1.3

《ODE习题课：三》

1. 作业讲解+补充
2. 例题讲解.

HW5

① 已知通解 $y(t)=C_1e^t+C_2te^t$. 讨论不同初始条件下解的情况.

$\Longleftrightarrow$ 解关于 $\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}$ 的线性方程组.

(3) $\begin{cases} y|_{t=t_0}=a \\ y|_{t=t_1}=b\end{cases} \Longleftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} e^{t_0} & t_0e^{t_0}\\ e^{t_1} & t_1e^{t_1}\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}}_{\text{未知}}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

$\because \det A=(t_1-t_0)e^{t_0+t_1}$.

$\therefore \begin{cases} t_1\ne t_0.\ \det A\ne 0 \Rightarrow \exists!\text{解} \\ t_1=t_0.\ \det A=0.\ \text{比较 } \mathrm{rank}(A|\binom{a}{b}) \text{ 和 } \mathrm{rank}(A)\end{cases}$

或者直接计算 $\begin{pmatrix} e^{t_0} & t_0e^{t_0}\\ e^{t_0} & t_0e^{t_0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \Rightarrow a=b$.

$\Rightarrow \begin{cases} a=b.\ \text{存在无穷多解}. \\ a\ne b.\ \text{无解}.\end{cases}$

(4) $\begin{cases} y|_{t=t_0}=a \\ y''|_{t=t_1}=b\end{cases} \Longleftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} e^{t_0} & t_0e^{t_0}\\ e^{t_1} & (t_1+2)e^{t_1}\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}}_{\text{未知}}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

$\because \det A=(t_1+2-t_0)e^{t_0+t_1}$

$\therefore \begin{cases} t_1+2\ne t_0.\ \det A\ne 0 \Rightarrow \exists!\text{解} \\ t_1+2=t_0.\ \det A=0.\end{cases}$

—— 计算 $\begin{pmatrix} e^{t_0} & t_0e^{t_0}\\ e^{t_0-2} & t_0e^{t_0-2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \Rightarrow a=e^2b$

$\Rightarrow \begin{cases} a=e^2b.\ \text{存在无穷多解} \\ a\ne e^2b.\ \text{无解}.\end{cases}$

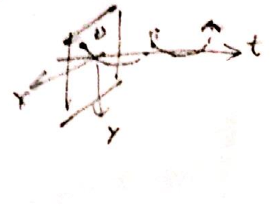
③. 齐次方程 $Pdx+Qdy=0$ 的积分因子 $\mu=\dfrac{1}{xP+yQ}$. (见上次习题课).

关于方程过 $(0,0)$ 解的讨论 (见作业解答)

奇点 $(0,0)$ 的几何理解：令 $\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, 对应 $\dfrac{d\vec{u}}{dt}=\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y\\x+y\end{pmatrix}=\vec{v}(x,y)$

「质点 $M(x,y)$ 在 Oxy 平面上运动，已知它在 (x,y) 点的速度 $\vec{v}(x,y)$

其运动方程 $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x-y\\ \dfrac{dy}{dt}=x+y\end{cases}$

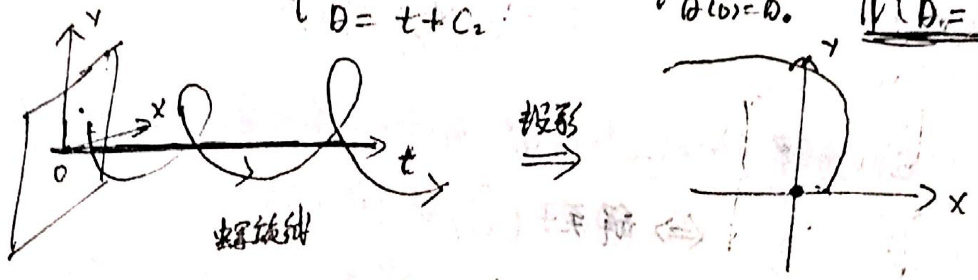


2/4.3

应用极坐标，令 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\cos\theta\\r\sin\theta\end{pmatrix}$，则 $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}r\\\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\\1\end{pmatrix}$

[∵ $\begin{pmatrix}r(\cos\theta-\sin\theta)\\r(\cos\theta+\sin\theta)\end{pmatrix}=\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}r\cos\theta\\r\sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}r\\\theta\end{pmatrix}$

