

系名_____ 班级_____ 姓名_____ 学号_____

解答

一. 填空题 (每空 3 分, 共 10 题) (请将答案直接填写在横线上!)

1. 设 f 连续, 交换累次积分的次序 $\int_1^2 dx \int_0^x f(x, y) dy =$ _____。

$$\int_0^1 dy \int_1^2 f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_y^2 f(x, y) dx$$

2. 马鞍面 $z = xy$ 被圆柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 所截, 截得的有界部分曲面的面积为_____。

$$\frac{2}{3}\pi(2\sqrt{2}-1)$$

3. 设曲面 $S^+ : z = 1 (x^2 + y^2 \leq 1)$, 方向向下。则 $\iint_{S^+} x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy =$ _____。

$$-\pi$$

4. 设 $L : x^2 + y^2 = 1$, 则 $\int_L (x + y)^2 dl =$ _____。 2π

5. 设 L^+ 为从 $(0,0)$ 点到 $(1,2)$ 点的有向线段, 则 $\int_{L^+} xy^2 dx + x^2 y dy =$ _____。 2

6. 设 $f(x, y) = x^2 y^2$, 则在点 $(1,1)$ 处, $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) =$ _____。 4

7. 设 $\vec{F}(x, y, z) = (yz, zx, xy)$, 则 $\operatorname{rot} \vec{F}(x, y, z) =$ _____。 $\mathbf{0}$

8. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n!}$ 的收敛性为_____。(填“绝对收敛”, “条件收敛”或“发散”)

绝对收敛

9. 设 2π 周期函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-\pi, 0) \\ 0, & x \in [0, \pi) \end{cases}$ 的形式 Fourier 级数的和函数为 $S(x)$, 则

$$S(0) = \text{_____}。 \quad \frac{1}{2}$$

10. 设 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数, $f(x) = x, x \in [0, 1]$ 。若 $f(x)$ 的形式 Fourier 级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x, \text{ 则 } b_n = \text{_____}。 \quad \frac{(-1)^{n+1} 2}{n\pi}$$

二. 解答题 (共 6 题) (请写出详细的计算过程和必要的根据!)

11. 已知曲线积分 $\int_{L(A)}^{(B)} (e^x \sin y - x - y) dx + (e^x \cos y - ax) dy$ 与路径无关。

(I) 求 a 的值;

(II) 求 $\int_{(0,0)}^{(2,\pi)} (e^x \sin y - x - y)dx + (e^x \cos y - ax)dy$ 。

解: (I) $\frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y - ax) = \frac{\partial}{\partial y}(e^x \sin y - x - y)$,

$$e^x \cos y - a = e^x \cos y - 1 ,$$

所以当且仅当 $a=1$ 时 $\int_{L(A)}^{(B)} (e^x \sin y - x - y)dx + (e^x \cos y - ax)dy$ 与路径无关。

(II) 当 $a=1$ 时, $(e^x \sin y - x - y)dx + (e^x \cos y - ax)dy = d(e^x \sin y - \frac{x^2}{2} - xy)$,

所以 $\int_{(0,0)}^{(2,\pi)} (e^x \sin y - x - y)dx + (e^x \cos y - ax)dy = \left(e^x \sin y - \frac{x^2}{2} - xy \right) \Big|_{(0,0)}^{(2,\pi)} = -2 - 2\pi$ 。

12. 设 Ω 为由 $z=1-(x^2+y^2)$ 和 $x^2+y^2+z^2=1$ 围成的空间有界区域, 求 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$ 。

解: 积分区域 $1-z \leq x^2+y^2 \leq 1-z^2$, 用柱坐标计算

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z dx dy dz &= \int_0^1 z \left(\iint_{1-z \leq x^2+y^2 \leq 1-z^2} dx dy \right) dz \\ &= \int_0^1 z \left(2\pi \int_{\sqrt{1-z}}^{\sqrt{1-z^2}} r dr \right) dz \\ &= \pi \int_0^1 z(z-z^2) dz \\ &= \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

或:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z dx dy dz &= \int_{-1}^0 z \left(\iint_{0 \leq x^2+y^2 \leq 1-z^2} dx dy \right) dz + \int_0^1 z \left(\iint_{0 \leq x^2+y^2 \leq 1-z} dx dy \right) dz \\ &= \pi \int_{-1}^0 z(1-z^2) dz + \pi \int_0^1 z(1-z) dz \\ &= -\frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

