第 13 周习题课：第二型曲线曲面积分

一、知识回顾与讨论

两类积分的回顾与对比

	积分对象	承载积分的几何对象	
第一型	函数 f	曲线（无向）$\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ $\int_{\gamma} f\,\mathrm{d}l$ 微弧长 $\mathrm{d}l=\lVert\mathbf{r}'(t)\rVert\mathrm{d}t$ $=\sqrt{\langle\mathbf{r}'(t),\mathbf{r}'(t)\rangle}\mathrm{d}t$ $=\sqrt{\mathbf{r}'(t)^T\mathbf{r}'(t)}\mathrm{d}t$(直角坐标系) 背景：由线密度求质量	曲面（无向）$\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$ $\iint_{\Sigma} f\,\mathrm{d}\sigma$ 面积微元 $\mathrm{d}\sigma=\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ $=\sqrt{\begin{vmatrix}E & F\\ F & G\end{vmatrix}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\sqrt{\begin{vmatrix}\left\langle\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u},\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\right\rangle & \left\langle\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u},\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right\rangle\\ \left\langle\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v},\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\right\rangle & \left\langle\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v},\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right\rangle\end{vmatrix}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ $=\sqrt{\det\left[\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial(u,v)}\right)^T\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial(u,v)}\right]}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$(直角坐标系) 背景：由面密度求质量
第二型	向量场 $\mathbf{F}$	路径（有向曲线）$\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ 物理背景：力场做功、流速场 环量 $\int_{\gamma}\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}=\int_{\gamma}\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}l$，（$\boldsymbol{\tau}$ 是路径的正向单位切向量场） 平面流速场通量 $\int_{\gamma}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}l$	定向曲面：带有指定单位法向量场的曲面$(\Sigma,\mathbf{n})$ 物理背景：流速场通量、电场通量、磁场通量 $\iint_{\Sigma}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}\sigma$
	微分形式 ω	一阶微分形式 $\omega=X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y+Z\mathrm{d}z$ $\int_{\gamma}\omega$	二阶微分形式 $\omega=X\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+Z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ $\iint_{\Sigma}\omega$

两类积分的转化

第二型积分转为第一型积分：$\int_{\gamma}\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}l$，$\int_{\gamma}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}l$，$\iint_{\Sigma}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}\sigma$

第一型积分转为第二型积分：给定函数 f 构造向量场 $\mathbf{F}=f\boldsymbol{\tau}$ 或 $\mathbf{F}=f\mathbf{n}$。

第二型曲线积分的计算

1、 代入适当的参数方程转为一元定积分

2、 构造原函数，$\omega = \mathrm{d}f$，则 $\int_\gamma \omega = f(B) - f(A)$。存在原函数的充分条件是：向量场 $\mathbf{F}$ 无旋（$\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = 0$）/微分形式 ω 是恰当形式（$\mathrm{d}\omega = 0$），区域/曲面单连通。

3、 选择适当的平面区域或曲面用 Green 公式或 Stokes 公式转为平面重积分或第二型曲面积分

Green 公式/Stokes 公式（环量与旋度）$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_D \mathrm{rot}\,\mathbf{F}\mathrm{d}\sigma$，$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_\Sigma \mathrm{rot}\,\mathbf{F}\mathrm{d}\sigma$

Green 公式（通量与散度）$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}l = \iint_D \mathrm{div}\,\mathbf{F}\,\mathrm{d}\sigma$

$\int_\gamma \omega = \iint_\Sigma \mathrm{d}\omega$，

对 $\omega = X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y + Z\mathrm{d}z$，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega &= \left(\frac{\partial X}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial X}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial X}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial Y}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial Y}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y \\
&\quad + \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial Z}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial Z}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\wedge \mathrm{d}z \\
&= \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \\
&= \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z & \dfrac{\partial}{\partial x} & X \\ \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x & \dfrac{\partial}{\partial y} & Y \\ \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y & \dfrac{\partial}{\partial z} & Z \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

直角坐标系下，

$\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial Z}{\partial y} - \dfrac{\partial Y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial X}{\partial z} - \dfrac{\partial Z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial Y}{\partial x} - \dfrac{\partial X}{\partial y} \end{pmatrix}$ 是向量场 $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ 的旋度。（对应 Stokes 公式）

对平面向量场 $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$，旋度 $\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = \dfrac{\partial Y}{\partial x} - \dfrac{\partial X}{\partial y}$。（对应环量-旋度 Green 公式）

$$\int_\gamma X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

对平面向量场 $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$，散度 $\mathrm{div}\,\mathbf{F} = \dfrac{\partial X}{\partial x} + \dfrac{\partial Y}{\partial y} = \mathrm{tr}\dfrac{\partial(X,Y)}{\partial(x,y)}$。（对应通量-散度 Green 公式）

$$\int_\gamma -Y\mathrm{d}x + X\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

