Fontes principais

1. Cormem T. H.; Leiserson C. E.; Rivest R.: Stein C.. *Introduction to Algorithms*, 3^a edição, MIT Press, 2009

2. Análise de algoritmo - IME/USP (prof. Paulo Feofiloff)
   `http://www.ime.usp.br/~pf/analise_de_algoritmos`

Objetivos da análise e projeto de algoritmos

- Prova de **corretude** de um algoritmo
- Análise da quantidade de recursos para executar um algoritmo (complexidade)
- Projeto de algoritmos utilizando várias técnicas

Definição informal de algoritmos

▷ **Algoritmo** é um procedimento bem definido para resolver um problema computacional específico.

Algoritmos

▷ **Busca** e **ordenação** são exemplos de problemas computacionais clássicos.

Problema e instância

Um **problema** é definido por:

- Uma descrição dos parâmetros
- Uma descrição sobre as propriedades que a resposta deve satisfazer

Problema e instância

Instância: Conjunto de valores da entrada necessários para que se possa resolver o problema.

Problema e instância

Problema 1. *Dada uma sequência de n números $\langle a_1, a_2, \cdots, a_n \rangle$, determinar uma permutação $\langle a'_1, a'_2, \cdots, a'_n \rangle$ da sequência de entrada tal que $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$.*

Problema e instância

Instância: Ordenar o vetor de maneira crescente.

- Entrada: $[10, 20, 5, 40, 4]$
- Saída: $[4, 5, 10, 20, 40]$

Problema da ordenação

Qual algoritmo de ordenação é melhor?

- Depende:
  - do tamanho da instância a ser ordenada;
  - tipo de dispositivo é utilizado

Ordenação por inserção

Insertion-Sort(A, n)

```
 1: para j = 2 até n
 2:     chave = A[j]
 3:     ▷ Insere A[j] na sequência
           ordenada A[1..j − 1]
 4:     i = j − 1
 5:     enquanto i > 0 e A[i] > chave
 6:         A[i + 1] = A[i]
 7:         i = i − 1
 8:
 9:     A[i + 1] = chave
10:
```

Análise de algoritmos

Definição 2. *Análise de um algoritmo significa predizer os recursos que um algoritmo requer.*

Ex.: memória, comunicação, tempo computacional

Análise de algoritmos

Objetivo geral: é encontrar uma expressão matemática que é simples para escrever e manipular, que mostre as características importantes das necessidades do algoritmo e omita os detalhes desnecessários.

Ordenação por inserção

Insertion-Sort(A, n)	*cost*	*times*
1: para $j = 2$ até n	c_1	n
2: $\quad chave = A[j]$	c_2	$n-1$
3: $\quad \triangleright$ Insere $A[j]$ na sequência ordenada $A[1..j-1]$	0	$n-1$
4: $\quad i = j - 1$	c_4	$n-1$
5: $\quad$ enquanto $i > 0$ e $A[i] > chave$	c_5	$\sum_{j=2}^{n} t_j$
6: $\quad\quad A[i+1] = A[i]$	c_6	$\sum_{j=2}^{n}(t_j - 1)$
7: $\quad\quad i = i - 1$	c_7	$\sum_{j=2}^{n}(t_j - 1)$
8:		
9: $\quad A[i+1] = chave$	c_8	$n-1$
10:		

t_j é o número de vezes que o teste do while da linha 5 é executado para cada j.

Análise da ordenação por inserção

- Tamanho da entrada: n
- Tempo de execução com uma instância de tamanho n

$$\begin{aligned} T(n) = \; & c_1 n + c_2(n-1) + c_4(n-1) + c_5 \textstyle\sum_{j=2}^{n} t_j \\ & + c_6 \textstyle\sum_{j=2}^{n} (t_j - 1) + c_7 \textstyle\sum_{j=2}^{n} (t_j - 1) + c_8(n-1) \end{aligned}$$

