

Câu 1. (2,5 điểm)

Trên \mathbb{R}^6 cho tập hợp $W = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \left| \begin{array}{l} 2x_4 + 3x_6 - x_5 + x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 - 2x_6 - 5x_4 + 2x_2 - x_1 = 0 \\ 2x_3 - x_6 + 4x_5 + x_4 + x_1 = 0 \end{array} \right. \right\}$

a/ Chứng minh rằng W là không gian véc tơ con của \mathbb{R}^6 .

b/ Hãy tìm hệ sinh, cơ sở và xác định số chiều cho W .

Câu 2. (3,0 điểm)

Trên \mathbb{R}^3 cho tập hợp $S = \{u_1 = (-1, -1, 1), u_2 = (4, 3, -1), u_3 = (-3, -2, 1)\}$ và

tập hợp $S' = \{v_1 = (2, 1, -3), v_2 = (7, 4, -9), v_3 = (-8, -5, 8)\}$.

a/ Chứng tỏ rằng S và S' là cơ sở của \mathbb{R}^3 .

b/ Cho vector $\alpha = (-22, -17, 9) \in \mathbb{R}^3$. Hãy tìm tọa độ của α theo cơ sở S .

c/ Gọi $\beta_0 = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ là cơ sở chính tắc của \mathbb{R}^3 .

Hãy tìm các ma trận chuyển cơ sở:

$$P = P_{\beta_0 \rightarrow S}; Q = P_{\beta_0 \rightarrow S'}; \text{ và } T = P_{S \rightarrow S'}.$$

Câu 3. (2,0 điểm)

Cho ma trận thực $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.

Hãy chéo hóa A , rồi sau đó tìm A^m , với mọi m nguyên; $m \geq 0$.

Câu 4. (1,0 điểm)

Trên không gian Euclide $Eu = (V = \mathbb{R}^3, \langle \cdot | \cdot \rangle)$,

$$\text{với } \langle \alpha | \beta \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

là một tích vô hướng tiêu chuẩn trên \mathbb{R}^3 .

Hãy trực chuẩn hóa tập hợp $S = \{u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (-1, 1, 0), u_3 = (1, 2, 1)\}$.

Câu 5. (1,5 điểm)

Cho dạng toàn phương $f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

và $\beta_0 = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ là cơ sở chính tắc của \mathbb{R}^3 sao cho:

$$\forall X \in \mathbb{R}^3, \text{ ta có } [X]_{\beta_0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \text{ và } f(X) \equiv f(X, X) = 4x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2 - 6x_2x_3 - 13x_3^2.$$

a/ Hãy chính tắc hóa dạng toàn phương f .

b/ Chỉ ra một cơ sở β ứng với dạng chính tắc hóa này.

Hết

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

Trưởng BM Toán - Lý

CAO THANH BÌNH