注：微分形式表达的 Green 公式只有一个，但物理意义的 Green 公式有两个。

使用 Green 公式/Stokes 公式时，要把曲线作为一个平面区域/曲面的边界，并且注意曲线定向与曲面定向相协调（站在曲线上沿曲线正向前进时，平面区域/曲面位于左手一侧，想一想在运动场跑道上跑步的人就知道了）

第二型曲面积分的计算

1、 选择适当的参数方程，代入并转为二维重积分
2、 利用向量场的特殊性和第二型曲面积分的物理含义（通量）
3、 利用 Gauss 公式（散度定理），把曲面积分转成关于散度的三重积分，要注意曲面定向与空间定向相协调。

一些建议

1、利用对称性，但如何利用（坐标变换会带来曲线曲面的变化、定向的变化以及向量场的变化）

2、利用积分对曲线曲面的可加性，以及对向量场/微分形式的线性，对积分进行分解。比如曲线积分时分离出其中具有原函数的部分，对积分进行化简。

二、习题

第二型曲线积分

1. $\displaystyle\int_{L:从(1,\pi)到(2,\pi)}\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}y$

解法 1：取参数方程 $L:\begin{cases}x=x,\\ y=\pi\end{cases}$ $1\le x\le 2$，直接计算

$$\begin{aligned}\int_{L:从(1,\pi)到(2,\pi)}\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}y&=\int_1^2\left(1-\frac{\pi^2}{x^2}\cos\frac{\pi}{x}\right)\mathrm{d}x\\&=1-\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}t^2\cos t\,\mathrm{d}\frac{\pi}{t}\quad(一元定积分换元x=\frac{\pi}{t})\\&=1-\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos t\,\mathrm{d}t=1+\pi\end{aligned}$$

解法 2：凑全微分和原函数

$$\begin{aligned}&\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}y\\&=\left(1-v^2\cos v\right)\mathrm{d}x+\left(\sin v+v\cos v\right)\mathrm{d}(xv)\quad 换元\ y=xv\\&=\left(1+v\sin v\right)\mathrm{d}x+x\left(\sin v+v\cos v\right)\mathrm{d}v\\&=\mathrm{d}\left(x+xv\sin v\right)\\&=\mathrm{d}\left(x+y\sin\frac{y}{x}\right)\quad 代回v=\frac{y}{x}\end{aligned}$$

所以

$$\int_{L:\text{从}(1,\pi)\text{到}(2,\pi)}\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}y=\left[x+y\sin\frac{y}{x}\right]_{(1,\pi)}^{(2,\pi)}=1+\pi\text{。}$$

解法 3：验证无旋

$$\mathrm{d}\left[\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}y\right]$$

$$=\frac{\partial}{\partial y}\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x+\frac{\partial}{\partial x}\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$=\left[-\left(-\frac{2y}{x^2}\cos\frac{y}{x}-\frac{y^2}{x^3}\sin\frac{y}{x}\right)+\left(-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}-\frac{y^2}{x^3}\sin\frac{y}{x}\right)\right]\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$=0$$

所以在单连通区域$\{(x,y)\mid x>0\}$内，积分与路径无关，因此

$$\int_{\text{折线}:(1,\pi)\to(1,0)\to(2,0)\to(2,\pi)}\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\pi}^{0}(\sin y+y\cos y)\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}\left(\sin\frac{y}{2}+\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2}\right)\mathrm{d}y$$

$$=-\int_0^{\pi}(\sin y+y\cos y)\mathrm{d}y+1+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t+t\cos t)\mathrm{d}t$$

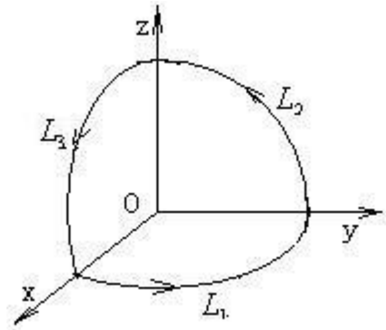
$$=1+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t+t\cos t)\mathrm{d}t-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\sin y+y\cos y)\mathrm{d}y$$

$$=1+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t+t\cos t)\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t-(\pi-t)\cos t)\mathrm{d}t$$

$$=1+\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\mathrm{d}t=1+\pi$$

想一想：为什么选了这样一条道路？

2. 计算积分 $I=\int_{\Gamma}(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z$， 其中 Γ 为第一卦限中球面片 $x^2+y^2+z^2=1\ (x,y,z\geq 0)$ 的边界曲线绕球面外法向量逆时针旋转。（课本习题 4.4 题 3（4），page 192）



