Fontes principais

1. Cormem T. H.; Leiserson C. E.; Rivest R.: Stein C.. *Introduction to Algorithms*, 3^a edição, MIT Press, 2009

2. Análise de algoritmo - IME/USP (prof. Paulo Feofiloff)
   `http://www.ime.usp.br/~pf/analise_de_algoritmos`

Divisão e conquista

Divisão e conquista

1. **Dividir** o problema (instância) em uma ou mais subproblemas.

2. **Conquistar** cada subproblema recursivamente

3. **Combinar** soluções

Busca binária

Busca binária

Encontrar x em um vetor ordenado

1. **Dividir:** comparar x com o elemento do meio
2. **Conquistar:** recursão sobre um subvetor
3. **Combinar:** simples

Busca binária

$T(n) = 1T(n/2) + \Theta(1)$

$n^{\log_b a} = n^{\log_2 1} = 1$

$f(n) = 1$ está "por cima"ou "por baixo"de $n^{\log_b a} = 1$?

$f(n) = 1 = \Theta(1)$ (Caso 2)

$\therefore T(n) = \Theta(1 \cdot \log n)$

Potência de um número

Potência de um número

Dado um número x, um inteiro $n \geq 0$, computar x^n

Algoritmo ingênuo:

$$\underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}_{n} = x^n$$

Tempo: $\Theta(n)$

Potência de um número

$$x^n = \begin{cases} x^{\frac{n}{2}} \cdot x^{\frac{n}{2}} & \text{, se } n \text{ é par} \\ x^{\frac{n-1}{2}} \cdot x^{\frac{n-1}{2}} \cdot x & \text{, se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n/2) + \Theta(1) \\ &= \Theta(\log n) \end{aligned}$$

Número de Fibonacci

Número de Fibonacci

$$F_n = \begin{cases} 0 & \text{, se } n = 0 \\ 1 & \text{, se } n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{, se } n \geq 2 \end{cases}$$

Algoritmo recursivo ingênuo

Tempo: $\Omega(\Phi^n)$ onde $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

- ▷ algoritmo exponencial: ruim
- ▷ algoritmo polinomial: bom

Obs.: Φ é a razão áurea

Número de Fibonacci

Algoritmo bottom-up:

computar: $F_0, F_1, F_2, \cdots, F_n$

Tempo: $\Theta(n)$

Número de Fibonacci

Algoritmos recursivo ingênuo (versão 1)

$F_n = \frac{\Phi^n}{\sqrt{5}}$ arredondado para o inteiro mais próximo.

Tempo: $\Theta(\lg n)$

Obs.: Este método não é confiável, por causa da aritmética de ponto flutuante que é propensa a erros de arredondamento.

Número de Fibonacci

Teorema:

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n$$

$\Rightarrow$ tempo: $\Theta(\lg n)$

Número de Fibonacci

Teorema:

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n$$

Prova: Por indução sobre n

Passo base:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{bmatrix}$$

Número de Fibonacci

Passo indutivo:

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{bmatrix}^{n-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Número de Fibonacci

Passo indutivo:

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{bmatrix}^{n-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Número de Fibonacci

Passo indutivo:

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{bmatrix}^{n-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n}$$

□

Contagem de inversões

Contagem de inversões

Problema: Dada uma permutação $p[1..n]$, determinar o número de inversões em p.

Uma inversão é um par (i, j) de índices de p tal que $i < j$ e $p[i] > p[j]$.

Contagem de inversões (Exemplo)

Entrada:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p	2	4	1	9	5	3	8	6	7

Saída:11

Inversões: $(1,3),(2,3),(4,5),(2,6),(4,6),(5,6),$
$(4,7),(4,8),(7,8),(4,9)$ e $(7,9)$.

Contagem de inversões - solução ingênua

conta-inversões(p, n)

```
1  c = 0
2  para i = 0 até n − 1 faça
3      para j = i + 1 até n faça
4          se p[i] > p[j] então
5              c = c + 1
6  retorne c
```

Tempo: $O(n^2)$

Contagem de inversões

Solução melhor: divisão e conquista

Idéia: vamos ordenar e contar ao mesmo tempo!

Contagem de inversões - adaptação do merge-sort

Conta o número de inversões de $A[p..r]$, com $p \leq r$, e rearranja $A[p..r]$ em ordem crescente.

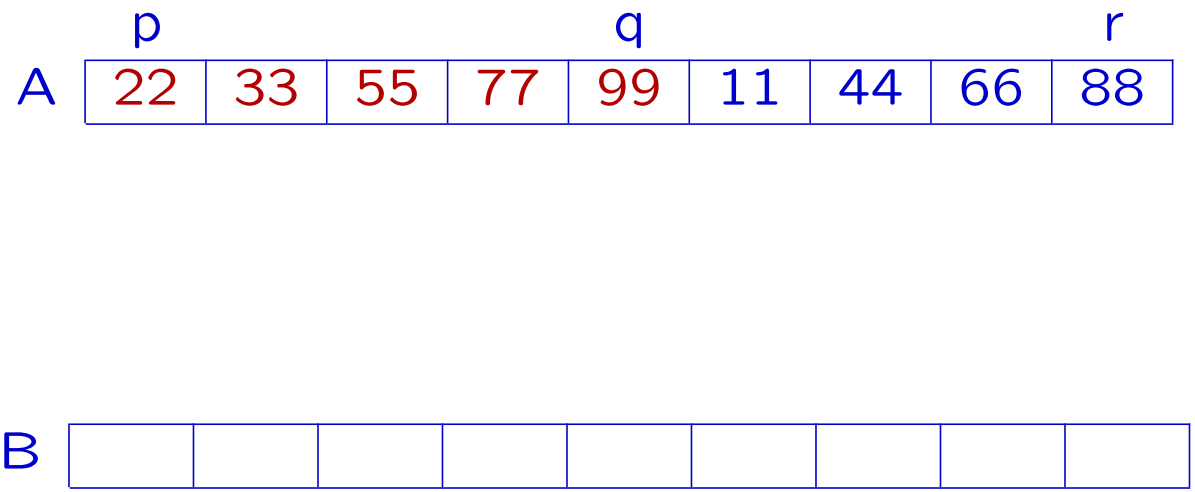
conta-e-ordena(A, p, r)

```
1  se p ≥ r
2      então retorne 0
3      senão q = ⌊(p + r)/2⌋
4            c1 = conta-e-ordena(A, p, q)
5            c2 = conta-e-ordena(A, q + 1, r)
6            c3 = conta-e-intercala(A, p, q, r)
7  retorne c1 + c2 + c3
```

