Teoria da Computação
Tese de Church Turing

Leonardo Takuno
{leonardo.takuno@gmail.com}

Centro Universitário Senac

Sumário

Sumário

Apresentação

- Capítulo 3
    - Tese de Church-Turing
    - Máquinas de Turing

Até agora ...

- Linguagens formais e autômatos
  - Autômatos Finitos
    - Desvantagem: não tem memória.
  - Autômato de Pilha
    - Desvantagem: pilha é muito restrita.
- Algumas tarefas muito simples estão muito além das capacidades desses modelos.
- Portanto, eles são demasiado restritos para servir como modelos de computadores de propósito geral.

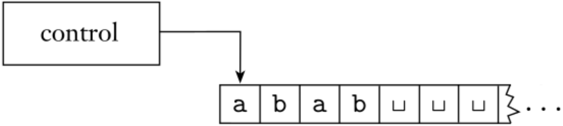
Sumário

Máquina de Turing

- Em 1936, Alan Turing introduziu um modelo abstrato para computação no seu artigo "*On Computable Numbers, with an application to Entscheidungsproblem*"
- Nessa mesma época, Alonzo Church publicou idéias e resultados similares (Cálculo lambda).
- Entretanto, o modelo de Turing tornou-se o modelo teórico padrão para a Ciência da Computação.

Máquina de Turing

Uma máquina de Turing é estruturalmente similar a um autômato finito, mas com uma fita ilimitada como memória.



Máquina de Turing

A seguinte lista resume as diferenças entre autômatos finitos e máquinas de Turing

1. Uma máquina de Turing pode tanto escrever sobre a fita quanto ler a partir dela.
2. A cabeça de leitura-escrita pode mover-se tanto para a esquerda quanto para a direita.
3. A fita é infinita.
4. Os estados especiais para rejeitar e aceitar fazem efeito imediatamente.

Máquina de Turing

Construir um máquina de Turing M_1, que testa se uma string é uma membro da linguagem $B = \{w\#w | w \in \{0,1\}^*\}$. Isto é, se alguma string $w \in B$ então aceite senão rejeite. Assuma que w é carregado na fita antes de executar a máquina; a cadeia de entrada parecerá como : $w = 101\#101$

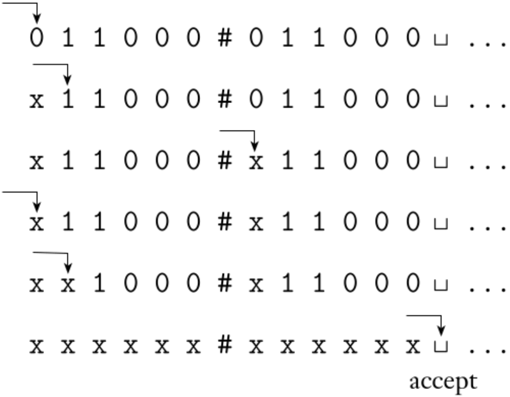
$$101\#101\sqcup$$

Máquina de Turing

M_1 "sobre a cadeia de entrada w

1. Faça um zigue-zague ao longo da fita checando posições correspondentes de ambos os lados do símbolo # para verificar se elas contêm o mesmo símbolo. Se elas não contêm, ou se nenhum # for encontrado, *rejeite*. Marque os símbolos à medida que eles são verificados para manter registro de quais símbolos têm correspondência.
2. Quando todos os símbolos à esquerda do # tiverem sido marcados, verifique a existência de algum símbolo remanescente à direita do #. Se resta algum símbolo, *rejeite*; caso contrário, *aceite*."

Máquina de Turing



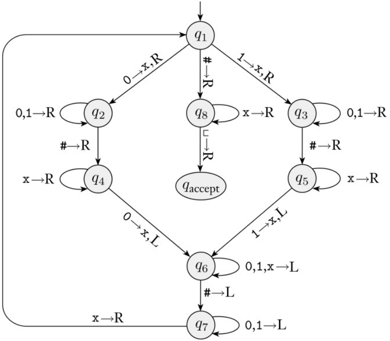
Definição Formal

Uma **máquina de Turing** é uma 7-upla $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{aceita}, q_{rejeita})$, onde Q, Σ, Γ, são todos conjuntos finitos e

