Fontes principais

1. Cormem T. H.; Leiserson C. E.; Rivest R.: Stein C.. *Introduction to Algorithms*, 3^a edição, MIT Press, 2009

2. Análise de algoritmo - IME/USP (prof. Paulo Feofiloff)
   `http://www.ime.usp.br/~pf/analise_de_algoritmos`

Limite inferior para ordenação

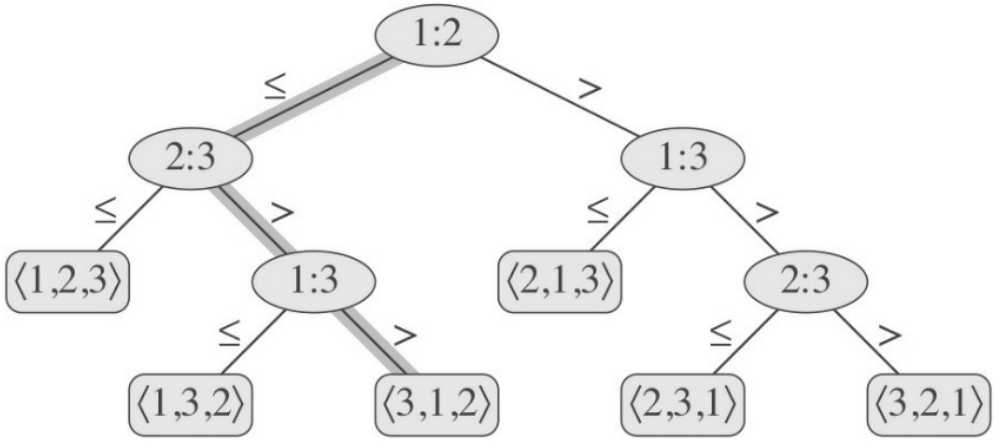
Limite inferior para ordenação

Um algoritmo de ordenação baseia-se em comparações se o fluxo do algoritmo para uma entrada de tamanho n depende apenas de comparações do tipo $a_i \leq a_j$. Todos os algoritmos de ordenação que estudamos até o momento baseiam-se em comparações.

Limite inferior para ordenação

Theorem 1. *Qualquer algoritmo de ordenação por comparação exige $\Omega(n \lg n)$ comparações no pior caso.*

Dem.: Por árvore de decisão.



Limite inferior para ordenação

Dado um vetor com n elementos, o vetor ordenado pode ser qualquer uma das $n!$ permutações.

Um algoritmo de ordenação efetua um número de comparações equivalente a altura da árvore com $n!$ folhas.

Uma árvore binária com altura h tem no máximo 2^h folhas.

Limite inferior para ordenação

Logo, temos:

$n! \leq 2^h \Rightarrow \lg(n!) \leq h \quad (a \leq b \Rightarrow \lg a \leq \lg b)$
$h \geq \lg(n!) \Rightarrow h = \Omega(n \lg n)$
$\lg(n!) \geq \frac{n}{4} \lg n, n \geq 16$

Portanto, $h = \Omega(n \lg n)$

Ordenação em tempo linear

Algoritmo Counting Sort

Cada elemento é um inteiro i no intervalo $[1..k]$

Idéia:

- ▷ Contar para cada elemento x da entrada o número de elementos menores que x.
- ▷ Colocar x diretamente na usa posição no vetor de saída.

Utiliza dois vetores auxiliares para ordenar.

Algoritmo Counting Sort

	Counting-Sort(A, B, n, k)	custo
1	**para** $i = 1$ **até** k **faça**	$\Theta(k)$
2	$\quad C[i] = 0$	$\Theta(k)$
3	**para** $j = 1$ **até** n **faça**	$\Theta(n)$
4	$\quad C[A[i]] = C[A[i]] + 1$	$\Theta(n)$
5	$\triangleright$ C[i] contém núm. de elementos iguais a i	
6	**para** $i = 2$ **até** k **faça**	$\Theta(k)$
7	$\quad C[i] = C[i] + C[i-1]$	$\Theta(k)$
8	$\triangleright$ C[i] contém núm. de elementos $\leq$ i	
9	**para** $j = n$ **até** 1 **faça**	$\Theta(n)$
10	$\quad B[C[A[j]]] = A[j]$	$\Theta(n)$
11	$\quad C[A[j]] = C[A[j]] - 1$	$\Theta(n)$

Algoritmo Counting Sort

Entrada:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	2	5	3	0	2	3	0	5	3	0

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B										

Saída:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	0	0	0	2	2	3	3	3	5	5

Estão na mesma ordem em que aparece em A.

