Fontes principais

1. Cormem T. H.; Leiserson C. E.; Rivest R.: Stein C.. *Introduction to Algorithms*, 3^a edição, MIT Press, 2009

2. Análise de algoritmo - IME/USP (prof. Paulo Feofiloff)
   `http://www.ime.usp.br/~pf/analise_de_algoritmos`

Backtracking

algoritmos de enumeração

Backtracking

É um refinamento da técnica de força bruta.

Considera uma série de tomadas de decisões entre várias opções.

Algumas consequências de decisões podem conduzir a uma solução do problema.

Backtracking

Ideia geral:

(1) Soluções representadas por n tuplas ou vetores de solução $(s_1, s_2, \cdots, s_n)$ de maneira que cada s_i é escolhido a partir de um conjunto finito de opções v_i;

(2) Inicia um vetor vazio;

Backtracking

(3) Em cada nova etapa do vetor é extendido com um novo valor;

(4) O novo valor deve ser avaliado: se não for solução parcial, então o último valor do vetor é eliminado e outro candidato é considerado.

Note que em (4) pode ou não ocorrer retrocesso (backtracking).

Backtracking

Restrições

- Restrições explícitas:

  Correspondem às regras que restringem cada s_i em tomar valores de um determinado conjunto (relacionado ao problema e escolhas possíveis).

- Restrições implícitas:

  Determinam como os s_i's se relacionam entre si.

Algoritmo de backtracking genérico

```
backtrack(s[1 .. k])
1   ▷ s é um vetor promissor de tamanho k
2   se s é a solução então
3       escreva(s)
4   senão
5       para cada vetor promissor w de tamanho k + 1 faça
6           backtracking(w[1 .. k + 1])
7       ▷ w[1 .. k] = s[1 .. k]
```

Sequências

Sequências

Suponha o seguinte problema:

Gerar todas as sequências possíveis de 3 dígitos com os dígitos 1,2 e 3 armazenados no vetor $v[0 \cdots n-1]$, onde $n = 3$

Solução: 111, 112, 113, 121, 122, 123, 131, 132, 133, 211, 212, 213, 221, 222, 223, 231, 232, 233, 311, 312, 313, 321, 322, 323, 331, 332, 333

A quantidade é de $3^3 = 27$ sequências.

Sequências

algoritmo mostra_sequencias(s, i, v, n)

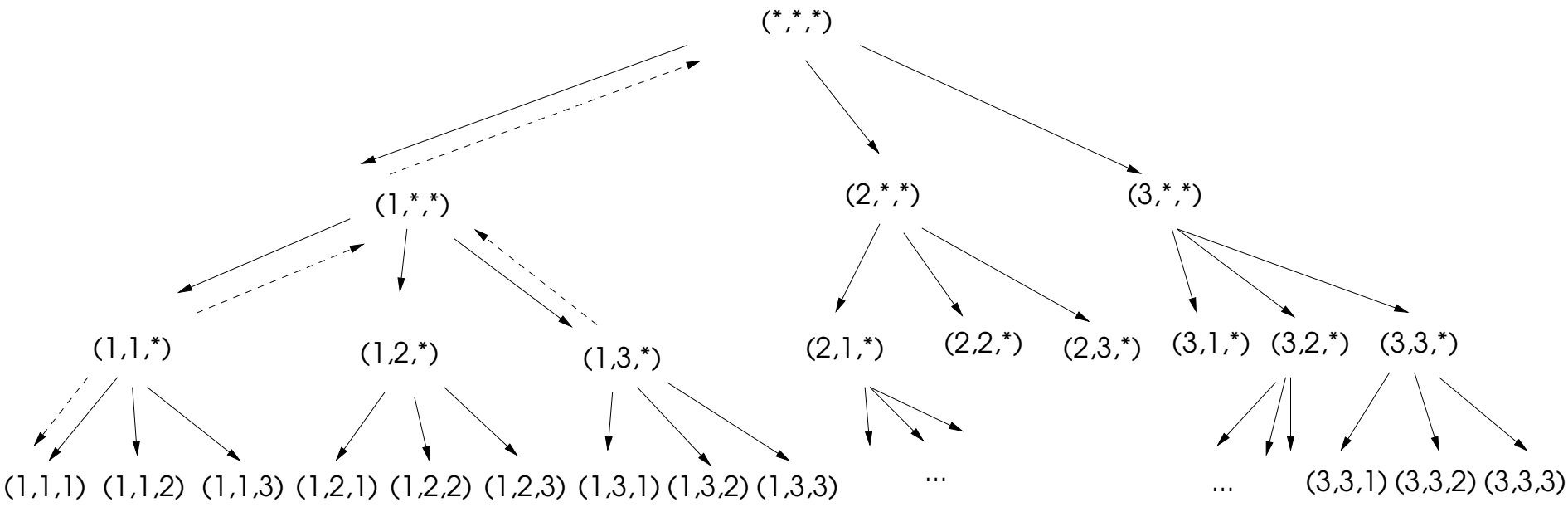
entrada: vetor solução: $s[0 \cdot \cdot n-1]$
inteiro $i = 0$ que controla a profundidade da recursão,
vetor de entrada: $v[0 \cdot \cdot n-1]$
inteiro n o tamanho do vetor v

