第十一周次习题课讨论题参考解答

本次习题课主要讨论第一型曲线、曲面积分。

一．内容提要：

曲线积分可分为两类：一类与曲线的方向无关，称之为第一型曲线积分；另一类与曲线的方向有关，称之为第二型曲线积分；

曲面积分可分为两类：一类与曲面的方向无关，称之为第一型曲面积分；另一类与曲面的方向有关，称之为第二型曲面积分；

二．复习以下概念和性质：

1. 第一型曲线曲面积分定义；
2. 第一型曲线曲面积分存在的条件：连续函数在光滑曲线（面）上可积分
3. 曲线曲面积分的运算性质：线性性质；区域可加性质；比较性质；绝对可积分性质；
4. 曲线曲面积分中值定理（要求曲线曲面光滑）；

三．曲线曲面积分的计算

1.曲线积分计算的基本方法是根据题意写出所给曲线在适当坐标系下的参数方程将曲线积分的计算化为对参数的定积分；

2. 曲面积分计算的基本方法是根据题意写出所给曲面在适当坐标系下的参数方程将曲面积分的计算化为二重积分；

四．练习题目

4. 1 曲线积分

1．计算 $\oint_L xydl$，其中 L 是正方形 $|x|+|y|=a,\quad (a>0)$.

解：设 $A(0,-a),B(a,0),C(0,a),D(-a,0)$，

$$\oint_L xydl=\left(\int_{AB}+\int_{BC}+\int_{CD}+\int_{DA}\right)xydl$$

$$=\int_0^a x(x-a)\sqrt{2}dx+\int_0^a x(x-a)\sqrt{2}dx$$

$$+\int_{-a}^0 x(x+a)\sqrt{2}dx+\int_{-a}^0 -x(x+a)\sqrt{2}dx=0$$

解答完毕。注：如果经验丰富的话，一眼看出积分为零(根据对称性).

2．设 L 为椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，其周长记为 a。 求 $\oint_L (2xy+3x^2+4y^2)dl$

解法一： 椭圆 L 的方程可写成 $3x^2+4y^2=12$。于是

$$\oint_L (2xy+3x^2+4y^2)dl=\oint_L (12+2xy)dl=12a+\oint_L 2xydl$$

由对称性，$\oint_L 2xydl=0$，故$\oint_L (2xy+3x^2+4y^2)dl=12a$.

解法二：椭圆L：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$写作参数式$x=2\cos\theta$，$y=\sqrt{3}\sin\theta$，$\theta\in[0,2\pi]$。于是所求第一型曲线积分为 $\oint_L (2xy+3x^2+4y^2)dl=12a+2\oint_L xydl$。而

$\oint_L xydl=\int_0^{2\pi}\left[2\cos\theta\sqrt{3}\sin\theta\right]\sqrt{4\sin^2\theta+3\cos^2\theta}d\theta=0$. 因此原积分为$12a$。

解答完毕。

3. 计算$I=\int_L |x|dl$,其中L为双纽线$(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$

（注解：因为积分曲线中含有x^2+y^2以及x^2-y^2，所以一般考虑用极坐标。）

解：设$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$,则$L$的极坐标方程为

$r^2=r\cos 2\theta$,由对称性得到

$$\mathrm{I}=\int_L |x|\,dl=4\int_0^{\frac{\pi}{4}} r\cos\theta\sqrt{r^2+r'^2}d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta=2\sqrt{2}$$

4.求$I=\int_{\mathrm{L}}(xy+yz+zx)ds$,其中$L$为圆周$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\ x+y+z=0.\end{cases}$

（注解：被积函数xy+yz+xz=$\frac{1}{2}$[(x+y+z)^2−($x^2+y^2+z^2$)]）

解：因为xy+yz+xz=$\frac{1}{2}$[(x+y+z)^2−($x^2+y^2+z^2$)=-$\frac{1}{2}a^2$则有

$I=\int_{\mathrm{L}}(xy+yz+zx)ds$,=-$\frac{1}{2}a^2\times L$的弧长=-$\pi a^2$

4.2 曲面积分

1. 计算$\iint_S (x^2+y^2)\mathrm{d}S$. 其中$S$是锥体$\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1$的边界.

解：分别记S_1和S_2为锥体的侧面和上底面，则

$\iint_S (x^2+y^2)\mathrm{d}S=\iint_{S_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}S+\iint_{S_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}S$

在S_1上，$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$（$z=\sqrt{x^2+y^2}$）

在S_2上，$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=dxdy$（$z=1$）. 于是

$\iint_{S_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}S = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)dxdy = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cdot\sqrt{2}r\mathrm{d}r = \pi/\sqrt{2}$，

$\iint_{S_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}S = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)dxdy = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cdot r\mathrm{d}r = \pi/2$.

