第 10 次习题课题目解答

第 1 部分 课堂内容回顾

1. 定积分的计算

(1) **利用计算不定积分的方法:** 分段, 线性性, 降低三角函数的幂, 换元法, 分部积分法, 有理函数的定积分 (有理函数标准分解), 三角有理函数 (转化为有理函数) 的定积分, 两特殊无理函数的定积分.

(2) **定积分的换元公式:** 若 $f \in \mathscr{C}[a,b]$, 而 $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ 连续可导, 则

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

注: 若 $f \in \mathscr{R}[a,b]$ 而 $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ 连续可导且严格单调, 上述公式依然成立.

(3) **分部积分公式:** 若 $u, v \in \mathscr{C}^{(1)}[a,b]$, 则 $\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}v(x) = uv|_a^b - \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}u(x)$.

(4) **对称性:** 设 $a > 0$, 而 $f \in \mathscr{R}[-a,a]$.

(a) 若 f 为奇函数, 则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

(b) 若 f 为偶函数, 则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

(5) **周期性:** 若 $f \in (\mathbb{R})$ 以 $T > 0$ 为周期, 则 $\forall a \in \mathbb{R}$, 均有 $\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x$.

(6) **定积分与数列极限:** 设 $f \in \mathscr{R}[a,b]$, 而 $\{P_n\}$ 为 $[a,b]$ 的一列分割使 $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda(P_n) = 0$. 记 $P_n = (x_i^{(n)})_{0\leqslant i\leqslant k_n}$. 则对任意的点 $\xi_i^{(n)} \in [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$ $(1 \leqslant i \leqslant k_n)$, 均有

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^{(n)})(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

特别地, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i^{(n)}) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, 其中 $\xi_i^{(n)} \in [a + \frac{b-a}{n}(i-1), a + \frac{b-a}{n} i]$.

(7) **Jensen 不等式:** 设 $f \in \mathscr{R}[a,b]$, $m, M \in \mathbb{R}$ 使得 $\forall x \in [a,b]$, 均有 $m \leqslant f(x) \leqslant M$. 若 $\varphi \in \mathscr{C}[m,M]$ 为凸函数, 则

$$\varphi\Big(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\Big) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(f(x))\,\mathrm{d}x.$$

注: 若 φ 为凹函数, 上述不等式依然成立, 只是此时应该将“$\leqslant$”改为“$\geqslant$”.

(8) **带积分余项的 Taylor 公式:** 设 $n \geqslant 1$ 为整数. 若 $f \in \mathscr{C}^{(n+1)}[a,b]$, 而 $x_0 \in [a,b]$, 则 $\forall x \in [a,b]$, 我们有

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-u)^n f^{(n+1)}(u)\,\mathrm{d}u.$$

通常称 $R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-u)^n f^{(n+1)}(u)\,\mathrm{d}u$ 为积分余项. 令 $u = x_0 + t(x-x_0)$, 则

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(x_0 + t(x-x_0))\,\mathrm{d}t.$$

(a) **Cauchy 余项:** $\exists \theta \in (0,1)$ 使 $R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!}(1-\theta)^n f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))$.

(b) **Lagrange 余项:** $\exists \theta \in [0,1]$ 使得 $R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))$.

2. 定积分的应用

(1) **平面区域的面积:**

(a) **直角坐标系下平面区域的面积:** 设 $f, g \in \mathscr{C}[a,b]$. 则由曲线 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 与直线 $x = a$, $x = b$ 所围平面区域的面积等于

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x.$$

(b) **直角坐标系下由参数表示的曲线所围平面区域的面积:** 设曲线 Γ 的参数方程为

$$\begin{cases} x &= x(t), \\ y &= y(t), \end{cases} \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta),$$

其中 x, y 均为连续函数, $y \geqslant 0$, 而函数 x 为严格递增, 则存在连续反函数 $t = t(x)$. 定义 $a = x(\alpha)$, $b = x(\beta)$. 由 Γ, $x = a$, $x = b$ 及 x 轴所围区域的面积等于

$$S = \int_a^b y(t(x)) \, \mathrm{d}x \overset{x=x(t)}{=} \int_\alpha^\beta y(t) x'(t) \, \mathrm{d}t.$$

(c) **极坐标系下平面区域的面积:** 设曲线 Γ 的极坐标方程为 $\rho = \rho(\theta)$ $(\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta)$, 其中 $\rho \in \mathscr{C}[\alpha, \beta]$. 则曲线 Γ 与射线 $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ 所围成的区域的面积为

$$S = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta (\rho(\theta))^2 \, \mathrm{d}\theta.$$

(2) **光滑曲线的弧长公式:**

(a) **参数方程:** $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \, \mathrm{d}t$.

(b) **函数图像:** $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, \mathrm{d}x$.

(c) **极坐标方程:** $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2} \, \mathrm{d}\theta$.

(d) **空间曲线参数方程:** $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} \, \mathrm{d}t$.

(3) **曲线的曲率:** 设 Γ 为二阶连续可导曲线. 它在点 (x, y) 处的切线与 x 轴正向的夹角被记为 α, 在该点处的曲率被定义为 $\kappa := |\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\ell}|$, 曲率半径被定义为 $R := \frac{1}{\kappa}$.

(a) **参数方程:** 设曲线 Γ 的参数方程为

$$\begin{cases} x &= x(t), \\ y &= y(t), \end{cases} \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta),$$

其中 $x, y \in \mathscr{C}^{(2)}[\alpha, \beta]$. 则 $\kappa = |\frac{\alpha'(t)}{\ell'(t)}| = \frac{|x'y'' - x''y'|}{((x')^2 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}}$.

(b) **函数图像:** 设 $f \in \mathscr{C}^{(2)}[a, b]$, 而曲线 Γ 在直角坐标系下由方程 $y = f(x)$ 定义, 则 $\kappa = \frac{|y''|}{(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}}$.

(c) **极坐标方程:** 设 $\rho \in \mathscr{C}^{(2)}[\alpha, \beta]$, 而曲线 Γ 的在极坐标系下的方程为 $\rho = \rho(\theta)$, 则 $\kappa = \frac{|\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho''|}{(\rho^2 + (\rho')^2)^{\frac{3}{2}}}$.

