第二次习题课：复合函数的链式法则、高阶偏导数、方向导数

(1) 多元复合函数的链式法则

设二元函数 $z=f(u,v)$ 在点 (u_0,v_0) 处可微，二元函数 $u=u(x,y),v=v(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处存在偏导数，并且 $u_0=u(x_0,y_0),\ v_0=v(x_0,y_0)$，则复合函数 $z=f(u(x,y),v(x,y))$ 在点 (x_0,y_0) 处存在偏导数，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}=\frac{\partial f(u_0,v_0)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}+\frac{\partial f(u_0,v_0)}{\partial v}\cdot\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}=\frac{\partial f(u_0,v_0)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}+\frac{\partial f(u_0,v_0)}{\partial v}\cdot\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}$$

(2) 多元函数一阶微分形式的不变性：设 $z=f(u,v),\ u=u(x,y),\ v=v(x,y)$ 均连续可微，则将 z 看成 x,y 的函数，有 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$.

另一方面，由复合函数的链式法则，$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$，代入

$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$，得

$$\begin{aligned}dz&=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy\\&=\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)+\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)\\&=\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv\end{aligned}$$

我们将 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv$ 称为一阶微分的形式不变性。

1. 已知函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 决定，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解：方程 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 两边分别对 x，y 求偏导，得 $2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}=0$，$2y+2z\frac{\partial z}{\partial y}=0$，

故 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}$，这样 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{y}{z^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{xy}{z^3}$.

2. 设 $g(x)=f\left(x,\varphi\left(x^2,x^2\right)\right)$，其中函数 f 和 φ 的二阶偏导数连续，求 $\frac{d^2g(x)}{dx^2}$.

解：由 $g(x)=f\left(x,\varphi\left(x^2,x^2\right)\right)$ 两边对 x 求导，得

$$\frac{dg(x)}{dx}=f_x'\left(x,\phi\left(x^2,x^2\right)\right)+2f_\phi'\left(x,\phi\left(x^2,x^2\right)\right)\left(\phi_1'\left(x^2,x^2\right)+\phi_2'\left(x^2,x^2\right)\right)x,$$

两边再对 x 求导，得

$$\frac{d^2g(x)}{dx^2}=f_{xx}''+4f_{x\phi}''(\phi_1'+\phi_2')x+4f_{\phi\phi}''(\phi_1'+\phi_2')^2x^2+4f_\phi'(\phi_{11}''+2\phi_{12}''+\phi_{22}'')x^2+2f_\phi'(\phi_1'+\phi_2'),$$

其中符号 ϕ_1'，ϕ_2' 分别表示 ϕ 对其第一个中间变量和第二个中间变量求偏导。

3. 设 $z=z(x,y)$ 二阶连续可微，并且满足方程 $A\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2B\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+C\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

若令 $\begin{cases}u=x+\alpha y\\ v=x+\beta y\end{cases}$，试确定 α,β 为何值时原方程可变为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$.

解：因为 $z=z(x,y)$ 二阶连续可微，因此二阶混合偏导与求导次序无关。将 x,y 看成自变量，u,v 看成中间变量，利用链式法则得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\alpha\frac{\partial z}{\partial u}+\beta\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha\frac{\partial z}{\partial u}+\beta\frac{\partial z}{\partial v}\right)=\alpha^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\alpha\beta\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\beta^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha\frac{\partial z}{\partial u}+\beta\frac{\partial z}{\partial v}\right)=\alpha\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(\alpha+\beta)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\beta\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

由 $0=A\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2B\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+C\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 得到

$$\left(A+2B\alpha+C\alpha^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\left(A+B(\alpha+\beta)+C\alpha\beta\right)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\left(A+2B\beta+C\beta^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0\quad\cdots(*)$$

故只要选取 α,β 使得 $\begin{cases}A+2B\alpha+C\alpha^2=0\\ A+2B\beta+C\beta^2=0\end{cases}$，即得 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$.

这样问题转化为方程 $A+2Bt+Ct^2=0$ 有两不同实根，即要求 $B^2-AC>0$.

令 $\alpha=\dfrac{-B+\sqrt{B^2-AC}}{C}$，$\beta=\dfrac{-B-\sqrt{B^2-AC}}{C}$. 将其代入方程(*)，可知 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}$ 的系数不为零，从而 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$.

4. 设 $u(x,y)\in C^2$，又 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，$u(x,2x)=x$，$u_x'(x,2x)=x^2$，求 $u_{xx}''(x,2x)$，

$u_{xy}''(x,2x)$，$u_{yy}''(x,2x)$.