saída: apresenta todas as sequências de n elemntos de v

Sequências

```
mostra_sequencias(s, i, v, n)
1  se i = n então
2      escreva(s, n)
3  senão
4      para j = 0 até n − 1 faça
5          s[i] = v[j]
6          mostra_sequencias(s, i + 1, v, n)
```

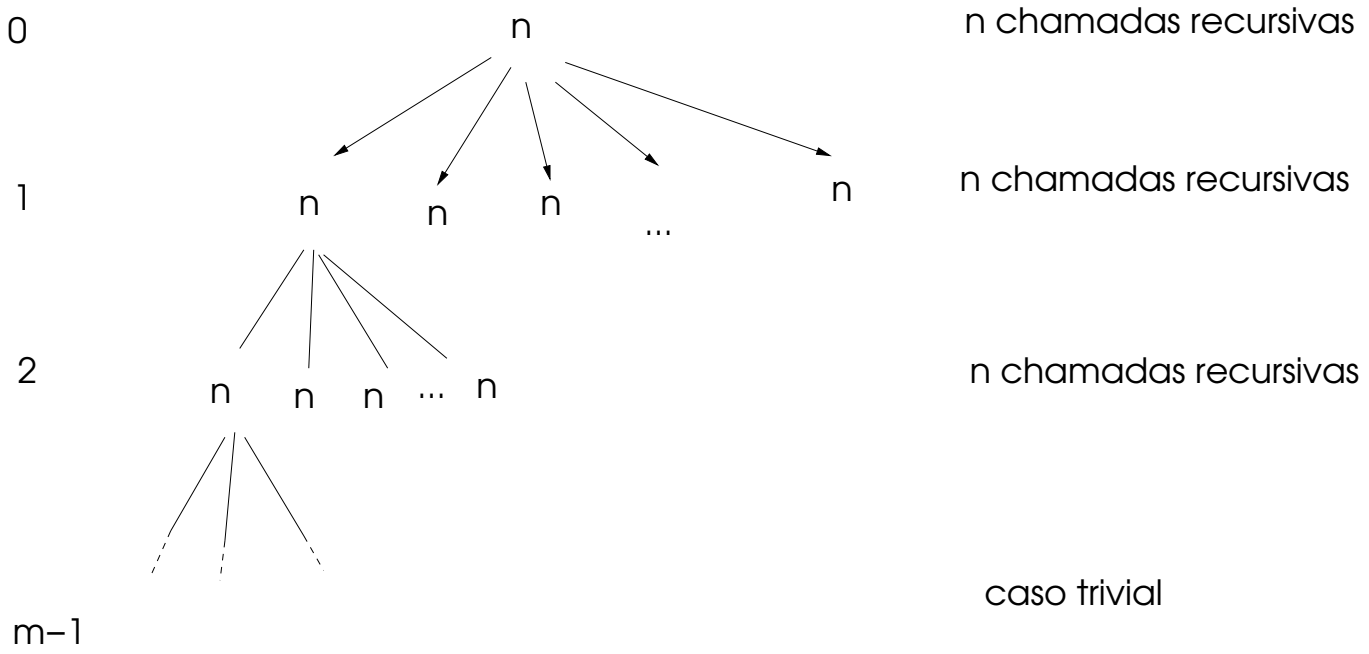
Sequências


(*,*,*)
(1,*,*)
(2,*,*)
(3,*,*)
(1,1,*)
(1,2,*)
(1,3,*)
(2,1,*)
(2,2,*)
(2,3,*)
(3,1,*)
(3,2,*)
(3,3,*)
(1,1,1)
(1,1,2)
(1,1,3)
(1,2,1)
(1,2,2)
(1,2,3)
(1,3,1)
(1,3,2)
(1,3,3)
...
...
(3,3,1)
(3,3,2)
(3,3,3)