于是所求面积分为 $\iint_S(x^2+y^2)\mathrm{d}S = \pi(1/2+1/\sqrt{2})$. 解答完毕。

2．求 $I=\iint\limits_S(x+y+z)^2dS$，其中 S 为单位球面.

解：$I=\iint\limits_S(x+y+z)^2dS=\iint\limits_S(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx)dS$

$=\iint\limits_S(1+2xy+2yz+2zx)dS=4\pi+2\iint\limits_S(xy+yz+zx)dS$

其中 4π 是球的表面积. 由对称性可知, $\iint\limits_S xydS=\iint\limits_S yzdS=\iint\limits_S zxdS=0$, 故 $I=4\pi$。

解答完毕。

3．计算螺旋面 S：$x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，$z=r\varphi$（$0\le r\le R,\ 0\le\varphi\le 2\pi$）的面积。

解：$|S|=\iint\limits_S d\mathrm{S}=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R\sqrt{EG-F^2}dr$

$=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{2+\varphi^2}d\varphi\int\limits_0^R rdr=\frac{R^2}{2}[\sqrt{2+4\pi^2}+\ln(\sqrt{2}\pi+\sqrt{1+2\pi^2})]$。解答完毕。

4．求圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 被抛物柱面 $z=R^2-x^2$ 及平面 $z=0$ 所截部分 S 的侧面积。

解法一：（利用第一类曲线积分的几何意义）

侧面积 $A=\int\limits_L(R^2-x^2)dl$，其中 L 为空间曲线 $\begin{cases} z=R^2-x^2 \\ x^2+y^2=R^2 \end{cases}$ 在 xoy 平面上的投影，即 xoy 平面上的园 L：$x^2+y^2=R^2$。其参数方程为 $x(t)=R\cos t$，$y(t)=R\sin t$，$0\le t\le 2\pi$，它的弧长微分 $dl=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt=Rdt$。

于是 $A=\int\limits_L(R^2-x^2)dl=\int_0^{2\pi}\left(R^2-R^2\cos^2 t\right)Rdt=\pi R^3$。

解法二：（第一类曲面积分）由于所截部分 S 关于 xoz 平面对称，即点 $(x,y,z)\in S$ 当且仅当 $(x,-y,z)\in S$。位于 $y>0$ 部分的曲面方程为 $y=\sqrt{R^2-x^2}$，$(x,z)\in D$，其中 $D=\left\{-R\le x\le R,\ \ 0\le z\le R^2-x^2\right\}$。于是所求面积为

$$|S|=\iint\limits_S dS=2\iint\limits_{D_{xz}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}dxdz=2\int\limits_{-R}^{R}dx\int\limits_0^{R^2-x^2}\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}dz=$$

$=4R\int\limits_0^R\sqrt{R^2-x^2}dx=4R^3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 tdt=\pi R^3$。解答完毕。

5．计算第一型曲面积分 $I=\iint\limits_S|z|dS$，其中曲面 S 为球面 $S: x^2+y^2+z^2=a^2$；。

解：分别记S_1，S_2为S的上半球面和下半球面，它们的方程为

S_1：$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，$(x,y)\in D=\{(x,y),\ \ x^2+y^2\le a^2\}$

S_2：$z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，$(x,y)\in D$

考虑第一型曲面积分I。根据被积函数和球面的对称性，我们有$\iint\limits_{S_1}|z|dS=\iint\limits_{S_2}|z|dS$。因此

$I=\iint\limits_{S}|z|dS=\iint\limits_{S_1}|z|dS+\iint\limits_{S_2}|z|dS=2\iint\limits_{S_1}zdS$。

对于上半球面S_1， 面积元素$dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy=\frac{a\,dxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$。于是

$$I=2\iint\limits_{S_1}zdS=2\int_{-a}^{a}dx\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy=8a\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx=2\pi a^3。$$

解答完毕。

6. 记S为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被柱面$x^2+y^2=2x$所截的有限部分。求$\iint\limits_S zdS$。

解：(i) 简单计算知锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$的面积元素为$dS=\sqrt{2}dxdy$。因此

$$\iint\limits_S zdS=\iint\limits_{x^2+y^2\le 2x}\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{2}dxdy=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\rho^2d\rho=\frac{32\sqrt{2}}{9}$$

