解：我们先求$f$的驻点. 令

假设最小, 求驻点, 再证明其为最小值

$$\begin{cases} f_1'(a,b)=0, \\ f_2'(a,b)=0, \end{cases}$$

对a求导 → $\sum_{i=1}^{n} 2(ax_i+b-y_i)x_i=0$

对b求导 → $\sum_{i=1}^{n} 2(ax_i+b-y_i)=0$

求导时 求和号保留

得

$$\begin{cases} \underline{\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)x_i=0,} \\ \underline{\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)=0.} \end{cases}$$

即

常数拿出来

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i, \\ a\sum_{i=1}^{n}x_i+nb=\sum_{i=1}^{n}y_i. \end{cases}$$

因为$x_1,x_2,\cdots,x_n$中至少有两个数不相等，故$(x_1,\cdots,x_n)$与$(1,\cdots,1)$ 线性无关，根据Cauchy-Schwarz不等式得

$$\langle(x_1,\cdots,x_n),(1,\cdots,1)\rangle^2<||(x_1,\cdots,x_n)||^2\ ||(1,\cdots,1)||^2,$$

$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle^2\le||\vec{a}||^2||\vec{b}||^2$

$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle^2=||\vec{a}||^2||\vec{b}||^2 \Longleftrightarrow \vec{a},\vec{b}$ 线性相关

即

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2<n\sum_{i=1}^{n}x_i^2.$$

分母不等于0

所以关于$(a,b)$的方程组有唯一解，

$$a_0=\frac{\begin{vmatrix}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i & \sum_{i=1}^{n}x_i \\ \sum_{i=1}^{n}y_i & n\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 & \sum_{i=1}^{n}x_i \\ \sum_{i=1}^{n}x_i & n\end{vmatrix}},\quad b_0=\frac{\begin{vmatrix}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 & \sum_{i=1}^{n}x_iy_i \\ \sum_{i=1}^{n}x_ie & \sum_{i=1}^{n}y_i\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 & \sum_{i=1}^{n}x_i \\ \sum_{i=1}^{n}x_i & n\end{vmatrix}}.$$

而

$$f_{11}''(a,b)=2\sum_{i=1}^{n}x_i^2,\quad f_{12}''(a,b)=2\sum_{i=1}^{n}x_i,\quad f_{22}''(a,b)=2n,$$

于是由带Lagrange余项的~~二阶~~一阶Taylor公式知，则存在$\theta\in(0,1)$，使得

$(a_0,b_0)$为驻点, $f_1'(a_0,b_0)=f_2'(a_0,b_0)=0$

$$\begin{aligned}
& f(a,b)-f(a_0,b_0) \\
= \ & (a-a_0)f_1'(a_0,b_0)+(b-b_0)f_2'(a_0,b_0)+\frac{1}{2}\left[(a-a_0)^2f_1''+2(a-a_0)(b-b_0)f_{12}''+(b-b_0)^2f_{22}''\right]\Big|\begin{pmatrix}a_0+\theta(a-a_0)\\ b_0+\theta(b-b_0)\end{pmatrix} \\
= \ & (a-a_0)^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2+2(a-a_0)(b-b_0)\sum_{i=1}^{n}x_i+(b-b_0)^2n \\
= \ & \sum_{i=1}^{n}[(a-a_0)x_i+b-b_0]^2\ge 0,
\end{aligned}$$

所以点$(a_0, b_0)$是$f$的最小点，故所求直线方程为

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n x_i y_i & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n y_i & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{vmatrix}} x + \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i e & \sum_{i=1}^n y_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{vmatrix}}.$$

即

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i y_i & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n y_i & n \end{vmatrix} = 0.$$

**问题1** 如果这些点分布近似一条抛物线，怎样选取抛物线$y = ax^2 + bx + c$,使得

$$f(a, b, c) =: \sum_{i=1}^n (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2$$

取最小值，其中$n > 3$.

**定理2** 设$\Omega \subset \mathcal{R}^n$，函数$f : \Omega \to \mathcal{R}$. 若$f$在$\Omega$的某个内点$\mathbf{x}_0$的邻域$B(\mathbf{x}_0, \delta_0)$有二阶连续偏导数，且

$$\mathbf{J}f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}.$$

1. 若矩阵$\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)$正定，则$\mathbf{x}_0$是$f$的（严格）极小点；
2. 若矩阵$\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)$负定，则$\mathbf{x}_0$是$f$的（严格）极大点；
3. 若矩阵$\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)$不定，则$\mathbf{x}_0$不是$f$的极点。

证：$\forall \mathbf{h}$, $||\mathbf{h}|| < \delta_0$，由带Lagrange余项的二阶Taylor公式，有

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) &= \mathbf{J}f(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} + \tfrac{1}{2}\mathbf{h}^\top \mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0 + \theta\mathbf{h})\mathbf{h} \\ &= \tfrac{1}{2}\mathbf{h}^\top \mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0 + \theta\mathbf{h})\mathbf{h} \quad （因为\mathbf{J}f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}） \end{aligned}$$

情况1. 矩阵$H_f(\mathbf{x}_0)$正定。因$f''_{ij}$连续，考虑$\mathbf{H}_f(\mathbf{x})$的顺序主子式知矩阵$\mathbf{H}_f(\mathbf{x})$在$\mathbf{x}_0$某个邻域$B(\mathbf{x}_0, \delta)$内正定。于是当$0 < ||\mathbf{h}|| < \delta$时，有

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) = \tfrac{1}{2}\mathbf{h}^\top \mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0 + \theta\mathbf{h})\mathbf{h} > 0.$$

故$\mathbf{x}_0$是$f$的(严格)极小点。

若想用带Peano余项的Taylor公式，如何叙述？

情况3. 矩阵$H_f(\mathbf{x}_0)$不定。取$\widetilde{\mathbf{h}}$和$\widehat{\mathbf{h}}$，使得

$$\widetilde{\mathbf{h}}^\top \mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)\widetilde{\mathbf{h}} > 0, \quad \widehat{\mathbf{h}}^\top \mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)\widehat{\mathbf{h}} < 0.$$