# Review

- 二重积分化累次积分

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_c^d \mathrm{d}y \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$$

- 极坐标下二重积分的计算

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_E f(r\cos\theta, r\sin\theta) r \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

$$E = \{(r,\theta) \mid (r\cos\theta, r\sin\theta) \in D, r \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

# §3. 二重积分的变量替换

当被积区域$D$的形状不好,或者被积函数$f$的表达式比较复杂时,将二重积分化为直角坐标下的累次积分来计算可能会很复杂,甚至计算不出来.如果在极坐标下计算,积分可能会变得简单.但在极坐标下计算二重积分的方法也不是万能的,很多时候积分也不能被简化.因此,我们需要更一般的方法.这就是变量替换方法.

回到二重积分原始的几何背景,计算以$D$为下底,以曲面$S$:$z=f(x,y),(x,y)\in D$为上顶的曲顶柱体的$\Omega$体积

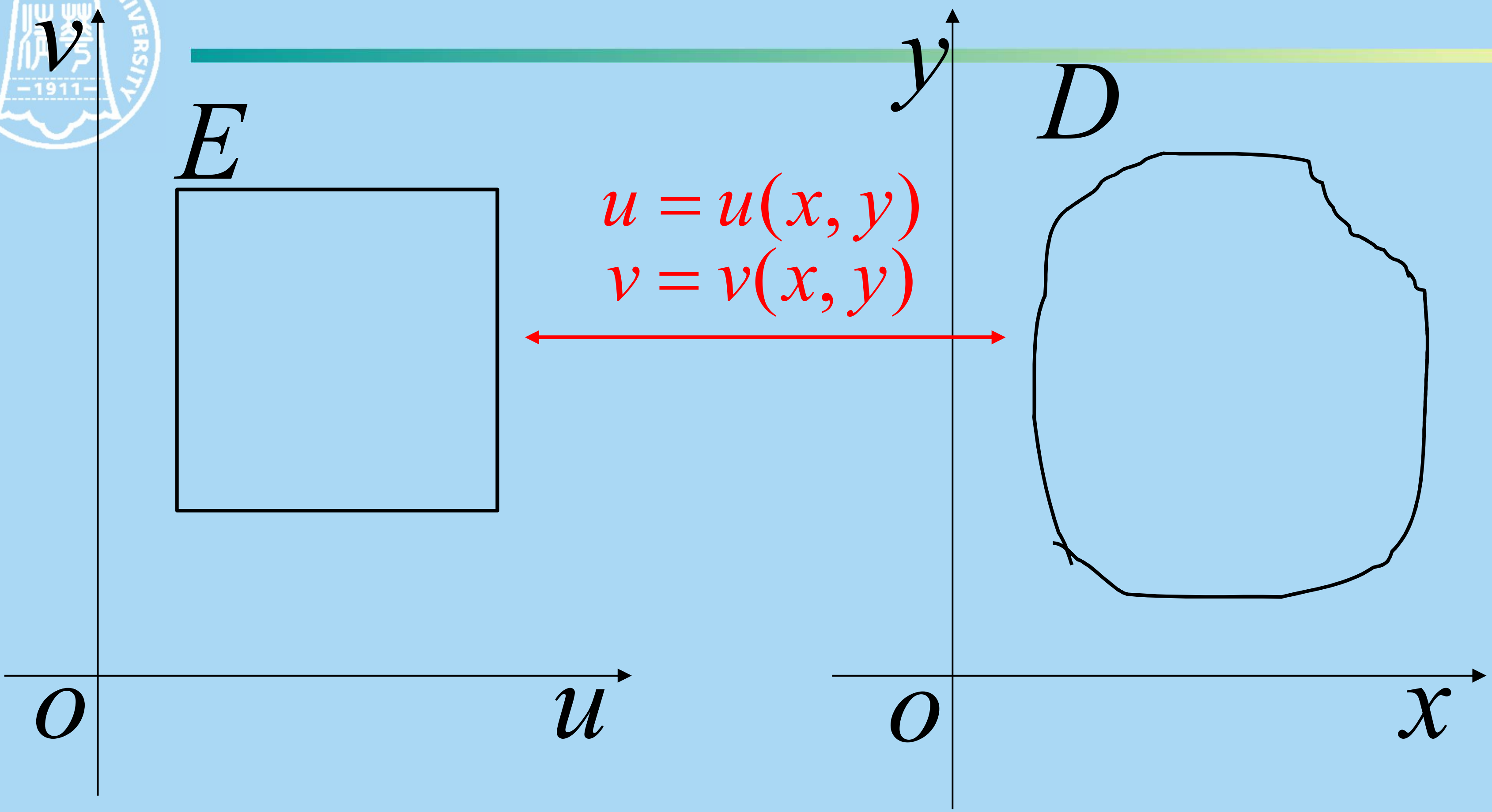
$$\mathrm{V}(\Omega)=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

