离散数学II

—图论第三讲

陈莉
清华大学软件学院
计算机辅助设计、图形与可视化研究所

2021年3月8日

上堂课回顾

- 图的基本概念

  二分图、子图、同构
- 图同构的判定
- 图的常用代数表示方法

邻接矩阵、关联矩阵、边列表、正（逆）向表、邻接表、有向图的十字链表、无向图的邻接多重表

第二章 道路与回路

道路与回路的定义和相关概念

道路与回路的判定方法

欧拉道路与回路

哈密顿道路与回路

旅行商问题与分支定界法

最短路径

关键路径

中国邮路

第二章 道路与回路

- 道路与回路的定义和相关概念
- 道路与回路的判定方法
- 欧拉道路与回路
- 哈密顿道路与回路
- 旅行商问题与分支定界法
- 最短路径
- 关键路径
- 中国邮路

道路与回路：基本概念

- 在图$G=(V, E)$中，经常考虑从一个结点出发，沿着一些边连续移动到另一个结点的问题，这就是路的概念.

道路与回路：基本概念

定义2.1.1

给定图$G=<V,E>$(无向或有向的), G中顶点与边的交替序列：

$P=v_0e_1v_1e_2\ldots e_lv_l$.

若$\forall i(1\leq i\leq l)$, $e_i=(v_{i-1},v_i)$(对于有向图, $e_i=<v_{i-1},v_i>$),

则称P为v_0到v_l的通路, v_0和v_l分别为通路的起点和终点, l为通路的长度.

若$v_0=v_l$, 则称P为回路，也称圈.

长度为奇数的圈称作奇圈,长度为偶数的圈称作偶圈

道路与回路：基本概念

说明

(1) 表示方法

① 按定义用顶点和边的交替序列,

$P=v_0e_1v_1e_2\ldots e_lv_l$

② 用边序列, $P=e_1e_2\ldots e_l$

③ 简单图中, 用顶点序列, $P=v_0v_1\ldots v_l$

(2) 在无向图中, 长度为1的圈由环构成.长度为2的圈由两条重边构成.

在无向简单图中, 所有圈的长度≥3.

在有向图中, 长度为1的圈由环构成.

在有向无自环的图中, 所有圈的长度≥2.

道路与回路：基本概念

定义2.1.2

若通路(回路)中所有边各异，则称为简单通路(简单回路)，

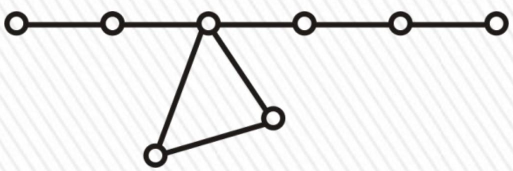
否则称为复杂通路(复杂回路)

若简单通路(回路)中所有顶点(对于回路，除$v_0=v_l$)各异，则称为初级通路或路径(初级回路或圈).

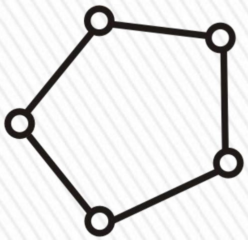
道路与回路：基本概念

(3) 初级通路(回路)是简单通路(回路)，但反之不真

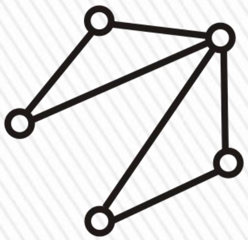
初级通路



非初级的简单通路



初级回路



非初级的
简单回路

道路与回路：基本概念

定理2.1:在无向图$G=(V,E)$中,若任意$v\in V$有$\deg(v)\geq 2$,则G中存在圈.

证明:

不妨设G是简单图.

如果G中存在圈，得证。

如果G中不存在圈，必然可在G中找到一条最长的路径 L: $v_0v_1\ldots v_l$,

由于L是最长路径,与v_0邻接的结点必在L上. 由于$\deg(v_0)\geq 2$, 存在$v_i\,(2\leq i\leq l)$与v_0邻接,则$v_0v_1\ldots v_iv_0$是G中的一个圈.

图的连通性

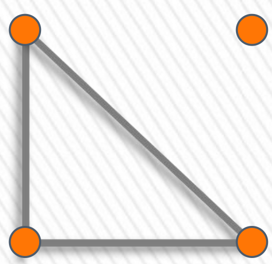
定义2.1.3 设无向图$G=\langle V,E\rangle$, $u,v\in V$

*u*与*v*连通: 若*u*与*v*之间有通路。

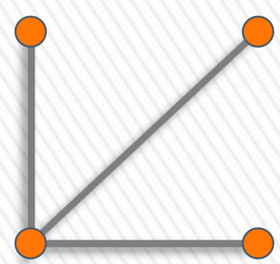
规定: 对任何结点*u*, *u*与*u*是连通的。

连通图: 任意两点都连通的图为连通图. 否则为非连通图。

对于有向图，若不考虑其边的方向，即视之为无向图，若它是连通的，则称*G*是连通图。



非连通图



连通图

有向图的连通性及其分类

设有向图$D=<V,E>$, $u,v\in V$,

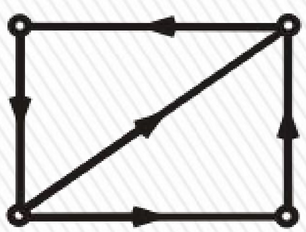
u可达v: u到v有通路. 规定u到自身总是可达的.

