（科目：　　）数 学 作 业 纸

编号：　　班级：　　姓名：　　第　页

8. 先证G连通. 假设G不连通,则可分离出G的一个有k个结点的极大连通块 $(1\le k<n)$.

则G的边数 $\le \frac{1}{2}k(k-1)+\frac{1}{2}(n-k)(n-k-1)$

$=\frac{1}{2}(k^2-k+n^2-nk-n-nk+k^2+k)=\frac{1}{2}(n^2-(2k+1)n+2k^2)$

~~$=\frac{1}{2}(n(n-1)-2k(n-k))<\frac{1}{2}n$~~

又 $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2=\frac{1}{2}(n^2-3n+2+4)=\frac{1}{2}(n^2-3n+6)$.

相减得 G的边数 − m的最小值 $=\frac{1}{2}((2-2k)n+2k^2-6)$

$=(1-k)n+k^2-3=k(k-n)+n-3\le -n+n-3=-3$.

即 G的边数 < m的最小值. 矛盾. 故G连通.

取G的一条最长初级道路(含l个结点). 假设该道路不是初级回路.

则道路上的非端点至多与道路上的1个端点有边, 道路外的点无边与至少1端点,

则G的边数 $\le \frac{1}{2}n(n-1)-(n-l)-(l-2)-1$

$=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n-n+l-l+2-1=\frac{1}{2}n^2-\frac{3}{2}n+1$.

$=\frac{1}{2}(n^2-3n+2)=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$. 矛盾.

~~$\le\frac{1}{2}n^2-\frac{5}{2}n+n+l$~~

故该道路是初级回路.

若 $l=n$ 则该回路为H回路.

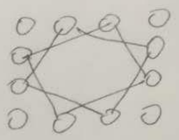
若 $l<n$. 则必存在回路外的一个点v与回路内的某个点u, 使u,v间有边(否则G不连通). 则存在从u出发的长度为l+1的初级道路. 由上述证明, 该道路仍为回路. 重复有限次后, 必有 $l=n$. 故G中存在H回路.

（科目：　　）数 学 作 业 纸

编号：　　班级：　　姓名：　　第　页

2. 将棋盘格子作为结点, 马步可跳的格子之间连边. 即判定该图是否存在H回路.

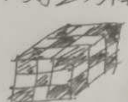
删去中间4个结点及其连边后如图, 有6个连通支, 即新增了5个,



大于删去结点的个数.

故不可能恰好经过每一个方格一次后回到原处.

12. 对立方体黑白染色, 相邻的小立方块颜色不同. 如图.



则角上为黑色, 中心为白色.

通过27个小立方体需移动26次, 每次移动必变换颜色,

故应停在黑色小立方体上. 而中心为白色. 故不可能.