Sequências

Suponha que agora queremos gerar todas as combinações de tamanho 3 utilizando os dígitos $v = \{1, 2, 3, 4\}$. Nesta caso, temos que definir $s[0 \cdot\cdot m-1]$, com $m = 3$, e o vetor $v[0 \cdot\cdot n-1]$, com $n = 4$.

Sequências



Complexidade do algoritmo: $O(n^m)$

Permutações

Permutações

Uma permutação da sequência $1 \cdot \cdot n$ é qualquer rearranjo dos termos dessa sequência. Em outras palavras, uma permutação da sequência $1 \cdot \cdot n$ troca os elementos de lugar gerando uma nova sequência com estes mesmos elementos.

Permutações - Exemplo

Dado uma vetor v, escreva um programa que imprima todas as permutações. Se v tem n elementos, então o programa deve imprimir $n!$ permutações.

entrada: $v = \{1, 2, 3\}$
saída: $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 3, 2\}$, $\{2, 1, 3\}$,
$\{2, 3, 1\}$, $\{3, 1, 2\}$, $\{3, 2, 1\}$.

Permutações

algoritmo permuta(s, i, v, n, x)

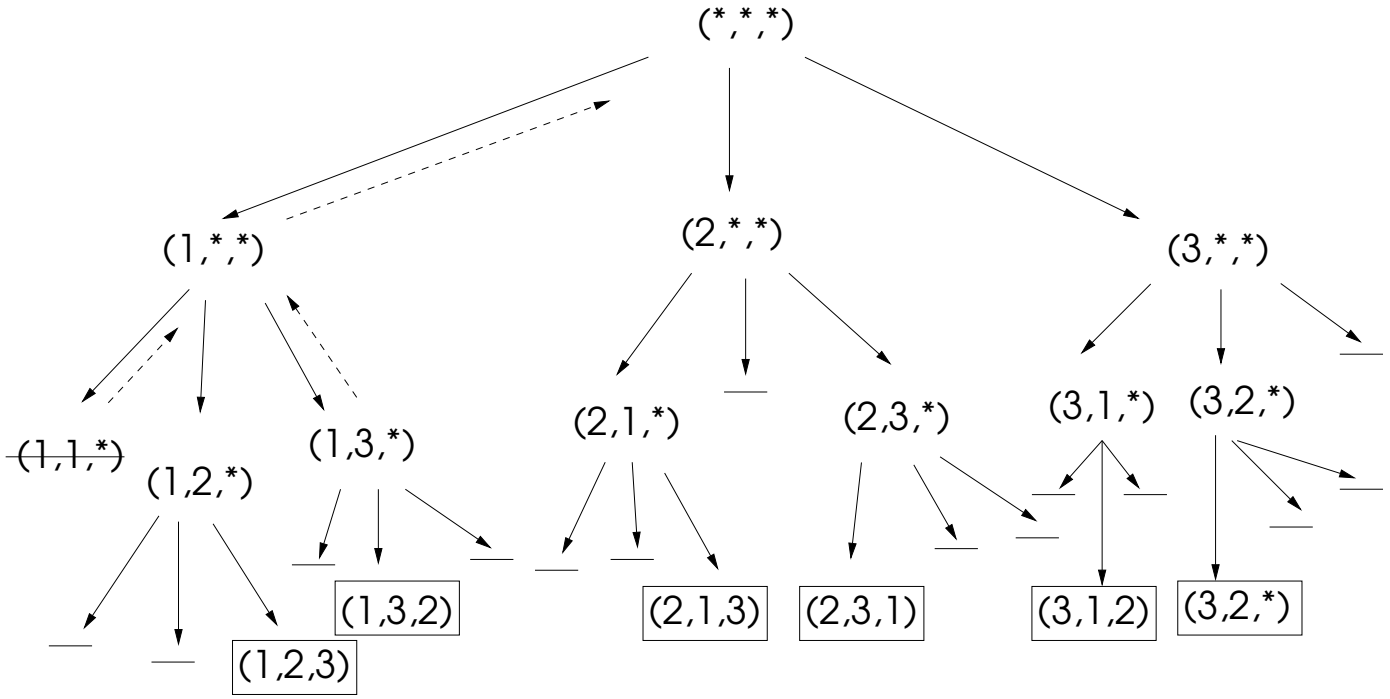
entrada: vetor solução: $s[0 \cdot\cdot n-1]$
inteiro $i = 0$ que controla a profundidade da recursão,
vetor de entrada: $v[0 \cdot\cdot n-1]$
inteiro n o tamanho do vetor a
vetor de marcação: $x[0 \cdot\cdot n-1]$ marca os elementos que já foram inseridos no conjunto solução.

