**第十三次习题课讨论题参考解答 函数项级数**

1. 求下列函数项级数的敛散区域。

（1） （2） （3）

（4） （5） （6）

**解**：**（1）**发散。



因此收敛收敛。即的收敛域为

**（2）**的分母非零，因此以下分情况讨论。

Case1. 且。此时有四种可能：和。

当时，收敛；

当有而收敛，因此；

当时，有；

当时，收敛。

综上，时，收敛。

Case2. 且。同上，收敛。

Case3. 且发散。这是因为，时，



因此发散。同理，时，发散。

综上所述，收敛且

**（3）**









由正项级数的比值判别法，，从而绝对收敛。

 因此



综上，的收敛域为

**（4）**收敛

任意给定因而

收敛收敛

（5）当时，因为



所以在上（绝对）收敛；当时，发散；当时，收敛（Abel判别法）；当时，发散。

当时，当时，，（绝对）收敛；当 时，发散。

综上，当时，的收敛域为当时，的收敛域为

（6）当时，绝对收敛。

当时，若为负整数，则绝对收敛；当为非整数的有理数，即时，



因此发散；当时，发散。

综上，收敛

1. 求的收敛域,并用两种不同的方法证明该函数项级数在其收敛域上不一致收敛.

**解**：一方面，另一方面，





因此该级数的收敛域为

以下证明该函数项级数在其收敛域上不一致收敛。

**法一**：若在上一致收敛，则其和函数在收敛域上连续,矛盾。

**法二**：



由**Cauchy**准则，在上不一致收敛。

1. 求证：

**证明**：







因此,在上一致收敛到于是有





1. 

**证明**： 只要证







因此



(注意，在上因此不能直接逐项积分得到

)









1. 证明：

**证明**：



由一致收敛函数项级数的逐项可微性以及和函数的连续性，有

1. 求证:

**证明**： 

注意到 因此在上一致收敛到于是有

.

记则





从而

1. 求证：（1） （2）

（提示：利用）

**证明**：记则





于是



（1）注意到于是

.

函数项级数有优级数关于一致收敛，在上可以逐项积分。因此





（2）

函数项级数有优级数关于一致收敛，在上可以逐项积分。因此