解：因为$\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,2x)=x^2$，两边对$x$求导，得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,2x)+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}(x,2x)\cdot 2=2x. \qquad (1)$$

由$u(x,2x)=x$，两边对x求导，得 $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,2x)+\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,2x)\cdot 2=1$，

所以，$\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,2x)=\dfrac{1-x^2}{2}$. 此式两边再对$x$求导，得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(x,2x)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,2x)\cdot 2=-x. \qquad (2)$$

由已知，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,2x)-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,2x)=0$， (3)

因为$u(x,y)\in C^2$，因此$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(x,2x)=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}(x,2x)$. 现在（1），（2），（3）联立解得：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,2x)=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,2x)=-\frac{4}{3}x,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(x,2x)=\frac{5}{3}x.$$

5. 设 f 可微，且$z=x^3 f\left(xy,\dfrac{y}{x}\right)$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解：$dz=f\cdot 3x^2dx+x^3df=3x^2fdx+x^3\left[f_1'd(xy)+f_2'd\left(\dfrac{y}{x}\right)\right]$

$$=3x^2fdx+x^3\left[f_1'(xdy+ydx+f_2'\frac{xdy-ydx}{x^2}\right]$$

$$=\left(3x^2f+x^3yf_1'-xyf_2'\right)dx+\left(x^4f_1'+x^2f_2'\right)dy$$

由一阶微分的形式不变性，

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\left(3x^2f+x^3yf_1'-xyf_2'\right)dx+\left(x^4f_1'+x^2f_2'\right)dy$$

故$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\left(3x^2f+x^3yf_1'-xyf_2'\right)$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\left(x^4f_1'+x^2f_2'\right)$.

其中符号 f_1'，f_2'分别表示函数$f(x,y)$分别对第一个中间变量和第二个中间变量求偏导。

6. 若 $f_x'(x,y)$, $f_y'(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 的邻域内存在，且在 $P_0(x_0,y_0)$ 可微，则 $f_{xy}''(P_0)=f_{yx}''(P_0)$.

证明：令 $g(h)=f(x_0+h,y_0+h)-f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0+h)+f(x_0,y_0)$. 对某个充分小的固定的 $h\neq 0$，令 $\varphi(x)=f(x,y_0+h)-f(x,y_0)$. 则条件表明 $\varphi(x)$ 可导。 由一元函数的微分中值定理，存在 $0<\theta_1<1$ 使得

$$g(h)=\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)=\varphi'(x_0+\theta_1 h)h=[f_x'(x_0+\theta_1 h,y_0+h)-f_x'(x_0+\theta_1 h,y_0)]h.$$

又因为 $f_x'(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 可微，故

$f_x'(x_0+\theta_1 h,y_0+h)=f_x'(x_0,y_0)+f_{xx}''(x_0,y_0)\theta_1 h+f_{xy}''(x_0,y_0)h+o(h)$ 且

$f_x'(x_0+\theta_1 h,y_0)=f_x'(x_0,y_0)+f_{xx}''(x_0,y_0)\theta_1 h+o(h)$，从而

$$g(h)=f_{xy}''(x_0,y_0)h^2+o(h^2)\ \cdots\cdots(1)$$

令 $\psi(y)=f(x_0+h,y)-f(x_0,y)$. 则 $\psi(y)$ 可导，且存在 $0<\theta_2<1$ 使得

$g(h)=\psi(y_0+h)-\psi(y_0)=\psi'(y_0+\theta_2 h)h=[f_y'(x_0+h,y_0+\theta_2 h)-f_y'(x_0,y_0+\theta_2 h)]h.$ 类似地，由 $f_y'(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 可微，得到

$$g(h)=f_{yx}''(x_0,y_0)h^2+o(h^2)\ \cdots\cdots(2)$$

由(1)与(2)，得 $f_{xy}''(P_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(h)}{h^2}=f_{yx}''(P_0)$.

7. 设 $z(x,y)$ 是定义在矩形区域 $D=\{(x,y)|0\le x\le a,0\le y\le b\}$ 上的可微函数。证明:

（1） $z(x,y)=f(y)\Leftrightarrow\forall(x,y)\in D,\dfrac{\partial z}{\partial x}\equiv 0$；

（2） $z(x,y)=f(y)+g(x)\Leftrightarrow\forall(x,y)\in D,\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\equiv 0$。

证明: (1) “$\Rightarrow$”显然.

“$\Leftarrow$” 任取 $x_0\in[0,a]$. 任意固定 $y\in[0,a]$，关于 x 的一元函数 $z(x,y)$ 在以 x 与 x_0 为端点的区间上应用微分中值定理，故存在 ξ 使得

$z(x,y)-z(x_0,y)=\dfrac{\partial z}{\partial x}(\xi,y)(x-x_0)=0,$ 这样 $z(x,y)=z(x_0,y)$，故

$z(x,y)=f(y)$ 与 x 无关.

(2) $\Rightarrow$: 显然.

