第八章 计算矩阵的特征值和特征向量 (取 $\varepsilon = 10^{-3}$)

保证对应分量同号.

1.(1) 令 $Y^{(0)} = (1, -1)^T$ 则 $X^{(1)} = AY^{(0)} = (8\ \ -4)^T$ $Y^{(1)} = (1\ \ -0.5)^T$

$X^{(2)} = (6.5\ \ -5)^T$ $Y^{(2)} = (1, -0.7692)$ $X^{(3)} = (7.3076\ \ -4.4616)^T$ $Y^{(3)} = (1, -0.6105)^T$

$X^{(4)} = (6.8315\ \ -4.779)^T$ $Y^{(4)} = (1, -0.6996)^T$ $X^{(5)} = (7.0988\ \ -4.6008)^T$ $Y^{(5)} = (1, -0.6481)^T$

$X^{(6)} = (6.9443\ \ -4.7038)^T$ $Y^{(6)} = (1, -0.6774)^T$ $X^{(7)} = (7.0322\ \ -4.6452)^T$ $Y^{(7)} = (1\ -0.6606)^T$

$X^{(8)} = (6.9818\ \ -4.6788)^T$ $Y^{(8)} = (1, -0.6701)^T$ $X^{(9)} = (7.0103\ \ -4.6598)^T$ $Y^{(9)} = (1, -0.6647)^T$

$X^{(10)} = (6.9941, -4.6706)^T$ $Y^{(10)} = (1, -0.6678)^T$ $X^{(11)} = (7.0034\ \ -4.6644)^T$ $Y^{(11)} = (1, -0.6660)^T$

$X^{(12)} = (6.998\ \ -4.668)^T$ $Y^{(12)} = (1\ \ -0.667)^T$ $X^{(13)} = (7.001\ \ -4.666)^T$ $Y^{(13)} = (1, -0.6665)^T$

$X^{(14)} = (6.9995\ \ -4.667)^T$ $Y^{(14)} = (1\ \ -0.6668)^T$ $\left| \|X^{(14)}\|_\infty - \|X^{(13)}\|_\infty \right| = 6\times10^{-4} < 10^{-3}$

故模最大特征值为 6.9995 特征向量为 $(1\ \ -0.6668)^T = Y^{(13)}$

(2) 令 $Y^{(0)} = (1, -1)^T$ 则 $X^{(1)} = AY^{(0)} = (-1\ \ 3)^T$ $Y^{(1)} = (-0.3333\ \ 1)^T$

$X^{(2)} = (1.6667\ \ -0.2332)^T$ $Y^{(2)} = (1\ \ -0.1999)^T$ $X^{(3)} = (0.6002\ \ 3.8001)^T$ $Y^{(3)} = (0.1579\ \ 1)^T$

$X^{(4)} = (2.1579\ \ 1.6316)^T$ $Y^{(4)} = (1\ \ 0.7561)^T$ $X^{(5)} = (2.5122\ \ 4.7561$

令 $Y^{(0)} = (1.1)^T$ 则 $X^{(1)} = AY^{(0)} = (3\ \ 5)^T$ $Y^{(1)} = (0.6\ \ 1)^T$

$X^{(2)} = (2.6\ \ 3.4)^T$ $Y^{(2)} = (0.7647\ \ 1)^T$ $X^{(3)} = (2.7647\ \ 4.0588)^T$ $Y^{(3)} = (0.6812\ \ 1)^T$

$X^{(4)} = (2.6812\ \ 3.7248)^T$ $Y^{(4)} = (0.7198\ \ 1)^T$ $X^{(5)} = (2.7198\ \ 3.8792)^T$ $Y^{(5)} = (0.7011, 1)^T$

$X^{(6)} = (2.7011, 3.8044)^T$ $Y^{(6)} = (0.7100, 1)^T$ $X^{(7)} = (2.71\ .3.84)^T$ $Y^{(7)} = (0.7057\ \ 1)^T$

$X^{(8)} = (2.7057\ \ 3.8228)^T$ $Y^{(8)} = (0.7078\ \ 1)^T$ $X^{(9)} = (2.7078\ \ 3.8312)^T$ $Y^{(9)} = (0.7068\ \ 1)^T$

$X^{(10)} = (2.7068\ \ 3.8272)^T$ $Y^{(10)} = (0.7073\ \ 1)^T$ $X^{(11)} = (2.7073\ \ 3.8292)^T$ $Y^{(11)} = (0.7070\ \ 1)^T$