(4) **空间物体的体积:**

(a) **由平面截面积求立体体积:** 将一个物体置于平面 $x=a$ 与 $x=b$ 之间 $(a<b)$. $\forall x\in[a,b]$, 用垂直于 x 轴的平面去截此物体所得到的截面的面积记为 $S(x)$, 并且假设 $S\in\mathscr{R}[a,b]$, 则该物体的体积为

$$V=\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x.$$

(b) **旋转体的体积:** 设 $f\in\mathscr{C}[a,b]$ 且 $f\geqslant 0$. 由 $y=f(x)$, $x=a$, $x=b\,(b>a\geqslant 0)$ 以及 x 轴所围成的区域分别绕 x 轴 和 y 旋转所生成的旋转体体积为:

$$V_x=\pi\int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x,\ V_y=2\pi\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x.$$

注: 同样可求由 $x=g(y)\geqslant 0$ $(0\leqslant c\leqslant y\leqslant d)$, $y=c$, $y=d$ 以及 y 轴所围的区域绕 x 轴或 y 轴旋转得到的旋转体体积: 交换 x,y 的作用.

(c) **更一般的旋转体的体积:** 设 $f,g\in\mathscr{C}[a,b]$ 且 $f\geqslant g\geqslant 0$. 则由 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $x=a$, $x=b$ $(b>a\geqslant 0)$ 所围区域分别绕 x 轴与 y 轴旋转所得体积为:

$$V_x=\pi\int_a^b ((f(x))^2-(g(x))^2)\,\mathrm{d}x,\ V_y=2\pi\int_a^b x(f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x.$$

(5) **旋转面的侧面积:**

(a) **绕 x 轴旋转生成的曲面的侧面积的面积微元:** $\mathrm{d}\sigma=2\pi|y|\,\mathrm{d}\ell$.

1) **参数方程:** $S=2\pi\int_\alpha^\beta |y(t)|\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,\mathrm{d}t$.

2) **函数图像:** $S=2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$.

3) **极坐标方程:** $S=2\pi\int_\alpha^\beta |\rho(\theta)\sin\theta|\sqrt{(\rho(\theta))^2+(\rho'(\theta))^2}\,\mathrm{d}\theta$.

(b) **绕 y 轴旋转生成的曲面的侧面积的面积微元:** $\mathrm{d}\sigma=2\pi|x|\mathrm{d}\ell$.

1) **参数方程:** $S=2\pi\int_\alpha^\beta |x(t)|\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,\mathrm{d}t$.

2) **函数图像:** $S=2\pi\int_a^b |x|\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$.

3) **极坐标方程:** $S=2\pi\int_\alpha^\beta |\rho(\theta)\cos\theta|\sqrt{(\rho(\theta))^2+(\rho'(\theta))^2}\,\mathrm{d}\theta$.

(6) **平面光滑曲线的质心:**

(a) **参数方程:** 设曲线 Γ 的的线密度为 $\mu(t)$, 则质心 $(\overline{x},\overline{y})$ 的坐标公式为:

$$\overline{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\int_\alpha^\beta x(t)\mu(t)\,\mathrm{d}\ell(t)}{\int_\alpha^\beta \mu(t)\,\mathrm{d}\ell(t)},\ \overline{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\int_\alpha^\beta y(t)\mu(t)\,\mathrm{d}\ell(t)}{\int_\alpha^\beta \mu(t)\,\mathrm{d}\ell(t)}.$$

(a) **函数图像:** 设曲线 Γ 的方程为 $y=f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$, 线密度为 $\mu(x)$, 则

$$\overline{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\int_a^b x\mu(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x}{\int_a^b \mu(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x},$$

$$\overline{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\int_a^b f(x)\mu(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x}{\int_a^b \mu(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x}.$$

第 2 部分 习题课题目解答

1. (Young 不等式) 假设 $f \in \mathscr{C}^{(1)}[0,+\infty)$ 为严格递增、无上界且 $f(0)=0$. 求证: $\forall a,b \geqslant 0$, 我们均有

$$ab \leqslant \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^b f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y,$$

且等号成立当且仅当 $b=f(a)$.

证明: 由于 $f \in \mathscr{C}^{(1)}[0,+\infty)$ 严格递增无上界且 $f(0)=0$, 则 $\mathrm{Im}f=[0,+\infty)$, 且 f 有连续的反函数 $f^{-1}:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$. 于是 $\forall a,b\geqslant 0$, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^b f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y &= \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{f^{-1}(b)} x\,\mathrm{d}(f(x)) \\ &= \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + xf(x)\Big|_0^{f^{-1}(b)} - \int_0^{f^{-1}(b)} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= bf^{-1}(b) + \int_{f^{-1}(b)}^a f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

若 $b=f(a)$, 则 $a=f^{-1}(b)$, 从而

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^b f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y = bf^{-1}(b) + \int_{f^{-1}(b)}^a f(x)\,\mathrm{d}x = ab.$$

若 $b<f(a)$, 则由 f 严格递增可知 $f^{-1}(b)<a$, 且

$$\begin{aligned}\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^b f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y &= bf^{-1}(b) + \int_{f^{-1}(b)}^a f(x)\,\mathrm{d}x \\ &> bf^{-1}(b) + \int_{f^{-1}(b)}^a f(f^{-1}(b))\,\mathrm{d}x = ab.\end{aligned}$$

若 $b>f(a)$, 同样由 f 严格递增可知 $f^{-1}(b)>a$, 且

$$\begin{aligned}\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^b f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y &= bf^{-1}(b) - \int_a^{f^{-1}(b)} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &> bf^{-1}(b) - \int_a^{f^{-1}(b)} f(f^{-1}(b))\,\mathrm{d}x = ab.\end{aligned}$$

综上所述可知所证结论成立.

注: 若 f 有上界, 此时需假设 $b\in\mathrm{Im}f$. 上述不等式事实上对连续函数也成立.

2. 若 $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ 单调递减, 求证: $\forall n\in\mathbb{N}^*$, 均有 $\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x\geqslant 0$.