$\Leftarrow$: 因为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\equiv 0$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=h(y)$ 与 x 无关. 故

$z(x,y)=\int h(y)dy+g(x)=f(y)+g(x)$。

8. 设 n 为整数，若对任意的 $t>0$，$f(tx,ty)=t^n f(x,y)$，则称 f 是 n 次齐次函数。证明：

   可微函数 $f(x,y)$ 是零次齐次函数的充要条件是 $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=0.$

证明：先证必要性。由条件，$f(tx,ty)=f(x,y)\ (\forall t>0)$.

若 f 在坐标原点处有定义，则由 f 的连续性可知 $f(x,y)=f(0,0),\ (\forall(x,y))$.

结论显然成立。现在假设 f 在坐标原点处没有定义。则由复合函数的链式法则，

两边对 t 求导，得 $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)+y\dfrac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)=0$.

令 $t=1$，即得 $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$. 必要性得证。

下证充分性。令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta.$ 则

$$\frac{\partial f}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\sin\theta=\frac{1}{r}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)=0.$$

上式说明 f 在极坐标系中只是 $\theta=\arctan\dfrac{y}{x}$ 的函数，这等价于只是 $\dfrac{y}{x}$ 的函数。可记 $f(x,y)=\phi(\dfrac{y}{x})$。显然 ϕ 是零次齐次函数。

9. 设 $f(x,y)$ 定义在 R^2 上, 若对 x 连续, 对 y 的偏导数在 R^2 上有界, 证明 $f(x,y)$ 是连续函数.

证明：对 $\forall(x_0,y_0)\in R^2$，

$$\begin{aligned}|f(x,y)-f(x_0,y_0)|&=\left|[f(x,y)-f(x,y_0)]+[f(x,y_0)-f(x_0,y_0)]\right|\\&\le|f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|\end{aligned}$$

因为 $f(x,y)$ 对 x 连续，所以 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x,y_0)-f(x_0,y_0)]=0$。

又因为 $f(x,y)$ 对 y 的偏导数在 R^2 上有界，故存在 $M>0$ 使得 $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \le M$. 所以存在 η 使得

$$\left|f(x,y)-f(x,y_0)\right|=\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,\eta)(y-y_0)\right| \le M\,|y-y_0| \to 0, \quad y\to y_0.$$

这样

$$\begin{aligned}&\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\left(f(x,y)-f(x_0,y_0)\right)\\ &=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\left[f(x,y)-f(x,y_0)\right]+\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\left[f(x,y_0)-f(x_0,y_0)\right]=0,\end{aligned}$$

即 $f(x,y)$ 是连续函数.

10. 设 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 可微。已知 $\vec{v}=\vec{i}-\vec{j}$ ， $\vec{u}=-\vec{i}+2\vec{j}$ ，且 $\frac{\partial f(P_0)}{\partial \vec{v}}=2$ ， $\frac{\partial f(P_0)}{\partial \vec{u}}=1$，求 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 的微分。

解：因为 $\vec{v}=\vec{i}-\vec{j}=(1,-1)$， $\vec{u}=-\vec{i}+2\vec{j}=(-1,2)$，且 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 可微，因此

$$2=\frac{\partial f(P_0)}{\partial \vec{v}}=(f_x'(P_0),f_y'(P_0))\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{1}{\sqrt{2}}(f_x'(P_0)-f_y'(P_0)),$$

$$1=\frac{\partial f(P_0)}{\partial \vec{u}}=(f_x'(P_0),f_y'(P_0))\cdot(-\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}})=\frac{1}{\sqrt{5}}(-f_x'(P_0)+2f_y'(P_0)),$$

由此解出 $f_x'(P_0)=4\sqrt{2}+\sqrt{5},\ f_y'(P_0))=2\sqrt{2}+\sqrt{5}.$

所以 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 的微分 $df(P_0)=(4\sqrt{2}+\sqrt{5})dx+(2\sqrt{2}+\sqrt{5})dy.$

11. 设 $f(x,y)$ 为可微函数，$\vec{l_1},\ \vec{l_2}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的一组线性无关的向量。试证：$f(x,y)$ 在任一点 $P(x,y)$ 沿任意向量 $\vec{l}$ 的方向导数 $f_{\vec{l}}'(P)$ 必定能用 $f_{\vec{l_1}}'(P)$ 与 $f_{\vec{l_2}}'(P)$ 线性表示。

证明：令 $\vec{l_1}=(\cos\alpha_1,\cos\beta_1),\ \vec{l_2}=(\cos\alpha_2,\cos\beta_2)$.

