第 5 次习题课　极值

1. f 连续，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1.$ 试问：$(0,0)$ 是否 f 的极值点？

解：由已知条件，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\big(f(x,y)-xy\big)=0,\quad f(0,0)=0.$ 由函数极限的定义，存在

$\varepsilon>0,$ 当 $x^2+y^2<\varepsilon$ 时，

$$\frac{3}{2}(x^2+y^2)^2>f(x,y)-xy>\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2.$$

于是，当 $\dfrac{2}{n^2}<\varepsilon$ 时，有

$$f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)>\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^4}>0,$$

$$f\left(\frac{1}{n},-\frac{1}{n}\right)<-\frac{1}{n^2}+\frac{6}{n^4}=-\frac{1}{n^2}(1-\frac{6}{n^2})<0.$$

故 $(0,0)$ 不是 f 的极值点。

2. f 连续，$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq\sin y}}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\left(x-\sin y\right)^2}=\mathrm{A}>0.$ 试问：$(0,0)$ 是否 f 的极值点？

解：由函数极限的定义，存在 $\delta>0, s.t.$

$$\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\left(x-\sin y\right)^2}>\frac{\mathrm{A}}{2},\quad \forall x^2+y^2\le\delta, x\neq\sin y.$$

由 f 的连续性，有

$$f(x,y)-f(0,0)\ge \mathrm{A}\left(x-\sin y\right)^2\big/2\ge 0,\quad \forall x^2+y^2\le\delta.$$

故 $(0,0)$ 是 f 的极小值点。

3. 求 $z=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$ 的极值。

解：由 $z'_x=4x^3-4x+4y,\ z'_y=4y^3+4x-4y,$ 得驻点 $(\sqrt{2},-\sqrt{2}),(-\sqrt{2},\sqrt{2}),(0,0).$

$z''_{xx}=12x^2-4,\quad z''_{xy}=4,\quad z''_{yy}=12y^2-4.$

在点 $(\sqrt{2},-\sqrt{2}), z''_{xx}=\ z''_{yy}=20, z''_{xy}=4, z''_{xx}z''_{yy}-(z''_{xy})^2>0,$ 故 $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ 为极小值点。

同理，$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ 为极小值点。

在点 $(0,0),\ z''_{xx}=\ z''_{yy}=-4, z''_{xy}=4,\ z''_{xx}z''_{yy}-(z''_{xy})^2=0,$ 无法直接判断是否极值点。注意

到

$$z(x,x)=2x^4>0,\quad 当x\neq 0时;$$

$$z(x,0)=x^4-2x^2=x^2(x^2-2)<0,\quad 当0<x^2<2时.$$

可知 $(0,0)$ 不是极值点.

4. f 在 $\mathbb{R}^2$ 上一阶连续可微, 且 $\forall(x,y)\neq(0,0)$, 有 $xf_x'(x,y)+yf_y'(x,y)>0$. 证明：原点是 f 的唯一极小值点, 且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

证明： 首先证明 $\forall(x_0,y_0)\neq(0,0)$, (x_0,y_0) 不是 f 的驻点. 若不然, 则

$$f_x'(x_0,y_0)=f_y'(x_0,y_0)=0,\qquad x_0f_x'(x_0,y_0)+y_0f_y'(x_0,y_0)=0$$

与已知条件矛盾.

其次证明 $(0,0)$ 是 f 的驻点. 事实上, 由已知条件可知 $xf_x'(x,0)>0,\forall x>0$, 也即

$$f_x'(x,0)>0,\forall x>0;\qquad f_x'(x,0)<0,\forall x<0.$$

令 $x\to 0$, 由 f 的一阶连续可微得 $f_x'(0,0)=0$. 同理, $f_y'(0,0)=0$.

再证明 $(0,0)$ 是 f 的唯一极小值点. $\forall(x_0,y_0)\neq(0,0)$, 令 $g(t)=f(tx_0,ty_0)$, 则 $\forall t>0$, 有

$$g'(t)=x_0f_x'(tx_0,ty_0)+y_0f_y'(tx_0,ty_0)=\frac{1}{t}\Big(tx_0f_x'(tx_0,ty_0)+ty_0f_y'(tx_0,ty_0)\Big)>0.$$

于是存在 $\xi\in(0,1)$, 使得

$$f(x_0,y_0)-f(0,0)=g(1)-g(0)=g'(\xi)>0.$$

故 $(0,0)$ 是 f 的极小值点. 又 f 除原点外没有其它驻点，故 $(0,0)$ 是 f 的唯一极小值点.