u与v相互可达: u可达v且v可达u

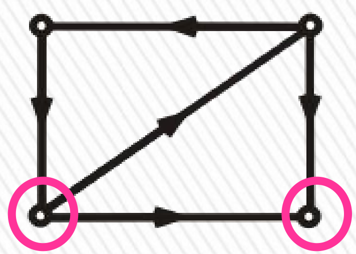
D弱连通(连通): 略去各边的方向所得无向图为连通图

D单向连通: $\forall u,v\in V$， u可达v 或v可达u

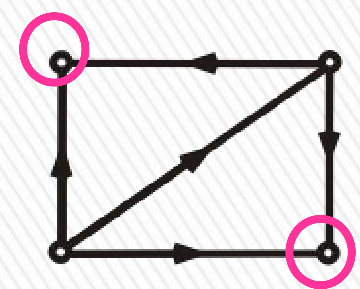
D强连通: $\forall u,v\in V$， u与v相互可达



强连通



单向连通



弱连通

最短路与距离

*u*与*v*之间的最短路:*u*与*v*之间长度最短的通路(设*u*与*v*连通)

*u*与*v*之间的距离$d(u,v)$:*u*与*v*之间最短路的长度

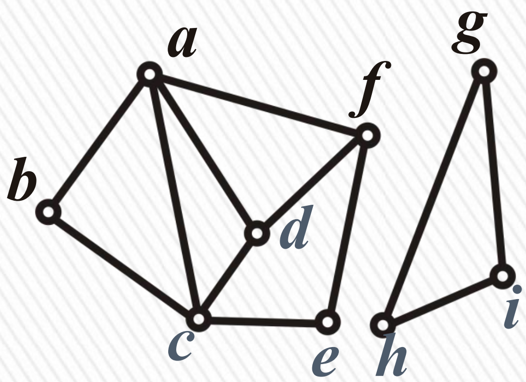
若*u*与*v*不连通, 规定$d(u,v)=\infty$.

性质:

(1) $d(u,v)\geq 0$, 且$d(u,v)=0 \Leftrightarrow u=v$

(2) $d(u,v)=d(v,u)$

(3) $d(u,v)+d(v,w)\geq d(u,w)$



例如 *a*与*e*之间的短程线:*ace*,*afe*. $d(a,e)=2$, $d(a,h)=\infty$

有向图中的最短路与距离

u到v的最短路: u到v长度最短的通路 (设u可达v)

距离$d\langle u,v\rangle$: u到v的最短路的长度

若u不可达v, 规定$d\langle u,v\rangle =\infty$.

性质:

$d\langle u,v\rangle \geq 0$, 且$d\langle u,v\rangle=0 \Leftrightarrow u=v$

$d\langle u,v\rangle+d\langle v,w\rangle \geq d\langle u,w\rangle$

注意: 没有对称性

图的连通性

例2.2：设G是简单连通图，若G不是完全图，则G中存在三个点*u*、*v*、*w*，使$uv, vw \in E$，但$uw \notin E$。

证明：因为G不是完全图，所以$|V| \geq 3$且G中至少存在一对不相邻的顶点*u*，*x*（即 $ux \notin E$）。

因为G连通，所以存在一条*u*到*x*的通路，

设*P*是*u*和*x*之间所有通路中长度最短的通路(最短路)，

并设$P=uv_1\ldots x$。

若*P*的长为2，则令$w=x$，$v=v_1$，*u*，*v*，*w*为所求；

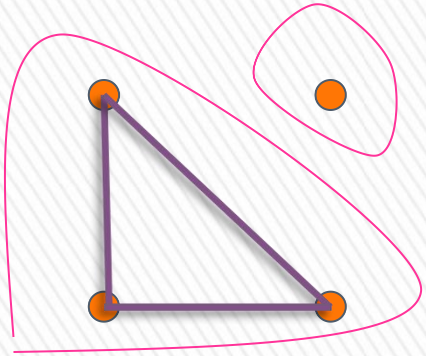
否则，令$v=v_1$，$w=v_2$，因为*P*是最短路，所以$uv_2 \notin E$，即$uw \notin E$，所以*u*，*v*，*w*为所求。

图的连通分支

极大连通子图

- 若连通子图H不是G的任何连通子图的真子图，称H是G的极大连通子图，或**连通支**

G是连通图$\Leftrightarrow p(G)=1$



有两个连通支

图的连通性与连通分支

例2.1： n个城市用m条公路的网络连接（一条公路定义为两个城市间的不穿过任意中间城市的道路），证明如果 $m>\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$，则人们总能通过连接的公路，在任何城市间旅行。

这实际上等价于证明：

若G是简单图，当 $m>\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ 时，G是连通图。

证明（反证法）：

假定G非连通，则至少存在2个连通支，不妨设为

$G_1=(V_1,E_1)$，$G_2=(V_2,E_2)$．

其中$|V_1|=n_1$，$|V_2|=n_2$，$|E_1|=m_1$，$|E_2|=m_2$

故有$n_1+n_2=n$, $m_1+m_2=m$.