Análise da ordenação por inserção

- Melhor caso: sequência ordenada, $t_j = 1, \forall j$
- A linha 5 é executada 1 vez a cada iteração de 2 até n.
- As linhas 6 e 7 não são executadas

$$T(n) = c_1 n + c_2(n-1) + c_4(n-1) + c_5(n-1) + c_8(n-1)$$

Análise da ordenação por inserção

- Melhor caso: sequência ordenada, $t_j = 1, \forall j$
- A linha 5 é executada 1 vez a cada iteração de 2 até n.
- As linhas 6 e 7 não são executadas

$$\begin{aligned} T(n) &= c_1 n + c_2(n-1) + c_4(n-1) + c_5(n-1) + c_8(n-1) \\ T(n) &= (c_1 + c_2 + c_4 + c_5 + c_8)n - (c_2 + c_4 + c_5 + c_8) \end{aligned}$$

Análise da ordenação por inserção

- ▷ Melhor caso: sequência ordenada, $t_j = 1, \forall j$
- ▷ A linha 5 é executada 1 vez a cada iteração de 2 até n.
- ▷ As linhas 6 e 7 não são executadas

$$
\begin{aligned}
T(n) &= c_1 n + c_2(n-1) + c_4(n-1) + c_5(n-1) + c_8(n-1) \\
T(n) &= (c_1 + c_2 + c_4 + c_5 + c_8)n - (c_2 + c_4 + c_5 + c_8) \\
T(n) &= an + b
\end{aligned}
$$

Linear em n

Análise da ordenação por inserção

▷ Pior caso: sequência em ordem decrescente, $t_j = j, \forall j$

$$\begin{aligned} T(n) &= c_1 n + c_2(n-1) + c_4(n-1) + c_5(\tfrac{n(n+1)}{2} - 1) \\ & \quad c_6(\tfrac{n(n-1)}{2}) + c_7(\tfrac{n(n-1)}{2}) + c_8(n-1) \end{aligned}$$

Lembre-se: $\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$

Análise da ordenação por inserção

▷ Pior caso: sequência em ordem decrescente, $t_j = j, \forall j$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= c_1 n + c_2(n-1) + c_4(n-1) + c_5(\tfrac{n(n+1)}{2} - 1) \\
&\quad c_6(\tfrac{n(n-1)}{2}) + c_7(\tfrac{n(n-1)}{2}) + c_8(n-1) \\
T(n) &= (c_5 + c_6 + c_7)n^2/2 + (c_1 + c_2 + c_4 + c_8 + c_9 + \tfrac{c_5 - c_6 - c_7}{2})n \\
&\quad -(c_2 + c_4 + c_5 + c_8)
\end{aligned}
$$

Análise da ordenação por inserção

▷ Pior caso: sequência em ordem decrescente, $t_j = j, \forall j$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= c_1 n + c_2(n-1) + c_4(n-1) + c_5(\tfrac{n(n+1)}{2} - 1) \\
&\quad c_6(\tfrac{n(n-1)}{2}) + c_7(\tfrac{n(n-1)}{2}) + c_8(n-1) \\
T(n) &= (c_5 + c_6 + c_7)n^2/2 + (c_1 + c_2 + c_4 + c_8 + c_9 + \tfrac{c_5 - c_6 - c_7}{2})n \\
&\quad -(c_2 + c_4 + c_5 + c_8) \\
T(n) &\quad an^2 + bn + c
\end{aligned}
$$

Quadrático em n.