Algoritmo Counting Sort

Passo a passo:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	2	5	3	0	2	3	0	5	3	0

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B										

	0	1	2	3	4	5
C						

Atividade: "Simular"a aplicação do algoritmo Counting-Sort.

Algoritmo Counting Sort

Passo a passo:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	2	5	3	0	2	3	0	5	3	0

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	0	0	0	2	2	3	3	3	5	5

	0	1	2	3	4	5
C	0	3	3	5	8	8

Perceba a estabilidade do algoritmo

Classificação dos algoritmos de ordenação

Estabilidade

- Um algoritmo é **estável** se elementos idênticos ocorrem no vetor ordenado na mesma ordem que foram recebidos como entrada

Localidade

- Um algoritmo é **local** se a quantidade de memória adicional requerida é constante.

Note que Counting Sort é estável mas não local.

Quais são os algoritmos estáveis?

- ▷ Insertion-Sort
- ▷ Merge-Sort
- ▷ Bubble-Sort
- ▷ Counting-Sort
- ▷ Bucket-Sort

Quais não são estáveis?

- ▷ Heap-Sort
- ▷ Quick-Sort
- ▷ Selection-Sort (Depende do algoritmo)
- ▷ Shell-Sort

Radix-Sort

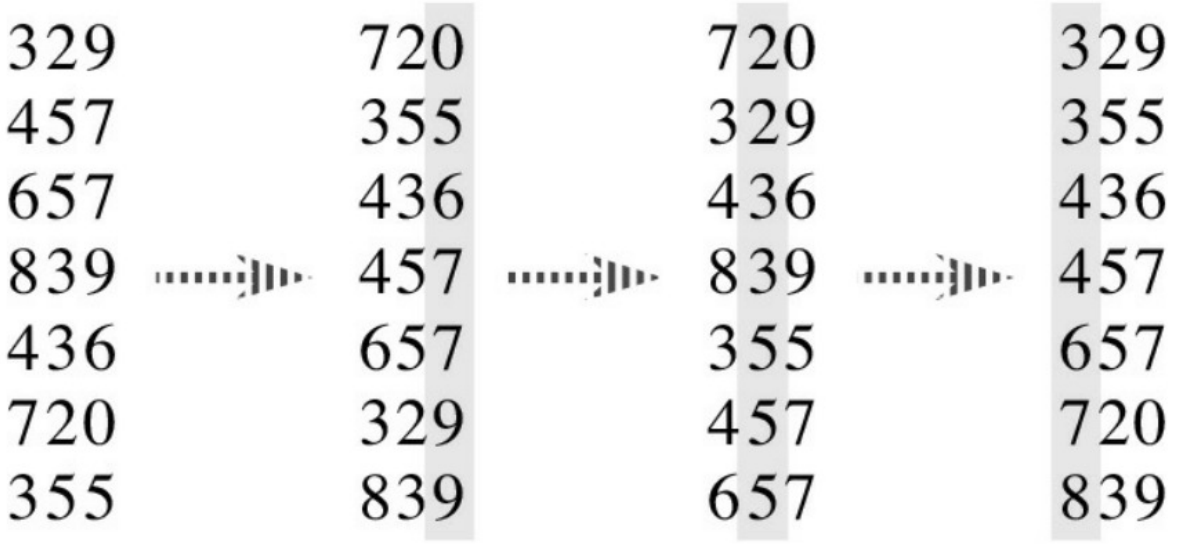
Radix-Sort

▷ Números a serem ordenados tem d dígitos

▷ Inicia-se pelo dígito menos significativo

Radix-Sort(A, n, d)
1 **para** $i = 1$ **até** d **faça**
2 ordena $A[1..n]$ pelo n-ésimo dígito com um algarismo **estável**

Radix-Sort


329
457
657
839
436
720
355
720
355
436
457
657
329
839
720
329
436
839
355
457
657
329
355
436
457
657
720
839

Complexidade do Radix-Sort

A análise do tempo de execução depende da ordenação estável usada como algoritmo ordenação intermediária.