证明: $\forall t\in[0,t]$ 及 $\forall k\in\mathbb{N}\ (0\leqslant k\leqslant n-1)$, 均有 $f\big(\frac{t+2k\pi}{n}\big)\geqslant f\big(\frac{t+(2k+1)\pi}{n}$, 则

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x &= \sum_{k=0}^{n-1}\Big(\int_{\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{(2k+1)\pi}{n}} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{(2k+1)\pi}{n}}^{\frac{(2k+2)\pi}{n}} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x\Big)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\Big(\int_0^{\pi} f\big(\frac{t+2k\pi}{n}\big)\sin(t+2k\pi)\,\mathrm{d}t\\
&\quad+\int_0^{\pi} f\big(\frac{t+(2k+1)\pi}{n}\big)\sin\big(t+(2k+1)\pi\big)\,\mathrm{d}t\Big)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\Big(\int_0^{\pi}\Big(f\big(\frac{t+2k\pi}{n}\big)-f\big(\frac{t+(2k+1)\pi}{n}\big)\Big)\sin t\,\mathrm{d}t\Big)\\
&\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

3. 假设 $T>0$, 而 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是以 T 为周期的周期函数并且在每个有限闭区间上可积. $\forall x\in\mathbb{R}$, 定义 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. 求证: 函数 F 可以表示成一个周期为 T 的周期函数与一个线性函数之和.

证明: 令 $c=\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$. $\forall x\in\mathbb{R}$, 定义 $G(x)=\int_0^x\big(f(t)-\frac{c}{T}\big)\,\mathrm{d}t$, 则

$$
\begin{aligned}
G(x+T) &= \int_0^{x+T}\big(f(t)-\frac{c}{T}\big)\,\mathrm{d}t\\
&= G(x)+\int_x^{x+T}\big(f(t)-\frac{c}{T}\big)\,\mathrm{d}t\\
&= G(x)+\int_0^{T}\big(f(t)-\frac{c}{T}\big)\,\mathrm{d}t=G(x).
\end{aligned}
$$

又 $\forall x\in\mathbb{R}$, 均有 $F(x)=G(x)+\frac{c}{T}x$, 因此所证结论成立.

4. 设 $a>0$. 若 f 在 $[0,a]$ 上二阶可导且 $\forall x\in[0,a]$, 均有 $f''(x)\geqslant 0$, 求证:

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant af\big(\frac{a}{2}\big).$$

证明: **方法 1.** 由于 $\forall x\in[0,a]$, 均有 $f''(x)\geqslant 0$, 因此 f 为凸函数, 从而由 Jensen 不等式知 $\frac{1}{a}\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant f(\frac{1}{a}\int_0^a x\,\mathrm{d}x)=f(\frac{a}{2})$, 由此可得所要结论.

方法 2. 由于 f 为二阶可导, 则 $\forall x\in[0,a]$, 由带 Lagrange 余项的 Taylor 公式可知, 存在 ξ 介于 $\frac{a}{2},x$ 之间使得我们有

$$f(x)=f\big(\frac{a}{2}\big)+f'\big(\frac{a}{2}\big)\big(x-\frac{a}{2}\big)+\frac{1}{2!}f''(\xi)\big(x-\frac{a}{2}\big)^2.$$

又由题设可知 $f''(\xi)\geqslant 0$, 则 $f(x)\geqslant f\big(\frac{a}{2}\big)+f'\big(\frac{a}{2}\big)\big(x-\frac{a}{2}\big)$, 于是

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\ \geqslant\ af\big(\frac{a}{2}\big)+f'\big(\frac{a}{2}\big)\int_0^a\big(x-\frac{a}{2}\big)\,\mathrm{d}x=af\big(\frac{a}{2}\big).$$

方法 3. 由于 $\forall x \in [0,a]$, $f''(x) \geqslant 0$, 则 f 为凸函数, 从而 $\forall x \in [0,\frac{a}{2}]$,

$$f\big(\frac{a}{2}\big) = f\big(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(a-x)\big) \leqslant \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(a-x),$$

由此我们立刻可得

$$\begin{aligned}\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{a}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{a}{2}}^a f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{a}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{a}{2}} f(a-t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{a}{2}} \big(f(x)+f(a-x)\big)\,\mathrm{d}x \\ &\geqslant 2\int_0^{\frac{a}{2}} f\big(\frac{a}{2}\big)\,\mathrm{d}x = af\big(\frac{a}{2}\big).\end{aligned}$$

5. 若 f 在 $[0,1]$ 上二阶可导且 $\forall x \in [0,1]$, 均有 $f''(x) \leqslant 0$, 求证:

$$\int_0^1 f(x^2)\,\mathrm{d}x \leqslant f\big(\frac{1}{3}\big).$$

证明: 方法 1. 由于 $\forall x \in [0,1]$, 均有 $f''(x) \leqslant 0$, 因此 f 为凹函数, 从而由 Jensen 不等式可得 $\int_0^1 f(x^2)\,\mathrm{d}x \leqslant f(\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x) = f(\frac{1}{3})$.

方法 2. 由于 f 为二阶可导, 则 $\forall x \in [0,1]$, 由带 Lagrange 余项的 Taylor 公式可知, 存在 ξ 介于 $\frac{1}{3}, x$ 之间使得我们有

$$f(x) = f\big(\frac{1}{3}\big) + f'\big(\frac{1}{3}\big)\big(x-\frac{1}{3}\big) + \frac{1}{2!}f''(\xi)\big(x-\frac{1}{3}\big)^2.$$

又由题设可知 $f''(\xi) \leqslant 0$, 则 $f(x) \leqslant f\big(\frac{1}{3}\big) + f'\big(\frac{1}{3}\big)\big(x-\frac{1}{3}\big)$, 于是

$$\int_0^1 f(x^2)\,\mathrm{d}x \quad\leqslant\quad f\big(\frac{1}{3}\big) + f'\big(\frac{1}{3}\big)\int_0^1 \big(x^2-\frac{1}{3}\big)\,\mathrm{d}x = f\big(\frac{1}{3}\big).$$

6. 若 $f \in \mathscr{C}[0,\frac{\pi}{2}]$, 求证: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x$.