解法 1：如图 $\Gamma=L_1+L_2+L_3$，其中 L_1,L_2,L_3 分别是 xy 平面、 yz 平面、 zx 平面上单位圆周在各自第一象限中的弧段。

$$\int_{L_1}(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z$$

$$=\int_{\substack{x=\cos\theta,y=\sin\theta,z=0\\(\theta:0\to\frac{\pi}{2})}}\sin^2\theta\mathrm{d}\cos\theta-\cos^2\theta\mathrm{d}\sin\theta\qquad\text{（选择参数方程并代入）}$$

$$=\int_{\substack{x=\cos\theta,y=\sin\theta,z=0\\(\theta:0\to\frac{\pi}{2})}}\left(1-\cos^2\theta\right)\mathrm{d}\cos\theta-\left(1-\sin^2\theta\right)\mathrm{d}\sin\theta\qquad\text{（变形以便得到原函数）}$$

$$=\left[\cos\theta-\frac{1}{3}\cos^3\theta-\sin\theta+\frac{1}{3}\sin^3\theta\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=-\frac{4}{3}$$ （用原函数代入初值和终值计算）

因为对称性（在空间的保向变换 $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}y\\z\\x\end{pmatrix}$ 下，$L_1\to L_2\to L_3\to L_1$，且 $\omega=(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z$ 保持不变），所以 $\int_{L_1}\omega=\int_{L_2}\omega=\int_{L_3}\omega$，因此 $I=\int_\Gamma\omega=\int_{L_1}\omega+\int_{L_2}\omega+\int_{L_3}\omega=-4$。

解法 2：用 Gauss 公式，

$$I=\int_\Gamma(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z$$

$$=\iint_\Sigma\left(2y\mathrm{d}y-2z\mathrm{d}z\right)\wedge\mathrm{d}x+\left(2z\mathrm{d}z-2x\mathrm{d}x\right)\wedge\mathrm{d}y+\left(2x\mathrm{d}x-2y\mathrm{d}y\right)\wedge\mathrm{d}z$$

$$=\iint_\Sigma\left(-2x-2y\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+\left(-2y-2z\right)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\left(-2x-2z\right)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x$$

其中 Σ 是任何以 Γ 为边界的有向曲面。

为方便计算，我们取 Σ 由三个坐标平面上三个自然正向的平面区域

$\Sigma_1=\{(x,y,0)\,|\,x^2+y^2\le 1,x,y\ge 0\}$，

$\Sigma_2=\{(0,y,z)\,|\,y^2+z^2\le 1,y,z\ge 0\}$，

$\Sigma_3=\{(x,0,z)\,|\,z^2+x^2\le 1,z,x\ge 0\}$，

组成。

在 $\Sigma_1=\{(x,y,0)\,|\,x^2+y^2\le 1,x,y\ge 0\}$ 上，

$$\iint_{\Sigma_1}\left(-2x-2y\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+\left(-2y-2z\right)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\left(-2x-2z\right)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x=\iint_{\Sigma_1}\left(-2x-2y\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{\substack{x^2+y^2\le 1\\ x,y\ge 0}}\left(-2x-2y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\iint_{0\le r\le 1,0\le\theta\le\frac{\pi}{2}}\left(r\cos\theta+r\sin\theta\right)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$=-2\int_0^1 r^2\mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\theta+\sin\theta\right)\mathrm{d}\theta=-2\times\frac{1}{3}\times\left(\sin\theta-\cos\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{4}{3}$$

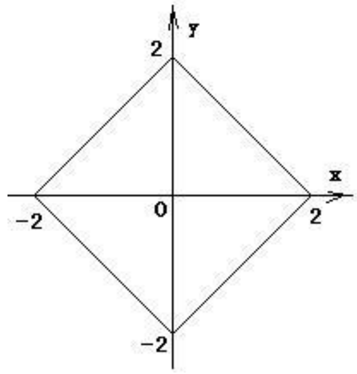
由对称性（与解法 1 类似）知 $\iint_{\Sigma_1}\alpha=\iint_{\Sigma_2}\alpha=\iint_{\Sigma_3}\alpha$，从而 $I=\iint_\Sigma\alpha=\iint_{\Sigma_1}\alpha+\iint_{\Sigma_2}\alpha+\iint_{\Sigma_3}\alpha=-4$。

注：解法 2 等价于在三个坐标平面上使用 Green 公式。

注：在解法 2 中使用 Gauss 公式时也可以选取第一卦限中的球面部分，读者可以自己试试并与选择坐标平面进行比较。

3. 设 C 为闭曲线：$|x|+|y|=2$，逆时针为正向。

计算（i）$\oint\limits_{C^+}\frac{ax\mathrm{d}y-by\mathrm{d}x}{|x|+|y|}$，（ii）$\oint\limits_{C^+}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$。



解（i）

解法 1：利用 $|x|+|y|=2$，

$$\oint\limits_{C^+}\frac{ax\mathrm{d}y-by\mathrm{d}x}{|x|+|y|}=\frac{1}{2}\oint\limits_{C^+}ax\mathrm{d}y-by\mathrm{d}x$$