•Step1.对$D$进行分划:

对区域$D$做分划之前,先引进一一映射

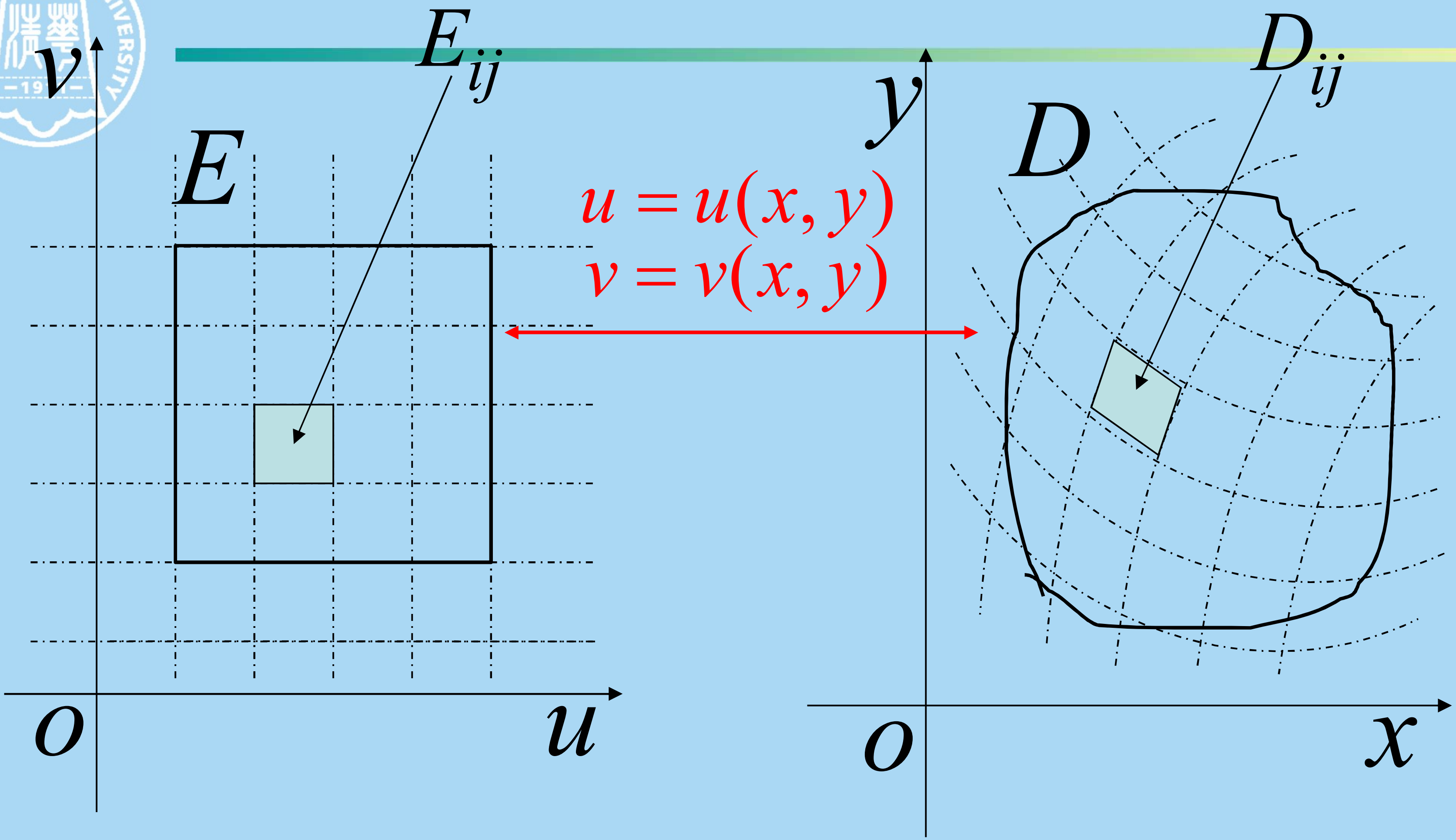
$$u=u(x,y),v=v(x,y),$$

将区域$D$映为区域$E$, 使$(x,y)\in D$与$(u,v)\in E$一一对应.




在$ouv$平面上,用平行于坐标轴的直线

$$u=u_i(i=1,2,\cdots,n),\ v=v_j(j=1,2,\cdots,m)$$




将区域$E$分割成若干小矩形$E_{ij}$(忽略区域边界上那些不规则的小区域). 在映射$u = u(x, y), v = v(x, y)$

下,小矩形$E_{ij}$与$oxy$平面上曲边四边形$D_{ij}$对应.

于是区域 $D$ 有分划$T=\{D_{ij}\}$.

•Step2.取标志点

$$(\xi_{ij},\eta_{ij})=\big(x(u_i,v_j),y(u_i,v_j)\big)\in D_{ij}$$

$$(i=1,2,\cdots,n,j=1,2,\cdots,m).$$

•Step3.近似求和: 以$\Delta\sigma_{ij}$表示$D_{ij}$的面积,则$f$在区域$D$上的$Riemann$和

$$\sum_{i,j}f(\xi_{ij},\eta_{ij})\Delta\sigma_{ij}=\sum_{i,j}f\big(x(u_i,v_j),y(u_i,v_j)\big)\Delta\sigma_{ij}.$$

下面的任务是计算$\Delta\sigma_{ij}=\sigma(D_{ij})$.

矩形$\Delta E_{ij}$的四个顶点为

$P_0(u_i, v_j), P_1(u_{i+1}, v_j), P_2(u_i, v_{j+1})$和$P_3(u_{i+1}, v_{j+1})$.