最后证明极限等式。由 $f_x'(0,0)=f_y'(0,0)=0$ 及 f 的可微性，有

$$f(x,y)-f(0,0)=o(\sqrt{x^2+y^2}),\quad (x,y)\to(0,0).$$

于是 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

5. $F(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的邻域中二阶连续可微，且

$$F(x_0,y_0)=F_x'(x_0,y_0)=0,\qquad F_{xx}''(x_0,y_0)F_y'(x_0,y_0)<0.$$

证明：由方程 $F(x,y)=0$ 在点 (x_0,y_0) 附近所确定的隐函数 $y=y(x)$ 在点 x_0 取到极小值。

证明: 由已知条件可知$F_y'(x_0,y_0)\neq 0,$因此方程$F(x,y)=0$在点(x_0,y_0)附近所确定了的隐函数$y=y(x)$，且

$$y'(x)=-\left.\frac{F_x'(x,y)}{F_y'(x,y)}\right|_{y=y(x)},$$

$$y''(x)=-\frac{\left(F_{xx}''+F_{xy}''\cdot y'(x)\right)F_y'-F_x'\left(F_{xy}''+F_{yy}''\cdot y'(x)\right)}{\left(F_y'\right)^2}.$$

而$F_x'(x_0,y_0)=0,\ F_{xx}''(x_0,y_0)F_y'(x_0,y_0)<0,$因此

$$y'(x_0)=0,\quad y''(x_0)=-\frac{F_{xx}''(x_0,y_0)F_y'(x_0,y_0)}{\left(F_y'(x_0,y_0)\right)^2}>0,$$

$y=y(x)$在点x_0取到极小值。

6. （隐函数的极值）设$z=z(x,y)$由$2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$确定，求该函数的极值.

解： 由一阶微积的形式不变性, 有

$$4xdx+4ydy+2zdz+8xdz+8zdx-dz=0$$

$$dz=-\frac{4x+8z}{2z+8x-1}dx-\frac{4y}{2z+8x-1}dy$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{4x+8z}{2z+8x-1}=0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{4y}{2z+8x-1}=0$$

$$2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$$

三个方程联立，得驻点$(-2,0)$, $\left(\frac{16}{7},0\right)$.

在$(-2,0)$点，$z_{xx}''(-2,0)z_{yy}''(-2,0)-\left[z_{xy}''(-2,0)\right]^2=\frac{16}{15}>0$，且$z_{xx}''(-2,0)=\frac{4}{15}>0$，$(-2,0)$点是极小值点；

在$\left(\frac{16}{7},0\right)$，$z_{xx}''\left(\frac{16}{7},0\right)z_{yy}''\left(\frac{16}{7},0\right)-\left[z_{xy}''\left(\frac{16}{7},0\right)\right]^2=\frac{16}{15}>0$，$z_{xx}''\left(\frac{16}{7},0\right)=-\frac{4}{15}<0$，$\left(\frac{16}{7},0\right)$点是极大值点.

7. 函数$z(x,y)$在有界闭区域D上连续，在D的边界上的值为零，在D内部偏导数存在且

$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=f(z)$，其中 f 是严格单调函数，且 $f(0)=0$ 。证明：$z(x,y)\equiv 0,(x,y)\in D.$

证明：假设 $z(x,y)$ 不恒为 0，不妨设它在有界闭区域 D 上的最大值 $z(x_0,y_0)>0$ 。已知 $z(x,y)$ 在 D 的边界上的值为零，则 $P(x_0,y_0)$ 在 D 内部，因此 $P(x_0,y_0)$ 是 $z(x,y)$ 的极大值点，是 $z(x,y)$ 的驻点，于是

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_P+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_P=\left.f(z)\right|_P=0\text{，即 } f\left(z(x_0,y_0)\right)=0\text{。}$$

另一方面，f 是严格单调函数，$f(0)=0$，$z(x_0,y_0)>0$，因此 $f\left(z(x_0,y_0)\right)>0$，矛盾。

8. 假设 D 为有界开区域，$f\in C^2(D),\ f\in C(\overline{D})$，且 $\begin{cases} f''_{xx}+f''_{yy}=f & \text{in } D, \\ f>0 & \text{on } \partial D. \end{cases}$

求证：(1) $f\geq 0$ in D. (2) $f>0$ in D. 求证：(1) $f\geq 0$ in D. (2) $f>0$ in D.