C 在四个象限里的部分依次记为 C_1,C_2,C_3,C_4。

在第一象限中，

$$\frac{1}{2}\int_{C_1}ax\mathrm{d}y-by\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{\substack{x+y=2\\ y:0\to 2}}ax\mathrm{d}y-by\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^2 a(2-y)\mathrm{d}y-by\mathrm{d}(2-y)$$

$$=\left(ay+\frac{-a+b}{4}y^2\right)\Bigg|_0^2=2a+(b-a)=a+b$$

其他象限中结果相同（可以用对称性得到，请讨论这个对称性）。

所以 $\oint\limits_{C^+}\frac{ax\mathrm{d}y-by\mathrm{d}x}{|x|+|y|}=\frac{1}{2}\oint\limits_{C^+}ax\mathrm{d}y-by\mathrm{d}x=4(a+b)$。

解法 2：用 Green 公式，

$$\frac{1}{2}\oint\limits_{C^+}ax\mathrm{d}y-by\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\iint\limits_D a\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y-b\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\iint\limits_D(a+b)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\frac{a+b}{2}\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4(a+b)\text{。}$$

（ii）取充分小的正数 ε 使得 $C_\varepsilon=\{(x,y)\,|\,4x^2+y^2=\varepsilon^2\}$ 位于区域 $D=\{(x,y)\,\|\,x|+|y|\le 2\}$ 内。

记 $D_\varepsilon=\{(x,y)\,\|\,x|+|y|\le 2,4x^2+y^2\ge\varepsilon^2\}$。由 Green 公式，

$$\oint\limits_{C^+}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}-\oint\limits_{C_\varepsilon^+}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$$

$$=\iint\limits_{D_\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{4x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{4x^2+y^2}\right)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x$$

$$=\iint\limits_{D_\varepsilon}\left(\frac{1}{4x^2+y^2}-\frac{8x^2}{(4x^2+y^2)^2}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+\left(\frac{1}{4x^2+y^2}-\frac{2y^2}{(4x^2+y^2)^2}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$=0$$

从而

$$\oint\limits_{C^+}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=\oint\limits_{C_\varepsilon^+}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=\oint\limits_{C_\varepsilon^+}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{\varepsilon^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{4x^2+y^2\le\varepsilon^2}2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{u^2+y^2\le\varepsilon^2}\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}y=\pi\text{。}$$

上式中我们再次使用了 Green 公式，并且做了适当换元。

4. 已知函数 $f(x)$ 在整个实轴 $\mathbf{R}$ 上二次连续可微，满足 $f'(0)=0$，且使得一阶微分形式 $[f(x)+y(x-f(x))]\mathrm{d}x+f'(x)\mathrm{d}y$ 是全微分，求 $f(x)$，并使上述一阶微分形式由 $A(0,0)$ 到 $B(\frac{\pi}{2},\pi)$ 逐段光滑曲线 L 上积分的值为 $\frac{\pi^2}{8}$。

解：$[f(x)+y(x-f(x))]\mathrm{d}x+f'(x)\mathrm{d}y=\mathrm{d}g(x,y)$ 当且仅当 $f''(x)=x-f(x)$。

解微分方程得到 $f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+x$，由 $f'(0)=0$ 得到 $C_2=-1$。

此时一阶微分形式

$$\begin{aligned}&[f(x)+y(x-f(x))]\mathrm{d}x+f'(x)\mathrm{d}y\\&=\left[C_1\cos x-\sin x+x+y(-C_1\cos x+\sin x)\right]\mathrm{d}x+\left[-C_1\sin x-\cos x+1\right]\mathrm{d}y\\&=\mathrm{d}\left[C_1\sin x+\cos x+\frac{x^2}{2}+\left(-C_1\sin x-\cos x+1\right)y\right]\end{aligned}$$

再由

$$\frac{\pi^2}{8}=\left[C_1\sin x+\cos x+\frac{x^2}{2}+\left(-C_1\sin x-\cos x+1\right)y\right]_{(0,0)}^{(\frac{\pi}{2},\pi)}=C_1+\frac{\pi^2}{8}+\left(-C_1+1\right)\pi-1$$

解得 $C_1=1$。从而 $f(x)=\cos x-\sin x+x$。

5. 设 $Q(x,y)$ 在全平面上连续可微, 已知曲线积分 $\int_L 2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 与路径无关, 并且对于任意的 t, 有 $\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$. 求函数 $Q(x,y)$.

解： $2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\mathrm{d}(x^2y)+\left[Q(x,y)-x^2\right]\mathrm{d}y$ 是全微分当且仅当 $Q(x,y)=x^2+H'(y)$。

$$\begin{aligned}&\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\left[x^2y+H(y)\right]_{(0,0)}^{(1,t)}=t+H(t)-H(0)\\&=\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\left[x^2y+H(y)\right]_{(0,0)}^{(t,1)}=t^2+H(1)-H(0)\end{aligned}$$

所以 $H(t)=t^2-t+H(1)$。因此 $Q(x,y)=x^2+2y-1$。

6. 已知积分 $\int_L(x+xy\sin x)\mathrm{d}x+\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}y$ 与路径无关， $f(x)$ 为可微函数, 且 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$,

（1） 求 $f(x)$；

（2） 对(1)中求得的 $f(x)$, 求函数 $u=u(x,y)$ 使得 $\mathrm{d}u=(x+xy\sin x)\mathrm{d}x+\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}y$；

（3） 对(1)中求得的 $f(x)$, 求上述积分, 其中积分路径为从 $A(\pi,1)$ 到 $B(2\pi,0)$ 的任意路径.