saída: apresenta a permutação dos elementos do vetor v

Permutações

```
permuta(s, i, v, n, x)
 1  se i = n então
 2      escreva(s, n)
 3  senão
 4      para j = 0 até n − 1 faça
 5          ▷ verifica se a solução é promissora
 6          se x[j] == 0 então
 7              x[j] = 1 ▷ inclui na solução
 8              s[i] = v[j]
 9              permuta(s, i + 1, v, n, x)
10              x[j] = 0
```

Permutações



Permutações

Restrições explícitas: O conjunto solução s tem uma permutação ao chegar ao caso base.

Restrições implícitas: Na permutação não há repetição de elementos.

Sudoku

Sudoku

É um jogo (quebra-cabeça) com foco no posicionamento de números inteiros.

Cada coluna, linha e região só deve ter um único valor de $\{1, 2, \cdots, n\}$.

O problema presente no Sudoku é NP-Completo.

Sudoku simples

Tomemos $n = 4$

	2	4	
1			3
4			2
	1	3	

Solução:

- 4-upla (v_1, v_2, v_3, v_4) em que cada v_i é uma linha.
- Restrição explícita:
  $S_i = \{1, 2, 3, 4\}$, $1 \leq i \leq 4$
- Restrição implícita:
  Um número pode aparecer apenas uma vez em cada linha e coluna.

Sudoku simples

$n = 4$

	2	4	
1			3
4			2
	1	3	

Vamos construir a solução posição por posição.

Sudoku simples

$n = 4$

1	2	4	
1			3
4			2
	1	3	

Tente colocar o número 1 no primeiro espaço vazio.

Sudoku simples

$n = 4$

1	2	4	
1			3
4			2
	1	3	

Não é possível! O 1 já se encontra na coluna.

Sudoku simples

$n = 4$

2	2	4	
1			3
4			2
	1	3	

Tente o número 2.

Sudoku simples

$n = 4$

2	2	4	
1			3
4			2
	1	3	

Não é possível! O 2 já se encontra na linha.

Sudoku simples

$n = 4$

3	2	4	
1			3
4			2
	1	3	

Tente o número 3.

Sudoku simples

$n = 4$

3	2	4	
1			3
4			2
	1	3	

Esta é uma solução parcial promissora! Agora tentaremos preencher a próxima posição vazia.

Sudoku simples

$n = 4$

3	2	4	1
1			3
4			2
	1	3	

Comece pelo 1.

Sudoku simples

$n = 4$

3	2	4	1
1			3
4			2
	1	3	

Esta é uma solução parcial promissora! Agora tentaremos preencher a próxima posição vazia.

Sudoku simples

$n = 4$

3	2	4	1
1	1		3
4			2
	1	3	

Comece pelo 1.

Sudoku simples

$n = 4$

3	2	4	1
1	1		3
4			2
	1	3	

Não é possível! Pois já existe o número 1 na linha. Agora, tente o número 2.

Sudoku simples

$n = 4$

3	2	4	1
1	2		3
4			2
	1	3	

Não é possível! Pois já existe o número 2 na coluna. Agora, tente o número 3.

Sudoku simples

$n = 4$

3	2	4	1
1	3		3
4			2
	1	3	

Não é possível! Pois já existe o número 3 na linha. Agora, tente o número 4.