解得 $\begin{cases}r=C_1e^t\\ \theta=t+C_2\end{cases}$ 设初值 $\begin{cases}r(0)=r_0\\ \theta(0)=\theta_0\end{cases}$ $\Rightarrow \boxed{\begin{cases}r=r_0e^t\\ \theta=t+\theta_0\end{cases}}$



· 奇点(0,0)，在此处 $\vec{v}(0,0)=\vec{0}$，该系统有一个定常解（时间变化下不变）

· 其余点(x,y)，随时间t增大，$\begin{cases}\text{方位角}\ \theta(t)\ \text{均匀地逆时针转动}\\ \text{半径}\ r(t)\ \text{指数增长}\end{cases}$

随时间t减小，所有点都趋向于奇点(0,0)。

称奇点(0,0)为 $\begin{cases}\text{正向不稳定的}\\ \text{负向稳定的（还是全局渐近稳定的）}\end{cases}$

HW6

①② 常数变易法求2阶线性常系数非齐次ODE的特解.

· 技巧：只变易其中一个常数 $\begin{cases}C_1\to C_1(t) & ✓\\ C_2\to C_2(t) & ✓\\ C_1、C_2\to C_1(t)\cdots+C_2(t)\cdots & \text{较复杂}.\end{cases}$

③ 母函数法 + $\begin{cases}\text{ODE}\quad f''=f'+f\ \ (f=\sum a_n\frac{x^n}{n!})\\ \text{or}\\ \text{级数运算}\ g=a_0+xg+x^2g\ \ (g=\sum a_nx^n)\end{cases}$ 求斐波那契数列通项.

· 审题：$a_0=a_1$, $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$.

例题

Recall：ODE求解

① 分离变量法
② 积分因子法
（全微分方程）
③ Picard序列
（Euler序列）

适用于 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$，$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$

④ 常数变易法
（变量替换）
⑤ 级数法

适用于 n阶线性ODE、非线性ODE．

Q 求解Bernoulli方程：$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)\cdot y^n$，$n\neq 0,1$．

(1) 考虑 $\frac{dy}{dx}+p(x)y=0$，用常数变易法求解．

(2) 考虑 $z=y^{1-n}$，用变量替换法求解．

(3) 考虑 $u=y^{-n}e^{(1-n)\int p(x)dx}$，用积分因子法求解．

Solve：(1) 齐次方程的通解为 $y(x)=C\cdot e^{-\int p(x)dx}$

∴ 设原方程的解为 $y(x)=C(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}$（$C(x)$待定）

$$\Rightarrow \frac{C'(x)}{C^n(x)}=q(x)\cdot e^{(1-n)\int p(x)dx}$$

$$\Rightarrow C(x)=\left[(1-n)\int q(x)e^{(1-n)\int p(x)dx}dx\right]^{\frac{1}{1-n}},\quad y(x)=C(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}.$$

(2) 设 $z=y^{1-n}$（$n\neq 0,1$），则 $\frac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}=(1-n)(q(x)-p(x)\underbrace{y^{1-n}}_{z})$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx}+(1-n)p(x)z=(1-n)q(x)\quad \text{（一阶线性）}.$$

$$\Rightarrow z(x)=\left[(1-n)\int q(x)e^{(1-n)\int p(x)dx}dx\right]e^{(n-1)\int p(x)dx},\quad y(x)=z(x)^{\frac{1}{1-n}}$$

(3) 乘以积分因子 u：$\underbrace{y^{-n}e^{(1-n)\int p(x)dx}}_{P}dy+\underbrace{(p(x)y^{1-n}-q(x))e^{(1-n)\int p(x)dx}}_{Q}dx=0$．

有：$\frac{\partial P}{\partial x}=y^{-n}e^{(1-n)\int p(x)dx}\cdot(1-n)p(x)=\frac{\partial Q}{\partial y}$，为全微分方程

$$\Rightarrow d\left[y^{1-n}\cdot e^{(1-n)\int p(x)dx}-(1-n)\int q(x)e^{(1-n)\int p(x)dx}dx\right]=0$$

$$\Rightarrow y=\left[(1-n)\int q(x)e^{(1-n)\int p(x)dx}dx+C\right]^{\frac{1}{1-n}}\cdot e^{-\int p(x)dx}$$

□.

Rmk：这里u的找法：

先写成：$dy+(p(x)y-q(x)y^n)dx=0$

乘以 y^{-n}：$\underbrace{y^{-n}dy+p(x)y^{1-n}dx}_{\downarrow\ \text{找积分因子}}-\underbrace{q(x)dx}_{d\int\cdots}=0$