证明: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,\mathrm{d}x \overset{x=\frac{\pi}{2}-t}{=} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\big(\cos(\frac{\pi}{2}-t)\big)\,\mathrm{d}(\frac{\pi}{2}-t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)\,\mathrm{d}t$.

7. 计算下列定积分:

(1)	$\int_{-1}^1 \frac{(x+1)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+5)^2}$,	(2)	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin^2 x\,\mathrm{d}x$,
(3)	$\int_1^e \sin(\log x)\,\mathrm{d}x$,	(4)	$\int_0^1 e^{2\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$,
(5)	$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$,	(6)	$\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$,
(7)	$\int_0^\pi \cos^n x\,\mathrm{d}x$,	(8)	$\int_0^1 x^n(\log x)^m\,\mathrm{d}x$,
(9)	$\int_0^n x^2[x]\,\mathrm{d}x$,	(10)	$\int_0^{\log n} [e^x]\,\mathrm{d}x$,
(11)	$\int_0^\pi \sqrt{\sin x - \sin^3 x}\,\mathrm{d}x$,	(12)	$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x}}$.

解: (1) $\int_{-1}^{1}\frac{(x+1)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+5)^2}=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}((x+1)^2+4)}{((x+1)^2+4)}=-\frac{1}{2(x^2+2x+5)}\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{16}$.

(2) **方法 1.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin^2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x(1-\cos 2x)\,\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\big(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(e^x-e^{(1+2i)x})\,\mathrm{d}x\big)\big)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\big(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\big(e^x-\frac{e^{(1+2i)x}}{(1+2i)}\big)\big)$

$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\Big(e^x-\frac{1}{5}e^{(1+2i)x}(1-2i)\Big)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{e^x}{10}(5-\cos 2x-2\sin 2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{5}e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{2}{5}$.

方法 2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin^2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x(1-\cos 2x)\,\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}e^x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\,\mathrm{d}(e^x)=\frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}}-1)-\frac{e^x}{2}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin 2x\,\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}}-1)+\frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}}+1)-e^x\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\,\mathrm{d}(\sin 2x)$

$=e^{\frac{\pi}{2}}+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos 2x\,\mathrm{d}x$,

于是 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos 2x\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{5}(e^{\frac{\pi}{2}}+1)$, 故

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin^2x\,\mathrm{d}x=e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{2}{5}(e^{\frac{\pi}{2}}+1)=\frac{1}{5}(3e^{\frac{\pi}{2}}-2).$$

(3) **方法 1.** $\int_1^e\sin(\log x)\,\mathrm{d}x\overset{y=\log x}{=}\int_0^1\sin y\,\mathrm{d}(e^y)=e^y\sin y\Big|_0^1-\int_0^1e^y\cos y\,\mathrm{d}y$

$=e\sin 1-\int_0^1\cos y\,\mathrm{d}(e^y)=e\sin 1-e^y\cos y\Big|_0^1-\int_0^1e^y\sin y\,\mathrm{d}y$

$=e\sin 1-e\cos 1+1-\int_0^1e^y\sin y\,\mathrm{d}y$

$=e\sin 1-e\cos 1+1-\int_1^e\sin(\log x)\,\mathrm{d}x$,

于是 $\int_1^e\sin(\log x)\,\mathrm{d}x=\frac{e}{2}(\sin 1-\cos 1)+\frac{1}{2}$.

方法 2. $\int_1^e\sin(\log x)\,\mathrm{d}x=x\sin(\log x)\Big|_1^e-\int_1^e x\cdot\frac{\cos(\log x)}{x}\,\mathrm{d}x$

$=e\sin 1-\int_1^e\cos(\log x)\,\mathrm{d}x=e\sin 1-x\cos(\log x)\Big|_1^e-\int_1^e x\frac{\sin(\log x)}{x}\,\mathrm{d}x$

$=e(\sin 1-\cos 1)+1-\int_1^e x\frac{\sin(\log x)}{x}\,\mathrm{d}x$

$=e(\sin 1-\cos 1)+1-\int_1^e\sin(\log x)\,\mathrm{d}x$,

于是 $\int_1^e\sin(\log x)\,\mathrm{d}x=\frac{e}{2}(\sin 1-\cos 1)+\frac{1}{2}$.

方法 3. $\int_1^e\sin(\log x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{Im}\big(\int_1^e e^{i\log x}\,\mathrm{d}x\big)=\mathrm{Im}\int_1^e\mathrm{d}\big(\frac{e^{(1+i)\log x}}{1+i}\big)$

$=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\big((1-i)e^{(1+i)\log x}\big)\Big|_1^e=\frac{x}{2}\big(\sin(\log x)-\cos(\log x)\big)\Big|_1^e$

$=\frac{e}{2}(\sin 1-\cos 1)+\frac{1}{2}$.

(4) $\int_0^1e^{2\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x\overset{t=\sqrt{x+1}}{=}\int_1^{\sqrt{2}}e^{2t}\,\mathrm{d}(t^2-1)=2\int_1^{\sqrt{2}}te^{2t}\,\mathrm{d}t$

$=te^{2t}\Big|_1^{\sqrt{2}}-\int_1^{\sqrt{2}}e^{2t}\,\mathrm{d}t=\sqrt{2}e^{2\sqrt{2}}-e^2-\frac{1}{2}e^{2t}\Big|_1^{\sqrt{2}}$

$=\big(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\big)e^{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2}e^2$.

(5) $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+e^{2x}}}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{e^x\sqrt{e^{-2x}+1}}=-\int_0^1\frac{\mathrm{d}(e^{-x})}{\sqrt{(e^{-x})^2+1}}$

$\overset{\tan t=e^{-x}}{=}-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan\frac{1}{e}}\frac{\mathrm{d}(\tan t)}{\sqrt{\tan^2t+1}}=\int_{\arctan\frac{1}{e}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}t}{\cos t}$

$=\log(\sec t+\tan t)\Big|_{\arctan\frac{1}{e}}^{\frac{\pi}{4}}=\log(\sqrt{2}+1)-\log(\frac{\sqrt{e^2+1}}{e}+\frac{1}{e})$

$=\log(\sqrt{2}+1)+\log(\sqrt{e^2+1}-1)-1$.