Sudoku simples

$n = 4$

3	2	4	1
1	4		3
4			2
	1	3	

Esta é uma solução parcial promissora! Agora tentaremos preencher a próxima posição vazia.

Sudoku simples

$n = 4$

3	2	4	1
1	4	1	3
4			2
	1	3	

Comece pelo 1.

Sudoku simples

$n = 4$

3	2	4	1
1	4	1	3
4			2
	1	3	

Não é possível! Pois já existe o número 1 na linha. Agora, tente o número 2.

Sudoku simples

$n = 4$

3	2	4	1
1	4	2	3
4			2
	1	3	

Esta é uma solução parcial promissora! Agora tentaremos preencher a próxima posição vazia.

Sudoku simples

$n = 4$

3	2	4	1
1	4	2	3
4	1		2
	1	3	

Comece pelo 1.

Sudoku simples

$n = 4$

3	2	4	1
1	4	2	3
4	1		2
	1	3	

Não é possível! Pois já existe o número 1 na coluna. Agora, tente o número 2.

Sudoku simples

$n = 4$

3	2	4	1
1	4	2	3
4	2		2
	1	3	

Não é possível! Pois já existe o número 2 na linha. Agora, tente o número 3.

Sudoku simples

$n = 4$

3	2	4	1
1	4	2	3
4	3		2
	1	3	

Esta é uma solução parcial promissora! Agora tentaremos preencher a próxima posição vazia.

Sudoku simples

$n = 4$

3	2	4	1
1	4	2	3
4	3	1	2
	1	3	

Comece pelo 1.

Sudoku simples

$n = 4$

3	2	4	1
1	4	2	3
4	3	1	2
	1	3	

Esta é uma solução parcial promissora! Agora tentaremos preencher a próxima posição vazia.

Sudoku simples

$n = 4$

3	2	4	1
1	4	2	3
4	3	1	2
1	1	3	

Comece pelo 1.

Sudoku simples

$n = 4$

3	2	4	1
1	4	2	3
4	3	1	2
1	1	3	

Não é possível! Pois já existe o número 1 na linha e na coluna.
Agora, tente o número 2.

Sudoku simples

$n = 4$

3	2	4	1
1	4	2	3
4	3	1	2
2	1	3	

Esta é uma solução parcial promissora! Agora tentaremos preencher a próxima posição vazia.

Sudoku simples

$n = 4$

3	2	4	1
1	4	2	3
4	3	1	2
2	1	3	4

Só é possível colocar o número 4.

Sudoku simples

```
void sudoku(int m[4][4], int linha, int coluna) {
  if (coluna == 4){  linha = linha + 1;  coluna = 0; }
  if (linha == 4) mostra_matriz(m);
  else if (m[linha][coluna] > 0) sudoku(m, linha, coluna + 1);
       else {
         for (int i = 1; i <= 4; i++){
             if (valor_valido(i, m, linha, coluna)){
               m[linha][coluna] = i;
               sudoku(m, linha, coluna + 1);
               m[linha][coluna] = 0
             }
          }
       }
} // fim
```

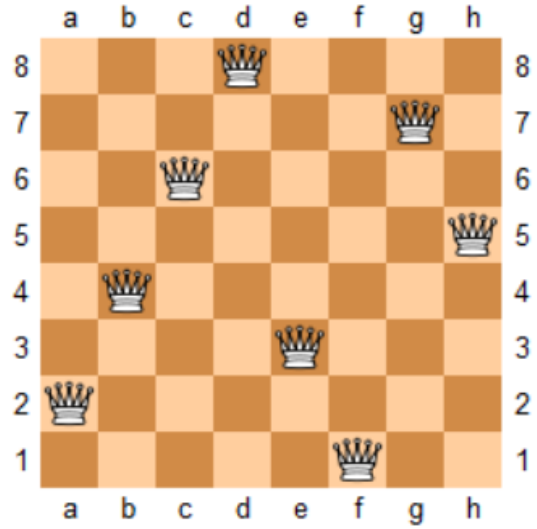
Sudoku simples

```
int valor_valido(int valor, int m[4][4], int linha, int coluna) {
   for (int i = 0; i < 4; i++) {
      if (m[linha][i] == valor || m[i][coluna] == valor)
            return 0;
   }
   return 1;
}
```

Oito rainhas

Oito rainhas

Oito rainhas devem ser dispostas num tabuleiro de xadrez de tal modo que nenhuma delas seja atacada por outra.



