2、若 G 是连通图，得证。

若G不是连通图，则G至少有两个连通支。设为 G_1, G_2.

对 $\forall v_1, v_2 \in V(\overline{G})$，若 $e(v_1,v_2) \notin E(\overline{G})$，则 $e(v_1,v_2) \in E(G)$.

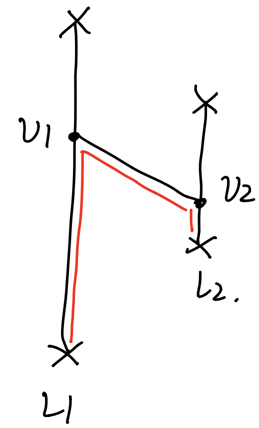
即 v_1, v_2 属于G的同一连通支。不妨令 $v_1, v_2 \in G_1$.

由 G_2 非空，$\exists v_3 \in V(G_2)$. 则 $e(v_1,v_3)$, $e(v_3,v_2) \notin E(G)$.

$e(v_1,v_3), e(v_3,v_2) \in E(\overline{G})$.

即 $\overline{G}$ 中存在 v_1 到 v_3 一条经过 v_3 的通路。

由 v_1, v_2 的任意性，知 $\overline{G}$ 连通。



3、设连通图中存在两条最长道路 L_1, L_2，且互不相交。

设 L_1, L_2 长度均为 l_0.

则取 $\forall v_1 \in L_1$, $v_2 \in L_2$.

v_1 将 L_1 分为两部分，其中一部分 L_1' 长度 $\geq \frac{1}{2} l_0$.

v_2 将 L_2 分为两部分，其中一部分 L_2' 长度 $\geq \frac{1}{2} l_0$.

又由G为连通图，v_1, v_2 间必有通路 L_3. 记其长度 l_1.

则 $L_1' \cup L_3 \cup L_2'$ 长度 $\geq \frac{1}{2} l_0 + \frac{1}{2} l_0 + l_1 > l_0$.

即存在一条长度大于 l_0 的通路. 和假设矛盾。

则假设不成立，若连通图的最长道路不唯一，则它们必定相交。

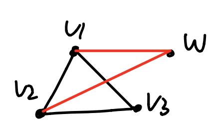
4. 对结点数n作归纳。

① 若 $n=4$，则 $m \geq 5$.

若 $\exists$ 结点的度数 ≤ 1，则剩余3个结点之间有4条边. 由该图为简单图得到矛盾。

则所有结点度数均 ≥ 2. 由定理2.1：无向图中，若 $\forall v$ 有 $d(v) \geq 2$，则G中存在圈；可得存在一回路。

若该回路经过3个点，则回路外还有至少2条边。



因此存在一条过4个点的回路。(设v_1, v_2与w分别有边相连，不失一般性)如图，此时和w分别有边相连的点之间的边为该回路的弦。得证。

若该回路经过4个点，则回路外至少还有1条边。由于该边只能存在于回路中点之间，该边即为回路的一条弦。

综上，$n=4$时结论得证。

② 若结点数为$n-1$时命题成立。即：有$n-1$个点，且$m \geqslant 2n-5$.

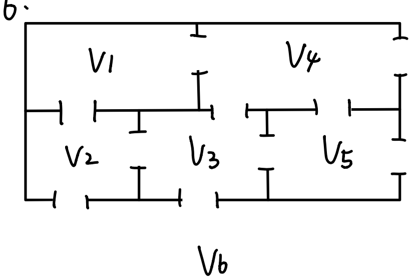
则当结点数为n时，由$m \geqslant 2n-3$知边至少增加2条。

(a) 若∃结点度数$\leqslant 1$，则去除该结点及关联边后，余下$n-1$个结点，且$m \geqslant 2n-4$，则由归纳假设知结论成立。

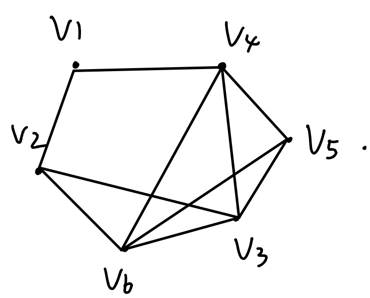
(b) 若∃结点v_0满足$d(v_0)=2$，设与其邻接的结点为v_1, v_2，则去除v_0、$e(v_0,v_1)$，$e(v_0,v_2)$后，余下$n-1$个结点，且$m \geqslant 2n-5$，由

(c) 若$\forall i$，$d(v_i) \geqslant 3$，则由例2.1.3，结论成立。

6.



化为



题目转化为求一条欧拉道路。

存在。由于$v_1 \ldots v_6$中只有v_2, v_5两点度为奇数，由推论2.3.1知存在欧拉道路.

如：$v_2 \to v_3 \to v_4 \to v_6 \to v_5 \to v_4 \to v_1 \to v_2 \to v_6 \to v_3 \to v_5$.