图的连通性与连通分支

若G是简单图，当$m>\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$时，G是连通图。

证明（续）：

因为G是简单图，所以G_1， G_2也都是简单图

- 有 $m_1 \le \frac{n_1(n_1-1)}{2}$

$$m_2 \le \frac{n_2(n_2-1)}{2}$$

$$\therefore m \le \frac{n_1(n_1-1)}{2}+\frac{n_2(n_2-1)}{2}$$

$$\because n_1, n_2 \le n-1$$

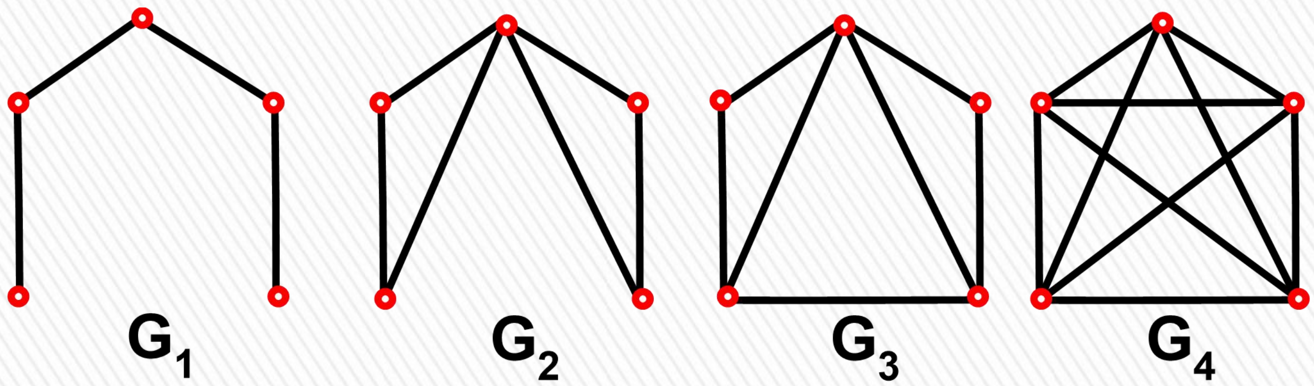
$$\therefore m \le \frac{(n-1)(n_1-1+n_2-1)}{2}=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

- 与已知条件矛盾，因此G连通

连通度

连通图连通度的强弱

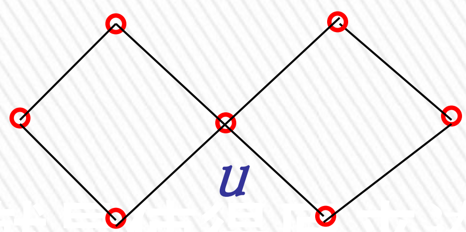
图的点和边连通度不仅是图论中的重要概念之一，图的许多性质和图的连通性有密切的关系。在构造可靠性较高的通讯网络中也起着重要作用。

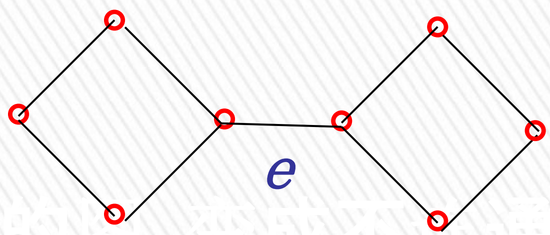


割集 (Cut Set)

割集在图论中是个重要概念，在图论的理论和应用中，都具有重要地位.

比如交通图:结点*u*，边*e*就是至关重要的.



