

P87 习题四 3.7题

(3)

设 G 图有 m 条边, \bar{G} 有 \bar{m} 条边

若 G 为平面图, 则由推论 4.2.1 知, 简单连通平面图有 $m \leq 3n-6$

而 K_n 有 $n(n-1)/2$ 条边, 故 $\bar{m} = m(K_n) - m \geq \frac{n(n-1)}{2} - 3n + 6 = (n^2 + 7n + 12)/2$

则 $\bar{m} - 3n + 6 \geq (n^2 - 13n + 24)/2$.

对 $f(n) = n^2 - 13n + 24$ 又对称轴为 $\frac{13}{2}$, $f(11) = 2$, 故 $n \geq 11$ 时, $f(n) > 0$.

故 $\bar{m} - (3n - 6) > 0$, 故 \bar{G} 不是平面图.

若 \bar{G} 为平面图, 同理有 G 不是平面图.

故 G 与 \bar{G} 中至少有一个不是平面图.

7. 假定存在这样的平面图 G , 则作出其对偶图 \bar{G} , 且 \bar{G} 仍为平面图.

记对偶图顶点为 $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4, \bar{v}_5$

由于 G 中任意域之间至少有一条公共边界, 则 G^* 中任意两点间有边相连

故 K_5 为 \bar{G} 的支撑子图.

但 K_5 不是平面图, 而平面图子图必为平面图.

故 \bar{G} 不为平面图, 矛盾.

故不存在这样的子图.