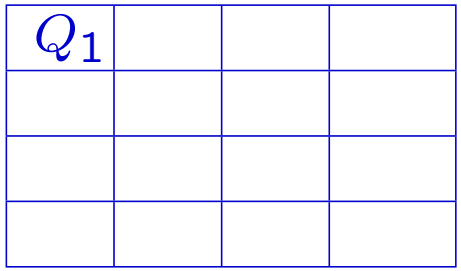
Oito rainhas

Utilizamos a técnica de backtracking, que consiste em, a cada passo, caso a solução parcial encontrada seja inválida, voltar ao passo anterior, reformulando-o.

Oito rainhas

```
posiciona_rainha(tabuleiro, coluna)
1       se coluna == N então mostra_matriz(tabuleiro)
2       senão
3           para i = 0 até N faça
4               se "rainha está salva"então
5                   tabuleiro[i][coluna] =' Q'
6                   posiciona_rainha(tabuleiro, i + 1)
7                   tabuleiro[i][coluna] =' −'
```

Simulação com quatro rainhas



Selecione uma posição. A rainha Q_1 está salva.

Agora vamos tentar incluir mais uma rainha.

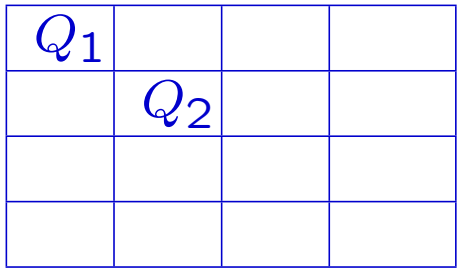
Simulação com quatro rainhas

Q_1	Q_2		

Selecione uma posição. A rainha Q_2 não está salva.

Procure outra posição para Q_2.

Simulação com quatro rainhas



A rainha Q_2 não está salva.

Procure outra posição para Q_2.

Simulação com quatro rainhas

Q_1			
	Q_2		

A rainha Q_2 está salva.

Agora vamos tentar incluir mais uma rainha.

Simulação com quatro rainhas

Q_1		Q_3	
	Q_2		

Selecione uma posição. A rainha Q_3 não está salva.

Procure outra posição para Q_3.

Simulação com quatro rainhas

Q_1			
		Q_3	
	Q_2		

A rainha Q_3 não está salva.

Procure outra posição para Q_3.

Simulação com quatro rainhas

Q_1			
	Q_2	Q_3	

A rainha Q_3 não está salva.

Procure outra posição para Q_3.

Simulação com quatro rainhas

Q_1			
	Q_2		
		Q_3	

A rainha Q_3 não está salva.

Não há mais posição válida para Q_3.

Simulação com quatro rainhas

Q_1			
	Q_2		

Retrocede e reposicione Q_2.

Agora tente novamente para Q_3.

Simulação com quatro rainhas

Q_1		Q_3	
	Q_2		

A rainha Q_3 não está salva.

Procure outra posição para Q_3.

Simulação com quatro rainhas

Q_1			
		Q_3	
	Q_2		

A rainha Q_3 está salva.

Agora vamos tentar incluir mais uma rainha.

Simulação com quatro rainhas

Q_1			Q_4
		Q_3	
	Q_2		

A rainha Q_4 não está salva.

Procure outra posição para Q_4.

Simulação com quatro rainhas

Q_1			
		Q_3	Q_4
	Q_2		

A rainha Q_4 não está salva.

Procure outra posição para Q_4.

Simulação com quatro rainhas

Q_1			
		Q_3	
			Q_4
	Q_2		

A rainha Q_4 não está salva.

Procure outra posição para Q_4.

Simulação com quatro rainhas

Q_1			
		Q_3	
	Q_2		Q_4

A rainha Q_4 não está salva.

Não há mais posição válida para Q_4.

Simulação com quatro rainhas

Q_1			
		Q_3	
	Q_2		

Retrocede e reposicione Q_3.

Simulação com quatro rainhas

Q_1			
		Q_3	
	Q_2		

A rainha Q_3 não está salva.

Procure outra posição para Q_3.

Simulação com quatro rainhas

Q_1			
	Q_2	Q_3	

A rainha Q_3 não está salva.