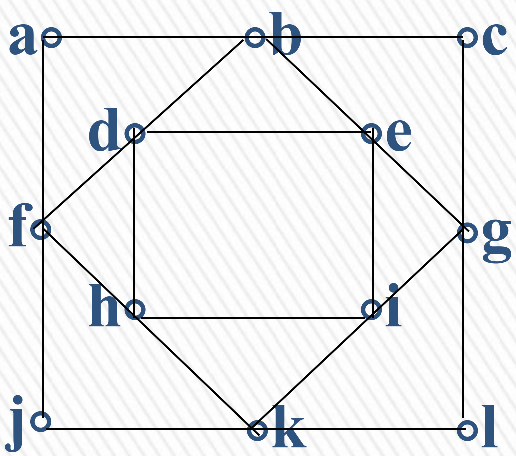


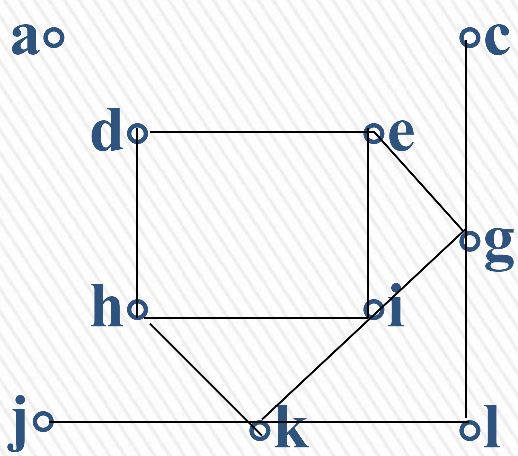
点割集与割点

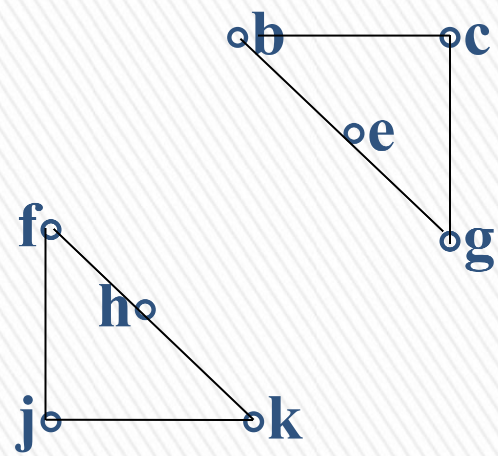
令$G=<V,E>$是连通无向图, 结点集合$V_1, V_1 \subseteq V$, 如果删去V_1中所有结点后,G就变得不连通了, 而删去V_1的任何真子集中的所有结点,得到的子图仍然连通.则称V_1是G的一个**点割集**. 如果点割集V_1中只有一个结点, 则称此结点为**割点**.

如下图：{b,f}, {b,g}, {f,k},{k,g}是点割集

{a,d,i,l}，{c,e,h,j}也是点割集. 不存在割点.

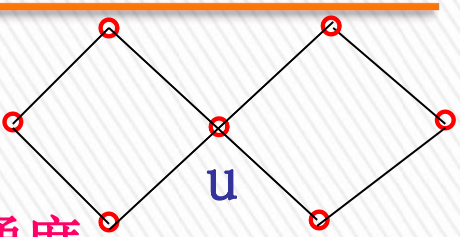






点割集与割点

点连通度



若G不是完全图, 定义:

$k(G)=\min\{\,|V_1|\mid V_1$是$G$的点割集$\}$ 为G的点连通度.

注1:

点连通度$k(G)$是表示使G不连通,至少要删去的结点数.

注2:

具有割点图的点连通度 $k(G)=1$，不连通图的连通度为0.

K_n无点割集

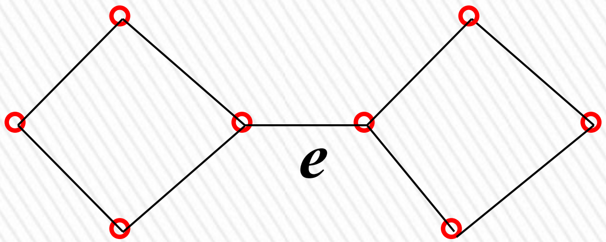
思考：一个点是割点的条件是什么？

定理:

一个连通图中结点v是割点的充分且必要条件是存在两个结点u和w, 使得从u到w的任何路都通过v .

边割集与割边（桥）

令$G=<V,E>$是连通无向图, 边的集合E_1,$E_1 \subseteq E$, 如果删去E_1中所有边后,G就变得不连通了, 而删去E_1的任何真子集中的所有边,得到的子图仍然连通.则称E_1是G的一个边割集.
如果边割集E_1中只有一条边, 则称此边为割边, 也称之为桥.



图中e就是桥.

边割集与割边（桥）

边连通度

若G至少有两个结点, 定义:

$\lambda(G)=min\{\,|E_1|\mid E_1$是$G$的边割集$\}$为图$G$的边连通度.

注1： 边连通度$\lambda(G)$是表示使G不连通,至少要删去的边数.

注2：如果G不是连通图, 则$\lambda(G)=0$，

$\lambda(K_n)=n-1$。

边割集与割边（桥）

边连通度

若G至少有两个结点, 定义:

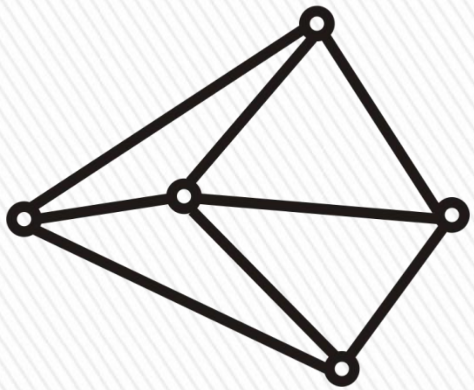
$\lambda(G)=min\{\,|E_1|\mid E_1$是$G$的边割集$\}$为图$G$的边连通度.

注1： 边连通度$\lambda(G)$是表示使G不连通,至少要删去的边数.