因为 $f(x,y)$ 可微，故

$$\begin{cases} f_{\vec{l_1}}'(P)=f_x'(P)\cos\alpha_1+f_y'(P)\cos\beta_1=d_1\\ f_{\vec{l_2}}'(P)=f_x'(P)\cos\alpha_2+f_y'(P)\cos\beta_2=d_2.\end{cases}$$

由于 $\vec{l_1},\ \vec{l_2}$ 线性无关，因此由上式解出 $\begin{pmatrix} f_x'(P)\\ f_y'(P)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha_1 & \cos\beta_1\\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}d_1\\ d_2\end{pmatrix}.$

于是，对任意的向量 $\vec{l}=(\cos\alpha,\cos\beta)$，

$$f_l'(P)=f_x'(P)\cos\alpha+f_y'(P)\cos\beta=\left(\cos\alpha,\quad\cos\beta\right)\begin{pmatrix}f_x'(P)\\ f_y'(P)\end{pmatrix}$$

$$=\left(\cos\alpha,\quad\cos\beta\right)\begin{pmatrix}\cos\alpha_1 & \cos\beta_1\\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}d_1\\ d_2\end{pmatrix}$$

$$=\left(a,\ b\right)\begin{pmatrix}d_1\\ d_2\end{pmatrix},$$

其中$\left(a,\ b\right)=\left(\cos\alpha,\quad\cos\beta\right)\begin{pmatrix}\cos\alpha_1 & \cos\beta_1\\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2\end{pmatrix}^{-1}$.

12. 设在$\mathbb{R}^2$上可微函数$f(x,y)$满足$xf_x'+yf_y'=0$，试证：在极坐标系中f只是θ的函数。

证明：（方法一）令$z=f(x,y)$，$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$.

因为$\dfrac{\partial z}{\partial r}=f_x'\cos\theta+f_y'\sin\theta$，因此$r\dfrac{\partial z}{\partial r}=r\cos\theta f_x'+r\sin\theta f_y'=xf_x'+yf_y'=0$.

当$r\neq 0$时，$\dfrac{\partial z}{\partial r}\equiv 0$，因此$z=f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$与$r$无关。

而当$r=0$时，由于f在原点连续，故由原点出发的任一射线上函数值相等。

故在极坐标系中f只是θ的函数。

方法二：任取$(x,y)\in\mathbb{R}^2$，并令$\vec{r}=(x,y)$. 因为$xf_x'+yf_y'=0$，因此

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial\vec{r}}=\dfrac{1}{\|\vec{r}\|}(xf_x'+yf_y')=0$，即$f$沿着任意方向的方向导数都等于零，

从而f沿着任意方向的函数值不变。

故在极坐标系中，由原点出发的任一射线上函数值相等。

所以在极坐标系中f只是θ的函数。

13. 设$f(x,y)=x^2-xy+y^2$，$P_0(1,1)$. 试求$\dfrac{\partial f(P_0)}{\partial\vec{l}}$，并问：在怎样的方向$\vec{l}$上，方向导数$\dfrac{\partial f(P_0)}{\partial\vec{l}}$分别有最大值、最小值和零值。

解：因为$f(x,y)$可微，且$f_x'(P_0)=(2x-y)|_{(1,1)}=1$，$f_y'(P_0)=(2y-x)|_{(1,1)}=1$，

因此对任意的单位向量$\vec{l}=(\cos\alpha,\cos\beta)$，$\dfrac{\partial f(P_0)}{\partial\vec{l}}=\cos\alpha+\cos\beta.$

当$\vec{l}=(1,1)$是梯度方向时，$\dfrac{\partial f(P_0)}{\partial\vec{l}}=\sqrt{2}$达到最大；

当$\vec{l}=(-1,-1)$时，$\dfrac{\partial f(P_0)}{\partial\vec{l}}=-\sqrt{2}$达到最小；

当$\vec{l}=(1,-1)$或$\vec{l}=(-1,1)$时，即$\alpha=\dfrac{7\pi}{4}$或$\dfrac{3\pi}{4}$时，$\dfrac{\partial f(P_0)}{\partial\vec{l}}=0$.

14. 设a,b是实数，函数$z=2+ax^2+by^2$在点$(3,4)$处的方向导数中，沿$\boldsymbol{l}=-3\mathbf{i}-4\mathbf{j}$的方向

导数最大，最大值为10，求a,b.

解：因为函数可微，我们有$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(3,4)}=6a$，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(3,4)}=8b$，且函数沿着梯度方向的方向导数达到最大，因此梯度单位向量$\boldsymbol{l}^o=\dfrac{1}{5}(-3\mathbf{i}-4\mathbf{j})=(\dfrac{6a}{10},\dfrac{8b}{10})$. 从而$\begin{cases}\dfrac{6a}{10}=-\dfrac{3}{5}\\ \dfrac{8b}{10}=-\dfrac{4}{5},\end{cases}$ 故$\begin{cases}a=-1\\ b=-1.\end{cases}$