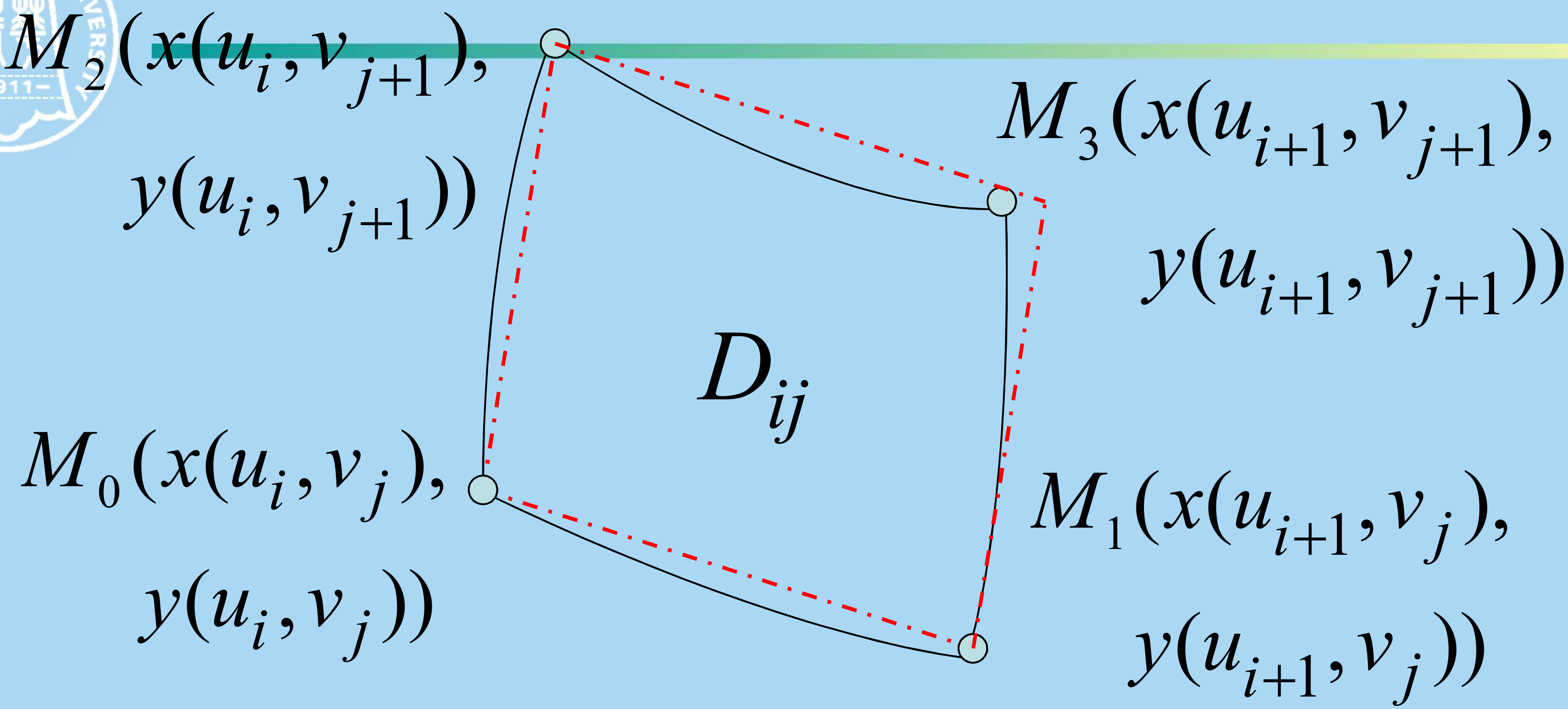
对应地,曲边四边形$\Delta D_{ij}$的四个顶点为

$$M_0(x(u_i, v_j), y(u_i, v_j)),$$

$$M_1(x(u_{i+1}, v_j), y(u_{i+1}, v_j)),$$

$$M_2(x(u_i, v_{j+1}), y(u_i, v_{j+1})),$$

$$M_3(x(u_{i+1}, v_{j+1}), y(u_{i+1}, v_{j+1})).$$

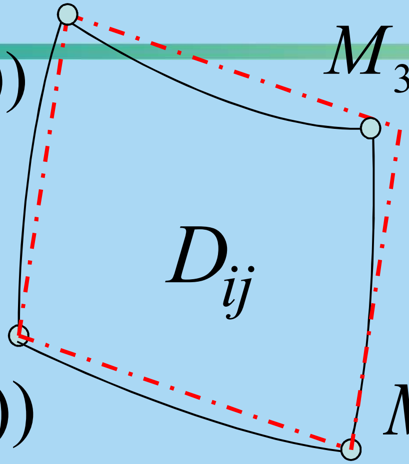



当对区域$E$的分割很细时，$\Delta D_{ij}$可以近似地看成以线段$M_0M_1, M_0M_2$为邻边的平行四边形.

$$\Delta\sigma_{ij} \approx \left\| \overrightarrow{M_0M_1} \times \overrightarrow{M_0M_2} \right\|$$

$M_2(x(u_i,v_{j+1}),y(u_i,v_{j+1}))$

$M_3(x(u_{i+1},v_{j+1}),y(u_{i+1},v_{j+1}))$




$M_0(x(u_i,v_j),y(u_i,v_j))$

$M_1(x(u_{i+1},v_j),y(u_{i+1},v_j))$

记$\Delta u_i = u_{i+1} - u_i, \Delta v_j = v_{j+1} - v_j$,则

$$\overrightarrow{M_0M_1} = \left( x(u_{i+1},v_j) - x(u_i,v_j), y(u_{i+1},v_j) - y(u_i,v_j) \right)$$

$$\approx \left( x'_u(u_i,v_j)\Delta u_i, y'_u(u_i,v_j)\Delta u_i \right)$$

同理 $\overrightarrow{M_0M_2} \approx \left( x'_v(u_i,v_j)\Delta v_j, y'_v(u_i,v_j)\Delta v_j \right).$