Notação assintótica

Notação $\ominus$

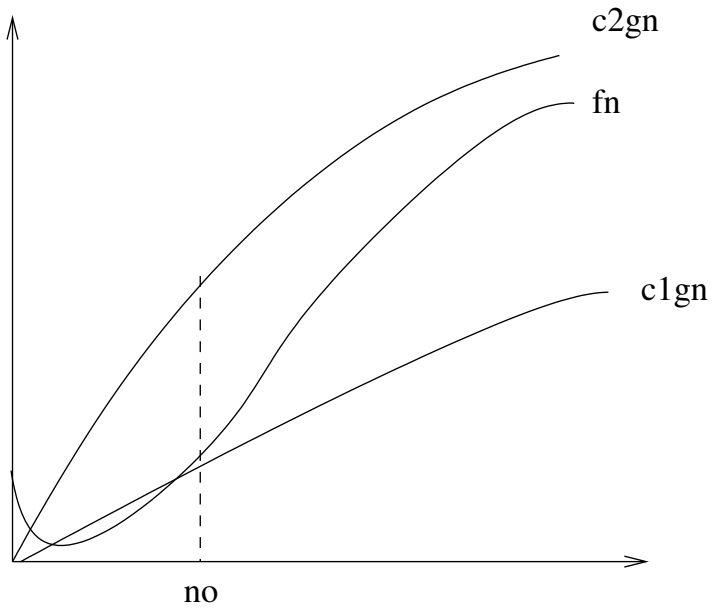
Notação Θ

Definição 3. *Para uma dada função $g(n)$, denotamos por $\theta(g(n))$ o conjunto de funções:*

$$\Theta(g(n)) = \{f(n) : \exists c1, c2 > 0 \text{ e } n_0 > 0 \text{ tal que } c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n), \forall n \geq n_0\}$$

Notação Θ

Em vez de escrever $f(n) \in \Theta(g(n))$ escreveremos $f(n) = \Theta(g(n))$



A notação Θ é usada para delimitações exatas de funções.

Exemplo: Notação Θ

$$\frac{1}{2}n^2 - 3n = \Theta(n^2)$$

$$\frac{1}{2}n^2 - 3n \leq \frac{1}{2}n^2, \forall n \geq 0 \rightarrow c_2 = \frac{1}{2}, n_0^{(2)} \geq 0.$$

$$\frac{1}{4}n^2 \leq \frac{1}{2}n^2 - 3n \rightarrow c_1 = \frac{1}{4}, n_0^{(1)} \geq 12$$

$$n_0 = max\{0, 12\} = 12$$

Portanto, $c_1 = \frac{1}{4}$, $c_2 = \frac{1}{2}$ e $n_0 = 12$

Notação O (oh grande)

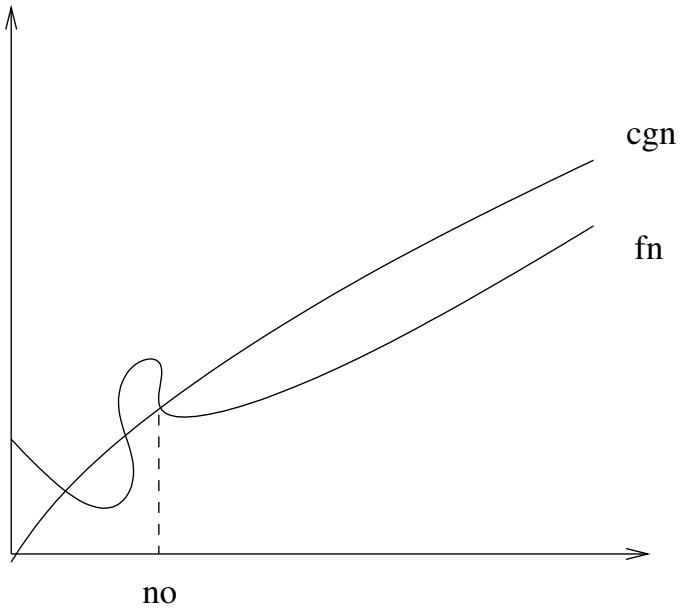
Notação O (oh grande)

Definição 4. *Para uma dada função $g(n)$, denotamos por $O(g(n))$ o conjunto de funções:*

$$O(g(n)) = \{f(n) : \exists c > 0 \text{ e } n_0 > 0 \text{ tal que } f(n) \leq cg(n), \forall n \geq n_0\}$$

Notação O (oh grande)

A notação O serve para atribuir delimitações superiores para a função $g(n)$.



Novamente escrevemos $f(n) = O(g(n))$ em vez de $f(n) \in O(g(n))$.

Exemplos: Notação O

(a) $n = O(n^2)$?

Sim, tome $c = 1$ e $n_0 = 1$

(b) $\frac{1}{2}n^2 - 3n = O(n^2)$?

