一题。

也就是说，解$A_1X - XA_2 = B$等价于把矩阵$\begin{bmatrix} A_1 & B \\ & A_2 \end{bmatrix}$对角化为$\begin{bmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{bmatrix}$.

推论：当A_1和A_2没有common eigenvalue时，以上两个矩阵相似，具有相同的JNF。

解的唯一性

在第41(47/124)页，都很好理解，唯一需要注意的是：

结合那一页的讲义。

$p_A(A) = 0$，A的特征多项式作用在A上得到0矩阵，因为矩阵函数等价于作用在A的Jordan上，关键是A的特征值本身就是p_A的所有的根，且同一个λ对应的jordan块的大小就是p_A的根的次数。比如$p_A = (x-1)^4$，那么p_A作用在A的Jordan上，那么：

$$J=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda\end{bmatrix}$$

$$f(J)=\begin{bmatrix}f(\lambda) & \frac{1}{1!}f'(\lambda) & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(\lambda) \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \frac{1}{1!}f'(\lambda) \\ & & & f(\lambda)\end{bmatrix}$$

必然为0！所以说$p_A(A)=0$

同样的，由于B和A没有相同的特征值，故而$f(J_B)$不为0，从能够推导出p_A(B)可逆。