2011 年多元微积分期中考题 A 卷

一．**填空题**（每空 3 分，共 15 空）（请将答案直接填写在横线上！）

1．将定义在区间$(0,\pi)$上的函数e^x展成周期为2π的正弦级数，记$S(x)$为级数的和函数，

则$S(0)=$ 0

2．$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to 0}}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=$ $1/e$

3．设$z=f(x+y,x-y)$，其中$f\in C^{(1)}$，则$dz=(f_u+f_v)dx+(f_u-f_v)dy$

注：这里 $f_u=\dfrac{\partial f(u,v)}{\partial u}\Big|_{(u,v)=(x+y,x-y)}$，$f_v=\dfrac{\partial f(u,v)}{\partial v}\Big|_{(u,v)=(x+y,x-y)}$

4．设$z=x^y$，则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ $x^{y-1}(1+y\ln x)$

5．方程$xy+z\ln y+e^{yz}=e$在$(0,1,1)$点附近确定隐函数$z=z(x,y)$，则$\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ $\dfrac{-y}{\ln y+ye^{yz}}$

注：如只计算偏导数$\dfrac{\partial z}{\partial x}$在点$(0,1,1)$的值（$-1/e$），仍算正确解答，得 3 分。

6．设$y=y(x),z=z(x)$为由方程组$\begin{cases}x+y+z=0\\ \dfrac{x}{a^2}^2+\dfrac{y}{b^2}^2+\dfrac{z}{c^2}^2=1\end{cases}$确定的隐函数，$c^2y\neq b^2z$，

则 $\dfrac{dy}{dx}=$ $\dfrac{b^2(a^2z-c^2x)}{a^2(c^2y-b^2z)}$。

注：所求导数也可写作$\dfrac{dy}{dx}=$ $\dfrac{-b^2[a^2(y+x)+c^2x]}{a^2[c^2y+b^2(x+y)]}$。

7．函数$x+y^2+z^3$在点$(1,1,1)$处沿方向$\left(\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5},0\right)$的方向导数为 2

8．函数x^2+y^2在点$(1,2)$处函数值**增大**最快的方向为 $(2,4)$

9．设$\begin{cases}x=\cos\varphi\cos\theta\\ y=\cos\varphi\sin\theta\end{cases}$，则它的 Jacobi 矩阵的**行列式** $\det\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(\varphi,\theta)}=$ $-\sin\varphi\cos\varphi$

10．参数曲面$x=u+v,y=uv,z=u\sin v$在$(u,v)=(1,0)$处的切平面方程为 $y-z=0$

11．曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ z=x^2+y^2 \end{cases}$在点$(1,-1,2)$处的切线方程为 $\begin{cases} x-y+2z=6 \\ 2x-2y-z=2 \end{cases}$

12．曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 在点$(1,-2,2)$处的法线方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-4}=\dfrac{z-2}{6}$

13．曲面$z=\arctan\dfrac{y}{x}$在点$\left(1,1,\dfrac{\pi}{4}\right)$处的单位法向量为 $\pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)$

14．M 是曲线$x=t,y=t^2,z=t^3$上的一点，此点处切线平行于平面$x+2y+z=4$，则 M 点的坐标为 $(-1,1,-1)$或$\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{9},-\dfrac{1}{27}\right)$

15．函数$f(x,y)=e^x(\sin y+\cos y)$在$(0,0)$点的带有 Peano 余项的二阶 Taylor 公式为

$1+x+y+\dfrac{x^2}{2}+xy-\dfrac{y^2}{2}+o(x^2+y^2)$

二．计算题（每题 10 分，共 40 分）

1．求函数$f(x)=\begin{cases} \pi-x, & -\pi\le x\le 0 \\ \pi+x, & 0\le x\le \pi \end{cases}$的 Fourier 级数，并求数项级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$的和。

解：不难求得 $f(x)$ 的 Fourier 级数为 $\dfrac{3\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$。根据 Fourier 级数的点态收敛定理可知，该 Fourier 级数在$x=0$处收敛到$f(0)=\pi$，即

$\dfrac{3\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}=\pi$。由此得到 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}=\dfrac{\pi^2}{8}$。解答完毕。

2．设$f(u,v)\in C^{(2)}(R^2)$，$z=z(x,y)$为由方程$x+y=f$（x,z）确定的隐函数，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解：在方程$x+y=f$（x,z）中，视z为x,y的函数，并在方程两边分别关于x,y取导数得到 $z_x=\dfrac{1-f_x}{f_z}$，$z_y=\dfrac{1}{f_z}$。进一步在 $z_y(x,y)=\dfrac{1}{f_z(x,z(x,y))}$中，关于$x$取导数得到