解答完毕。

7. 设一元函数$f(u)$于整个实轴上连续，S代表单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$。证明 Poisson 公式 $\iint\limits_S f(ax+by+cz)dS=2\pi\int_{-1}^{1}f(\rho t)dt$，这里$\rho:=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$。

为了证明 Poisson 公式，我们需要先建立一个 Lemma。

Lemma：设Σ是一个正则的参数曲面。记Σ'是Σ在一个正交变换（正交矩阵）P 下的象，即$\Sigma'=P(\Sigma)$。记$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$，$U=\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$，则对任何$\Sigma$上连续函数$g(x,y,z)$，我们有$\iint\limits_{\Sigma}g(X)dS=\iint\limits_{\Sigma'}g(P^TU)dS$。（这个 Lemma 大致的意思是说，曲面的面积元素关于正交变换是不变的。）

证明：由假设Σ有正则的参数表示$X(s,t)=\begin{pmatrix} x(s,t) \\ y(s,t) \\ z(s,t) \end{pmatrix}$，$(s,t)\in D$，$D$为平面有界闭域。

由此导出曲面$\Sigma'=P(\Sigma)$的一个参数表示$\mathrm{U}(s,t)=PX(s,t)$，$(s,t)\in D$。于是我们可以

确定两个曲面Σ和Σ'关于上述参数表示的 Gauss 系数，E，G，F和E′，G′，F′：

$$\mathrm{E}=\mathrm{X_s(s,t)^T X_s(s,t)},\quad \mathrm{G}=\mathrm{X_t(s,t)^T X_t(s,t)},\quad \mathrm{F}=\mathrm{X_s(s,t)^T X_t(s,t)}。$$

$$\mathrm{E}'=U_s(s,t)^T\mathrm{U_s(s,t)}=\mathrm{X_s(s,t)^T P^T P X_s(s,t)}=\mathrm{X_s}(s,t)^T X_s(s,t)=E,$$

同理可证$\mathrm{G}'=\mathrm{G}$，$\mathrm{F}'=\mathrm{F}$。因此我们有$\sqrt{\mathrm{E'G'-F'^2}}=\sqrt{EG-F^2}$。于是

$$\iint_{\Sigma'} g(P^T U)dS=\iint_D g(P^T U(s,t))\sqrt{E'G'-F'^2}\,dsdt=$$
$$=\iint_D g(P^T U(s,t))\sqrt{EG-F^2}\,dsdt=\iint_D g(X(s,t))\sqrt{EG-F^2}\,dudv=\iint_{\Sigma}\mathrm{g(X)dS}。$$证毕。

Poisson 公式的证明：

取一个三阶正交矩阵P，使得P的第一行为$(a,b,c)/\rho$。作正交变换$\mathrm{U}=PX$，其中记号U，X 的意义同上。于是$ax+\mathrm{b}y+cz=\rho u$。此外，在这个正交变换下，单位球面$x^2+\mathrm{y}^2+\mathrm{z}^2=1$仍为单位球面$u^2+\mathrm{v}^2+w^2=1$。根据上述 Lemma 可知

$$\iint_{\mathrm{x^2+y^2+z^2=1}}\mathrm{f}(ax+by+cz)dS=\iint_{u^2+v^2+w^2=1} f(\rho u)dS。$$

我们来考虑上式右边的积分。根据对称性知

$$\iint_{u^2+v^2+w^2=1} f(\rho u)dS=2\iint_{\mathrm{w}=\sqrt{1-u^2-v^2}} f(\rho u)dS。$$

考虑上式右边的积分。简单计算可知曲面$\mathrm{w}=\sqrt{1-u^2-v^2}$的面积元素为

$$dS=\sqrt{1+\mathrm{w}_u^2+w_v^2}\,dudv=\frac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}}dudv。$$于是

$$\iint_{u^2+v^2+w^2=1} f(\rho u)dS=2\iint_{u^2+v^2\le 1}\frac{f(\rho u)dudv}{\sqrt{1-u^2-v^2}}=2\int_{-1}^{1} f(\rho u)du\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}}\frac{dv}{\sqrt{1-u^2-v^2}}$$

$$=4\int_{-1}^{1} f(\rho u)du \int_{0}^{\sqrt{1-u^2}} \frac{dv}{\sqrt{1-u^2-v^2}} = 4\int_{-1}^{1} f(\rho u)du \frac{\pi}{2} = 2\pi\int_{-1}^{1} f(\rho u)du$$ 。

证毕。