本题解法二:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z dx dy dz &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy \int_{1-x^2-y^2}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z dz \\ &= \frac{1}{2} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2+y^2)(1-x^2-y^2) dx dy \\ &= \pi \int_0^1 \rho^2(1-\rho^2) \rho d\rho \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{12}$$

或：

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z dx dy dz &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{1-x^2-y^2} z dz \\ &= -\frac{1}{2} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2+y^2)(1-x^2-y^2) dx dy \\ &= -\pi \int_0^1 \rho^2 (1-\rho^2) \rho d\rho \\ &= -\frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

13. 求幂级数 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!} x^{2n-1}$ 的收敛半径及和函数。

解：设 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!} x^{2n-1}$ ，则收敛半径为 ∞ 。

$$\int_0^x S(x) dx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n} = \frac{1}{2x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \frac{\sin x}{2x} - \frac{1}{2},$$

$$S(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{2x^2},$$

14. 设 S^+ 为包含两点 $(-1, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$ 在其内的逐片光滑的正则闭曲面，方向向外，记

$$\vec{r}_1 = (-1, 0, 0), \quad \vec{r}_2 = (1, 0, 0), \quad \vec{r} = (x, y, z), \quad \text{函数 } \vec{F}(x, y, z) = a \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{\|\vec{r} - \vec{r}_1\|^3} + b \frac{\vec{r} - \vec{r}_2}{\|\vec{r} - \vec{r}_2\|^3}, \quad \text{其中 } a, b$$

为常数。求 $\iint_{S^+} \vec{F} \cdot d\vec{S}$ 。

解：记 $S_i^+, i=1, 2$ ： $\|\vec{r} - \vec{r}_i\| = \varepsilon$ ，方向向外。

$$\text{当 } \vec{r} \neq \vec{0} \text{ 时, } \operatorname{div} \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3} = \frac{3}{\|\vec{r}\|^3} - \frac{3}{\|\vec{r}\|^4} \left(x \frac{\partial \|\vec{r}\|}{\partial x} + y \frac{\partial \|\vec{r}\|}{\partial y} + z \frac{\partial \|\vec{r}\|}{\partial z} \right) = \frac{3}{\|\vec{r}\|^3} - \frac{3}{\|\vec{r}\|^4} \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{\|\vec{r}\|} \right) = 0,$$

$$\text{所以由 Gauss 公式, } \iint_{S^+} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1^+} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2^+} \vec{F} \cdot d\vec{S} = a \iint_{S_1^+} \vec{F}_1 \cdot d\vec{S} + b \iint_{S_2^+} \vec{F}_2 \cdot d\vec{S}$$

$$\text{其中 } \vec{F}_k(x, y, z) = \frac{\vec{r} - \vec{r}_k}{\|\vec{r} - \vec{r}_k\|^3}.$$

$$\text{而 } \iint_{\|\vec{r}\|=\varepsilon} \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3} \cdot d\vec{S} = \iint_{\|\vec{r}\|=\varepsilon} \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3} \cdot \frac{\vec{r}}{\varepsilon} dS = \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{\|\vec{r}\|=\varepsilon} dS = 4\pi,$$

所以 $\iint_{S^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi(a+b)$ 。

15. 计算 $\iint_D \cos \frac{x}{x+y} dx dy$, 其中 $D = \left\{ (x, y) \mid 1 \leq x+y \leq 3, 0 \leq \frac{x}{x+y} \leq 1 \right\}$ 。

解: 令 $\begin{cases} u = x+y \\ v = \frac{x}{x+y} \end{cases}$, 则 $\begin{cases} x = uv \\ y = u - uv \end{cases}$, $\left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{pmatrix} \right| = |u|$,

$$D_1 = \{(u, v) \mid 0 \leq v \leq 1, 1 \leq u \leq 3\},$$

$$\iint_D \cos \frac{x}{x+y} dx dy = \iint_{D_1} u \cos v du dv = \int_0^1 \cos v dv \int_1^3 u du = 4 \sin 1。$$

