目录

[一、 平面图 3](#_Toc1338)

[1.1定义 3](#_Toc19714)

[1.2 Jordon曲线 3](#_Toc15602)

[1.2.1 定义 3](#_Toc5494)

[1.2.2 性质 3](#_Toc22625)

[1.2.3 Jordon曲线定理 3](#_Toc6633)

[1.3 基本概念 3](#_Toc10091)

[1.3.1 面、域 3](#_Toc30151)

[1.3.2 延伸概念 3](#_Toc7800)

[1.4 定理 4](#_Toc16325)

[1.4.1 平面握手定理 4](#_Toc17843)

[1.4.2 欧拉公式 4](#_Toc664)

[1.4.3 欧拉公式推广 4](#_Toc31561)

[1.4.4 推论一 4](#_Toc28873)

[1.4.5 推论二 4](#_Toc26758)

[二、 极大平面图 4](#_Toc21447)

[2.1定义 4](#_Toc18697)

[2.2 性质 4](#_Toc30948)

[2.2.1 性质一 4](#_Toc23651)

[2.2.2 性质二 5](#_Toc13026)

[2.2.3 性质三 5](#_Toc24028)

[2.2.4 性质四 5](#_Toc32056)

[2.2.5 性质五 5](#_Toc31541)

[2.3 定理 5](#_Toc30268)

[2.3.1 m、n、r的数量关系 5](#_Toc19100)

[2.3.2 极大原理 5](#_Toc20431)

[2.3.3 最小度 5](#_Toc307)

[2.4 极小非平面图 5](#_Toc4673)

[三、 平面性检测 5](#_Toc30422)

[3.1定义 5](#_Toc11145)

[3.2 定理 6](#_Toc10501)

[3.2.1 子母图性质 6](#_Toc21766)

[3.2.2 重边与闭环 6](#_Toc15894)

[3.3 同胚与边收缩 6](#_Toc27737)

[3.3.1 同胚定义 6](#_Toc21288)

[3.3.2 边收缩定义 6](#_Toc37)

[3.4 库拉图斯基定理 6](#_Toc29285)

[3.4.1 库拉图斯基定理一 6](#_Toc6065)

[3.4.2 库拉图斯基定理二 7](#_Toc15507)

[3.5 判定算法 7](#_Toc13511)

[四、 对偶图 7](#_Toc26639)

[4.1 定义 7](#_Toc18747)

[4.1.1 构造过程 7](#_Toc2203)

[4.1.2 说明 7](#_Toc26114)

[4.1.3 非同构性 8](#_Toc28330)

[4.2 性质 8](#_Toc22474)

[4.2.1 唯一性 8](#_Toc8724)

[4.2.2 连通性 8](#_Toc17766)

[4.2.3 对称性 8](#_Toc23379)

[4.2.4 割集性 8](#_Toc18064)

[4.3 自对偶图 8](#_Toc14265)

[4.3.1 定义 8](#_Toc24018)

[4.3.2 轮图 8](#_Toc2107)

[五、 点着色、色数与色数多项式 8](#_Toc22161)

[5.1 定义 8](#_Toc22478)

[5.2 常见色数 9](#_Toc20620)

[5.3 定理 9](#_Toc28003)

离散第九周

zhaochen20

1. 平面图

平面图就是在图的基础上研究面的性质

1.1定义

1.1.1 可嵌入平面、可平面图

若能把图G画在一个平面上，使任何两条边都不相交，就称G可嵌入平面，或称G是可平面图。

1.1.2平面图

可平面图在平面上的一个嵌入

1.1.3非平面图

没有平面嵌入的图

1.2 Jordon曲线

1.2.1 定义

连续, 自身不相交, 起点和终点相重合一条曲线。

1.2.2 性质

设J是平面上的一条Jordon曲线, 平面的剩下部分被分成两个不相交的开集, 称为J的内部和外部, 分别记为intJ和extJ, 并且用IntJ和ExtJ表示它们的闭包. 显然IntJ∩ExtJ=J。(Jordan曲线同时在内部和外部)

1.2.3 Jordon曲线定理

连接intJ的点和extJ的点的任何连线必在某点和J相交。

1.3 基本概念

1.3.1 面、域

设G是一个平面图，由它的若干边所构成的一个区域，若区域内不含任何结点及边，就称该区域为G的一个面或域;