解： 留作练习。

提示： $\mathrm{d}u=(x+xy\sin x)\mathrm{d}x+\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}y=\mathrm{d}(\frac{x^2}{2}+y\int x\sin x\mathrm{d}x)+\left(\frac{f(x)}{x}-\int x\sin x\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$。

第二型曲面积分

7. 计算第一型曲面积分 $I=\iint\limits_S|z|\mathrm{d}\sigma$, 以及第二型曲面积分 $J=\iint\limits_{S^+}|z|\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$， 其中曲面 S 为球面 $S:x^2+y^2+z^2=a^2$；定向曲面 S^+ 的外侧。

解：取球坐标参数方程 $\begin{cases} x = a\sin\theta\cos\varphi, \\ y = a\sin\theta\sin\varphi, \\ z = a\cos\theta \end{cases}$ 则 $\dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} a\cos\theta\cos\varphi \\ a\cos\theta\sin\varphi \\ -a\sin\theta \end{pmatrix}, \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix} -a\sin\theta\sin\varphi \\ a\sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$

于是 $E = \left\langle \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial\theta}, \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial\theta} \right\rangle = a^2,\quad F = \left\langle \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial\theta}, \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial\varphi} \right\rangle = 0,\quad G = \left\langle \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial\varphi}, \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial\varphi} \right\rangle = a^2\sin^2\theta$，

$$I = \iint_S |z|\,\mathrm{d}\sigma = \iint_{0\le\theta\le\pi, 0\le\varphi\le 2\pi} |a\cos\theta| \sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$
$$= \iint_{0\le\theta\le\pi, 0\le\varphi\le 2\pi} |a\cos\theta|\, a^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$
$$= 2\pi a^3\int_0^{\pi} |\cos\theta| \sin\theta\mathrm{d}\theta = 4\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta = 2\pi a^3$$

考虑第二型曲面积分 J 。

方法 1：

$$J = \iint_{[0,\pi]\times[0,2\pi]} \det\begin{pmatrix} \mathbf{F} & \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial\theta} & \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial\varphi} \end{pmatrix} d\theta\wedge d\varphi$$
$$= \iint_{[0,\pi]\times[0,2\pi]} \begin{vmatrix} 0 & a\cos\theta\cos\varphi & -a\sin\theta\sin\varphi \\ 0 & a\cos\theta\sin\varphi & a\sin\theta\cos\varphi \\ |a\cos\theta| & -a\sin\theta & 0 \end{vmatrix} \mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi$$
$$= 2\pi a^3\int_0^{\pi} |\sin\theta| \sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta = 0$$

方法 2：利用对称性

$$J = \iint_{S^+} |z|\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = \iint_{S_{上半}^{向上}} |z|\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y + \iint_{S_{下半}^{向下}} |z|\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = \iint_{S_{上半}^{向上}} z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y - \iint_{S_{下半}^{向下}} z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

在变换 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$（绕 x 轴旋转 180°）作用下，

$$\iint_{S_{下半}^{向下}} z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = \iint_{S_{上半}^{向上}} (-z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}(-y) = \iint_{S_{上半}^{向上}} z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y，$$

所以 $J = \iint_{S_{上半}^{向上}} z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y - \iint_{S_{下半}^{向下}} z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = 0$ 。

方法 3：利用外微分计算。

代入球坐标参数方程

$$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = \mathrm{d}(a\sin\theta\cos\varphi)\wedge\mathrm{d}(a\sin\theta\sin\varphi)$$
$$= a^2(\cos\theta\cos\varphi\mathrm{d}\theta - \sin\theta\sin\varphi\mathrm{d}\varphi)\wedge(\cos\theta\sin\varphi\mathrm{d}\theta + \sin\theta\cos\varphi\mathrm{d}\varphi)$$
$$= a^2\left[\cos\theta\cos\varphi\sin\theta\cos\varphi\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi - \sin\theta\sin\varphi\cos\theta\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}\theta\right]$$
$$= a^2\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi$$

$$J = \iint_{S^+} |z| dx\wedge dy = \iint_{S^+} |a\sin\theta| a^2\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi = 2\pi a^3\int_0^{\pi} |\sin\theta| \sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta = 0\text{ 。}$$

方法 4：结合物理意义。

$J = \iint_{S^+} |z|\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ 是向量场 $\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ |z| \end{pmatrix}$ 按球面正向产生的通量，所以

$$J=\iint_S \begin{pmatrix}0\\0\\|z|\end{pmatrix}\cdot\frac{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}{a}\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{a}\iint_S |z|\,z\mathrm{d}\sigma=0$$ 。（考虑 $z\to -z$ 时的对称性）

8. 记 S 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2x$ 所截的有限部分。规定曲面 S 的正向向下，所得的定向曲面记为 S^+ 。求下面两个积分的值。

（i）$\iint_S z\mathrm{d}\sigma$ 。 （ii） $\iint_{S^+}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\left(x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\right)$.