(6) $\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2}$
$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{1}{\sqrt{2}}(x-\frac{1}{x})\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi.$

(7) $\int_0^\pi \cos^n x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos^n x\,\mathrm{d}x$
$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n(\pi-x)\,\mathrm{d}(\pi-x)$
$= (1+(-1)^n)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x$
$= \begin{cases} 0, & \text{若 } n \text{ 为奇数}, \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}\pi, & \text{若 } n \text{ 为偶数}. \end{cases}$

(8) 由题设可知

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^n(\log x)^m\,\mathrm{d}x &= \frac{x^{n+1}}{n+1}(\log x)^m\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1}\,\mathrm{d}(\log x)^m \\ &= -\frac{m}{n+1}\int_0^1 x^n(\log x)^{m-1}\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

由此递推关系式可得 $\int_0^1 x^n(\log x)^m\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^m m!}{(n+1)^m}\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^m m!}{(n+1)^{m+1}}$.

(9) $\int_0^n x^2[x]\,\mathrm{d}x = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} x^2[x]\,\mathrm{d}x$
$= \sum\limits_{k=0}^{n-1} k\int_k^{k+1} x^2\,\mathrm{d}x = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{k}{3}((k+1)^3-k^3)$
$= \frac{1}{3}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\big((k+1)^4-k^4\big) - \frac{1}{3}\sum\limits_{k=0}^{n-1}(k+1)^3$
$= \frac{n^4}{3} - \frac{1}{3}\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^4}{3} - \frac{1}{3}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{4}\big((k+1)^4-k^4-6k^2-4k-1\big)$
$= \frac{n^4}{3} - \frac{(n+1)^4}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12}\sum\limits_{k=1}^{n}(6k^2+4k+1)$
$= \frac{n^4}{3} - \frac{(n+1)^4}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{6}n(n+1) + \frac{1}{12}n$
$= \frac{1}{12}(n-1)n^2(3n+1).$

(10) $\int_0^{\log n}[e^x]\,\mathrm{d}x = \sum\limits_{k=1}^{n-1}\int_{\log k}^{\log(k+1)}[e^x]\,\mathrm{d}x = \sum\limits_{k=1}^{n-1}\int_{\log k}^{\log(k+1)} k\,\mathrm{d}x$
$= \sum\limits_{k=1}^{n-1} k\big(\log(k+1)-\log k\big) = \sum\limits_{k=1}^{n-1}\big((k+1)\log(k+1)-k\log k\big) - \sum\limits_{k=1}^{n-1}\log(k+1)$
$= n\log n - \log(n!) = \log\big(\frac{n^n}{n!}\big).$

(11) $\int_0^\pi \sqrt{\sin x - \sin^3 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \sqrt{\sin x}|\cos x|\,\mathrm{d}x$
$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x}\cos x\,\mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sqrt{\sin x}\cos x\,\mathrm{d}x$
$= \frac{2}{3}(\sin x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{3}(\sin x)^{\frac{3}{2}}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^\pi = \frac{4}{3}.$

(12) $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x}} \overset{t=\sqrt{x}}{=\!=} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}(t^2)}{t^2+t} = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2\,\mathrm{d}t}{t+1} = 2\log(t+1)\Big|_1^{\sqrt{2}} = 2\log\frac{\sqrt{2}+1}{2}.$

8. 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{n})^{\frac{2}{n}}$, (2) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-\frac{3}{2}}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}$,

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n}{(n+k)(n+2k)}$, (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$,

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\prod\limits_{k=1}^{2n}(n^2+k^2)^{\frac{1}{n}}$, (6) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k^2+n^2}}$,

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\big(\prod\limits_{k=1}^{n}(n+k)\big)^{\frac{1}{n}}$, (8) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^2\sin^2(n\pi x)\,\mathrm{d}x$.

解: (1) $\forall x\in[0,1]$, 令 $f(x)=2\log(1+x)$, 则 f 在 $[0,1]$ 上连续, 从而可积且

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\log(1+\frac{k}{n}) &= \int_0^1 2\log(1+x)\,\mathrm{d}x\\ &= 2(1+x)\big(\log(1+x)-1\big)\Big|_0^1 = 4\log 2-2,\end{aligned}$$

于是我们有 $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{n})^{\frac{2}{n}}=e^{4\log 2-2}=\frac{16}{e^2}$.

(2) $\forall x\in[0,1]$, 定义 $f(x)=\sqrt{x}$, 则 f 在 $[0,1]$ 上连续, 从而可积, 且

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{3}{2}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}=\int_0^1\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{3}.$$

(3) $\forall x\in[0,1]$, 令 $f(x)=\frac{1}{(1+x)(1+2x)}$, 则 f 在 $[0,1]$ 上连续, 从而可积, 且

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{(n+k)(n+2k)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+\frac{k}{n})(1+\frac{2k}{n})}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)(1+2x)}$$

$$= \int_0^1\Big(\frac{2}{1+2x}-\frac{1}{1+x}\Big)\,\mathrm{d}x=\log\frac{1+2x}{1+x}\Big|_0^1=\log\frac{3}{2}.$$

(4) $\forall x\in[0,1]$, 定义 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, 则 f 在 $[0,1]$ 上连续, 从而可积, 且

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

(5) $\forall x\in[0,2]$, 令 $f(x)=\log(1+x^2)$, 则 f 在 $[0,2]$ 上连续, 从而可积, 且

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\log(n^2+k^2)-4\log n\Big)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\log\Big(1+(\frac{k}{n})^2\Big)\\ =\ &\int_0^2\log(1+x^2)\,\mathrm{d}x=x\log(1+x^2)\Big|_0^2-\int_0^2\frac{2x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\ =\ &2\log 5-\int_0^2 2\,\mathrm{d}x+\int_0^2\frac{2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=2\log 5-4+2\arctan 2,\end{aligned}$$

于是我们有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\prod\limits_{k=1}^{2n}(n^2+k^2)^{\frac{1}{n}}=e^{2\log 5-4+2\arctan 2}$.