1.3.2 延伸概念

其面积无限的面称为无限面或外部面;

面积有限的面称为有限面或内部面;

包围这个域的诸边称为该面的边界;

边界的长度称为该面的次数,记为deg(R);

经常退化为边界的条数，且割边会贡献两个deg。

如果两个域有共同的边界，就说它们是相邻的，否则是不相邻的；

如果边e不是割边，则它必为某两个域的公共边界。

注：边界元素可为初级回路、简单回路或复杂回路, 也可是它们的并。

1.4 定理

1.4.1 平面握手定理

平面嵌入图G中所有面的次数之和等于边数m的两倍, 即,i=1.rdeg(Ri) = 2m(其中r为G的面数)。

1.4.2 欧拉公式

对于任意连通平面图G, 有n-m+r = 2。

其中: n, m和r分别为G的顶点数, 边数和面数。

1.4.3 欧拉公式推广

对于具有k个连通分支的平面图G, 有: n-m+r = k+1。

其中: n, m和r分别为G的顶点数, 边数和面数。

1.4.4 推论一

对一般平面图G，恒有n-m+r≥2。

1.4.5 推论二

设简单连通平面图没有割边, 且每个域的边界数至少为t, 则

m≤t(n-2)/(t-2)。

1. 极大平面图

2.1定义

设G为n≥3的简单平面图, 若在G的任意不相邻的结点u, v之间加边(u, v), 所得图为非平面图, 则称G为极大平面图。

2.2 性质

2.2.1 性质一

若简单平面图中已无不相邻顶点，则是极大平面图如K1, K2, K3, K4都是极大平面图。

2.2.2 性质二

极大平面图是连通的。

2.2.3 性质三

简单连通平面图G为极大平面图的充要条件是每个面的次数均为3。

2.2.4 性质四

3r=2m, 其中m为边数，r为面数。

2.2.5 性质五

极大平面图不含有割边。所有的边都是两个面的共同边界。

2.3 定理

2.3.1 m、n、r的数量关系

边数、顶点、面数

设G是n(n≥3)阶m条边的极大平面图, 则m = 3n-6,r=2n-4。

2.3.2 极大原理

设G是n(n≥3))阶m条边的简单连通平面图, 则m≤3n-6,r≤2n-4。

2.3.3 最小度

设G是简单连通平面图, 则G的最小度5。

2.3.4 例题

设G是节点数大于10的简单图，则G与必有一个不是平面图。

设G=<V,E>为n阶无向简单图，以V为顶点集,所有使G成为完全图Kn的添加边组成的集合为边集的图，称为G的补图，记作。

若G, 则称G是自补图。

2.4 极小非平面图

若G是非平面图, 并且任意删除一条边所得图为平面图, 则称G为极小非平面图。

1. 平面性检测

3.1定义

如果图G不能嵌入平面使得任意两边只能在结点处相交，那么G就称为非平面图。

结点数最少的非平面图。

边数最少的非平面图。

3.2 定理

3.2.1 子母图性质

若图G是平面图, 则G的任何子图都是平面图。

Kn()和K1,n(n 1)的所有子图都是平面图。

若G是非平面图, 则G的任何母图也都是非平面图。

(n5)和(n3)都是非平面图。

3.2.2 重边与闭环

设G是平面图, 则在G中加重边或自环后所得图还是平面图。

重边和自环不影响图的平面性, 因而在研究图是否为平面图时, 可不考虑重边和自环。

3.3 同胚与边收缩

3.3.1 同胚定义

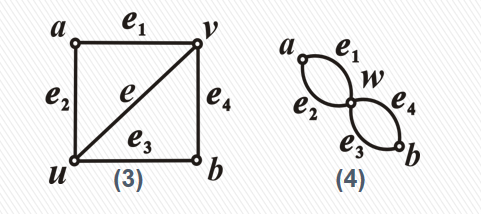
设e=(u, v)为图G的一条边, 在G中删除e, 增加新的顶点w, 使u和v均与w相邻, 称在G中插入2度顶点w。