解：（i）锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\ \ (x^2+y^2\le 2x)$

柱坐标下，$\begin{cases}x=r\cos\varphi,\\ y=r\sin\varphi,\ (0\le r\le 2\cos\varphi)\\ z=r\end{cases}$

于是 $\dfrac{\partial\mathbf{x}}{\partial r}=\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 1\end{pmatrix}=\dfrac{\mathbf{x}}{r},\quad \dfrac{\partial\mathbf{x}}{\partial\varphi}=\begin{pmatrix}-r\sin\varphi\\ r\cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}$，求得 $E=2$， $F=0$， $G=r^2$ 。

因此

$$\iint_S z\mathrm{d}\sigma=\iint_D r\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi=\iint_D\sqrt{2}r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\sqrt{2}r^2\mathrm{d}r$$

$$=\frac{8\sqrt{2}}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{16\sqrt{2}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{16\sqrt{2}}{3}\left[\sin\varphi-\frac{\sin^3\varphi}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{32\sqrt{2}}{9}$$

（ii） **方法 1**：由于曲面取下侧，所以参数顺序为 (φ,r) 。

$$\iint_{S^+}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\left(x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\right)=\iint_{(\varphi,r):0\le r\le 2\cos\varphi}\det\left(\|\mathbf{x}\|\mathbf{x},\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\varphi},\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial r}\right)\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}r$$

$$=\iint_{(\varphi,r):0\le r\le 2\cos\varphi}\det\left(\|\mathbf{x}\|\mathbf{x},\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\varphi},\frac{\mathbf{x}}{r}\right)\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}r=0$$

（行列式中第 1，3 列线性相关）

方法 2：计算沿锥面时的外微分

$$x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$
$$=x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}\sqrt{x^2+y^2}+y\mathrm{d}\sqrt{x^2+y^2}\wedge\mathrm{d}x+\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$
$$=x\mathrm{d}y\wedge\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}+y\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}\wedge\mathrm{d}x+\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$
$$=\frac{-x^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{-y^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=0$$

方法 3：$z=\sqrt{x^2+y^2}$ （即 $x^2+y^2-z^2=0$ ）的法向量为 $\begin{pmatrix}2x\\2y\\-2z\end{pmatrix}$，向量场 $\mathbf{F}(x,y,z)=\begin{pmatrix}rx\\ry\\rz\end{pmatrix}$ 与法

向量正交，通量为零。

9. 求积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} f(x)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+g(y)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+h(z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$，其中 Σ 为长方体 $[0,a]\times[0,b]\times[0,c]$ 的边界外侧，函数 $f(x)$，$g(y)$ 和 $h(z)$ 均为连续函数。

解：三个向量场 $\mathbf{F}_1=f(x)\mathbf{i}$，$\mathbf{F}_2=g(y)\mathbf{j}$，$\mathbf{F}_3=h(z)\mathbf{k}$ 在长方体边界产生的朝外的通量的和，

因此 $I=bc\left[f(a)-f(0)\right]+ca\left[g(b)-g(0)\right]+ab\left[h(c)-h(0)\right]$。

10. 记 S^+ 为圆柱面 $x^2+y^2=1$ 位于 $0\le z\le 2$ 的部分，外法向为正，计算曲面积分 $I=\iint\limits_{S^+} x(y-z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(x-y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$。

解法1：取柱坐标 $\begin{cases}x=\cos\varphi,\\ y=\sin\varphi,\\ z=z\end{cases}$ 请说明如何确定参数顺序。

$$
\begin{aligned}
I&=\iint\limits_{S^+} x(y-z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(x-y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\
&=\iint\limits_{(\varphi,z):0\le\varphi\le 2\pi,0\le z\le 2}\cos\varphi(\sin\varphi-z)\mathrm{d}\sin\varphi\wedge\mathrm{d}z+(\cos\varphi-\sin\varphi)\mathrm{d}\cos\varphi\wedge\mathrm{d}\sin\varphi\\
&=\iint\limits_{(\varphi,z):0\le\varphi\le 2\pi,0\le z\le 2}\cos^2\varphi(\sin\varphi-z)\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}z\\
&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^2\cos^2\varphi(\sin\varphi-z)\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi(2\sin\varphi-2)\mathrm{d}\varphi=\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}(2\sin\varphi-2)\mathrm{d}\varphi\\
&=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi=-2\pi
\end{aligned}
$$

解法 2：单位外法向量 $\mathbf{n}=\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}$，向量场 $\mathbf{F}=\begin{pmatrix}x(y-z)\\0\\x-y\end{pmatrix}$，$\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}=x^2(y-z)=(1-y^2)(y-z)$。

$$I=\iint\limits_{S^+} x(y-z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(x-y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\iint\limits_{S}(1-y^2)(y-z)\mathrm{d}\sigma$$