16. 设 $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, $0 < T \leq +\infty$ 。

(I) 若 $u, v \in C^{(2)}(\Omega)$, 记 $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right)$, \vec{n} 为 Ω 边界 $\partial\Omega$ 的外法向

量, 证明: $\iiint_{\Omega} v \Delta u dx dy dz = \iint_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS - \iiint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx dy dz$;

(II) 设 $f(x, y, z, t) \in C^{(1)}(\Omega \times [0, T])$, 证明: $\forall t \in [0, T]$,

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} f(x, y, z, t) dx dy dz = \iiint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial t} dx dy dz;$$

(III) 设 $w(x, y, z, t) \in C^{(2)}(\Omega \times [0, T])$, 满足:

$$(1) \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \Delta w + w^3; \quad (2) \quad \text{当 } (x, y, z) \in \partial\Omega \text{ 时, } \frac{\partial w}{\partial t}(x, y, z, t) \equiv 0, \quad \forall t \in [0, T];$$

记 $\|\nabla w\| = \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2}$, 证明: $F(t) = \iiint_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \|\nabla w\|^2 - \frac{1}{4} w^4 \right) dx dy dz$ 在 $[0, T]$

上为单调递减函数。

证明: (I) $\iint_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS = \iint_{\partial\Omega^+} v \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} v \Delta u dx dy dz + \iiint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx dy dz,$

所以 $\iiint_{\Omega} v \Delta u dx dy dz = \iint_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS - \iiint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx dy dz。$

(II) 记 $I(t) = \iiint_{\Omega} f(x, y, z, t) dx dy dz$, 则 $\forall t_0 \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{I(t_0 + \Delta t) - I(t_0)}{\Delta t} - \iiint_{\Omega} f_t(x, y, z, t_0) dx dy dz \right| \\ &= \left| \iiint_{\Omega} \frac{f(x, y, z, t_0 + \Delta t) - f(x, y, z, t_0)}{\Delta t} dx dy dz - \iiint_{\Omega} f_t(x, y, z, t_0) dx dy dz \right| \end{aligned}$$

由中值定理, $\frac{f(x, y, z, t_0 + \Delta t) - f(x, y, z, t_0)}{\Delta t} = f_t(x, y, z, t_0 + \theta \Delta t)$, 而 $f_t(x, y, z, t)$ 为连续函数, 所以 $f_t(x, y, z, t)$ 在 $\Omega \times [0, a]$ 一致连续, 其中常数 $a > t_0$ 。所以

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \Delta t: |\Delta t| < \delta, |f_t(x, y, z, t_0 + \theta \Delta t) - f_t(x, y, z, t_0)| < \varepsilon$$

所以 $\left| \frac{I(t_0 + \Delta t) - I(t_0)}{\Delta t} - \iiint_{\Omega} f_t(x, y, z, t_0) dx dy dz \right| < V \varepsilon$, 其中 V 为 Ω 的体积。故

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} f(x, y, z, t) dx dy dz = \iiint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial t} dx dy dz。$$

【注 1】本题是三重含参积分, 不能直接用定积分的含参积分的结论。不写具体证明, 不给分。

【注 2】若化成累次积分, 连续用 3 次含参积分的结论, 可以得分。

(III) 由 (II) 知,

$$\begin{aligned} F'(t) &= \iiint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} |\nabla w|^2 - \frac{1}{4} w^4 \right) dx dy dz \\ &= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial t} - w^3 \frac{\partial w}{\partial t} \right) dx dy dz \\ &= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial t} - \left(\frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w \right) \frac{\partial w}{\partial t} \right) dx dy dz \\ &= \iiint_{\Omega} \left(\nabla w \cdot \nabla \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) - \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \Delta w \frac{\partial w}{\partial t} \right) dx dy dz, \end{aligned}$$

由 (1), 记 $u = w, v = \frac{\partial w}{\partial t}$, 则 $\iiint_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) dx dy dz = \iint_{\partial \Omega} \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} dS - \iiint_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial t} \Delta w dx dy dz$,