(6) $\forall x\in[0,1]$, 定义 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, 则 f 在 $[0,1]$ 上连续, 从而可积, 且

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k^2+n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{k}{n})^2}}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\overset{x=\tan t}{=}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}(\tan t)}{\sqrt{1+\tan^2 t}}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\cos^2 t}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}(\sin t)}{1-\sin^2 t}\overset{y=\sin t}{=}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{\mathrm{d}y}{1-y^2}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\Big(\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1-y}\Big)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\log\Big(\frac{1+y}{1-y}\Big)\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\log\big(1+\sqrt{2}\big).$$

(7) $\forall x\in[0,1]$, 令 $f(x)=\log(1+x)$, 则 f 在 $[0,1]$ 上连续, 从而可积且

$$\lim_{n\to\infty}\log\Big(\frac{1}{n}\Big(\prod_{k=1}^{n}(n+k)\Big)^{\frac{1}{n}}\Big)=\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log(n+k)-\log n\Big)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log(1+\frac{k}{n})=\int_0^1\log(1+x)\,\mathrm{d}x$$

$$=(1+x)\big(\log(1+x)-1\big)\Big|_0^1=2\log 2-1,$$

于是我们有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\Big(\prod\limits_{k=1}^{n}(n+k)\Big)^{\frac{1}{n}}=e^{2\log 2-1}=\frac{4}{e}$.

(8) **方法 1.** $\forall n\geqslant 1$, 我们有

$$\int_0^1 x^2\sin^2(n\pi x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\big(1-\cos(2n\pi x)\big)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{6}x^3\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\cos(2n\pi x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{6}-\frac{1}{4n\pi}x^2\sin(2n\pi x)\Big|_0^1+\frac{1}{4n\pi}\int_0^1\sin(2n\pi x)\,\mathrm{d}(x^2)=\frac{1}{6}+\frac{1}{2n\pi}\int_0^1 x\sin(2n\pi x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{6}-\frac{1}{(2n\pi)^2}x\cos(2n\pi x)\Big|_0^1+\frac{1}{(2n\pi)^2}\int_0^1\cos(2n\pi x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{6}-\frac{1}{4n^2\pi^2},$$

由此立刻可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^2\sin^2(n\pi x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{6}$.

方法 2. $\forall n\geqslant 1$, 由广义积分第一中值定理可知,

$$\int_0^1 x^2\sin^2(n\pi x)\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}x^2\sin^2(n\pi x)\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\sin^2(n\pi x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2\Big(x-\frac{\sin(2n\pi x)}{2n\pi}\Big)\Big|_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2,$$

其中 $\xi_k\in[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]$. 于是由 Riemann 积分的定义立刻可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^2\sin^2(n\pi x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{6}x^3\Big|_0^1=\frac{1}{6}.$$

注: 同样可证明: $\forall f\in\mathscr{C}[0,1]$, 均有 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)\sin^2(n\pi x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

9. 求下列曲线所围图形的面积:

(1) 叶形线 $\begin{cases} x(t) = 2t - t^2, \\ y(t) = 2t^2 - t^3, \end{cases}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2)$ 所围成的图形的面积,

(2) 由阿基米德螺线 $\rho = a\theta$, $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$ 所围成的图形的面积,

(3) 由曲线 $y = e^x$, $y = -\cos \pi x$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$ 所围成的图形的面积,

(4) 由曲线 $y = \frac{x^2}{2}$, $y = x + \frac{3}{2}$ 所围成的图形的面积,

(5) 由曲线 $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$ 所围图形的面积.

解: (1) $\forall t \in [0, 2]$, 均有 $x'(t) = 2 - 2t$, 则 $x(t)$ 在 $(0, 1)$ 为正, 在 $(1, 2)$ 上为负, 从而 $x(t)$ 在 $[0, 1]$ 上严格递增, 在 $[1, 2]$ 上严格递减. 故所求面积为 $S_2 - S_1$, 其中第一部分 S_1 由叶形线, $x = 0$, $x = 1$ 以及 x 轴围成, 而第二部分 S_2 由叶形线, $x = 1$, $x = 0$ 以及 x 轴围成, 二者的重叠部分不属于叶形线的内部, 于是所求面积为

$$\begin{aligned} S &= S_2 - S_1 = \int_2^1 (2t^2 - t^3)(2 - 2t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 (2t^2 - t^3)(2 - 2t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\int_0^2 (2t^2 - t^3)(2 - 2t)\,\mathrm{d}t = -2\int_0^2 (2t^2 - 3t^3 + t^4)\,\mathrm{d}t \\ &= \big(-\frac{4}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^4 - \frac{2}{5}t^5\big)\Big|_0^2 = \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

注: 可注意到 $S = \big|\int_0^2 |y(t)| x'(t)\,\mathrm{d}t\big|$. 该结论可拓广到一般情形.

(2) 面积 $S = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(\rho(\theta))^2\,\mathrm{d}\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} \theta^2\,\mathrm{d}\theta = \frac{a^2\theta^3}{6}\Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3}a^2\pi^3$.

(3) 面积 $S = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (e^x + \cos \pi x)\,\mathrm{d}x = \big(e^x + \frac{1}{\pi}\sin \pi x\big)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} - e^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{\pi}$.