证明：(1)反证法. 若结论不成立, 则f在$\overline{D}$上的最小值必在D中达到. 于是

$$\exists (x_0,y_0)\in D, s.t. \qquad 0>f(x_0,y_0)=\min_{(x,y)\in\overline{D}} f(x,y).$$

x_0是$f(x,y_0)$在$D\bigcap\{(x,y_0):x\in\mathbb{R}\}$的极小值点, 因此

$$f''_{xx}(x_0,y_0)\geq 0.$$

同理, $$f''_{yy}(x_0,y_0)\geq 0.$$

但由已知条件可得

$$f''_{xx}(x_0,y_0)+f''_{yy}(x_0,y_0)=f(x_0,y_0)<0.$$

矛盾.

(2)令$g(x,y)=f(x,y)-\frac{\alpha}{2\beta}e^x$,其中

$$\alpha=\min_{(x,y)\in\partial D} f(x,y)>0, \beta=\max_{(x,y)\in\partial D} e^x>0.$$

于是, $$\begin{cases} g''_{xx}+g''_{yy}=g & \text{in } D \\ g>0 & \text{on } \partial D \end{cases}.$$

由(1)中结论知: $$g(x,y)\geq 0, \forall (x,y)\in D.$$

从而，$$f(x,y)=g(x,y)+\frac{\alpha}{2\beta}e^{x}>0,\quad \forall(x,y)\in D.$$

9. 求原点到曲面 $z^2=xy+x-y+4$ 的最短距离.

解：对条件极值问题

$$\begin{aligned}&\min\quad x^2+y^2+z^2\\&s.t.\quad z^2-xy-x+y-4=0.\end{aligned}$$

构造 Lagrange 函数：$L=x^2+y^2+z^2+\lambda(z^2-xy-x+y-4)$

$$\begin{aligned}&L'_x=2x-\lambda(y+1)=0\\&L'_y=2y+\lambda(-x+1)=0\\&L'_z=2z+2\lambda z=0\\&L'_\lambda=z^2-xy-x+y-4=0\end{aligned}$$

解方程组，得 $x=-1,y=1,z=\pm1.$ 条件极值问题可能的极值点为

$$P_1(-1,1,1),\quad P_2(-1,1,-1),$$

到原点的距离 $d(P_1)=d(P_2)=\sqrt{3}.$ 由实际意义，原点到曲面 $z^2=xy+x-y+4$ 存在最短距离，故 $\sqrt{3}$ 就是最短距离.

10. 当 x,y,z 都大于0时，求 $f=\ln x+2\ln y+3\ln z$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=6r^2$ 上的最大值.

并证明对任意正实数 a,b,c，下述不等式成立：$ab^2c^3\le 108\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6$.

解：因为 $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,\sqrt{6}r)}(\ln x+2\ln y+3\ln z)=-\infty$ 所以 $f(x,y,z)=\ln x+2\ln y+3\ln z$ 在曲面 $x^2+y^2+z^2=6r^2(x,y,z>0)$ 上没有最小值。连续函数 $e^{f(x,y,z)}=xy^2z^3$ 在有界闭集 $x^2+y^2+z^2=6r^2(x,y,z\ge0)$ 上有（正的）最大值，该最大值也是 $e^{f(x,y,z)}=xy^2z$ 在 $x^2+y^2+z^2=6r^2(x,y,z>0)$ 上的最大值，因此 $f(x,y,z)=\ln x+2\ln y+3\ln z$ 在曲面 $x^2+y^2+z^2=6r^2(x,y,z>0)$ 上有最大值。令

$$L(x,y,z,\lambda)=\ln x+2\ln y+3\ln z-\lambda(x^2+y^2+x^2-6r^2)$$

由 $\frac{\partial L}{\partial(x\ y\ z)}=0$，得 $$x^2=\frac{1}{2\lambda},y^2=\frac{2}{2\lambda},z^2=\frac{3}{2\lambda},$$

