赵晨阳 软01／计06 2020012363

习题 6.2

2. $x\in[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$ 而 $\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}\in C[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$ $\forall n=1,2,3\cdots$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 关于x一致收敛，且 $\tan\frac{x}{2^n}$ 关于n单调递减，$\forall x\in[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$

由Abel判别法有，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}$ 关于x在 $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$ 上一致收敛

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}S(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\ln|\cos\frac{x}{2^n}|\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}=-\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left|\frac{\cos\frac{\pi/3}{2^n}}{\cos\frac{\pi/6}{2^n}}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(-\ln\left|\frac{\cos\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6}}\cdot\frac{\cos\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{6}}\cdots\cdots\frac{\cos\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\pi}{6}}\right|\right)=-\lim_{n\to\infty}\ln\frac{\cos\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\pi}{6}}=-\ln^{\cos\frac{\pi}{6}}=-\ln\frac{\sqrt{3}}{2}$$

3. $\int_0^1 x^x dx=\int_0^1 e^{x\ln x}dx$. $\forall x\in\mathbb{R}$, e^x 可在 $x=0$ 处幂级数展开. 且 $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots$

$\therefore$ 原式 $=\int_0^1 1+x\ln x+\frac{x^2\cdot(\ln x)^2}{2!}+\cdots dx=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\int_0^1 x^n\ln^n x dx$

而 $\int_0^1 x^n(\ln x)^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln x)^n\Big|_0^1-\frac{n}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}\ln^{n-1}x\cdot\frac{1}{x}dx$

$=-\frac{n}{n+1}\int_0^1 x^n\cdot\ln^{n-1}x\,dx=-\frac{n}{n+1}\left(\frac{x^{n+1}\ln^{n-1}x}{n+1}\Big|_0^1-\int_0^1\frac{n-1}{n+1}x^{n+1}\cdot\frac{1}{x}\cdot\ln^{n-2}x\,dx\right)$

$=(-1)^2\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n-1}{n+1}\cdot\int_0^1 x^n\ln^{n-2}x\,dx$ 综上，反复降低 $\ln x$ 的次数有

$\int_0^1 x^n\ln^n x\,dx=(-1)^n\cdot\frac{n!}{(n+1)^n}\int_0^1 x^n dx=(-1)^n\frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$

综上 原式 $=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{(n+1)^{n+1}}=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^4}\cdots+(-1)^n\frac{1}{(n+1)^{n+1}}+\cdots$

4. $\forall[a,b]\in[1,+\infty)$，$\frac{n}{x^n}\le\frac{n}{a^n}$ 对 $\forall x\in[a,b]$ $\forall n$ 均成立 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a^n}$ 收敛. 故由Weistrass有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}$ 在 $[a,b]$ 上对x一致收敛. 又 $\frac{n}{x^n}$ 在 $[a,b]$ 上对 $\forall n\in N^+$ 连续 $\therefore\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}$ 在 $[a,b]$ 上连续. 而由 $[a,b]$ 任意性. $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续

5. $x=0$ 时，令原级数为 $S(x)$，则 $S(x)=0$；$x\neq0$ 时，$1+x^2>1$，则公比为 $0<\left|\frac{1}{1+x^2}\right|<1$ 的几何级数一收敛 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{x^2}{(1+x^2)^n}\right|=\frac{x^2}{1+x^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)^n}=\frac{x^2}{1+x^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{1+x^2}}=1$ 综上 $\forall x$，$S(x)$ 绝对收敛

且和函数 $S(x)=\begin{cases}0 & (x=0)\\ 1 & (x=1)\end{cases}$ $S(x)$ 在 $x=0$ 处不连续. 但 $\forall\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 对 $\forall n\in N^+$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续

故级数不一致连续

7. $\forall x\in(0,+\infty)$，$\forall n\in N^+$ 有 $|e^{-nx}|\le1$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，由Abel有 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{n^2}$ 一致收敛

又 $\because\frac{e^{-nx^2}}{n^2}$ 在 $(0,+\infty)$ 连续，$\forall n=1,2,\cdots$ $\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续. 又 $\because\left(\frac{e^{-nx}}{n^2}\right)'=-\frac{1}{n}e^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续，取任意 $a>0$，在 $[a,+\infty)$ 上，$\forall n\in N^+$，$\frac{1}{n}$ 单调递减趋于0

且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-nx}$ 在 $[a,+\infty)$ 上有 $|e^{-nx}|\le e^{-an}$，且后者级数收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-nx}$ 在 $[a,+\infty)$ 一致收敛，

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}-\frac{e^{-nx}}{n}$ 在 $[a,+\infty)$ 一致收敛. 故 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上可微

由a任意性，有 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可微 且 $f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}-\frac{e^{-nx}}{n}$

习题6.3

1.(1) 令 $a^n=\frac{1}{n^n}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ 故收敛半径为 ∞，收敛域为 $(-\infty,+\infty)$

1.(3) 设 x^n 系数为 a_n. $n=1,2,3\cdots$ $\overline{\lim}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3n+1]{\frac{1}{(2n+1)2^n}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ 故收敛半径为 $\sqrt[3]{2}$