于是$\Delta\sigma_{ij} \approx \left\| \overrightarrow{M_0M_1} \times \overrightarrow{M_0M_2} \right\|$

$$\approx \left\| \left( x'_u(u_i,v_j)\Delta u_i,\, y'_u(u_i,v_j)\Delta u_i \right) \times \left( x'_v(u_i,v_j)\Delta v_j,\, y'_v(u_i,v_j)\Delta v_j \right) \right\|$$

$$= \left| \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \Big|_{(u_i,v_j)} \right| \Delta u_i \Delta v_j.$$

为了保证$\Delta\sigma_{ij} \neq 0$,我们要求所做变量替换满足

$$\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0, \forall (u,v) \in E.$$

于是$Riemann$和

$$\sum_{i,j} f(\xi_{ij},\eta_{ij})\Delta\sigma_{ij}=\sum_{i,j} f\Big(x(u_i,v_j),y(u_i,v_j)\Big)\Delta\sigma_{ij}.$$

$$\approx\sum_{i,j}\left\{ f\Big(x(u_i,v_j),y(u_i,v_j)\Big)\cdot\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\Big|_{(u_i,v_j)}\right|\Delta u_i\Delta v_j\right\}.$$

注意上式左边是$(x,y)$的二元函数函数$f(x,y)$在区域$D$上的$Riemann$和,而右端是$(u,v)$的二元函数

$$f(x(u,v),y(u,v))\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$$

在区域$E$上的$Riemann$和.

## •Step4.取极限

当$\max\{\Delta u_i, \Delta v_j\} \to 0$时,$D$的分划$T = \left\{\Delta D_{ij}\right\}$的半径

$\lambda(T) \to 0$,于是

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_E f(x(u,v), y(u,v)) \left|\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

这就是变量替换$u = u(x,y), v = v(x,y)$下二重积分的计算公式.

清华大学

Remark: 形式上,二重积分$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$可以理解为由三部分构成:被积函数$f(x,y)$,积分区域$D$和面积元$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.于是,在变量替换$u=u(x,y), v=v(x,y)$下,

- 被积函数$f(x,y)$化为$f(x(u,v),y(u,v))$,
- 积分区域$D$化为$E$,
- 面积元$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$化为$\left|\det\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$.

Remark: 重新审视极坐标下二重积分的计算.

Remark:用变量替换方法计算二重积分时,所做的变量替换$u=u(x,y),v=v(x,y)$必须是一一映射,且（除有限个点外）满足$\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\neq 0.$

Remark: 通常选取适当的变量替换

$$u=u(x,y),v=v(x,y),$$

使得在这一变换下,要么积分区域变得简单, 要么被积函数被化简.

**Remark.** 二重积分的轮换不变性：若$D\subset\mathbb{R}^2$关于$x,y$是轮换对称的，则 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D f(y,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