代入球面方程得，$\lambda=\dfrac{1}{2r^2}$，所以

$$f_{\max}=\ln r+\ln 2r^2+3\ln(\sqrt{3}r)=6\ln r+\frac{3}{2}\ln 3+\ln 2$$

所以$\ln xyz^3=\ln x+\ln y+3\ln z<=6\ln r+\ln\sqrt{108}=\ln[\sqrt{108}(\dfrac{x^2+y^2+z^2}{6})^3]$,

$$xyz^3<=\sqrt{108}(\frac{x^2+y^2+z^2}{6})^3,$$

两边平方得 $$x^2y^2z^6<=108(\frac{x^2+y^2+z^2}{6})^6$$

所以对任意正数a,b,c有$abc^3<=108(\dfrac{a+b+c}{6})^6$.

11. 求函数 $z=xy(4-x-y)$在由三条直线$x=1$，$y=0$和$x+y=6$所围有界闭区域上的最大值.

解：记由三条直线$x=1$，$y=0$和$x+y=6$所围的有界开区域为D，有界闭区域为$\overline{D}$

(I)求函数$z(x,y)$在区域D内的极值．令

$$\begin{aligned}z'_x&=4y-2xy-y^2=0\\ z'_y&=4x-x^2-2xy=0\end{aligned}$$

驻点$(0,0),\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3}\right),(0,4),(4,0)$，在$D$内的驻点为$\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3}\right)$.

(II) 求函数$z(x,y)$在边界上的极值。区域D的边界由三个直线段构成。这对应着三个条件极值问题如下：

$$(1)\qquad \begin{cases}\mathrm{Max}\ xy(4-x-y)\\ s.t.\quad x=1\end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases}\mathrm{Max}\ xy(4-x-y)\\ s.t.\quad y=0\end{cases}$$

$$(3)\qquad \begin{cases}\mathrm{Max}\ xy(4-x-y)\\ s.t.\quad x+y=6\end{cases}$$

解问题(1)。 将$x=1$代入$z=xy(4-x-y)$得一元函数$z=y(3-y)$。令

$z'=3-2y=0$，即得到驻点$(1,\ 3/2)$。对应函数值为$z=9/4$

解问题（2）。将 $y=0$ 代入 $z=xy(4-x-y)$，得 $z=0$。

解问题（3）．作 Lagrange 函数 $L=xy(4-x-y)+\lambda(x+y-6)$．令

$$L'_x=4y-2xy-y^2+\lambda=0$$
$$L'_y=4x-x^2-2xy+\lambda=0$$
$$L'_\lambda=x+y-6=0$$

解这个方程组求得函数在边界 $x+y=6$ 有驻点 $(3,3)$。

于是我们得到函数在闭区域 $\overline{D}$ 上有驻点 $\left(4/3,4/3\right)$，$\left(1,3/2\right)$ 和 $(3,\ 3)$。函数也可能在三个角点 $(1,0),(6,0),(1,5)$ 上取得最值。由于函数 $z=xy(4-x-y)$ 在有界闭区域 $\overline{D}$ 上连续，故函数在 $\overline{D}$ 上的最大值和最小值都在这六个点上取得。

计算函数 $z=xy(4-x-y)$ 在六个点上的值可知，函数 $z(x,y)$ 在点 $\left(4/3,\ 4/3\right)$ 处取得最大值 $z\left(4/3,4/3\right)=64/27$。在点 $\left(3,\ 3\right)$ 处取得最小值 $z(3,3)=-18$.

12. 求 $z(x,y)=3axy-x^3-y^3$ 的极值.