绕 z 轴旋转 180°，$y\to -y$，

$$\iint\limits_{S}(1-y^2)(y-z)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{S}(1-y^2)(-z)\mathrm{d}\sigma=-\int_0^{2\pi}1-\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^2 z\mathrm{d}z=-\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\mathrm{d}\varphi\int_0^2 z\mathrm{d}z=-2\pi$$

解法 3： 利用 Gauss 公式，取 Ω 为实心圆柱体 $x^2+y^2\le 1$，$0\le z\le 2$。

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_{S^+} x(y-z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + (x-y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \\
&= \iiint_{\Omega} (y-z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z - \iint_{S_{上}} (x-y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y - \iint_{S_{下}} (x-y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \\
&= -\iiint_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = -2\pi
\end{aligned}
$$

对上述过程中涉及的几个积分结果，请分别做出解释。

11. 计算高斯积分 $I=\oiint_S \dfrac{\cos(\mathbf{r},\mathbf{n})}{\|\mathbf{r}\|^2}\mathrm{d}\sigma$ ，其中 S 为一个不经过原点的光滑封闭曲面，其中 $\mathbf{n}$ 为 S 上点 $\mathbf{r}=(x,y,z)$ 处的单位外法线向量.

解：

$$
I=\oiint_S \frac{\cos(\mathbf{r},\mathbf{n})}{\|\mathbf{r}\|^2}\mathrm{d}\sigma=\oiint_S \frac{\langle\mathbf{r},\mathbf{n}\rangle}{\|\mathbf{r}\|^3}\mathrm{d}\sigma=\oiint_{\partial B(0,r)} \frac{\langle\mathbf{r},\mathbf{n}\rangle}{\|\mathbf{r}\|^3}\mathrm{d}\sigma+\iiint_{\Omega}\mathrm{div}\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z
$$

在球面 $\partial B(0,r)$ 上， $\mathbf{r}=r\mathbf{n}$ ，从而 $\displaystyle\oiint_{\partial B(0,r)} \frac{\langle\mathbf{r},\mathbf{n}\rangle}{\|\mathbf{r}\|^3}\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{r^2}\oiint_{\partial B(0,r)}\langle\mathbf{n},\mathbf{n}\rangle\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{r^2}\oiint_{\partial B(0,r)}\mathrm{d}\sigma=4\pi$ ；

在 Ω 内，

$$
\mathrm{div}\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}=\nabla\cdot\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}=\nabla\frac{1}{\|\mathbf{r}\|^3}\cdot\mathbf{r}+\frac{1}{\|\mathbf{r}\|^3}\nabla\cdot\mathbf{r}=-\frac{3\dfrac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}\cdot\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^4}+\frac{3}{\|\mathbf{r}\|^3}=0\text{ ，}
$$

所以 $\displaystyle\iiint_{\Omega}\mathrm{div}\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$ 。

因此 $I=\displaystyle\oiint_S \frac{\cos(\mathbf{r},\mathbf{n})}{\|\mathbf{r}\|^2}\mathrm{d}\sigma=4\pi$ 。其物理意义在于：由点电荷形成的静电场在包围该电荷的任何曲面上产生的电通量总是相等的。

12. 设 $f:[0,+\infty)\to\mathbf{R}$ 是 $C^{(1)}$ 函数，满足 $f(0)=1$，且对区域 $R^+=\{(x,y,z)\,|\,x>0\}$ 内任何一个光滑有向封闭曲面 S ，都有 $\oiint_S xf(x)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z-xyf(x)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x-\mathrm{e}^{2x}z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=0$ 。求 $f(x)$ 。

解：用 Gauss 公式。

$$
\oiint_S xf(x)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z-xyf(x)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x-\mathrm{e}^{2x}z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\iiint_{\Omega}\left[f(x)+xf'(x)-xf(x)-\mathrm{e}^{2x}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z
$$

于是 $f(x)+xf'(x)-xf(x)-\mathrm{e}^{2x}=0$ 。这是一阶线性常微分方程，用分离变量法解齐次方程，

再用常数变易法解非齐次方程，并结合初始条件 $f(0)=1$，最终解得 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2x}-e^{x}}{x}, x>0;\\ 1, \qquad x=0.\end{cases}$

13. 设 $D\subset\mathbf{R}^2$ 为开集，$u(x,y)$ 为调和函数 $\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,(x,y)\in D\right)$，证明

（ⅰ）$u(x_0,y_0)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{\partial D}\left(u\dfrac{\partial\ln r}{\partial\mathbf{n}}-\ln r\dfrac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\right)\mathrm{d}l$，其中 $(x_0,y_0)\in D$，$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$，$\mathbf{n}$ 为 D 的外法向量；

（ⅱ）$u(x_0,y_0)=\dfrac{1}{2\pi R}\int_{\partial B((x_0,y_0),R)}u(x,y)\mathrm{d}l$，其中 $B((x_0,y_0),R)\subset D$。