Sim , tome $c = \frac{1}{2}$ e $n_0 = 7$

Notação Ω

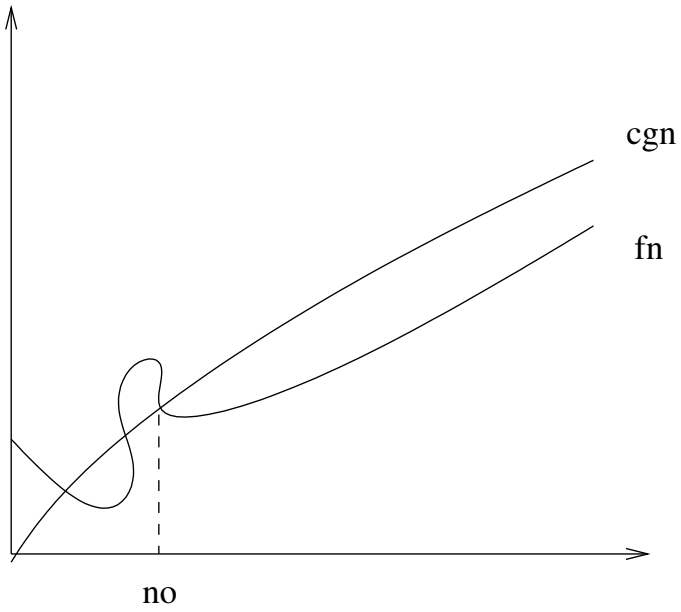
Notação Ω

Definição 5. *Para uma dada função $g(n)$, denotamos por $\Omega(g(n))$ o conjunto de funções:*

$$\Omega(g(n)) = \{f(n) : \exists c > 0 \text{ e } n_0 > 0 \text{ tal que } f(n) \geq cg(n), \forall n \geq n_0\}$$

Exemplos: Notação Ω

A notação O serve para atribuir delimitações inferiores para a função $g(n)$.



$f(n) = \Omega(g(n))$

Exemplos: Notação Ω

(a) $\frac{1}{3}n^2 - 3n = \Omega(n^2)$?

Sim, tome $c = \frac{1}{4}$ e $n_0 = 7$

(b) $n^2 - 2n = \Omega(n)$?

Sim , tome $c = 10$ e $n_0 = 8$

Notação o (oh pequeno)

Notação o (oh pequeno)

Para quando há apenas um **limite assintótico superior**, sem permitir $f(n) = cg(n)$.

Utiliza-se a notação o para denotar um limitante superior que é assintoticamente restrito.

Notação o (oh pequeno)

Definição 6. *Para uma dada função $g(n)$, denotamos por $o(g(n))$ o conjunto de funções:*

$$o(g(n)) = \{f(n) : \text{ para qualquer constante positiva } c \text{ existe uma constante positiva } n_0 \text{ tal que } f(n) < cg(n), \forall n \geq n_0\}$$

Intuitivamente, f é dominado por g assintoticamente.

Notação o (oh pequeno)

Por exemplo, $2n = o(n^2)$, mas $2n^2 \neq o(n^2)$

Intuitivamente, na notação o, a função $f(n)$ torna-se insignificante em relação a $g(n)$ quando vai para o infinito. Ou seja,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

Notação o (oh pequeno)

Exemplo: $2n = o(n^2)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$$

Portanto, $2n = o(n^2)$.

Notação ω (omega pequeno)

Notação ω (omega pequeno)

Por analogia, a notação ω está para a notação Ω, assim como a notação o está para a notação O.

Então, para quando há apenas um limite assintótico inferior, sem permitir $f(n) = cg(n)$.

Utiliza-se a notação ω para denotar um limitante inferior que não é assintoticamente restrito.

Notação ω (omega pequeno)

Definição 7. *Para uma dada função $g(n)$, denotamos por $\omega(g(n))$ o conjunto de funções:*

$$o(g(n)) = \{f(n) : \text{ para qualquer constante positiva } c \text{ existe uma constante positiva } n_0 \text{ tal que } cg(n) < f(n), \forall n \geq n_0\}$$

Intuitivamente, f domina g assintoticamente.

Notação ω (omega pequeno)

Por exemplo, $2n^2 = \omega(n)$, mas $2n^2 \neq \omega(n^2)$

Intuitivamente na notação $\omega(n)$ a função $f(n)$ domina $cg(n)$ quando n vai para o infinito. Ou seja, $f(n) = \omega(g(n))$ indica que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$$

Notação ω (omega pequeno)

Por exemplo, $n^2/2 = \omega(n)$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2/2}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} = \infty$$

Portanto, $n^2/2 = \omega(n)$.