解：当 $a=0$ 时，$z=-x^3-y^3,\ z'_x=-3x^2,\ z'_y=-3y^2$. 令 $z'_x=z'_y=0$, 得驻点 $(0,0)$. 但 $(0,0)$ 不是 $z=-x^3-y^3$ 的极值点。因此 $a=0$ 时，$z(x,y)$ 无极值。

当 $a\neq 0$ 时，$z'_x=3ay-3x^2,\ z'_y=3ax-3y^2$. 令 $z'_x=z'_y=0$, 得驻点 $(0,0),(a,a)$.

对于驻点 (a,a)，因为

$$\mathrm{A}=z''_{xx}(a,a)=-6a,\mathrm{B}=z''_{yy}(a,a)=-6a,\mathrm{C}=z''_{xy}(a,a)=3a,\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2=27a^2>0.$$

所以，当 $a>0$ 时，$z(x,y)$ 在 (a,a) 取到极大值 $z(a,a)=a^3$. 当 $a<0$ 时，$z(x,y)$ 在 (a,a) 取到极小值 $z(a,a)=a^3$.

对于驻点 $(0,0)$. 当 $a>0$ 时，

$$z(x,x)=3ax^2-2x^3=x^2(3a-2x)>0=z(0,0),\quad \forall x\in(0,\frac{3a}{2});$$

$$z(x,-x)=-3ax^2<0=z(0,0),\quad \forall x\neq 0.$$

因此，$(0,0)$ 不是 $z(x,y)$ 的极值点。当 $a<0$ 时，

$$z(x,x)=3ax^2-2x^3=x^2(3a-2x)<0=z(0,0),\quad \forall x\in(\frac{3a}{2},0);$$

$$z(x,-x) = -3ax^2 > 0 = z(0,0)\ \forall$$

因此，$(0,0)$ 不是 $z(x,y)$ 的极值点。

综上，当 $a=0$ 时，$z(x,y)$ 没有极值；当 $a>0$ 时，$z(x,y)$ 在 (a,a) 取到极大值 $z(a,a)=a^3$; 当 $a<0$ 时，$z(x,y)$ 在 (a,a) 取到极小值 $z(a,a)=a^3$.

13. $f(x,y)=2x+y-x^2-e^{x+y}$.

(1) 求 $f(x,y)$ 的极值；

(2) $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上是否有最大值、最小值？若有, 求最值。若无, 说明理由。

解答：（1）由 $\begin{cases} f_x'(x,y)=2-2x-e^{x+y}, \\ f_y'(x,y)=1-e^{x+y}, \end{cases}$ 得驻点 $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$.

$$H_f=\begin{pmatrix} -2-e^{x+y} & -e^{x+y} \\ -e^{x+y} & -e^{x+y} \end{pmatrix}, \det H_f = 2e^{x+y}>0,$$

H_f 为负定矩阵, 因此 $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ 是极大值点，此时 $f(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})=-\frac{3}{4}$.

（2）$\lim\limits_{\substack{y=x^2-2x \\ x\to+\infty}} f(x,y)=\lim\limits_{x\to+\infty}-e^{x^2-x}=-\infty$, 因此 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上没有最小值。

$$\forall c\in\mathbb{R}, f(x,x^2-2x+c)=c-e^{x^2-x+c}=c-e^{(x-1/2)^2+c-1/4}\le c-e^{c-1/4}.$$

令 $g(c)=c-e^{c-1/4}$, 则 $g'(c)=1-e^{c-1/4}$,

$$c>\frac{1}{4}, g'(c)<0, g(c)\text{严格单调递减}; c<\frac{1}{4}, g'(c)>0, g(c)\text{严格单调递增}.$$

因此 $g(c)\le g(\frac{1}{4})=-\frac{3}{4}$.

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, \exists c\in\mathbb{R}, s.t. y=x^2-2x+c$, 于是

$$f(x,y)=f(x,x^2-2x+c)=c-e^{x^2-x+c}=c-e^{(x-1/2)^2+c-1/4}\le c-e^{c-1/4}\le -\frac{3}{4}.$$

当 $c=\frac{1}{4}, x=\frac{1}{2}$ 即 $x=\frac{1}{2}, y=-\frac{1}{2}$ 时等号成立。故 $f(x,y)$ 在点 $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ 取到最大值

$$\max_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)=f(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})=-\frac{3}{4}.$$