(4) 两曲线 $y = \frac{x^2}{2}$, $y = x + \frac{3}{2}$ 的交点为 $(-1, \frac{1}{2})$, $(3, \frac{9}{2})$, 于是所求面积为

$$S = \int_{-1}^3 \big(x + \frac{3}{2} - \frac{x^2}{2}\big)\,\mathrm{d}x = \big(\frac{3}{2}x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\big)\Big|_{-1}^3 = \frac{16}{3}.$$

(5) 所围图形关于中心对称, 其面积是位于第一象限的面积的 4 倍. 曲线在第一象限内的极坐标方程为 $\rho^2 = \frac{a^2}{\cos^4\theta + \sin^4\theta}$ $(0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2})$. 故所求面积为

$$\begin{aligned} S &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\rho^2\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a^2}{\cos^4\theta + \sin^4\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a^2}{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)^2 - 2\cos^2\theta\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a^2}{1 - 2\cos^2\theta\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4a^2}{2 - \sin^2 2\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &\overset{t=2\theta}{=} \int_0^{\pi} \frac{2a^2}{2 - \sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a^2}{2 - \sin^2 t}\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2a^2}{2 - \sin^2 t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a^2}{2 - \sin^2 t}\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{2a^2}{2 - \sin^2(\pi - u)}\,\mathrm{d}(\pi - u) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4a^2}{2 - \sin^2 t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4a^2}{\sin^2 t + 2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{2}a^2 \arctan\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}\tan t\Big)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}a^2\pi. \end{aligned}$$

10. 求星形线 $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi,\ a > 0)$ 的弧长.

解: 由对称性可知所求弧长为

$$\begin{aligned} L &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-3a\cos^2 x\sin x)^2 + (3a\sin^2 x\cos x)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos x\,\mathrm{d}x = 6a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,\mathrm{d}x = 6a. \end{aligned}$$

11. 求悬链线 $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ $(|x| \leqslant 1)$ 的弧长.

解: 弧长为 $L = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(e^x + e^{-x})\,\mathrm{d}x = e - e^{-1}$.

12. 过原点作曲线 $y = \sqrt{x-1}$ 的切线, 求由该曲线, 上述切线以及 x 轴所围区域绕 x 旋转而成的旋转体的表面积.

解: 设过原点所作曲线 $y = \sqrt{x-1}$ 的切线在曲线上的切点为 (x_0, y_0), 于是切线方程为 $y - y_0 = \frac{1}{2\sqrt{x_0-1}}(x - x_0)$. 由题设可知 $y_0 = \sqrt{x_0 - 1}$, $y_0 = \frac{x_0}{2\sqrt{x_0-1}}$, 从而 $x_0 = 2$, $y_0 = 1$, 于是切线方程为 $y = \frac{1}{2}x$. 所求旋转体的表面积由两部分组成, 由曲线绕 x 轴旋转而得的旋转体的侧面积为

$$\begin{aligned} S_1 &= 2\pi\int_1^2 y\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi\int_1^2 \sqrt{x-1}\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\right)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \pi\int_1^2 \sqrt{4x-3}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{6}(4x-3)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2 = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1), \end{aligned}$$

介于原点与点 $(2, 1)$ 之间切线绕 x 轴旋转而得的旋转体的侧面积为

$$S_2 = 2\pi\int_0^2 y\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi\int_0^2 \frac{x}{2}\sqrt{1+\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{5}\pi,$$

故所求表面积为 $S = S_1 + S_2 = \frac{\pi}{6}(11\sqrt{5} - 1)$.

13. 求星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ $(a > 0)$ 绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积.

解: 由题设知 $y^2 = (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^3$, 该曲线与 x 轴的交点为 $(-a, 0)$, $(a, 0)$, 于是所求旋转体的体积为

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_{-a}^{a} y^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_{-a}^{a}(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^3\,\mathrm{d}x \\ &= 2\pi\int_0^a (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^3\,\mathrm{d}x \overset{x=at^3}{=} 6\pi a^3\int_0^1 (1-t^2)^3 t^2\,\mathrm{d}t \\ &= 6\pi a^3\int_0^1 (1 - 3t^2 + 3t^4 - t^6)t^2\,\mathrm{d}t \\ &= 6\pi a^3\left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{5}t^5 + \frac{3}{7}t^7 - \frac{1}{9}t^9\right)\Big|_0^1 = \frac{32}{105}\pi a^3. \end{aligned}$$

14. 求曲线 $\begin{cases} x = 1+\sqrt{2}\cos t, \\ y = -1+\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$ $(\frac{\pi}{4} \leqslant t \leqslant \frac{3}{4}\pi)$ 绕 x 轴旋转得到的旋转体的体积与侧面积.

解: $\forall t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi]$, 我们有 $x'(t) = -\sqrt{2}\sin t < 0$, 因此 $x(t)$ 在 $[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi]$ 上严格递减, 从而所求旋转体的体积为

$$\begin{aligned}
V &= \pi\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}} (-1+\sqrt{2}\sin t)^2(-\sqrt{2}\sin t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{2}\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} (\sin t - 2\sqrt{2}\sin^2 t + 2\sin^3 t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{2}\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \big(3\sin t - \sqrt{2}(1-\cos 2t) - 2\cos^2 t\sin t\big)\,\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{2}\pi\big(-3\cos t - \sqrt{2}t + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t + \frac{2}{3}\cos^3 t\big)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \\
&= 2\pi(\frac{5}{3} - \frac{\pi}{2}),
\end{aligned}$$

所求旋转体的侧面积为

$$\begin{aligned}
S &= 2\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} (-1+\sqrt{2}\sin t)\sqrt{(-\sqrt{2}\sin t)^2 + (\sqrt{2}\cos t)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\sqrt{2}\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} (-1+\sqrt{2}\sin t)\,\mathrm{d}t \\
&= 2\sqrt{2}\pi\big(-t - \sqrt{2}\cos t\big)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \\
&= 2\sqrt{2}\pi\big(2 - \frac{\pi}{2}\big).
\end{aligned}$$

15. 求曲线 $\begin{cases} x = t+\sin t, \\ y = 1+\cos t, \end{cases}$ $(t \in [0,\pi])$ 绕 y 轴旋转而成的旋转面的侧面积.

解: 由题设可知所求侧面积为

$$\begin{aligned}
S &= 2\pi\int_0^{\pi} (t+\sin t)\sqrt{(1+\cos t)^2 + (-\sin t)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= 4\pi\int_0^{\pi} (t+\sin t)\cos\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t \overset{u=\frac{t}{2}}{=} 8\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2u+\sin 2u)\cos u\,\mathrm{d}u \\
&= 16\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} (u\cos u + \sin^2 u\cos u)\,\mathrm{d}u \\
&= 16\pi\big(u\sin u + \cos u + \frac{1}{3}\sin^3 u\big)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 16\pi(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}).
\end{aligned}$$

16. 设 $a\in\mathbb{R}$, 而 $f\in\mathscr{C}[0,1]$ 在 $(0,1)$ 内可导使得 $\forall x\in(0,1)$, 均有 $f(x)>0$ 且 $xf'(x)=f(x)+\frac{3}{2}ax^2$. 设曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=0$, $x=1$, $y=0$ 所围区域 D 的面积为 2.