注2：如果G不是连通图, 则$\lambda(G)=0$,

$\lambda(K_n)=n-1$。

例如



$\kappa(G)=3$

$\lambda(G)=3$

割边的性质

定理：连通图G的边e是割边的充要条件是存在G的两点u和v，使得任意一条u-v路过e。

定理：连通图G的边e是割边的充要条件是e不在G的任一圈上。

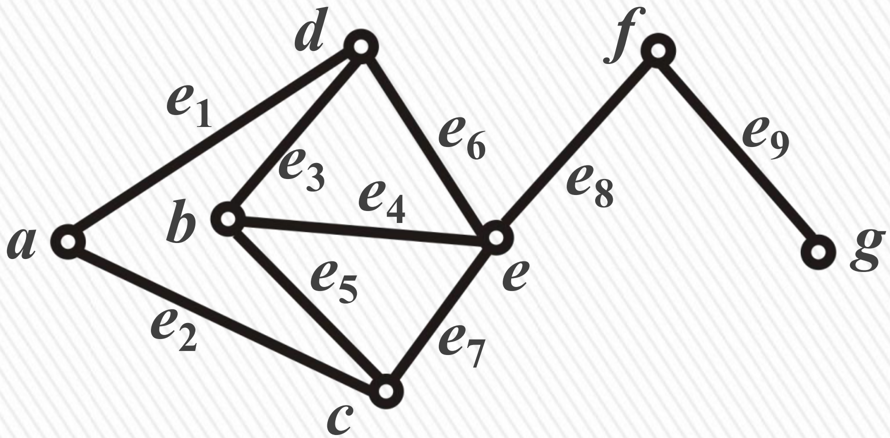
证明：

1）必要条件：设e是G的割边，则存在$u,v\in V$，u,v在G中连通但在$G-e$中不连通，设$e=xy$。若e在某个圈C上，则$G-e$中x和y有路$C-e$相连，所以，u,v在$G-e$中连通，矛盾。

因此e不在G的任一圈上。

2）充分条件：设$e=xy$不是割边，则在$G-e$中，x和y连通，所以在$G-e$中存在一条x-y通路P，此时，e在G的圈$P+e$上，矛盾。所以e是割边。

割边的实例



割点：e, f

点割集：$\{e\},\{f\},\{c,d\}$，…

桥：e_8, e_9

边割集：$\{e_8\},\{e_9\}$，$\{e_1,e_2\}$，

$\{e_1, e_3, e_6\}$，$\{e_1, e_3, e_4, e_7\}$，…

说明：

若G连通，V'为点割集，则 $(G-V')$的连通分支数 ≥ 2

若G连通，E'为边割集，则 $(G-E')$的连通分支数 $=2$

课堂讨论题

任意给定（n+1)^{2}项的递增的自然数列，则下面的结论中必有一条是成立的：

(1)存在n+3项的子列，使任一项能整除此子列中它后面的每一项；

(2)存在n+1项的子列，使此子列中任一项不能整除此子列中它后面的任何一项。

课堂讨论题

证明

建立图模型

设这（n+1)²项递增的自然数列为 $v_1, v_2, \ldots\ldots, v_{(n+1)^2}$

作一有向图$D=(V,A)$,其中$V=\{v_1, v_2, \ldots\ldots, v_{(n+1)^2}\}$，

若v_i整除v_j, 则D中引一条从v_i到v_j的弧（v_i，v_j）（$i \neq j$）。

明显地，这样构造的有向图没有有向回路，而且

结论（1）的子列对应D中一条长为n+2的有向路；

结论（2）的子列对应D中的n+1个互不相邻的结点。

课堂讨论题

证明（续）：

对每一个结点v_i，考虑以v_i为起点的所有有向路，记其中最长的一条有向路径的长为$l(v_i)$.

1) 如果有某个$l(v_i)\geqslant n+2$, 则结论成立。

2) 如对一切v_i, $l(v_i)\leqslant n+1$，

记满足 $l(v_i)=j$ ($0\leqslant j\leqslant n+1$)的顶点$v_i$的个数为$a(j)$，则

$a(0)+a(1)+\ldots\ldots+a(n+1)=|V(G)|=(n+1)^2=n(n+2)+1$

因为

$$\frac{n(n+2)+1}{n+2}=n+\frac{1}{n+2}>n$$

课堂讨论题

证明（续）：

所以必有一个j_0 $(0\leqslant j_0\leqslant n+1)$,使得$a(j_0)\ \geqslant n+1$。
即在D中至少存在$n+1$个顶点 $v_{j_1},v_{j_2},\ldots\ldots,v_{j_{n+1}}$

使得$l(v_{jk})=j_0$, $k=1,2,\ldots,n+1$。由假设，D中以v_{jk}为起点的最长有向路的长为j_0, 现可断定这$n+1$个顶点互不相邻。否则，如有
$(v_{j_k},v_{j_i})\in A(D),(0\le k\ne i\le n+1)$ 则

$$l(v_{j_k})\ge l(v_{j_i})+1=j_0+1$$

矛盾，所以 $v_{j_1},v_{j_2},\ldots\ldots,v_{j_{n+1}}$ 互不相邻，因此结论（2）成立。

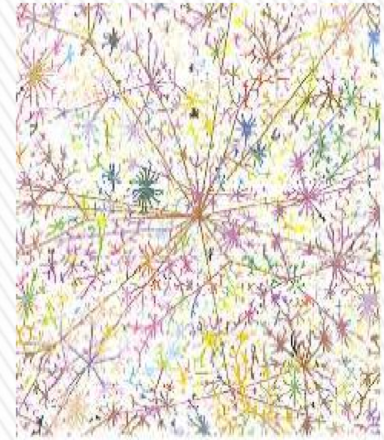
复杂网络

- 复杂网络是近几年科学研究发现的一种介于规则网络和随机网络之间的一种更接近于真实网络的一种网络模型。
- 复杂网络最典型的特征是小世界现象和无尺度特征。小世界现象说明了规模很大的网络的任意两个节点之间存在最短路径；无尺度特征则揭示了真实网络的结构符合幂率分布的事实。