Usando o Counting-Sort para dígitos na faixa $[0 \cdots k-1]$, a complexidade de pior caso é $\Theta(d(n+k))$

Se $k = O(n)$ e $d = O(1)$, então $T(n) = \Theta(n)$.

Note que se for utilizada, por exemplo, Insertion-Sort, como algoritmo estável a complexidade de tempo **não será** a linear.

Bucket-Sort (Ordenação por "balde")

Bucket-Sort (Ordenação por "balde")

Os n elementos do vetor são valores reais distribuídos uniformemente em $[0, 1)$

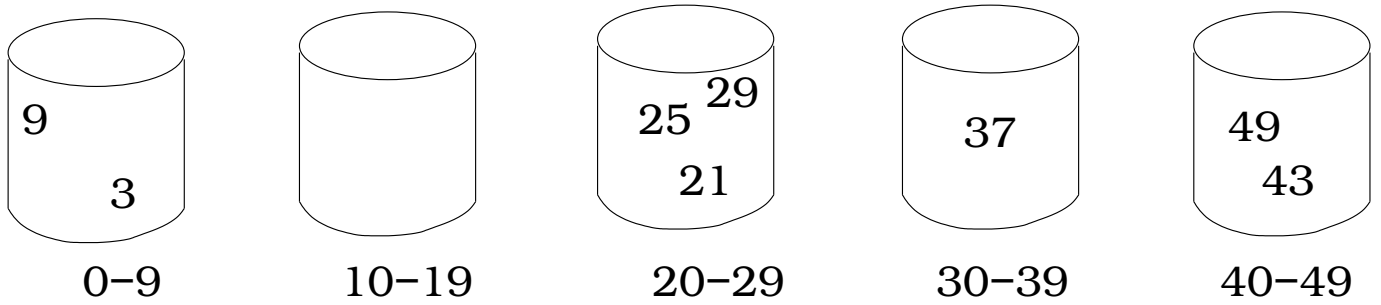
Divide-se o intervalor $[0, 1)$ em n buckets de mesmo tamanho e distribui-se os n elementos nos respectivos buckets

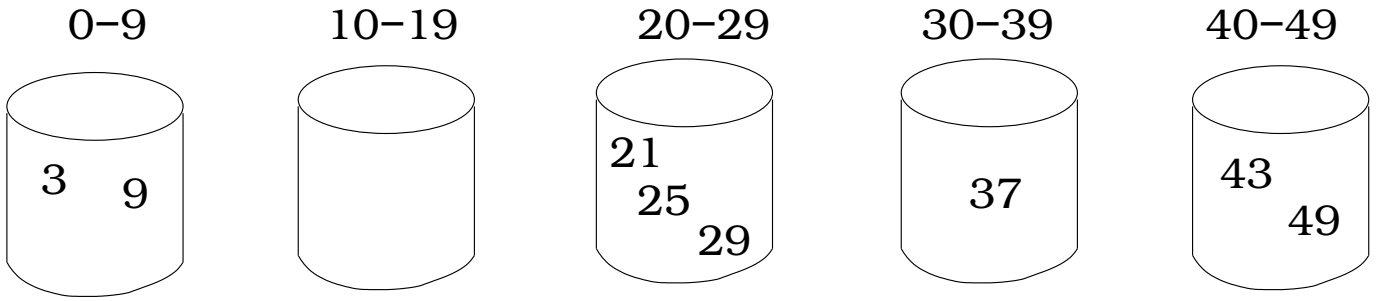
Cada bucket é ordenado por um método "qualquer"

