第十一次习题课　曲线曲面积分 3

例1　设 $D_t=\{(x,y)\in R^2 \mid x^2+y^2\le t^2, t>0\}$， $f(x,y)$ 在 D_t 上连续，在 D_t 内存在连续偏导数． $f(0,0)=1$．若 $f(x,y)$ 在 D_t 上满足方程 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\dfrac{1}{2}f(x,y)$． $\vec{n}$ 为有向曲线 ∂D_t 的外单位法向量，求极限 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{1-\cos t}\oint_{\partial D_t}\dfrac{\partial f}{\partial \vec{n}}\mathrm{d}l=$

例2　设 $Q(x,y)$ 在全平面上连续可微, 已知曲线积分 $\int_L 2xydx+Q(x,y)dy$ 与路径无关, 并且对于任意的 t , 有 $\int_{(0,\ 0)}^{(1,\ t)}2xydx+Q(x,y)dy=\int_{(0,\ 0)}^{(t,\ 1)}2xydx+Q(x,y)dy$. 求函数 $Q(x,y)$.

例3　已知积分 $\int_L (x+xy\sin x)dx+\dfrac{f(x)}{x}dy$ 与路径无关， $f(x)$ 为可微函数, 且 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$,

(1) 求 $f(x)$;

(2) 对 (1) 中求得的 $f(x)$, 求函数 $u=u(x,y)$ 使得 $du=(x+xy\sin x)dx+\dfrac{f(x)}{x}dy$;

(3) 对 (1) 中求得的 $f(x)$, 求上述积分, 其中积分路径为从 $A(\pi,1)$ 到 $B(2\pi,0)$ 的任意路径.

例4　计算积分： $\int\limits_{(1,\pi)}^{(2,\pi)}\left(1-\dfrac{y^2}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}\right)dx+\left(\sin\dfrac{y}{x}+\dfrac{y}{x}\cos\dfrac{y}{x}\right)ydx$,

路径为沿任一条不与轴相交的曲线。

例5　设在上半平面 $D=\{(x,y)\mid y>0\}$ 内，函数 $f(x,y)$ 具有连续偏导数,且对任意的 $t>0$ 都有 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$ ，证明: 对 L 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L,都有 $\oint_L yf(x,y)dx-xf(x,y)dy=0$ 。

例6　设 Ω 为由圆锥面 $S: x^2+y^2=z^2$ 和平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 所围成的圆锥体。

(i) 证明设此圆锥体的体积 V 可以表示为 $V=\dfrac{1}{3}\iint\limits_{\partial\Omega}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}^0)dS$ ，其中 $\partial\Omega$ 为 Ω 区域的边界曲面， $\mathbf{n}^0$ 为其单位外法向量， $\mathbf{r}=(x,y,z)$.

(ii) 圆锥体的体积 V 也可以表示为 $V=\dfrac{Ah}{3}$ ，其中 A 为圆锥的底面积， h 为圆锥的高.

例7 设一元函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续可导, 且对于任何位于半空间

$R_x^+=\{(x,y,z),\quad x>0\}$ 中

的光滑有向封闭曲面 $S\subset R_x^+$，有 $\oiint\limits_S xf(x)dydz-xyf(x)dzdx-e^{2x}zdxdy=0$。进一步假设 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$。求 $f(x)$。

例8 利用 Stokes 公式计算积分 $I=\oint\limits_{L^+}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$， 其中 L^+ 为圆周

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\ y=x\tan\alpha\quad\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$

从 0x 轴的正向看去，圆周的正向为逆时针方向.

例9 设有向曲线 L^+ 是平面 $x+y+z=0$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的交线，从 z 轴正向看去

为逆时针为正向。求第二类曲线积分 $I=\int\limits_{L^+}\dfrac{(y+1)\,dx+(z+2)\,dy+(x+3)\,dz}{x^2+y^2+z^2}$。

例10 设 Σ^+ 是锥面的一个部分： $z=\sqrt{x^2+y^2}$， $0\le z\le 1$，规定其正法线向下，求面积分

$I=\iint\limits_{\Sigma^+}xdydz+2ydzdx+3(z-1)dxdy$。

例11 计算高斯积分 $I=\oiint\limits_S\dfrac{\cos(\vec r,\vec n)}{r^2}\mathrm{d}S$，其中 S 为一个不经过原点的光滑封闭曲面，其中 $\vec n$ 为

S 上点 (x,y,z) 处的单位外法线向量， $\vec r=x\vec i+y\vec j+z\vec k$ ， $r=|\vec r|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

例12 确定常数 α，使得积分 $\int_A^B(x^4+4xy^\alpha)dx+(6x^{\alpha-1}y^2-5y^4)dy$ 与路径无关， 并求原

函数 $\varphi(x,y)$，使得 $d\varphi=(x^4+4xy^\alpha)dx+(6x^{\alpha-1}y^2-5y^4)dy$。

例13 （P.229 9）设 $D\subset R^2$ 为开集， $u(x,y)$ 为调和函数 $\left(\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=0,(x,y)\in D\right)$， 证明

（1） $u(x_0,y_0)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{\partial D}\left(u\dfrac{\partial\ln r}{\partial\mathbf{n}}-\ln r\dfrac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\right)dl$，其中 $(x_0,y_0)\in D$， $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ ， $\mathbf{n}$ 为 D 的外法向量；

（2）$u(x_0, y_0) = \dfrac{1}{2\pi R}\int_L u(x, y) dl$，其中 L 为以 (x_0, y_0) 为圆心，R 为半径的圆。