当 $x=\sqrt[3]{2}$ 时，原式 $=\sum\frac{2^n}{(2n+1)2^n}\cdot\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2}\sum\frac{1}{2n+1}$ 发散

$x=-\sqrt[3]{2}$ 时，原式 $=\sum\frac{(-1)^{3n+1}}{(2n+1)}\cdot\sqrt[3]{2}=(-1)^{n+1}\cdot\sqrt[3]{2}\sum\frac{1}{2n+1}$ 由Leibnitz判敛法有：该级数收敛

综上 收敛半径 $\sqrt[3]{2}$，收敛域 $[-\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{2})$

5. 令 $a_n=\frac{\ln n}{n}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\ln n}{n}}=1$ $x=1$ 时，$n\geq3$ 后，$|\frac{\ln n}{n}|>\frac{1}{n}$ 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ 发散

$x=-1$ 时，令 $f(n)=\frac{\ln n}{n}$ $f'(n)=\frac{1-\ln n}{x^2}$，可知 $f(n)$ 在 $n>3$ 后单调递减且趋于0故由Leibnitz $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$ 收敛 综上：收敛半径为1，且收敛域为 $[-1,1)$

7. 记 $a_n=\frac{1}{n^p}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1})^p=1$ 令 $x-1=y$ $1°$ $y=1$ 时，$\begin{cases}p>1 & 收敛\\0<p\leq1 & 发散\end{cases}$，此时 $x=2$

$2°$ $y=-1$ 时，由Leibnitz有 $\frac{1}{n^p}$ 单调递减趋于0，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\cdot(-1)^n$ 收敛 此时 $x=0$

综上，收敛半径为1，收敛域为 $\begin{cases}[0,2) & 当0<p\leq1\\ [0,2] & 当1<p\end{cases}$

9. $y=(x+a)^2$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=2$ 对 y 收敛半径为 $\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{2}$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\cdot(\frac{1}{2})^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}1$ 发散

而 $y\geq0$ 且 $y=0$ 时收敛 故 y 收敛域为 $[0,\frac{1}{2})$. $(x+a)^2=0$，则 $x=-a$. $(x+a)^2=\frac{1}{2}$，则 $x=-a\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

结合二次函数图像有 x 收敛域为 $(-a-\frac{\sqrt{2}}{2},-a+\frac{\sqrt{2}}{2})$

2.1 $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n(n-1)}{(n+1)n}=1\Rightarrow\rho=1$. $x=1$ 时，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}$ 收敛 $x=-1$ 时 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n(n-1)}\right|$ 收敛

综上 收敛域为 $[-1,1]$. 设和函数为 $S(x)$. $x\in(-1,1)$ 时. $S'(x)=\sum\limits_{n=2}\frac{x^{n-1}}{n-1}$ $S''(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}x^{n-2}=1+x+\cdots+\cdots=\frac{1}{1-x}$

$S'(x)=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=-\ln|1-t|\Big|_0^x=-\ln|1-x|+C$.

$S(x)=\int_0^x-\ln|1-t|dt=\int_0^x-\ln|1-t|dt=(1-t)\ln(1-t)-(1-t)\Big|_0^x=(1-x)\ln(1-x)-(1-x-1)=(1-x)\ln(1-x)+x$

因为幂级数在端点收敛，故 $S(x)\in C[-1,1]$. 故 $S(-1)=\lim\limits_{x\to-1}((1-x)\ln(1-x)+x)=2\ln2-1$

$S(1)=\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)\ln(1-x)+x=1$. 综上 收敛域为 $[-1,1]$ 和函数为 $S(x)=\begin{cases}1 & (x=1)\\(1-x)\ln(1-x)+x & (-1\leq x<1)\end{cases}$

2.3 设 x^n 系数为 a_n. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[2n+1]{2n+1}=1\Rightarrow\rho=1$. $x=1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n+1)$ 发散，

$x=-1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}a_nx^n$ 不存在. 也发散 故收敛域为 $(-1,1)$，$x\in(-1,1)$ 时，$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^{2n+1}$

$=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^{2n}$ $\int^x\frac{S(t)}{t}dt=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^x(2n+1)t^{2n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}t^{2n+1}\Big|_0^x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{2n+1}=\frac{x^3}{1-x^2}$

$\frac{S(x)}{x}=(\frac{x^3}{1-x^2})'=\frac{3x^2-x^4}{(1-x^2)^2}$. 综上. 收敛域为 $(-1,1)$，$S(x)=x\cdot\frac{3x^2-x^4}{(1-x^2)^2}=\frac{3x^3-x^5}{(1-x^2)^2}$

2.5 设 x^n 系数为 a_n. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n-1]{\frac{n(n+1)}{2}}=1$. $x=1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}$ 发散 $x=-1$ 时，$\lim a_nx^n$ 不存在

$x\in(-1,1)$ 时，$S(x)$ 为和函数 $\int_0^xS(t)dt=\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^x(n+1)nt^{n-1}dt=\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$

$\int_0^x\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)t^ndt=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^x(n+1)t^ndt=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n+1}=\frac{x^2}{1-x}$ $\therefore\int_0^xS(t)dt=\frac{1}{2}\cdot(\frac{x^2}{1-x})'=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}$