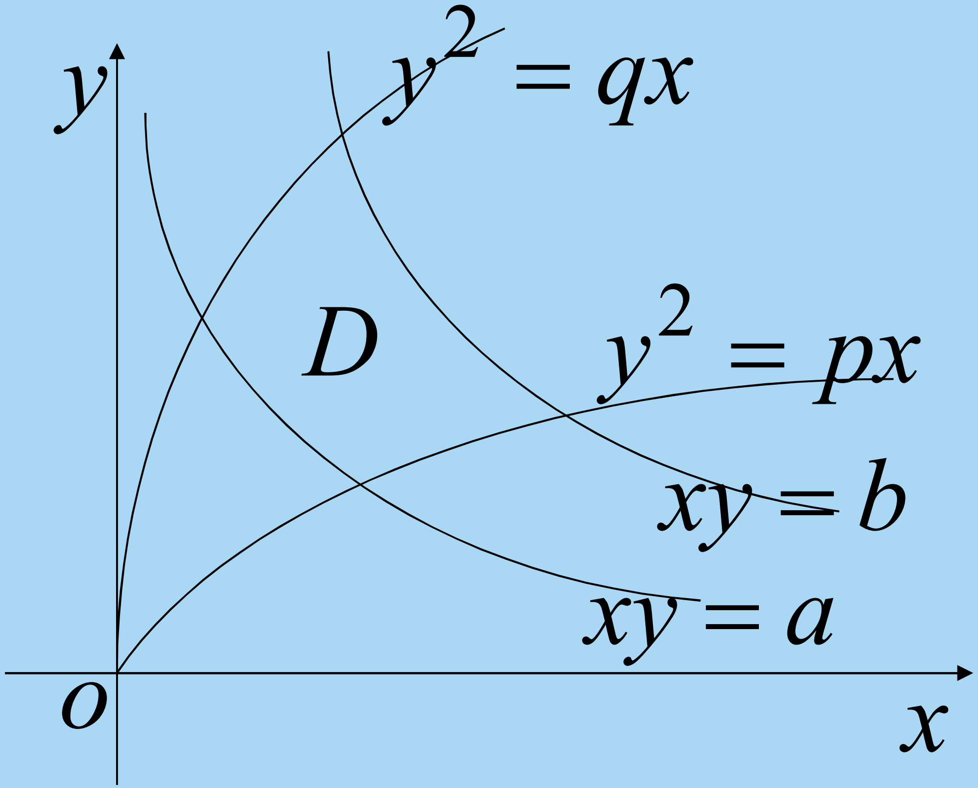
**Proof.** 令$u=y, v=x$，则$\left|\det\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=1$. $D$关于$x,y$对称，即$(x,y)\in D\Leftrightarrow(u,v)\in D$. 于是

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D f(v,u)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

再令$x=u, y=v$，则$\left|\det\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|=1$, $(u,v)\in D\Leftrightarrow(x,y)\in D$,

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D f(v,u)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\iint_D f(y,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\square$$

例: 区域$D$由$y^2 = px, y^2 = qx(0 < p < q)$和$xy = a$, $xy = b(0 < a < b)$围成.求$D$的面积.




分析: 区域$D$的形状不规则,用直角坐标和极坐标都不容易计算其面积$\iint\limits_D dxdy$. 考虑做变量替换,将积分区域变规则.

解: 做变量替换, $u = y^2/x, v = xy$.则$(x, y) \in D$与

$(u,v)\in\Omega=\{(u,v)\mid p\le u\le q, a\le v\le b\}$一一对应,

且 $$\det\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\det\begin{bmatrix}-y^2/x^2 & 2y/x\\ y & x\end{bmatrix}$$

$$=-3y^2/x=-3u\ne 0.$$

于是,区域$D$的面积为

$$S=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_\Omega\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\iint_\Omega\frac{1}{3u}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_a^b\mathrm{d}v\int_p^q\frac{1}{3u}\mathrm{d}u=\frac{1}{3}(b-a)\ln\frac{q}{p}.\square$$

例: $I=\iint_{x^2+4y^2\le 1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

解: 令$x=\rho\cos\theta, y=\dfrac{1}{2}\rho\sin\theta$,则

$$\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}=\det\begin{pmatrix}\cos\theta & -\rho\sin\theta\\ \dfrac{1}{2}\sin\theta & \dfrac{1}{2}\rho\cos\theta\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\rho\neq 0,$$

$$I=\iint_{0\le\rho\le 1, 0\le\theta\le 2\pi}\rho^2(\cos^2\theta+\frac{1}{4}\sin^2\theta)\cdot\frac{1}{2}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^1\frac{1}{2}\rho^3\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}(\cos^2\theta+\frac{1}{4}\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{5\pi}{32}.\square$$

清华大学

例: $I=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}|3x+4y|\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$ 坐标旋转和伸缩