证明：通过平移坐标系，不妨设 (x_0,y_0) 是原点。$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\Delta u=\nabla\cdot(\nabla u)$。

（ⅰ）根据散度定理（Green/Gauss）

$$\begin{aligned}\int_{\partial D}\left(u\frac{\partial\ln r}{\partial\mathbf{n}}-\ln r\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\right)\mathrm{d}l&=\int_{\partial D}\left(u\nabla\ln r-\ln r\nabla u\right)\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}l\\&=\int_{\partial B(0,\varepsilon)}\left(u\nabla\ln r-\ln r\nabla u\right)\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}l+\iint_{D_\varepsilon}\mathrm{div}\left(u\nabla\ln r-\ln r\nabla u\right)\mathrm{d}\sigma\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\left(u\nabla\ln r-\ln r\nabla u\right)&=\nabla\cdot\left(u\nabla\ln r-\ln r\nabla u\right)\\&=\nabla u\cdot\nabla\ln r+u\Delta\ln r-\nabla\ln r\cdot\nabla u-\ln r\Delta u\\&=u\Delta\ln r-\ln r\Delta u=0\quad(\Delta\ln r=\Delta u=0)\end{aligned}$$

所以 $\int_{\partial D}\left(u\dfrac{\partial\ln r}{\partial\mathbf{n}}-\ln r\dfrac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\right)\mathrm{d}l=\int_{\partial B(0,\varepsilon)}\left(u\nabla\ln r-\ln r\nabla u\right)\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}l$。

再次使用散度定理，得到

$$\int_{\partial B(0,\varepsilon)}\ln r\nabla u\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}l=\ln\varepsilon\iint_{B(0,\varepsilon)}\Delta u\,\mathrm{d}\sigma=0,$$

所以

$$\begin{aligned}\int_{\partial D}\left(u\frac{\partial\ln r}{\partial\mathbf{n}}-\ln r\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\right)\mathrm{d}l&=\int_{\partial B(0,\varepsilon)}u\nabla\ln r\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}l=\int_{\partial B(0,\varepsilon)}u\frac{\nabla r}{r}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}l=\int_{\partial B(0,\varepsilon)}u\frac{\mathbf{r}}{r^2}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}l\\&=\frac{1}{\varepsilon}\int_{\partial B(0,\varepsilon)}u\mathrm{d}l=\frac{2\pi\varepsilon}{\varepsilon}\left(u(0)+o(1)\right).\end{aligned}$$

让 $\varepsilon\to0$ 得到 $\dfrac{1}{2\pi}\int_{\partial D}\left(u\dfrac{\partial\ln r}{\partial\mathbf{n}}-\ln r\dfrac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\right)\mathrm{d}l=u(0)$。

（ⅱ）在（ⅰ）中我们已经证明 $\dfrac{1}{2\pi R}\int_{\partial B(0,R)}u\mathrm{d}l$ 与 R 无关，所以

$$\frac{1}{2\pi R}\int_{\partial B(0,R)}u\mathrm{d}l=\frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{\partial B(0,\varepsilon)}u\mathrm{d}l\to u(0),\quad\varepsilon\to0。$$

因此 $\dfrac{1}{2\pi R}\int_{\partial B(0,R)}u\mathrm{d}l=u(0)$。

另一证明：

$$\frac{1}{2\pi R}\int_{\partial B(0,R)} u\mathrm{d}l=\frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi} u(R\cos\theta,R\sin\theta)R\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial B(0,1)} u(R\mathbf{r})\mathrm{d}l\text{，}$$

为证明这个积分值与 R 无关，我们对 R 求导：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\left(\frac{1}{2\pi R}\int_{\partial B(0,R)} u\mathrm{d}l\right)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial B(0,1)} u(R\mathbf{r})\mathrm{d}l\right)\\&=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial B(0,1)}\frac{\partial u(R\mathbf{r})}{\partial R}\mathrm{d}l=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial B(0,1)}\nabla u(R\mathbf{r})\cdot\mathbf{r}\mathrm{d}l\quad(\text{积分对参数求导})\\&=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{B(0,1)}\nabla\cdot\big(\nabla u(R\mathbf{r})\big)\mathrm{d}\sigma\quad(\text{散度定理}-\text{Green公式})\end{aligned}$$

因为 $\nabla\cdot\big(\nabla u(R\mathbf{r})\big)=\Delta u(R\mathbf{r})R=0$，所以 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\left(\frac{1}{2\pi R}\int_{\partial B(0,R)} u\mathrm{d}l\right)=0$，

从而 $\frac{1}{2\pi R}\int_{\partial B(0,R)} u\mathrm{d}l=\frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{\partial B(0,\varepsilon)} u\mathrm{d}l\to u(0,0)$，$\varepsilon\to 0$。因此 $\frac{1}{2\pi R}\int_{\partial B(0,R)} u\mathrm{d}l=u(0,0)$。