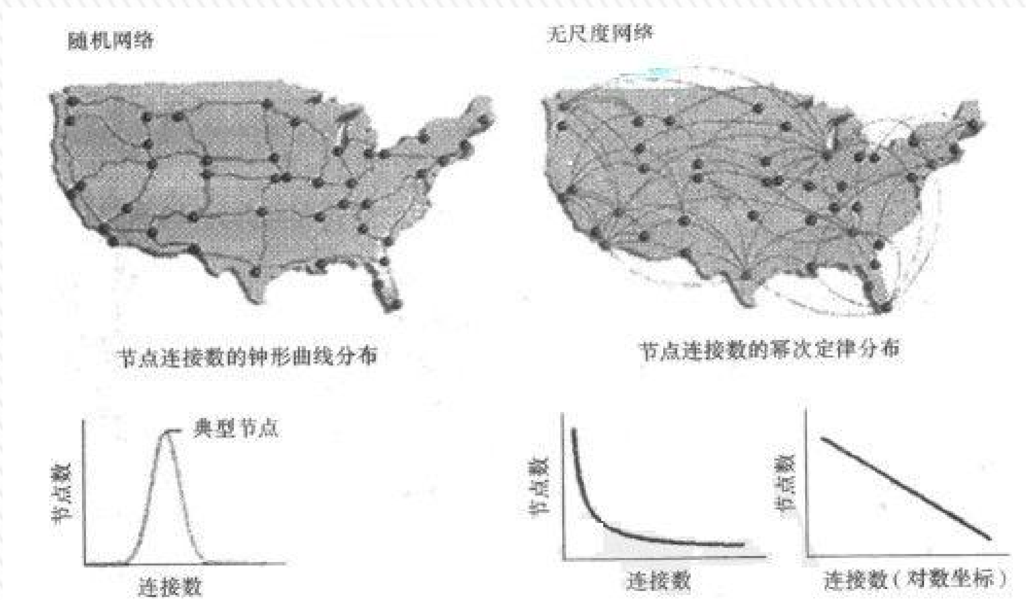
连通性应用：无尺度网络

» 1999年，A-L.Barabasi和R.Albert等提出

» 节点与节点之间的连接分布遵循幂次定律，大部分的节点只有少数连接，而少数节点则拥有大量的连接



随机网络与无尺度网络的对比



连通性应用：小世界现象

» 20世纪20年代，由Karinthy提出。
» 1950年， Pool 和 Kochen提出这样一个问题：“两个毫无关系的人，要让他们互相认识，至少要经过多少人？”
» 美国哈佛大学社会心理学家S. Milgram在1967年做过一项有趣的实验，据说他从内布拉斯加州的奥马哈随机选了294人，然后请他们每个人尝试寄一封信到波士顿的一位证券业务员。寄信的规则很简单，就是任何收信者只能把信寄给自己熟识的人。

小世界

- “6度分离” —对每个人来说，平均大约只需要通过5次转发就能将信寄到目的地。
- 凯文贝肯游戏（game of Kevin Bacon）

  超过133万名世界各地的演员平均的“贝肯数”是2.981，最大的也仅仅是8
- 埃尔德什数

  40万名数学家们的“埃尔德什数”平均是4.65，最大的是13

实验证明：在现实世界里的一些网络中，尽管节点数量庞大，但从一点出发，其实只需要经过仅仅几步转折，就能到达任一个节点

小世界

论文：Collective dynamics of the ‘Small World’ networks，Duncan Watts and Steven Strogatz, 1998

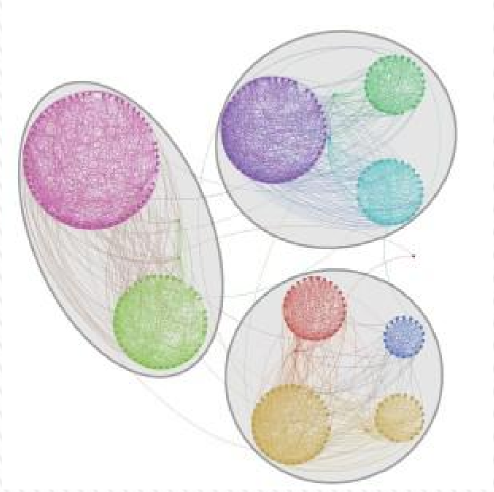
复杂网络的两个独立的结构特性分类:

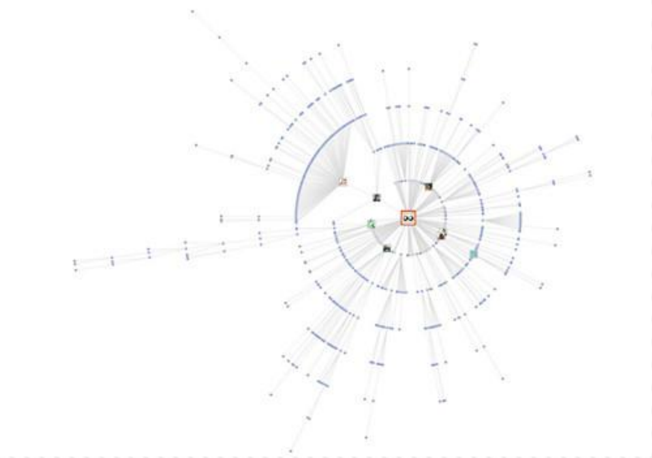
1) 集聚系数

2) 节点间的平均路径长度

社交网络的分析

- 社区圈子的识别（Community Detection）
- 社交网络中人物影响力的计算
- 信息在社交网络上的传播模型
- 虚假信息和机器人账号的识别
- 基于社交网络信息对股市、大选以及传染病的预测
- …