解: 令 $u=3x+4y, v=4x-3y$. 区域 $x^2+y^2\le 1$ 与区域 $u^2+v^2\le 25$ 对应, 且

$$\left|\det\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|=\left|\det\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & -3\end{pmatrix}\right|=25\ne 0.$$

于是 $I=\iint\limits_{u^2+v^2\le 25}|u|\cdot\frac{1}{25}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\iint\limits_{u^2+v^2\le 25,u\ge 0}\frac{2u}{25}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$

$$=\frac{2}{25}\int_0^5 r^2\mathrm{d}r\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\mathrm{d}\theta=\frac{20}{3}.\square$$

清華大學

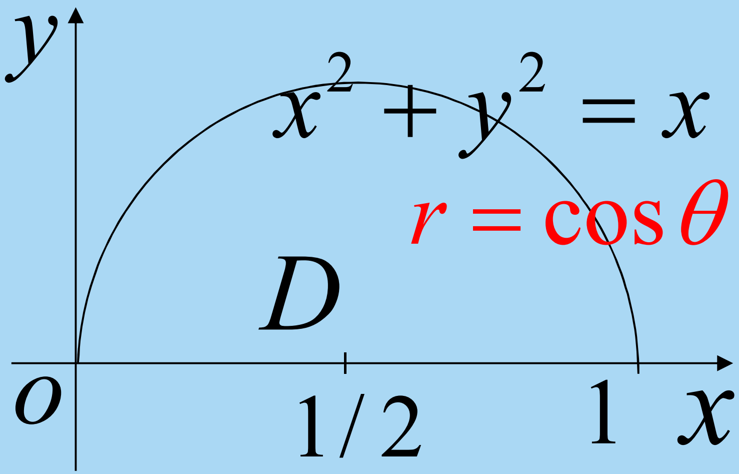
例:$I=\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta} r\sqrt{r\cos\theta-r^2\cos^2\theta}\,\mathrm{d}r.$

分析:被积函数复杂,不论是先对$r$还是先对$\theta$积分都不容易.应作变量替换.

解:令$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta,$

则 $I=\iint_D\sqrt{x-x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$

其中区域$D$如图所示.




于是,$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x-x^2}}\sqrt{x-x^2}\,\mathrm{d}y=\int_0^1(x-x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}.\square$

例. 求由$(x^2+y^2)^2=8x^3$围成的区域的面积.

分析:我们很难画出曲线$(x^2+y^2)^2=8x^3$的图形,直角坐标系下累次积分的积分限也很复杂:

$$0\le x\le 8,\ -\sqrt{\sqrt{8x^3}-x^2}\le y\le\sqrt{\sqrt{8x^3}-x^2}.$$

但在极坐标下积分区域并不难把握.

解:令$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$,曲线方程可化为

$$r^4=8r^3\cos^3\theta,\text{即}r=8\cos^3\theta.$$

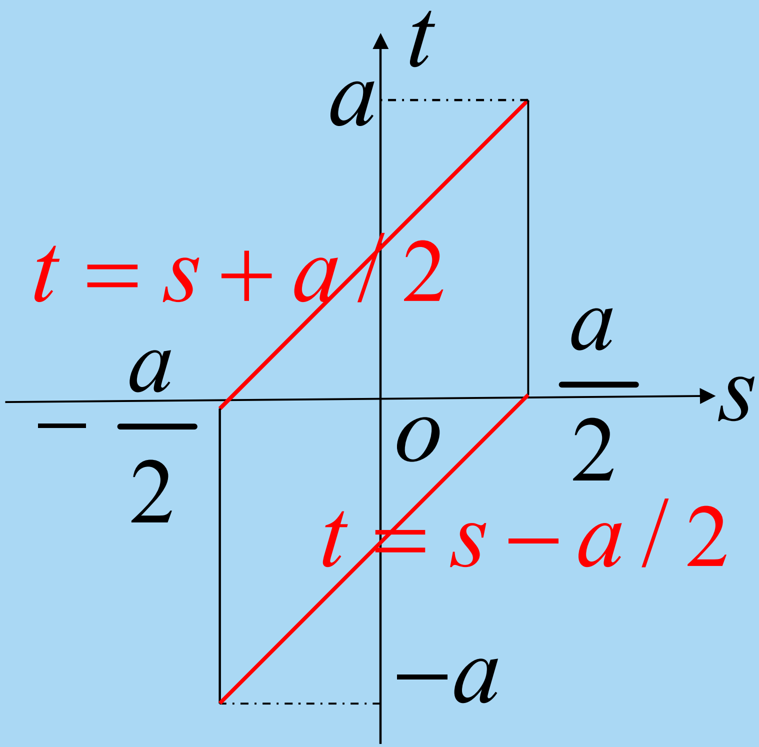
由此,积分区域为$\Omega=\{-\pi/2\le\theta\le\pi/2, 0\le r\le 8\cos^3\theta\}$.