(1) 求函数 f 的表达式.

(2) 问 a 取何值时, 区域 D 绕 x 旋转而成的旋转体的体积最小?

解: (1) 由题设可知, $\forall x\in(0,1)$, 我们有 $\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{3}{2}a$, 于是 $\exists C\in\mathbb{R}$ 使得 $\forall x\in(0,1)$, 我们均有 $\frac{f(x)}{x}=\frac{3}{2}ax+C$, 也即 $f(x)=\frac{3}{2}ax^2+Cx$. 又 $f\in\mathscr{C}[0,1]$, 因此 $\forall x\in[0,1]$, 我们有 $f(x)=\frac{3}{2}ax^2+Cx$, 从而

$$2=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(a+C),$$

故 $C=4-a$, 于是 $\forall x\in[0,1]$, 我们有 $f(x)=\frac{3}{2}ax^2+(4-a)x$.

(2) 由题设可知, 区域 D 绕 x 旋转而成的旋转体的体积为

$$\begin{aligned}
V &= \pi\int_0^1 (f(x))^2\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^1 \big(\frac{3}{2}ax^2+(4-a)x\big)^2\,\mathrm{d}x\\
&= \pi\int_0^1 \big(\frac{9}{4}a^2x^4+3a(4-a)x^3+(4-a)^2x^2\big)\,\mathrm{d}x\\
&= \pi\big(\frac{9}{20}a^2x^5+\frac{3}{4}a(4-a)x^4+\frac{(4-a)^2}{3}x^3\big)\Big|_0^1\\
&= \frac{\pi}{30}\big((a+5)^2+135\big),
\end{aligned}$$

因此当 $a=-5$ 时, 区域 D 绕 x 旋转而成的旋转体的体积最小, 其值为 $\frac{9}{2}\pi$.

17. 设 $0\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant\pi$, 而 $\rho_0\in\mathscr{C}[\alpha,\beta]$. 求证: 极坐标下的区域

$$D=\big\{(\rho,\theta)\mid \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta,\ 0\leqslant\rho\leqslant\rho_0(\theta)\big\}$$

绕极轴旋转而成的旋转体的体积为 $V=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta(\rho_0(\theta))^3\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$.

证明: 将极坐标方程为 $\rho=\rho_0(\theta)$ $(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$ 的曲线记作 Γ, 并令

$$a=\rho_0(\alpha)\cos\alpha,\ b=\rho_0(\beta)\cos\beta.$$

不失一般性, 我们可以假设 $a>0$, $b>0$. 对于其它情形, 可以作类似考虑. 由直线 $y\cos\beta=x\sin\beta$, $y=0$, $x=0$, $x=b$ 所围成的区域绕 x 轴旋转得到一个圆锥体, 其体积为 $V_1=\frac{\pi}{3}b(\rho_0(\beta)\sin\beta)^2$. 由直线 $y\cos\alpha=x\sin\alpha$, $y=0$, $x=0$, $x=a$ 所围成的区域绕 x 轴旋转也会得到一个圆锥体, 其体积为 $V_2=\frac{\pi}{3}a(\rho_0(\alpha)\sin\alpha)^2$. 由曲线 Γ, $y=0$, $x=a$, $x=b$ 所围的区域绕 x 轴旋转所得到的旋转体的体积为

$$\begin{aligned}
V_3 &= \pi\int_a^b y^2\,\mathrm{d}x=\pi\int_\alpha^\beta(\rho_0(\theta)\sin\theta)^2\,\mathrm{d}(\rho_0(\theta)\cos\theta)\\
&= \pi\int_\alpha^\beta(\rho_0(\theta)\sin\theta)^2(\rho_0'(\theta)\cos\theta-\rho_0(\theta)\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta.
\end{aligned}$$

于是所求旋转体的体积为

$$
\begin{aligned}
V &= V_1 - V_2 - V_3 = \frac{\pi}{3} b(\rho_0(\beta)\sin\beta)^2 - \frac{\pi}{3} a(\rho_0(\alpha)\sin\alpha)^2 \\
&\quad -\pi \int_\alpha^\beta (\rho_0(\theta)\sin\theta)^2 (\rho_0'(\theta)\cos\theta - \rho_0(\theta)\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\pi}{3}\int_\alpha^\beta d\big((\rho_0(\theta)\cos\theta)(\rho_0(\theta)\sin\theta)^2\big) \\
&\quad -\pi \int_\alpha^\beta (\rho_0(\theta)\sin\theta)^2 (\rho_0'(\theta)\cos\theta - \rho_0(\theta)\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\pi}{3}\int_\alpha^\beta \big(3\rho_0'(\theta)(\rho_0(\theta))^2\sin^2\theta\cos\theta + 2(\rho_0(\theta))^3\sin\theta\cos^2\theta - (\rho_0(\theta))^3\sin^3\theta\big) \\
&\quad -\pi \int_\alpha^\beta (\rho_0(\theta)\sin\theta)^2 (\rho_0'(\theta)\cos\theta - \rho_0(\theta)\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta (\rho_0(\theta))^3 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta.
\end{aligned}
$$

18. 求心脏线 $\rho = a(1+\cos\theta)$ 所围的区域绕极轴旋转而成的旋转体的体积, 其中 $a > 0$.

解: 旋转体由心脏线的上半部分所围的区域绕极轴旋转而成, 故

$$
V = \frac{2\pi}{3}\int_0^\pi (a(1+\cos\theta))^3 \sin\theta\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{6}a^3(1+\cos\theta)^4\Big|_0^\pi = \frac{8}{3}a^3\pi.
$$