Por fim, os buckets ordenados são concatenados em ordem crescente

Baldes

Entrada: 29 25 3 49 9 37 21 43





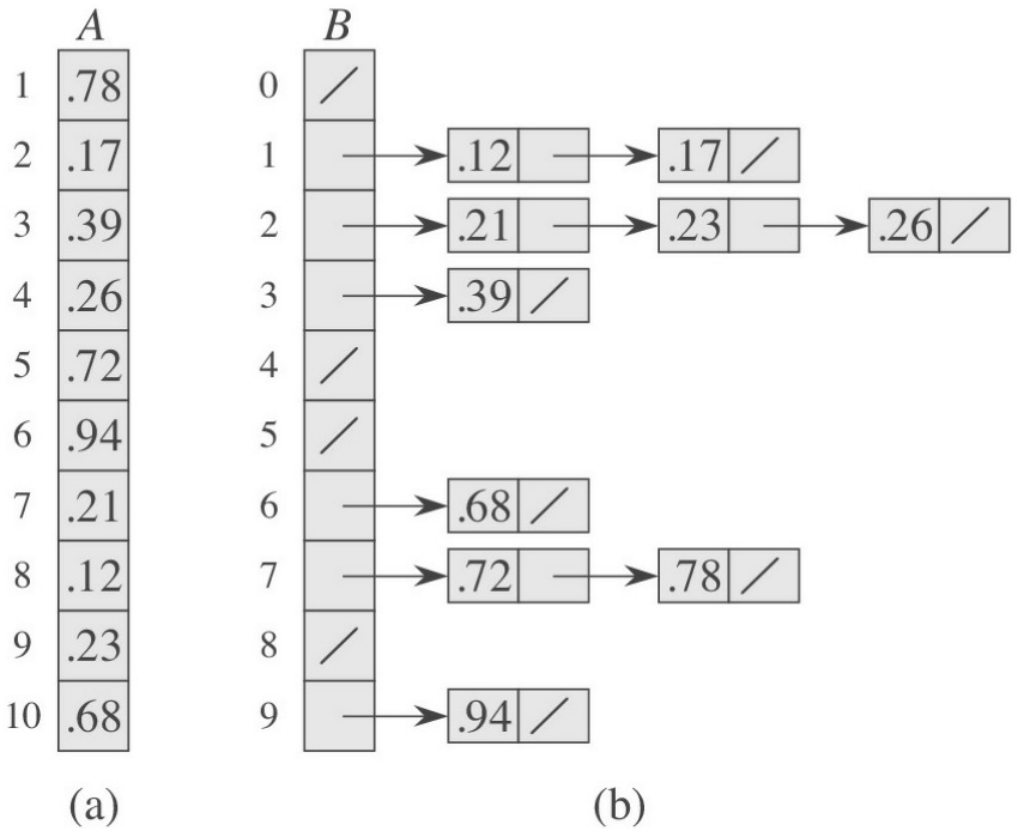
Saída: 3 9 21 25 29 37 43 49

Bucket-Sort (Ordenação por "balde")

Bucket-Sort(A, n)

1 **para** $i = 0$ **até** $n - 1$
2 **faça** $B[i] = null$
3 **para** $i = 1$ **até** n
4 **faça** insira $A[i]$ na lista $B[\lfloor n \cdot A[i] \rfloor]$
5 **para** $i = 0$ **até** $n - 1$
6 **faça** Insertion-Sort$(B[i])$
7 Concatene as listas $B[0], B[1], \cdots, B[n - 1]$

Exemplo


A
1 .78
2 .17
3 .39
4 .26
5 .72
6 .94
7 .21
8 .12
9 .23
10 .68
(a)
B
0
1 .12 .17
2 .21 .23 .26
3 .39
4
5
6 .68
7 .72 .78
8
9 .94
(b)

Complexidade do Bucket-Sort

Pior caso: Supondo Insertion-Sort para ordenar as listas $\Theta(n^2)$

Caso médio: Número de elementos em cada lista é $\Theta(1)$, e o tempo esperado para ordenar uma lista $B[i]$ também é $\Theta(1)$

Melhor caso: $\Theta(n)$

Complexidade de espaço: $\Theta(n)$

Dicas de website

https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/CountingSort.html

https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/RadixSort.html

https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/BucketSort.html

Neste mesmo site tem visualizações de outros algoritmos

Obrigado