所求面积为$\iint_\Omega r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$. 以下留作练习.□

*例: $f$ 连续, 则

$$\iint_{|x|,|y|\le a/2} f(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-a}^{a} f(t)(a-|t|)\mathrm{d}t.$$

解: 令 $s=x, t=x-y$, 则



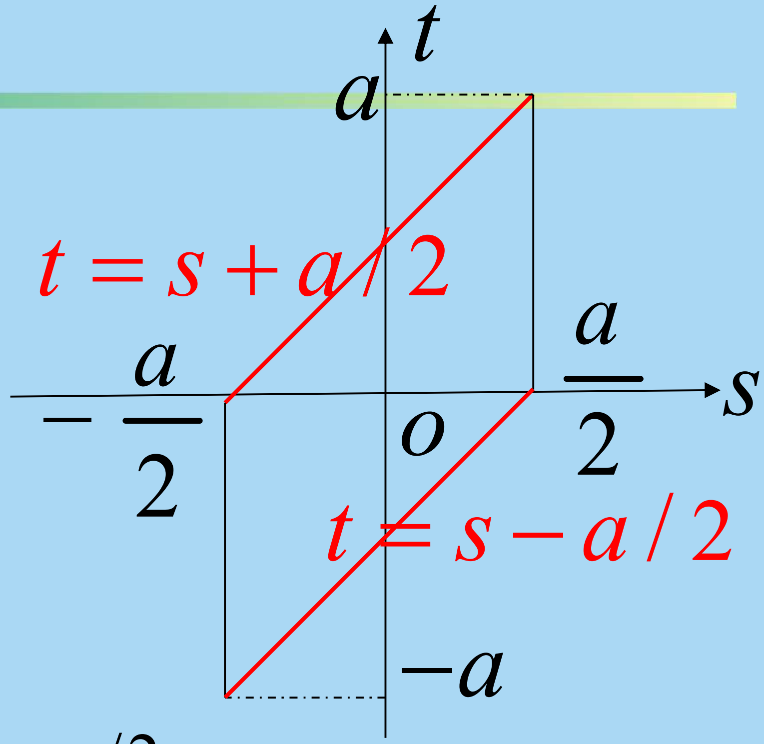

$$s\in[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}],$$

$$t\in[s-\frac{a}{2},s+\frac{a}{2}].$$

$$\det\frac{\partial(s,t)}{\partial(x,y)}=\det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}=-1\neq 0.$$

清華大學

$$\iint_{|x|,|y|\le a/2} f(x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$




$$= \iint\limits_{\substack{-a/2\le s\le a/2\\ s-a/2\le t\le s+a/2}} f(t)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-a}^{0}\mathrm{d}t\int_{-a/2}^{t+a/2} f(t)\,\mathrm{d}s + \int_{0}^{a}\mathrm{d}t\int_{t-a/2}^{a/2} f(t)\,\mathrm{d}s$$

$$= \int_{-a}^{0} f(t)(t+a)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{a} f(t)(a-t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-a}^{a} f(t)(a-|t|)\,\mathrm{d}t. \quad \square$$

作业：习题3.3

No.12-14,17,18