Não há mais posição válida para Q_3.

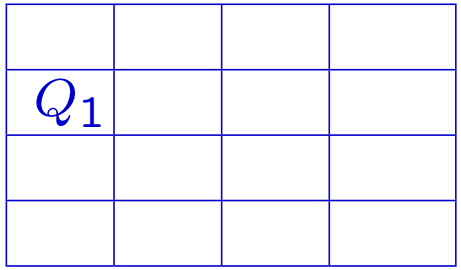
Simulação com quatro rainhas

Q_1			
	Q_2		

Retrocede e reposicione Q_2.

Não há mais posição válida para Q_2.

Simulação com quatro rainhas



Retrocede e reposicione Q_1.

Agora tente novamente a rainha Q_2

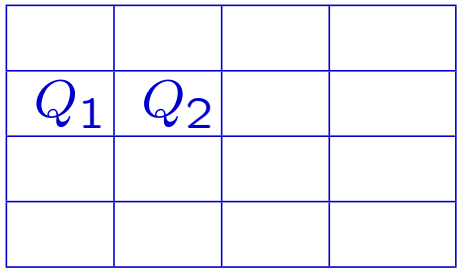
Simulação com quatro rainhas

	Q_2		
Q_1			

A rainha Q_2 não está salva.

Procure outra posição para Q_2.

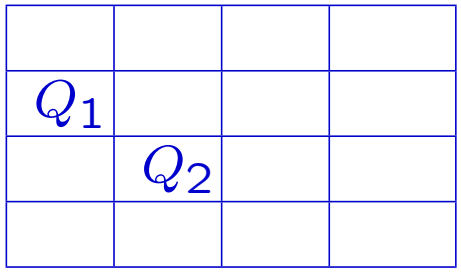
Simulação com quatro rainhas



A rainha Q_2 não está salva.

Procure outra posição para Q_2.

Simulação com quatro rainhas



A rainha Q_2 não está salva.

Procure outra posição para Q_2.

Simulação com quatro rainhas

		Q_3	
Q_1			
	Q_2		

A rainha Q_2 está salva.

Agora tente novamente para Q_3.

Simulação com quatro rainhas

		Q_3	
Q_1			
	Q_2		

A rainha Q_3 está salva.

Agora tente novamente para Q_4.

Simulação com quatro rainhas

		Q_3	Q_4
Q_1			
	Q_2		

A rainha Q_4 não está salva.

Procure outra posição para Q_4.

Simulação com quatro rainhas

		Q_3	
Q_1			Q_4
	Q_2		

A rainha Q_4 não está salva.

Procure outra posição para Q_4.

Simulação com quatro rainhas

		Q_3	
Q_1			
			Q_4
	Q_2		

A rainha Q_4 está salva.

Todas as rainhas estão salvas!

Oito rainhas

Mais importante, num determinado passo do que saber a exata posição das rainhas que já estão no tabuleiro é saber se ela está salva.

Oito rainhas - implementação

```
bool esta_salva(char tabuleiro[][N], int linha, int coluna){
   int i, j;
   for (i = 0; i < coluna; i++) // verifica a linha
      if (tabuleiro[linha][i] == 'Q') return false;

   // verifica as diagonais
   for (i = linha, j = coluna; i >= 0 && j >= 0; i--, j--)
      if (tabuleiro[i][j] == 'Q') return false;

   for (i = linha, j = coluna; i < N && j > 0; i++, j--)
      if (tabuleiro[i][j] == 'Q') return false;

   return true;
}
```

Oito rainhas - implementação

```
void posiciona_rainha(char tabuleiro[][N], int coluna) {
   if (coluna == N) mostra_matriz(tabuleiro);
   else {
      for (int i = 0; i < N; i++) {
          if (esta_salva(tabuleiro, i, coluna)){
             tabuleiro[i][coluna] = 'Q';
             posiciona_rainha(tabuleiro, coluna + 1);
             tabuleiro[i][coluna] = '-';
          }
      }
   }
}
```

```
int main(int argc, char *argv[]) {
   char tabuleiro[N][N];
   memset(tabuleiro, '-', sizeof tabuleiro);
   oito_rainhas(tabuleiro, 0);
   return 0;
}
```

Obrigado