Fontes principais

1. Cormem T. H.; Leiserson C. E.; Rivest R.: Stein C.. *Introduction to Algorithms*, 3^a edição, MIT Press, 2009

2. Análise de algoritmo - IME/USP (prof. Paulo Feofiloff)
   `http://www.ime.usp.br/~pf/analise_de_algoritmos`

Algoritmo Heap-Sort

Algoritmo Heap-Sort

Heap: Estrutura de dados útil quando se quer remover o máximo de um conjunto sucessivas vezes.

Algoritmo Heap-Sort

Formalmente, um heap é uma árvore binária em que cada nó contém um elemento do conjunto e vale:

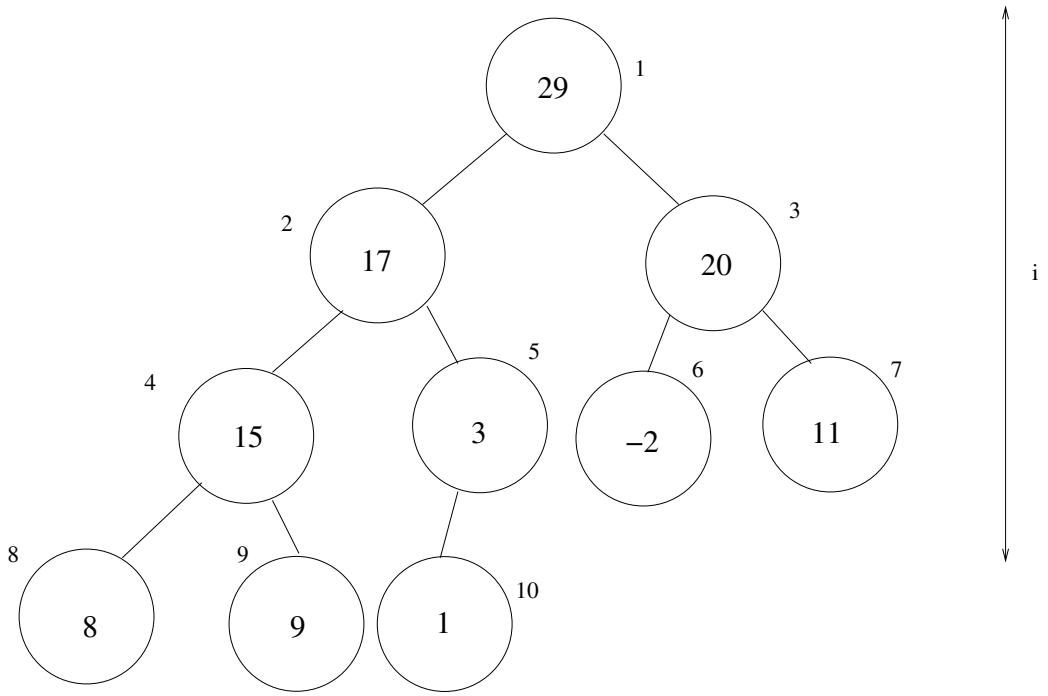
1. A árvore é completa até o penúltimo nível

2. No último nível todos os nós estão o mais a esquerda possível

3. Cada nó interno armazena um valor maior que seus filhos

Algoritmo Heap-Sort

Exemplo: $S = \{20, 15, 17, -2, 8, 11, 3, 9, 29, 1\}$



Algoritmo Heap-Sort

Um heap pode ser armazenado em um vetor de tal forma que:

▷ O pai do elemento da posição i ($i > 1$) sempre está na posição $\lfloor i/2 \rfloor$
▷ E os filhos, nas posições $2i$ e $2i + 1$ (se tais índices forem menores ou iguais a n).

Note que o valor máximo do conjunto representado pelo heap sempre está na raiz.

Algoritmo Heap-Sort

Algoritmos de manipulação do heap consome tempo proporcional à altura do heap. A altura do heap com n elementos: $\Theta(\log n)$

Desce-Heap(A, n, i)

```
1  enquanto (2i ≤ n)
2      faça f = 2i
3           se (f < n) e (A[f + 1] > A[f])
4              então f = f + 1
5           se (A[i] < A[f])
6              então A[i] ↔ A[f]
7                   i = f
8              senão
9                   i = n + 1
```

Remoção do máximo heap

Extrai-Maximo-Heap(A, n)

1 $max = A[1]$
2 $A[1] = A[n]$
3 Desce-Heap($A, n - 1, 1$)
4 **retorne** max

Construção de um Heap

Podemos utilizar o Desce-Heap()

Constroi-Heap(A)

1 **para** i *de* $\lfloor n/2 \rfloor$ **até** 1
2 **faça** Desce-Heap(A, n, i)

Custo do Constroi-Heap(): $\Theta(n)$

Agora podemos definir o algoritmo Heap-Sort

Heap-Sort

Heap-Sort(A, n)

```
1  Constroi-Heap(A)
2  para i = n até 2                ▷ O(n log n)
3      faça A[1] ↔ A[i]
4           Desce-Heap(A, i-1, 1)
```