$z_{xy}=-\dfrac{f_{zx}+f_{zz}z_x}{f_z^2}$。解答完毕。

3．设 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^4}$，研究 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的连续性、偏导数的存在性以及可微性（要说明理由）。

解：(i) 连续性。当 $|y|<1$ 时，$\sqrt{x^2+y^4}\le\sqrt{x^2+y^2}$。故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0)$。因此 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续。

(ii) 偏导数的存在性。由定义，$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt{\Delta x^2}}{\Delta x}$。显然该极限不存在，而 $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\sqrt{\Delta y^4}}{\Delta y}=0$。这表明 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点关于 x 的偏导数不存在性，关于 y 的偏导数存在且等于 0。

(iii) 由于可微性蕴涵着各偏导数的存在性，故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不可微。

解答完毕。

4．求函数 $f(x,y)=xy$ 在集合 $D=\left\{(x,y)\middle|(x-1)^2+y^2\le 1\right\}$上的最大值和最小值。

解：由于集合 $D=\left\{(x,y)\middle|(x-1)^2+y^2\le 1\right\}$有界闭（紧），函数 $f(x,y)=xy$ 在 D 上连续，因此 f 在 D 上可取得最大值和最小值。另一方面，由于知易函数 f 唯一的驻点 $(0,0)$，在开圆位于圆盘 D 的边界上，在其内部 $D^0=\left\{(x,y)\middle|(x-1)^2+y^2<1\right\}$上无解。这表明 f 在 D 上可取得最大值和最小值只能在边界 $\left\{(x,y)\middle|(x-1)^2+y^2=1\right\}$上达到。为此考虑条件极值 $\min(\max)\, xy$，s. t. $(x-1)^2+y^2=1$．作 Lagrange 函数 $L=xy-\lambda[(x-1)^2+y^2-1]$。解方程 $L_x=0$，$L_y=0$，$L_\lambda=0$，得到三个驻点：$(0,0),\left(\dfrac{3}{2},\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$。比较函数 $f=xy$ 在这三个点上的值可知，函数 $f(x,y)=xy$ 在集合 $D=\left\{(x,y)\middle|(x-1)^2+y^2\le 1\right\}$上的最大值为 $f\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$；最小值为 $f\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$。解答完毕。

三．证明题

1．(8 分) 设 $F(x,y,z)$ 有连续的一阶偏导数 $\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}$，并且满足 $y\frac{\partial F}{\partial x}-x\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\ge\alpha>0$，其中 α 为常数，证明 $\lim\limits_{t\to+\infty}F(-\cos t,\sin t,t)=+\infty$。

证明：关于 $F(-\cos t,\sin t,t)$ 求导（链规则）得

$$\frac{d}{dt}\left[F(-\cos t,\sin t,t)\right]=\sin t\frac{\partial F}{\partial x}+\cos t\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}$$

当 $x=-\cos t$，$y=\sin t$ 时，由假设我们有

$$\frac{d}{dt}\left[F(-\cos t,\sin t,t)\right]=y\frac{\partial F}{\partial x}-x\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\ge\alpha>0$$ 。于是对于 $t>0$

$$F(-\cos t,\sin t,t)=\int_0^t[F(-\cos s,\sin s,s)]'ds-F(-1,0,0)\ge\alpha t-F(-1,0,0)$$ 。

故 $\lim\limits_{t\to+\infty}F(-\cos t,\sin t,t)=+\infty$。证毕。

2．（7 分）设 $D=\{(x,y)\mid|x|\le a,|y|\le b,a>0,b>0\}$，二元函数 $f\in C^{(2)}(D)$，且在 D 内满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\ne 0$，证明函数 $f(x,y)$ 的最大值和最小值只能在 D 的边界上取得。

证明：反证。假设函数 $f(x,y)$ 的最大值或最小值在 D 的内部取得，则一定为极大值或极小值。考虑函数 f 的海森矩阵 $H_f(x,y)=\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy}\\ f_{yx} & f_{yy}\end{pmatrix}$。由假设 $f_{xx}+f_{yy}=0$，$f_{xy}\ne 0$ 可知为 $\det H_f(x,y)=-(f_{xx}^2+f_{xy}^2)<0$。这表明 H_f 为不定矩阵。根据条件极值的基本定理可知 f 在 D 的内部不可能有极值。矛盾。因此函数 $f(x,y)$ 的最大值和最小值只能在 D 的边界上取得。证毕。