而当 $(x, y, z) \in \partial\Omega$, $t \in [0, T]$, $w(x, y, z, t) \equiv 0$, $\frac{\partial w}{\partial t}(x, y, z, t) \equiv 0$, 所以 $\iint_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} dS = 0$,

$$F'(t) = -\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy dz \leq 0, \quad F(t) = \iiint_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla w|^2 - \frac{1}{4} w^4 \right) dx dy dz \text{ 在 } [0, T] \text{ 上为单调递}$$

减函数。

三. 附加题

称向量场 $\vec{F}: D = R^2 \setminus \{O\} \rightarrow R^2$ 是以 O 为中心的有心力场, 若 $\vec{F}(\vec{r}) \parallel \vec{r}$ ($\forall \mathbf{r} \in D$)。

(I) 证明 $C^{(1)}$ 有心力场 \vec{F} 是保守场当且仅当 $\|\vec{F}(\vec{r})\|$ 只与 $r = \|\vec{r}\|$ 有关。

(II) (I) 中结论对 3 维空间中的 $C^{(1)}$ 类有心力场是否依然成立?

证明: (I) 充分性: 设 $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r)\mathbf{r}$ 。则取 g 为 $rf(r)$ 的原函数, 令 $U(\mathbf{r}) = g(\|\mathbf{r}\|)$ 。则

$$\nabla U(\mathbf{r}) = g'(r) \nabla \|\mathbf{r}\| = rf(r) \frac{\mathbf{r}}{r} = f(r)\mathbf{r}。所以 \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \nabla U(\mathbf{r})。$$

必要性: 设 $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})\mathbf{r}$ 。

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{r}) &= \frac{\partial(f(x, y)y)}{\partial x} - \frac{\partial(f(x, y)x)}{\partial y} \\ &= y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xy \left(\frac{1}{x} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{y} \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ &= xy \left[\frac{1}{x} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) - \frac{1}{y} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \right] \\ &= xy \left[\frac{\partial f}{\partial r} \left(\frac{x}{r} \frac{1}{x} - \frac{y}{r} \frac{1}{y} \right) + \frac{\partial f}{\partial \theta} \left(\frac{1}{x} \frac{-y}{x^2 + y^2} - \frac{1}{y} \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \right] \\ &= -\frac{\partial f}{\partial \theta} \end{aligned}$$

因为 \mathbf{F} 是保守场, 所以 $\text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0$, 因此 $\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0$, 从而 f 只是 $r = \|\mathbf{r}\|$ 的函数。

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{r})\| = \|f(r)\mathbf{r}\| = r|f(r)|。$$

(II) (I) 中结论对 3 维空间中的 $C^{(1)}$ 类有心力场依然成立。

充分性： 设 $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r)\mathbf{r}$ 。则取 g 为 $rf(r)$ 的原函数，令 $U(\mathbf{r}) = g(\|\mathbf{r}\|)$ 。则

$$\nabla U(\mathbf{r}) = g'(r)\nabla\|\mathbf{r}\| = rf(r)\frac{\mathbf{r}}{r} = f(r)\mathbf{r}。所以 \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \nabla U(\mathbf{r})。$$

必要性： 设 $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})\mathbf{r}$ 。

$$0 = \frac{\partial(f(x_1, x_2, x_3)x_1)}{\partial x_2} - \frac{\partial(f(x_1, x_2, x_3)x_2)}{\partial x_1} = x_1x_2\left(\frac{1}{x_2}\frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{1}{x_1}\frac{\partial f}{\partial x_1}\right),$$

所以由 (I) 知 $f(x_1, x_2, x_3)$ 只与 $f(0, \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, x_3)$ 有关。

$$0 = \frac{\partial(f(0, x_2, x_3)x_2)}{\partial x_3} - \frac{\partial(f(0, x_2, x_3)x_3)}{\partial x_2} = x_2x_3\left(\frac{1}{x_3}\frac{\partial f}{\partial x_3} - \frac{1}{x_2}\frac{\partial f}{\partial x_2}\right),$$

所以由 (I)， $f(0, x_2, x_3)$ 只与 $\sqrt{x_2^2 + x_3^2}$ 有关。

所以 $f(x_1, x_2, x_3)$ 只与 $f(0, \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, x_3)$ 有关， $f(0, \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, x_3)$ 只与 $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ 有关， 故

$f(x_1, x_2, x_3)$ 只与 $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ 有关。