第三次习题课：隐函数微分、多元函数微分学几何应用

例1. 已知 C^1 类函数 $y=f(x)$ 由方程 $ax+by=f\left(x^2+y^2\right)$ 确定，其中 a,b 是常数，求 $y=f(x)$ 的导数。

解：方程 $ax+by=f\left(x^2+y^2\right)$ 两边对 x 求导，

$$a+b\frac{dy}{dx}=f'(x^2+y^2)\left(2x+2y\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2xf'(x^2+y^2)-a}{b-2yf'(x^2+y^2)}$$

例2. 设函数 $x=x(z),\ y=y(z)$ 由方程组 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-1=0\\x^2+2y^2-z^2-1=0\end{cases}$ 确定， 求 $\frac{dx}{dz},\ \frac{dy}{dz}$.

解:令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$，$G(x,y,z)=x^2+2y^2-z^2-1$ ，则当 $xy\neq0$ 时，

$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}=\begin{pmatrix}2x&2y\\2x&4y\end{pmatrix}$ 可逆，故方程组 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-1=0\\x^2+2y^2-z^2-1=0\end{cases}$ 确定了隐函数组

$x=x(z),\ y=y(z)$，且

$$\begin{bmatrix}\frac{dx}{dz}\\\frac{dy}{dz}\end{bmatrix}=-\left(\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right)^{-1}\begin{pmatrix}\frac{\partial F}{\partial z}\\\frac{\partial G}{\partial z}\end{pmatrix}=-\frac{1}{4xy}\begin{bmatrix}4y&-2y\\-2x&2x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2z\\-2z\end{bmatrix}=-\frac{1}{4xy}\begin{bmatrix}12yz\\-8xz\end{bmatrix}$$

由此得到 $\frac{dx}{dz}=-\frac{3z}{x},\ \frac{dy}{dz}=\frac{2z}{y}$.

例3. 已知函数 $z=z(x,y)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=u\cos v\\y=u\sin v\\z=uv\end{cases}$ 给定，试求 $\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}$.

解：这个问题涉及到复合函数微分法与隐函数微分法. x,y 是自变量, u,v 是中间变量 (u,v 是 x,y 的函数), 先由 $z=uv$ 得到

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=v\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=v\frac{\partial u}{\partial y}+u\frac{\partial v}{\partial y}$$

u,v 是由方程组 $\begin{cases}x=u\cos v\\y=u\sin v\end{cases}$ 确定的 x,y 的隐函数，在这两个等式两端分别关于 x,y 求偏导数，得 $\begin{cases}1=\cos v\frac{\partial u}{\partial x}-u\sin v\frac{\partial v}{\partial x}\\0=\sin v\frac{\partial u}{\partial x}+u\cos v\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$， $\begin{cases}0=\cos v\frac{\partial u}{\partial y}-u\sin v\frac{\partial v}{\partial y}\\1=\sin v\frac{\partial u}{\partial y}+u\cos v\frac{\partial v}{\partial y}\end{cases}$

得到 $\frac{\partial u}{\partial x}=\cos v,\ \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{-\sin u}{u},\ \frac{\partial u}{\partial y}=\sin v,\ \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\cos v}{u}$

将这个结果代入前面的式子，得到

$$\frac{\partial z}{\partial x}=v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}=v\cos v-\sin v$$

与
$$\frac{\partial z}{\partial y}=v\frac{\partial u}{\partial y}+u\frac{\partial v}{\partial y}=v\sin v+\cos v$$

例4. 设 f，g，$h\in C^1$，函数 $u=u(x,y)$ 由方程 $\begin{cases}u=f(x,y,z,t)\\g(y,z,t)=0\\h(z,t)=0\end{cases}$ 确定，求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$.

解： 函数关系分析： 5（变量）－ 3（方程)=2(自变量)；
一因变量（u），二自变量（ x, y ），二中间变量（ z, t ）

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}.$$

又方程组 $\begin{cases}g(y,z,t)=0\\h(z,t)=0\end{cases}$ 确定了隐函数组 $z=z(y),\ t=t(y)$，且

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial z}{\partial y}\\ \frac{\partial t}{\partial y}\end{pmatrix}=-\left(\det\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}\right)^{-1}\begin{pmatrix}\frac{\partial h}{\partial t} & -\frac{\partial g}{\partial t}\\ -\frac{\partial h}{\partial z} & \frac{\partial g}{\partial z}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial g}{\partial y}\\ 0\end{pmatrix}，\ 从而\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial t}\right)\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial t}-\frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial z}}.$$

例5. 设 $f(x,y,z)=xy^2z^3$ 且方程 $x^2+y^2+z^2=3xyz$ (#)

验证在 $P_0(1,1,1)$ 附近由方程(#)能确定可微的隐函数 $y=y(x,z)$ 及 $z=z(x,y)$；

求 $\frac{\partial(f(x,y(x,z),z))}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial(f(x,y,z(x,y)))}{\partial x}$ 及它们在 $P_0(1,1,1)$ 的值。

解： (1) 令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+x^2-3xyz$. 则 $F_x^{'}=2x-3yz$，$F_y^{'}=2y-3xz$，

$F_z^{'}=2z-3xy$. 因为 $F(P_0)=0$，$F_x^{'}$, $F_y^{'}$, $F_z^{'}\in C(\mathbb{R}^3)$ 且 $F_y^{'}(P_0)=F_z^{'}(P_0)=-1\neq 0$，所以在 $Q_0(1,1)$ 的邻域内由方程(#)能确定可微的隐函数 $y=y(x,z)$ 及 $z=z(x,y)$.