设w为G中一个2度顶点, w与u和v相邻, 删除w, 增加新边(u, v), 称为在G中消去2度顶点w。

若两个图G1与G2同构, 或通过反复插入或消去2度顶点后是同构的, 则称G1与G2是同胚的。

3.3.2 边收缩定义

设e=(u, v)为图G的一条边, 在G中删除e, 增加新的顶点w, 使w关联除e外的u,v关联的一切边, 称为边e的收缩。



3.4 库拉图斯基定理

3.4.1 库拉图斯基定理一

图G是平面图, 当且仅当G中不含与同胚子图。

3.4.2 库拉图斯基定理二

图G是平面图, 当且仅当G中没有可收缩到的子图。

3.5 判定算法

3.5.1若G是非连通的，则分别检测每一个连通分支。仅当所有的连通分支都是可平面的，G就是可平面的。

3.5.2如果G中存在割点v，这时可将图G从割点处分离，构成若干个不含割点的连通子图，或称块，然后检测每一块。G是可平面的当且仅当每一块都是可平面的。

3.5.3移去自环

3.5.4移去度为2的结点vi及其关联的边，而在它的两个邻点vj,vk之间加入边(vj,vk),原图是可平面的当且仅当新图是可平面的(同胚操作）

3.5.5移去重边

3.5.6 反复运用4、5

3.5.7 最后如下判定

a.若m<9或n<5，则G是可平面图

b.若m>3n-6，则G是非平面图

c.不满足a和b，需要进一步测试

1. 对偶图

4.1 定义

4.1.1 构造过程

设G是平面图的某个平面嵌入, 构造G的对偶图G\*如下:

1) 在G的面fi中放置G\*的顶点vi\*

2) 若e在G的面fi与fj的公共边界上, 做G\*的边e\*(vi\*, vj\*)与e相交, 且e\*不与其它边相交;

3) 若e在面fi之内, 则e\*(vi\*, vi\*)是以顶点vi\*为端点的环，与e相 交 一次。

4.1.2 说明

定义实际上给出求图G的对偶图G\*的方法，它也称为D (drawing)过程。

只有平面图才有对偶图。

4.1.3 非同构性

同构的两个图, 对偶图不一定同构。

4.2 性质

4.2.1 唯一性

如果G是平面图，G一定有对偶图G\*,而且G\*这一拓扑结构是唯一的。

G有对偶图的充要条件是G为平面图。

4.2.2 连通性

G\*是连通图，平面图的边就是路径。

4.2.3 对称性

平面连通图G与其对偶图G\*的结点、边和域之间存在如下对应关系

m=m\*, n=r\*, r=n\*。

设G\*的顶点vi\*位于G的面Ri中, 则dG\*(vi\*)＝deg(Ri)。

4.2.4 割集性

设C是平面图G的一个初级回路，S\*是G\*中与C的各边ei对应的ei\*的集合，则S\*是G\*的一个割集。

4.3 自对偶图

4.3.1 定义

设G\*是平面图G的对偶图, 若G\*G, 则称G为自对偶图。

4.3.2 轮图

在n-1(n 4)边圈内放置一个顶点, 使该顶点与上的所有顶点均相邻。所得n阶简单图称为n阶轮图。其实就像是给一个圈加心。

轮图都是自对偶图。

1. 点着色、色数与色数多项式

5.1 定义

5.1.1给定图G，满足相邻结点着以不同颜色的最少颜色数目称为G的色数，记为γ(G)。

5.1.2若能用k种颜色给G的顶点着色, 则称对G进行了k着色, 也称G是k-可着色的。

5.1.3 G是k-可着色的，相当于把G的顶点分成k个独立集的一个分类(V1, V2, …, Vk)。

5.1.4 G是k-色的G的简单图是k-色的。

5.2 常见色数

5.2.1 γ(G) = 1, 当且仅当G是零图。

5.2.2 γ(Kn) = n。

5.2.3 G= Kn-e, γ(G) = n-1

5.2.4 G是2n个结点的回路， γ(G) = 2

5.2.5 G是2n+1个结点的回路， γ(G) = 3

5.2.6奇阶轮图的色数均为3, 而偶阶轮图的色数为4。

5.2.7设G中至少含一条边, 则γ(G)=2, 当且仅当G为二分图。

5.2.8 G是n(n≥2)个结点的树， γ(G) = 2

5.3 定理

5.3.1 一个非空图G, γ(G)＝2当且仅当它没有奇回路。