Complexidade do Heap-Sort

Pior caso: Vetor em ordem decrescente $O(n \log n)$

Melhor caso: Vetor em ordem crescente $O(n \log n)$

Caso aleatório: Vetor aleatório $O(n \log n)$

Complexidade de expaço: $\Theta(n)$

Algoritmo Quick-Sort

Algoritmo Quick-Sort

Estratégia de divisão e conquista

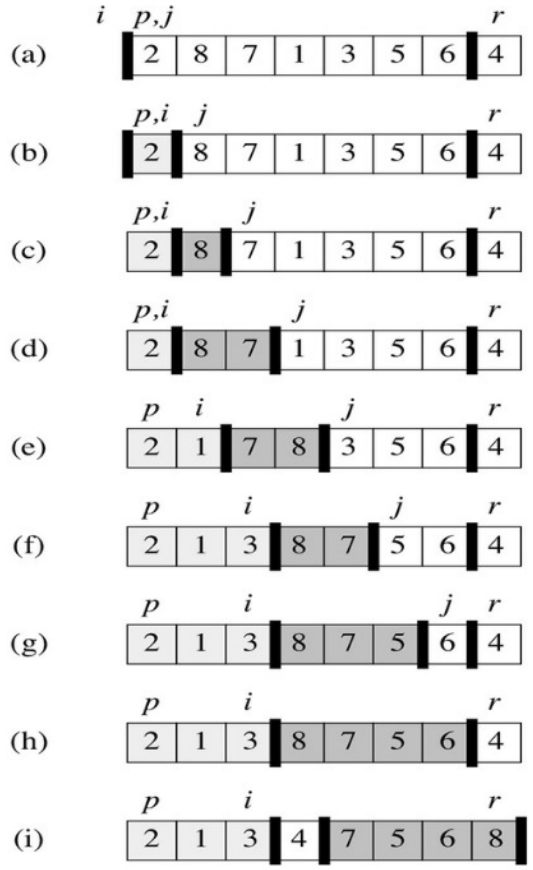
```
Quick-Sort(A, p, r)
1  se p < r
2      então q = particiona(A, p, r)        ▷ p ≤ q < r
3            Quick-Sort(A, p, q)
4            Quick-Sort(A, q + 1, r)
```

Particionamento

		custo
particiona(A, p, r)		
1	$x = A[r]$	$\Theta(1)$
2	$i = p - 1$	$\Theta(1)$
3	**para** $j = p$ **até** $r - 1$ **faça**	$\Theta(n)$
4	**se** $A[j] \leq x$ **então**	$\Theta(n)$
5	$i = i + 1$	$\Theta(n)$
6	$A[i] \leftrightarrow A[j]$	$\Theta(n)$
7	$A[i] \leftrightarrow A[j]$	$\Theta(1)$
8	**retorne** $i + 1$	$\Theta(1)$
		Total: $\Theta(n)$

Portanto, a complexidade do algoritmo é $\Theta(n)$

Particionamento



Complexidade do Quick-Sort

$$T(n) = \begin{cases} 0 & \text{, se } n = 1 \\ \max\{T(m) + T(n-m)\} + \Theta(n) & \text{, se } n > 1 \text{ e } 0 \leq m < n \end{cases}$$

Resolvendo a recorrência temos, que:

$$T(n) = O(n^2)$$

Dica: utilize indução para verificar que a solução é de fato esta.

Quick-Sort aleatorizado

```
particiona-aleatorizado(A, p, r)
1   i = aleatorio(p, r)
2   A[p] ↔ A[i]
3   retorne particiona(A, p, r)
```

```
Quick-Sort-Aleatorizado(A, p, r)
1   se p < r
2       então q = particiona-aleatorizado(A, p, r)
3             Quick-Sort-Aleatorizado(A, p, q)
4             Quick-Sort-Aleatorizado(A, q + 1, r)
```

Análise do Quick-Sort aleatorizado

Recorrência para o tempo esperado $E(T(n))$:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{, se } n = 1 \\ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (T(k) + T(n-k)) + \Theta(n) & \text{, se } n > 1 \end{cases}$$

Podemos manipular o somatório de forma adequada:

$$T(n) = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} T(k) + cn$$

Análise do Quick-Sort aleatorizado

Podemos provar que $T(n) = O(n \log n)$. Suponha que $T(n) \leq an \log n + b$, para $n \geq n_0$, com $a, b > 0$ constantes.

$$\begin{aligned} T(n) &= \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} T(k) + cn \\ &\leq \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (ak \log k + b) + cn \\ &= \frac{2a}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k \log k + \frac{2b}{n}(n-1) + cn \end{aligned}$$

Análise do Quick-Sort aleatorizado

Sabemos que $\sum_{k=1}^{n-1} k \log k \leq \frac{1}{2} n^2 \log n - \frac{1}{8} n^2$

$$\begin{aligned} T(n) &= \frac{2a}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k \log k + \frac{2b}{n}(n-1) + cn \\ &\leq \frac{2a}{n}(\frac{1}{2} n^2 \log n - \frac{1}{8} n^2) + \frac{2b}{n}(n-1) + cn \\ &\leq an \log n - \frac{a}{4} n + 2b + cn \\ &= an \log n + b + (cn + b - \frac{a}{4} n) \\ &\leq an \log n + b \end{aligned}$$

Para $\frac{a}{4} n \geq cn + b$

Obrigado