(2) 当 $F_y^{'}\neq 0$ 时，有 $\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{F_x^{'}}{F_y^{'}}=-\frac{2x-3yz}{2y-3xz}$； 同理，当 $F_z^{'}\neq 0$ 时，有

$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x^{'}}{F_z^{'}}=-\frac{2x-3yz}{2z-3xy}$. 所以 $\frac{\partial(f(x,y(x,z),z))}{\partial x}=y^2z^3+2xyz^3\frac{\partial y}{\partial x}$，

$\frac{\partial(f(x,y,z(x,y)))}{\partial x}=y^2z^3+3xy^2z^2\frac{\partial z}{\partial x}$ 且 $\frac{\partial(f(1,y(1,1),1))}{\partial x}=-1$，$\frac{\partial(f(1,1,z(1,1)))}{\partial x}=-2$.

例6. 求曲面 $S:2x^2-2y^2+2z=1$ 上切平面与直线 $L:\begin{cases}3x-2y-z=5\\x+y+z=0\end{cases}$ 平行的切点的轨

迹。

解：直线 L 的方向方向：$\vec{\tau}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -2 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=-\vec{i}-4\vec{j}+5\vec{k}$.

切点为 $P(x,y,z)$ 处曲面 S 的法向：$\vec{n}=4x\vec{i}-4y\vec{j}+2\vec{k}$.

因为 $\vec{n}\perp\vec{\tau}\Leftrightarrow\vec{n}\cdot\vec{\tau}=-4x+16y+10=0$, 且切点在曲面上，

因此切点的轨迹为空间曲线：$\begin{cases}2x-8y=5\\ 2x^2-2y^2+2z=1,\end{cases}$

该曲线的参数方程：$\begin{cases}x=x\\ y=(2x-5)/8\\ z=(-60x^2-60x+57)/64.\end{cases}$

例7. 证明球面 $S_1: x^2+y^2+z^2=R^2$ 与锥面 $S_2: x^2+y^2=a^2z^2$ 正交.

证明：所谓两曲面正交是指它们在交点处的法向量互相垂直.

记 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-R^2$, $\quad G(x,y,z)=x^2+y^2-a^2z^2$,

曲面 S_1 上任一点 $M(x,y,z)$ 处的法向量是

$$gradF(x,y,z)=(2x,2y,2z)^T \quad \text{或者}\ \vec{v}_1=(x,y,z)^T$$

曲面 S_2 上任一点 $M(x,y,z)$ 处的法向量为 $\vec{v}_2=(x,y,-a^2z)^T$.

设点 $M(x,y,z)$ 是两曲面的公共点，则在该点有

$\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2=(x,y,z)^T\cdot(x,y,-a^2z)^T=x^2+y^2-a^2z^2=0$

即在公共点处两曲面的法向量相互垂直，因此两曲面正交.

例 8. 通过曲面 $S: e^{xyz}+x-y+z=3$ 上点 $(1,0,1)$ 的切平面（ B ）.

（A）通过 y 轴；　　（B）平行于 y 轴；

（C）垂直于 y 轴；　　（D）A，B，C 都不对.

解题思路： 令 $F(x,y,z)=e^{xyz}+x-y+z-3$. 则 S 在其上任一点 M 的法向量为

$$\mathrm{grad}\,F(M)=\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right)\Big|_M,$$

于是 S 在点 M $(1,0,1)$ 的法向量为 $(yze^{xyz}+1, xze^{xyz}-1, xye^{xyz}+1)\big|_{(1,0,1)}=(1,0,1)$.

因此，切平面的方程为 $(x-1)+(z-1)=0$.

S 在 $(1,0,1)$ 的法向量垂直于 y 轴，从而切平面平行于 y 轴．但是由于原点不在切平面，故切平面不含 y 轴.

例 9. 已知 f 可微，证明曲面 $f\left(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c}\right)=0$ 上任意一点处的切平面通过一定点，并求此点位置.