第二章 道路与回路

» 道路与回路的定义和相关概念
» 道路与回路的判定方法
» 欧拉道路与回路
» 哈密顿道路与回路
» 旅行商问题与分支定界法
» 最短路径
» 关键路径
» 中国邮路

道路与回路的判定方法

- 代数方法

  Warshall 算法

- 搜索法

  - 广探法(**Breadth First Search**)
  - 深探法(**Depth First Search**)

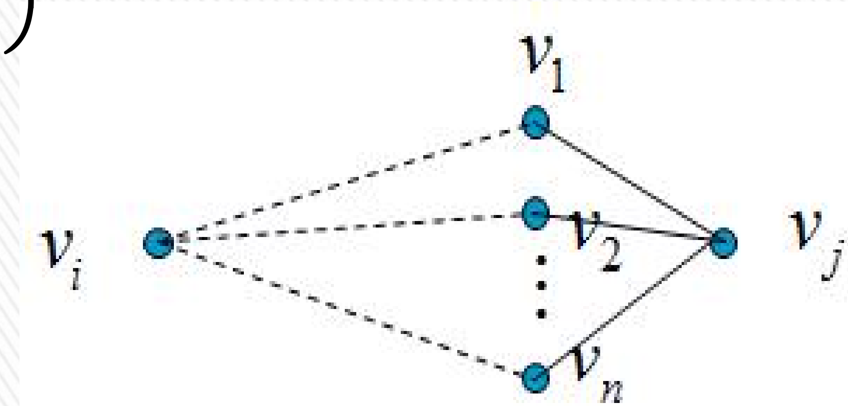
路径的矩阵求解

图的邻接矩阵

$$a_{ij}=\begin{cases} 1， & v_i\text{与}v_j\text{邻接，即}(v_i,v_j)\in E \\ 0， & \text{其他。} \end{cases}$$

$$A(G)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

两个结点不直接相连，
如何求？



路径的矩阵求解

图的邻接矩阵

$a_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{与}v_j\text{邻接，即}(v_i,v_j)\in E\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$

$$A(G)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

v_i与v_j通过1条边直接相连就是邻接矩阵$a_{ij}=1$

v_i与v_j通过2条边是否连通？

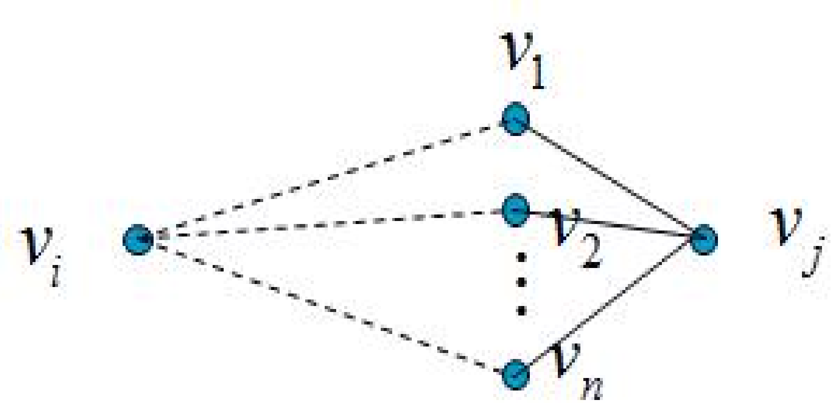
取决于v_i与v_k是否有边以及是否v_k与v_j有边

即：$\sum a_{ik} * a_{kj}$

$A^2=A\cdot A$

v_i与v_j通过3条边是否连通？

$A^3=A^2\cdot A$



路径的矩阵求解

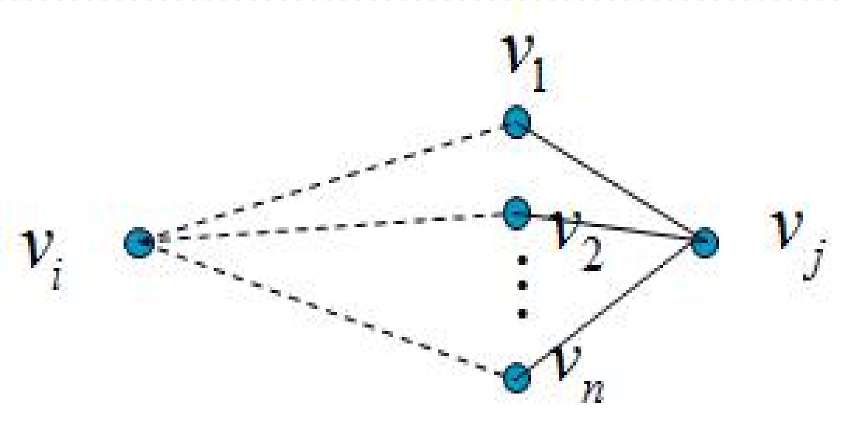
从图的邻接矩阵可以得出从节点v_i到v_j长度为$l(l \geq 1)$的路的数目.