$X^{(12)} = (2.707\ \ 3.828)^T$ $Y^{(12)} = (0.7072\ 1)^T$ $X^{(13)} = (2.7072\ \ 3.8288)^T$ $Y^{(13)} = (0.7071, 1)^T$

则模最大特征值为 3.8288 特征向量为 $(0.7072\ \ 1)^T = Y^{(12)}$

有问题？

(3) 令 $y^{(0)}=(0.5, 0.5, 1)^T$ $x^{(1)}=Ay^{(0)}=(1\ 0.5\ 1)^T$ $y^{(1)}=(1\ 0.5\ 1)^T$

$x^{(2)}=(-1\ 0.5\ 1)^T$ $x^{(2)}=(-4\ 0.5\ 1)^T$ $x^{(3)}=(7\ 0.5\ 1)^T$ $y^{(3)}=(1\ 0.0714\ 0.1428)^T$

$x^{(4)}=(-3.5714\ 0.0714\ 0.1429)^T$ $y^{(4)}=(-1, 0.020\ 0.04)^T$

$x^{(5)}=(4.12\ 0.02\ 0.04)^T$ $y^{(5)}=(1\ 0.0049\ 0.0097)^T$

$x^{(6)}=(-3.97\ 0.0049\ 0.0097)^T$ $y^{(6)}=(-1, 0.0012, 0.0024)^T$

$x^{(7)}=(4.0072\ 0.0012\ 0.0024)^T$ $y^{(7)}=(1, 0.0003, 0.0006)^T$

$x^{(8)}=(-3.9982\ 0.0003\ 0.0006)^T$ $y^{(8)}=(-1\ 0.0001\ 0.0002)^T$

$x^{(9)}=(4.0006\ 0.0001\ 0.0002)^T$ $y^{(9)}=(1\ 0\ 0)^T$

$x^{(10)}=(-4\ 0\ 0)^T$ $y^{(10)}=(-1\ 0\ 0)^T$ $x^{(11)}=(4\ 0\ 0)^T$ $y^{(11)}=(1\ 0\ 0)^T$

$x^{(12)}=(-4\ 0\ 0)^T$ $y^{(12)}=(-1, 0\ 0)^T$ 则 $x^{(k)}$ 的奇偶序列分别收敛于反号的~~两个向量~~ ± 4

则 模最最大特征值为 $-\|x^{(11)}\|_\infty=-4$ 特征向量为 $y^{(11)}=(1\ 0\ 0)^T$

2(1) $\cancel{A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{5}{14} & -\frac{1}{14} \\ -\frac{1}{14} & \end{pmatrix}}$ $A^{-1}=\begin{pmatrix} -0.5 & 1.5 \\ 1.5 & -3.5 \end{pmatrix}$

~~取 $y^{(0)}=(2\ 1)^T$ $x^{(1)}=(0.25\ 0.25)^T$ $y^{(1)}=(1\ 1)^T$~~

~~$x^{(2)}=(1\ -2)^T$~~

取 $y^{(0)}=(1\ -1)^T$ $x^{(1)}=(-2\ 5)^T$ $y^{(1)}=(-0.4\ 1)^T$

$x^{(2)}=(1.7\ -4.1)^T$ $y^{(2)}=(0.4146\ -1)^T$ $x^{(3)}=(-1.7073\ 4.1219)^T$ $y^{(3)}=(-0.4142\ 1)^T$

$x^{(4)}=(1.7071\ -4.1213)^T$ $y^{(4)}=(0.4142\ -1)^T$ $x^{(5)}=(-1.7071\ 4.1213)^T$ $y^{(5)}=(-0.4142\ 1)^T$

$x^{(6)}=(1.7071\ -4.1213)^T$ $y^{(6)}=(0.4142\ -1)^T$

因为 $x^{(k)}$ 的奇偶序列收敛于反号的两个向量 则 模最大的特征值为 $-\|x^{(6)}\|_\infty=-4.1213$

特征向量为 $(-4.142\ 1)^T=y^{(5)}$

则A的模最小特征值为 $-\frac{1}{4.1213}=0.2426$ 特征向量为 $y^{(5)}$

(2) $B^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -0.5\\ \frac{1}{3} & \frac{5}{6}\end{pmatrix}$ 取 $(-1\ \ 1)=Y^{(0)}$ 则 $X^{(1)}=B^{-1}Y^{(0)}=(-0.5\ \ 0.5)^T$ $Y^{(1)}=(-1\ \ 1)^T$

$X^{(2)}=(-0.5\ \ 0.5)^T$ $Y^{(2)}=(-1\ \ 1)^T$

则 $Y^{(k)}$ 收敛 B^{-1} 模最大特征值为 $\|X^{(k)}\|_\infty=0.5$ 对应特征向量为 $(-1\ \ 1)^T=Y^{(1)}$

则B模最大的特征值为 $\frac{1}{0.5}=2$ 对应向量为 $(-1\ \ 1)^T$

3 (1) 记 $A^{(0)}=A$ 选取 $p=1$ $q=2$. $a_{pq}^{(0)}=a_{12}^{(0)}=1$ 则有 $S=-\frac{a_{pp}^{(0)}-a_{qq}^{(0)}}{2a_{pq}^{(0)}}=-\frac{3-5}{2\times1}=1$

t取为 $t^2+2St-1=0$ 即 $t^2+2t-1=0$ 按模较小根 则 $t=\sqrt{2}-1=0.4142$

得 $\cos\theta=(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}=0.9238$ $\sin\theta=t\cos\theta=0.3826$.