1. Q é o conjunto de estados
2. Σ é o alfabeto de entrada não contém o simbolo em branco $\sqcup$
3. Γ é o alfabeto da fita, onde $\sqcup \in \Gamma$, e $\Sigma \subseteq \Gamma$
4. $\delta : Q \times \Gamma \longrightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ é a função de transição
5. $q_0 \in Q$ é o estado inicial.
6. $q_{aceita} \in Q$ é o estado de aceitação, e
7. $q_{rejeita} \in Q$ é o estado de rejeição, onde $q_{rejeita} \neq q_{aceita}$

Máquina de Turing

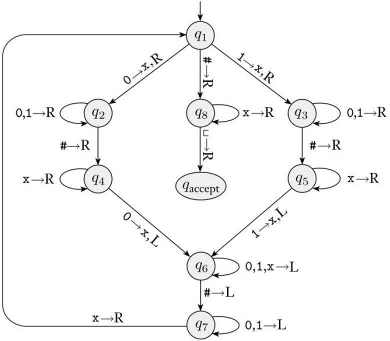
$L(M1) = \{w\#w | w \in \{0,1\}^*\}$



Nota: Transições para o estado q_{reject} são implícitos sobre o símbolo que não aparecem nos estados.

Exercício 1

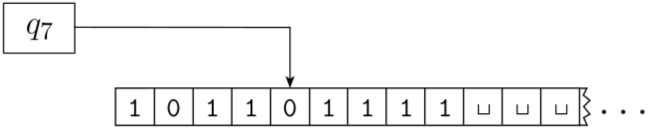
$L(M1) = \{w\#w | w \in \{0,1\}^*\}$



Identifique as componentes da definição da Máquina de Turing no grafo orientado acima.

Configurações

- O estado corrente, o conteúdo corrente da fita, e a localização da cabeça de leitura é chamado de **configuração**.



configuração: $1011q_7 01111$

Configurações

- Sejam $u, v \in \Gamma^*$; $a, b, c \in \Gamma$; $q_i, q_j \in Q$ e M uma máquina de Turing com função de transição δ.
  - Dizemos que a configuração "uaq_ibv" produz a configuração "$uacq_jv$" se:

$$\delta(q_i, b) = (q_j, c, R)$$

  - Similarmente, "uaq_ibv" produz a configuração "uq_jacv" se:

$$\delta(q_i, b) = (q_j, c, L)$$

Configurações

- **configuração inicial :** A MT está no estado q_0 com a cabeça de leitura situado na posição mais a direita da cadeia w: "$q_0 w$"
- **configuração de parada :** um estado na qual a máquina está ou em estado de aceitação (**configuração de aceitação**) ou no estado de rejeição (**configuração de rejeição**):
  - configuração de aceitação: "$uq_{accept}v$"
  - configuração de rejeição: "$uq_{reject}v$"

Configurações

- Uma máquina de Turing M aceita ou reconhece a entrada $w \in \Sigma^*$, se, e somente se, há uma seqüência finita de configurações $C_1, C_2, ..., C_k$ com
  - C_1 a configuração inicial: "$q_0 w$";
  - para $i = 1, ..., k-1$ C_i produz C_{i+1};
  - C_k é uma configuração de aceitação "$u q_{accept} v$".
- A linguagem que consiste de todas as entradas que são aceitas por M é denotada por $L(M)$.

Sumário

MT e Linguagem

Definição: Chame uma linguagem de **Turing-reconhecível**, se alguma máquina de Turing a reconhece.

- Um linguagem Turing-reconhecível muitas vezes é chamada de **linguagem recursivamente enumerável**.
- Se $w \notin L$, a máquina pode parar em um estado de rejeição, ou pode entrar em loop indefinidamente.
- Como distinguir entre um tempo de computação muito longa e um processamento que nunca pára?

Sumário

MT e Linguagem

O problema com MT que reconhecem uma linguagem é que elas podem entrar em loop para alguma entrada.
Queremos uma máquina que sempre pára. Chamamos tais máquinas de decisores.

Definição: Chame uma linguagem de **Turing-decidível** ou simplesmente decidível se alguma máquina de Turing a decide.

Decisores responderão se uma string pertence a linguagem ou não à linguagem.
NOTE: Toda linguagem decidível é Turing-reconhecível.
Um linguagem decidível é muitas vezes chamada de **linguagem recursiva**.