$\therefore S(x)=\frac{1}{2}(\frac{2x-x^2}{(1-x)^2})'=\frac{1}{(1-x)^3}$. 综上：收敛域为 $(-1,1)$ 和函数为 $\frac{1}{(1-x)^3}$

3.(1) $|\cos x|\le 1$, $\forall x\in R$. $|\cos^{(n)}(x)|=|\cos(x+\frac{n}{2}\pi)|\le 1$, $\cos x=\cos\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(x+\frac{n}{2}\pi)}{n!}(x-\frac{\pi}{4})^n$

收敛域为 $(-\infty,+\infty)$

3.(3) $\ln(1+x)=\ln(3+(x-2))=\ln 3+\ln(1+\frac{x-2}{3})$ $\ln(1+x)$在$x=0$处展开为 $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots$

$x\in(-1,1]$ 故$\ln(1+\frac{x-2}{3})$在$x=2$处为 $\frac{x-2}{3}-\frac{1}{2}\cdot(\frac{x-2}{3})^2+\cdots+(-1)^n\cdot\frac{1}{n+1}\cdot(\frac{x-2}{3})^{n+1}+\cdots$

$\frac{x-2}{3}\in(-1,1]$ ∴ $x\in(-1,5]$ 综上 $\ln(1+x)=\ln 3+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n+1}\cdot(\frac{x-2}{3})^{n+1}$ $x\in(-1,5]$

(5) $\forall x\in R$ $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$ $\sin x^2=x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-2}}{(2n-1)!}\cdot(-1)^{n-1}$ 收敛域为$(-\infty,+\infty)$

(7) $\frac{1}{x-1}=\frac{-1}{2-(x+1)}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x+1}{2}}$ 而 $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$ $x\in(-1,1)$

故 $\frac{1}{1-\frac{x+1}{2}}=1+\frac{x+1}{2}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{x+1}{2})^n$ $x\in(-3,1)$ 综上 $\frac{1}{x-1}$在$x_0=-1$处展开为 $-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{x+1}{2})^n$ $x\in(-3,1)$

9. $\frac{x}{(x-1)(x+3)}=x(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+3})\frac{1}{4}$ $\frac{1}{x-1}=-\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$ $x\in(-1,1)$ $\frac{1}{3+x}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{3}}=\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{3})^n x^n$ $x\in(-1,1)$

∴ $\frac{x}{(x-1)(x+3)}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-\frac{1}{4}\cdot x^{n+1}+\frac{1}{12}\cdot(-\frac{1}{3})^n x^{n+1})$ $x\in(-1,1)$时幂级数收敛

下证$(-1,1)$为收敛. 当$x=1$时. $\lim_{n\to\infty}(-\frac{1}{4}+\frac{1}{12}(-\frac{1}{3})^n)=-\frac{1}{4}$, 级数发散

$x=-1$时, $\lim_{n\to\infty}(-\frac{1}{4}(-1)^{n+1}-\frac{1}{36})=-\frac{1}{36}$, 级数发散

综上 展开为 $\frac{x}{(x-1)(x+3)}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-\frac{1}{4}x^{n+1}+\frac{1}{12}\cdot(-\frac{1}{3})^n x^{n+1})$ 收敛域为$(-1,1)$

11. $[\ln(x+\sqrt{x^2+1})]'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ $(1+x)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(\frac{1}{2}-n)}{n!}x^n$ $x\in(-1,1]$.

∴ $(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(\frac{1}{2}-n)}{n!}x^{2n}$ $x\in[-1,1]$. $\int_0^x(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(\frac{1}{2}-n)}{n!}t^{2n}dt$

$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(\frac{1}{2}-n)}{n!(2n+1)}\cdot x^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $x\in(-1,1)$

$x=\pm1$时, 幂级数为 $\pm\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 设 $A_n=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ $B_n=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ $\forall n$有$B_n>A_n$.

$0\le\lim_{n\to\infty}A_n^2<\lim_{n\to\infty}A_nB_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)!!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=0$ 故$\lim_{n\to\infty}A_n=0$

故$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}A\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=0$ 且对 $f(n)=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}$, $f(n)>0$

$\frac{f(n+1)}{f(n)}=\frac{(2n+1)\cdot(2n-1)!!}{(2n+2)\cdot(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+3}\cdot\frac{(2n+1)(2n)!!}{(2n-1)!!}=\frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)}<1$, 故$f(n)$单调递减趋于0

由Leibntz判别法有 $x=\pm1$收敛 故

收敛域为$[-1,1]$, 展开为 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

13. $\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $x\in(-1,1)$

∴ $\frac{\arctan x}{x}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{2n+1}$ $x\in(-1,1)$ ∴ $\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{t^{2n}}{2n+1}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n\cdot\frac{t^{2n}}{(2n+1)}dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$

又∵当$x=1$时, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{(2n+1)^2}$绝对收敛; $x=-1$时, $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{3n+1}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2}$绝对收敛

综上 收敛域为$[-1,1]$, 展开为$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$