则Givens变换矩阵为 $Q_1=\begin{pmatrix}0.9238 & 0.3826\\ -0.3826 & 0.9238\end{pmatrix}$

$A^{(1)}=Q_1^TA^{(0)}Q_1=\begin{pmatrix}2.5852 & 1.3\times10^{-4}\\ 1.3\times10^{-4} & 5.4131\end{pmatrix}$ 则特征值为 $\lambda_1=2.5852$ $\lambda_2=5.4131$

(3) 记 $A^{(0)}=A$ 选取 $p=2$ $q=3$ 则 $a_{pq}^{(0)}=a_{23}^{(0)}=2$ 则有 $S=-\frac{a_{pp}^{(0)}-a_{qq}^{(0)}}{2a_{pq}^{(0)}}=-\frac{2-3}{2\times2}=0.25$

t取为 $t^2+0.5t-1=0$ 按模最小根则 $t=0.7808$

得 $\cos\theta=(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}=0.7882$ $\sin\theta=t\cos\theta=0.6154$.

则Givens矩阵为 $Q_1=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 0.7882 & 0.6154\\ & -0.6154 & 0.7882\end{pmatrix}$

$A^{(1)}=Q_1^TA^{(0)}Q_1=\begin{pmatrix}1 & -0.7882 & -0.6154\\ -0.7882 & 0.4384 & \cancel{2.5\times10^{-5}}\ 0\\ -0.6154 & 0 & 4.5614\end{pmatrix}$ 选取 $p=1$ $q=2$ 则 $a_{pq}^{(1)}=-0.7882$

$S=-\frac{1-0.4384}{2\times-0.7882}=0.3563$

t为 $t^2+0.7126t-1=0$ 按模较小的根 则 $t=0.7053$.

$\cos\theta=(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}=0.8172$ $\sin\theta=t\cos\theta=0.2912$.

略……

则Givens矩阵为 $Q_2=\begin{pmatrix}0.8172 & 0.2912 & \\ -0.2912 & 0.8172 & \\ & & 1\end{pmatrix}$ 则 $A^{(2)}=Q_2^TA^{(1)}Q_2=\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

6.(1) 复化梯形积分:

$I(f)=h[\frac{1}{2}f(0.6)+\sum_{i=1}^{5}f(x_i)+\frac{1}{2}f(1.8)]=5.5$

(2) 复化Simpson公式

$I(f)=\frac{h}{3}[f(0.6)+f(1.8)+4(f(0.8)+f(1.2)+f(1.6))+2(f(1)+f(1.4))]$

$=5.4667$

7. $I(f)=\frac{2.5-2.1}{6}[f(2.1)+4f$ (有问题 ?.

8: Romberg 积分表如 ~~太长、不想算~~

$R_{1,1}=\frac{1}{2}[f(1)+f(2)]=\frac{\ln 2}{2}=0.34657$

~~$R_{2,1}=0.38370$ $R_{2,2}=0.37$ 0.39608~~

~~$R_{3,1}$~~

$R_{2,1}=0.37602$ $R_{2,2}=0.38584$

$R_{3,1}=0.38370$ $R_{3,2}=0.38626$ $R_{3,3}=0.38629$

$R_{4,1}=0.38564$ $R_{4,2}=0.38629$ $R_{4,3}=0.38629$ $R_{4,4}=0.38629$

$|R_{4,4}-R_{3,3}|=0<10^{-4}$ 故 $\int_1^2 \ln x\,dx=0.38629$

9.(1) $h=\frac{1}{2}$ $k=\frac{1}{2}$ $f(x,y)$ 如下表所示

x \ y	-1	-0.5	0	0.5	1
-1	1	0.5	0	-0.5	-1
-0.5	0.5	0.25	0	-0.25	-0.5
0	0	0	0	0	0
0.5	-0.5	-0.25	0	0.25	0.5
1	-1	-0.5	0	0.5	1

则 $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}xy\,dx\,dy$

$=hk\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}c_{ij}f(x_i,y_j)$

$=0$