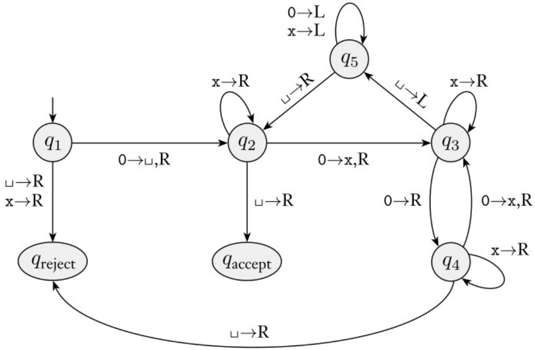
$A = \{0^{2^n} | n \geq 0\}$

A linguagem consistindo em todas as cadeia de 0s cujo comprimento é uma potência de 2.

$M_2 =$ "Sobre a cadeia de entrada w:

1. Faça uma varredura da esquerda para a direita na fita, marcando um 0 não, e outro, sim.
2. Se no estágio 1, a fita continha um único 0, aceite.
3. Se no estágio 1, a fita continha mais que um único 0 e o número de 0s era ímpar, rejeite
4. Retorne a cabeça para a extremidade esquerda da fita.
5. Vá para o estágio 1.

$$A = \{0^{2^n} | n \geq 0\}$$


0→L
x→L
q_5
x→R
␣→R
␣→L
x→R
q_1
q_2
q_3
0→␣,R
0→x,R
␣→R
x→R
␣→R
0→R
0→x,R
q_{reject}
q_{accept}
q_4
x→R
␣→R

configurações

$A = \{0^{2^n} | n \geq 0\}$

$q_1 0000$	$\sqcup q_5 \mathrm{x} 0 \mathrm{x} \sqcup$	$\sqcup \mathrm{x} q_5 \mathrm{xx} \sqcup$
$\sqcup q_2 000$	$q_5 \sqcup \mathrm{x} 0 \mathrm{x} \sqcup$	$\sqcup q_5 \mathrm{xxx} \sqcup$
$\sqcup \mathrm{x} q_3 00$	$\sqcup q_2 \mathrm{x} 0 \mathrm{x} \sqcup$	$q_5 \sqcup \mathrm{xxx} \sqcup$
$\sqcup \mathrm{x} 0 q_4 0$	$\sqcup \mathrm{x} q_2 0 \mathrm{x} \sqcup$	$\sqcup q_2 \mathrm{xxx} \sqcup$
$\sqcup \mathrm{x} 0 \mathrm{x} q_3 \sqcup$	$\sqcup \mathrm{xx} q_3 \mathrm{x} \sqcup$	$\sqcup \mathrm{x} q_2 \mathrm{xx} \sqcup$
$\sqcup \mathrm{x} 0 q_5 \mathrm{x} \sqcup$	$\sqcup \mathrm{xxx} q_3 \sqcup$	$\sqcup \mathrm{xx} q_2 \mathrm{x} \sqcup$
$\sqcup \mathrm{x} q_5 0 \mathrm{x} \sqcup$	$\sqcup \mathrm{xx} q_5 \mathrm{x} \sqcup$	$\sqcup \mathrm{xxx} q_2 \sqcup$
		$\sqcup \mathrm{xxx} \sqcup q_{\mathrm{aceita}}$

Exercício 2

a) Obtenha as componentes da definição da Máquina de Turing M_2.

b) Dê a sequência de configurações de M_2 sobre a cadeia 000.

Sumário

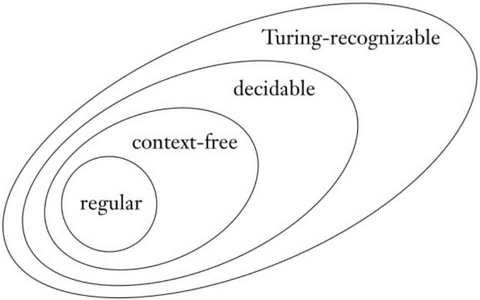
Tese de Church-Turing

Por que estudar máquinas de Turing?

Noção intuitiva de algoritmos
igual
Algoritmos de máquinas de Turing

Esta equivalência não pode ser provada, até agora nenhum algoritmo foi encontrado que não pudesse ser implementado em uma máquina de Turing.

Hierarquia de Linguagem



Sumário

Exercícios

3) Construa a Máquina de Turing para a linguagem $L = 01^*0$. Apresente a descrição em algoritmo, o diagrama de máquina de Turing e a descrição formal.
4) Construa a Máquina de Turing para a linguagem $L = 0^n1^n$. Apresente a descrição em algoritmo, o diagrama de máquina de Turing e a descrição formal.