证明：设 $F(x,y,z)=f\left(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c}\right)$，则

$$\frac{\partial F}{\partial x}=f_1'\cdot\left(\frac{1}{z-c}\right),\quad \frac{\partial F}{\partial y}=f_2'\cdot\left(\frac{1}{z-c}\right),\quad \frac{\partial F}{\partial z}=f_1'\cdot\frac{a-x}{(z-c)^2}+f_2'\cdot\frac{b-y}{(z-c)^2}.$$

则曲面在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面是：

$$f_1'(P_0)\frac{x-x_0}{z_0-c}+f_2'(P_0)\frac{y-y_0}{z_0-c}+\left(f_1'(P_0)\frac{a-x_0}{(z_0-c)^2}+f_2'(P_0)\frac{b-y_0}{(z_0-c)^2}\right)(z-z_0)=0,$$

即

$$f_1'(P_0)(z_0-c)(x-x_0)+f_2'(P_0)(z_0-c)(y-y_0)+f_1'(P_0)(a-x_0)(z-z_0)+f_2'(P_0)(b-y_0)(z-z_0)=0.$$

易见当 $x=a,z=c,y=b$ 时上式恒等于零。于是曲面 $f\left(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c}\right)=0$ 上任意一点处的切平面通过一定点，此定点为 (a,b,c).

例 10. 设 G 是可导函数且在自变量取值为零时，导数为零，否则函数的导数都不等于零。曲面 S 由方程 $ax+by+cz=G\left(x^2+y^2+z^2\right)$ 确定，试证明：曲面 S 上任一点的法线与某定直线相交。

证明：曲面上任意一点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的法线为

$$\frac{x-x_0}{a-2x_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2)}=\frac{y-y_0}{b-2y_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2)}=\frac{z-z_0}{c-2z_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2)}。$$

设相交的定直线为 $\frac{x-x_1}{\alpha}=\frac{y-y_1}{\beta}=\frac{z-z_1}{\gamma}$，则

$\left(a-2x_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2),b-2y_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2),c-2z_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2)\right)$ 不平行于 (α,β,γ)，故

$$\left[\left(a-2x_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2),b-2y_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2),c-2z_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2)\right)\times(\alpha,\beta,\gamma)\right]\cdot\left(x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0\right)=0$$

即$\begin{vmatrix} a-2x_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2) & b-2y_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2) & c-2z_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2) \\ \alpha & \beta & \gamma \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \end{vmatrix}=0$

从而

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \end{vmatrix}-2G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2)\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}=0$$

故只要取$(\alpha,\beta,\gamma)=(a,b,c),\quad (x_1,y_1,z_1)=(0,0,0)$即可.

例 11. 在椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$上求一点，使椭球面在此点的法线与三个坐标轴的正向成等角。

解：椭球面在此点的法线矢量为$(1,1,1)$，设该点为(x_0,y_0,z_0)，则有

$$gradF\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}=(\frac{2x_0}{a^2},\frac{2y_0}{b^2},\frac{2z_0}{c^2})=k(1,1,1)。$$

该点坐标为$\pm\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a^2,b^2,c^2)$。

例 12. 求螺线 $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t\ (a>0,c>0) \\ z=ct \end{cases}$ 在点$M(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{\pi c}{4})$处的切线与法平面.

解：由于点M对应的参数为$t_0=\frac{\pi}{4}$，所以螺线在M处的切向量是

$\vec{v}=(x'(\pi/4),\ y'(\pi/4),\ z'(\pi/4))=(-a/\sqrt{2},\ a/\sqrt{2},\ c)$

因而所求切线的参数方程为$\begin{cases} x=a/\sqrt{2}-a/\sqrt{2}\,t, \\ y=a/\sqrt{2}+a/\sqrt{2}\,t, \\ z=(\pi/4)c+c\,t, \end{cases}$

法平面方程为 $-(a/\sqrt{2})(x-a/\sqrt{2})+(a/\sqrt{2})(y-a/\sqrt{2})+c(z-(\pi/4)c)=0$.

例 13. 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-6=0 \\ z-x^2-y^2=0 \end{cases}$ 在点$M_0(1,1,2)$处的切线方程.

解：令$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-6$，$G(x,y,z)=z-x^2-y^2$，

则$gradF(M_0)=(2,2,4),\qquad gradG(M_0)=(-2,-2,1)$

所以曲线在$M_0(1,1,2)$处的切向量为$v = gradF(M_0) \times gradG(M_0) = (10, -10,\ 0)$，

于是所求的切线方程为$\begin{cases} x = 1 + 10t \\ y = 1 - 10t \\ \quad z = 2. \end{cases}$

例 14. 已知曲线的参数方程为$x = t, y = t^2, z = t^3$，在曲线上求一点，使曲线在该点的切线平行于平面$x + 2y + z = 4$.

解：曲线$x = t, y = t^2, z = t^3$的切方向为$(1, 2t, 3t^2)$.

由曲线在该点的切线平行于平面$x + 2y + z = 4$可知，

$1 + 4t + 3t^2 = 0$，故$t = -\frac{1}{3}, \quad -1$，

且所求的点为$\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}\right)$或$\left(-1, 1, -1\right)$.