方法：设A是图G的邻接矩阵, 则A^l中(i, j)位置元素为从节点v_i到v_j长度为$l(l \geq 1)$的路的数目.

证明：

对l归纳. $l = 1$, 显然.

$A^l = A^{l-1} \cdot A$:



$$a_{ij}^{(l)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(l-1)} \cdot a_{kj} = a_{i1}^{(l-1)} \cdot a_{1j} + a_{i2}^{(l-1)} \cdot a_{2j} + \ldots + a_{in}^{(l-1)} \cdot a_{nj}.$$

路径的矩阵求解

» 可达矩阵

表示图中任意两个节点间的可达关系.

$\forall\ G=(V,E)$, 对节点编号 $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

$$P(G)=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

其中 $p_{ij} >= 1$, 若 v_i 可达 v_j, 否则 $p_{ij} = 0$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

$$P(G)=A+A^2+\ldots+A^n$$

路径的矩阵求解

- 若只关心v_i与v_j之间有无道路可用逻辑运算法

$$P = A \vee A^2 \vee \cdots \vee A^n$$

$M = A;$

$P = A;$

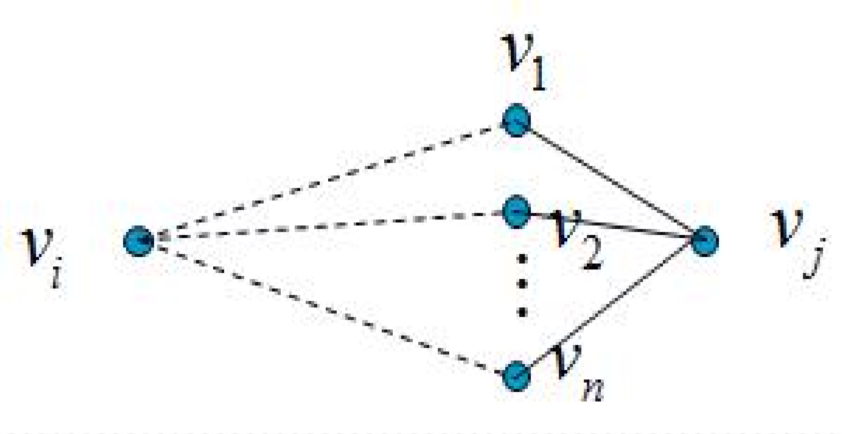
for (*i*=2; *i*<=n; *i*++)

{

$\quad M = M \cdot A;$

$\quad P = P \vee M;$

}



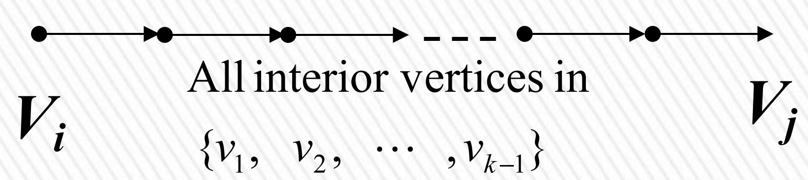
算法复杂度:

$$(n^2(2n-1)+n^2)(n-1) = 2n^3(n-1) = O(n^4)$$

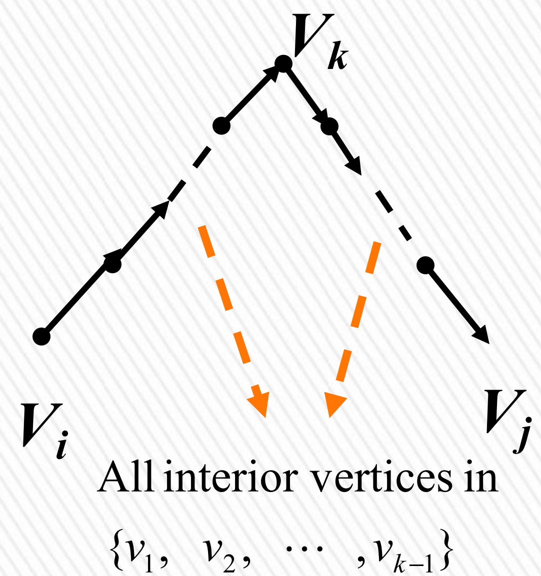
路径的矩阵求解

$$p_{ij}^{(k)} = p_{ij}^{(k-1)} \vee (p_{ik}^{(k-1)} \wedge p_{kj}^{(k-1)})$$

Case 1



Case 2



$\boxed{\sum a_{ik} * a_{kj}}$

$\boxed{a_{ik} * a_{kj}}$

P迭代累加存储的是节点最大标号≤k时v_i与v_j之间有无道路

路径的矩阵求解

Warshall's Algorithm

$P=[a_{ij}]_{n\times n};$

```
for (k=1; k <=n; k ++)
{
        for (i=1; i <=n; i ++)
        {
                for (j=1; j <=n; j ++)
                  p_ij = p_ij ∨ (p_ik ∧ p_kj);

        }
}
```

$$p_{ij}=p_{ij}\vee(p_{ik}\wedge p_{kj});$$

算法复杂度: $2n^3=O(n^3)$

本堂课小结

» 道路与回路的基本概念

简单、初级道路（回路）、连通、连通支、连通度、点割集、割点、边割集、桥

» 道路与回路判定代数方法

Warshall 算法

作业

- 课本P36， 第2、3、4