Comparação de funções

Comparação de funções

- Transitividade

$f(n) = \Theta(g(n))$ e $g(n) = \Theta(h(n))$ então $f(n) = \Theta(h(n))$
$f(n) = O(g(n))$ e $g(n) = O(h(n))$ então $f(n) = O(h(n))$
$f(n) = \Omega(g(n))$ e $g(n) = \Omega(h(n))$ então $f(n) = \Omega(h(n))$
$f(n) = o(g(n))$ e $g(n) = o(h(n))$ então $f(n) = o(h(n))$
$f(n) = \omega(g(n))$ e $g(n) = \omega(h(n))$ então $f(n) = \omega(h(n))$

Comparação de funções

- Reflexividade

$$f(n) = \Theta(f(n))$$
$$f(n) = O(f(n))$$
$$f(n) = \Omega(f(n))$$
$$f(n) \neq o(f(n))$$
$$f(n) \neq \omega(f(n))$$

Comparação de funções

- Simetria

$f(n) = \Theta(g(n))$, se somente se, $g(n) = \Theta(f(n))$

- Simetria transposta

$f(n) = O(g(n))$, se somente se, $g(n) = \Omega(f(n))$
$f(n) = o(g(n))$, se somente se, $g(n) = \omega(f(n))$

Analogia entre notação assintótica e números reais

Analogia entre notação assintótica e números reais

Sejam f, g funções e $a, b \in R$

$$f(n) = O(f(n)) \approx a \leq b$$
$$f(n) = \Omega(f(n)) \approx a \geq b$$
$$f(n) = \Theta(f(n)) \approx a = b$$
$$f(n) = o(f(n)) \approx a < b$$
$$f(n) = \omega(f(n)) \approx a > b$$

Tricotomia

Para quaisquer dois números reais a e b, exatamente uma das sequintes sentenças deve ser verdadeira: $a < b$, $a = b$ ou $a > b$.

Apesar de quaisquer dois números poderem ser comparados, nem todas as funções são assintoticamente comparáveis. Ou seja, para duas funções $f(n)$ e $g(n)$, pode ser que nem $f(n) = O(g(n))$ nem $f(n) = \Omega(g(n))$.

Tricotomia

Exemplo: Considere as funções $f(n) = n$ e $g(n) = n^{1+\sin n}$

Neste exemplo, a expressão $1 + \sin n$ varia entre 0 e 2.

$$n^{1+\sin n} = \begin{cases} 1 & \text{se } n \in \{3\pi/2, 7\pi/2, \cdots\} \\ n & \text{se } n \in \{\pi, 3\pi, \cdots\} \\ n^2 & \text{se } n \in \{\pi/2, 5\pi/2, \cdots\} \end{cases}$$

Não se pode afirmar que $f(n) = O(g(n))$ e nem $f(n) = \Omega(g(n))$.

Notação assintótica em expressões

Como interpretar, por exemplo, $2n^2 + n - 1 = 2n^2 + \Theta(n)$?

Existem uma função $f(n) = \Theta(n)$ tal que

$$2n^2 + n - 1 = 2n^2 + f(n).$$

Neste caso, $f(n) = n - 1$.

Notação assintótica em expressões

E a expressão $2n^2 + \Theta(n) = \Theta(n^2)$?

Para toda função $f(n) = \Theta(n)$, existe uma função $g(n) = \Theta(n^2)$ tal que $2n^2 + f(n) = g(n)$.

Por exemplo,

$f(n) = n - \log n + 5 = \Theta(n)$ e

$g(n) = 2n^2 + n - \log n + 5 = \Theta(n^2)$.

Principais classes O (oh grande)

Complexidade	Nome	Eficiente
$O(1)$	Constante	sim
$O(\log n)$	Logaritmica	
$O(n)$	Linear	
$O(n \log n)$	"Linearítma"	
$O(n^2)$	Quadrática	não
$O(n^3)$	Cúbica	
$O(2^n)$	Exponencial	
$O(n!)$	Fatorial	

Obrigado