conta-e-intercala(A, p, q, r)

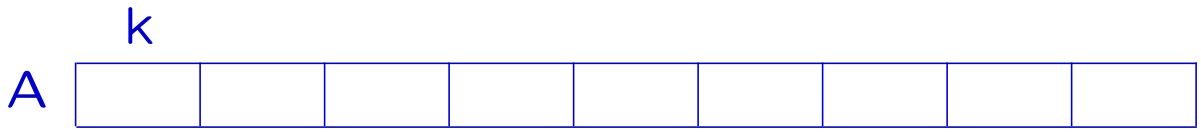
```
 1  para i = p até q faça
 2      B[i] = A[i]
 3  para j = q + 1 até r faça
 4      B[r + q + 1 − j] = A[j]
 5  i = p
 6  j = r
 7  c = 0
 8  para k = p até r faça
 9      se B[i] ≤ B[j] então
10              A[k] = B[i]
11              i = i + 1
12      senão A[k] = B[j]
13              j = j − 1
14              c = c + (q − i + 1)
15  retorne c
```

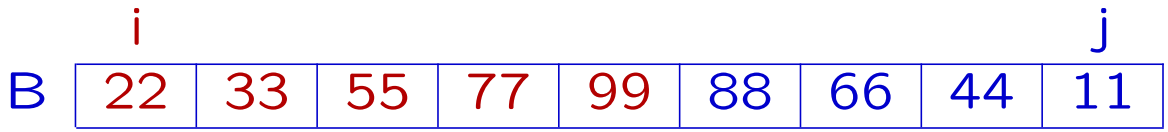
Simulação



$c = 0$

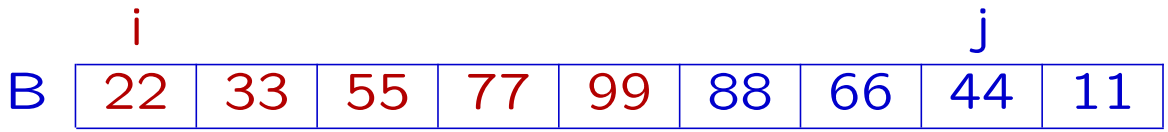
Simulação





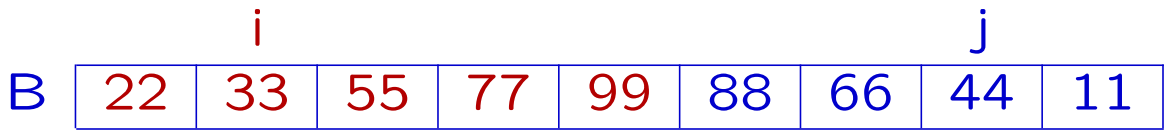
$c = 0$

Simulação



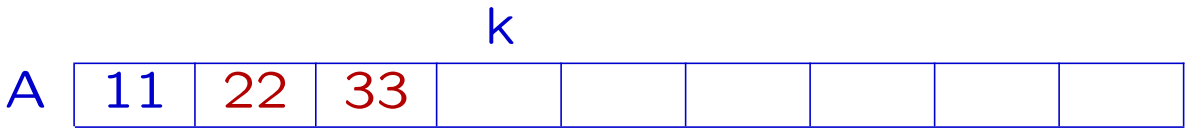
$c = 0 + 5 = 5$

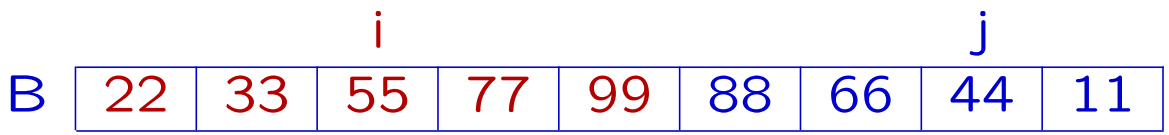
Simulação



$c = 5$

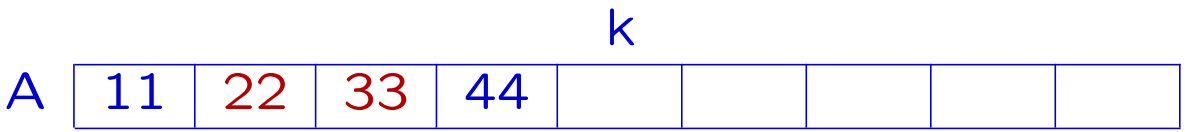
Simulação

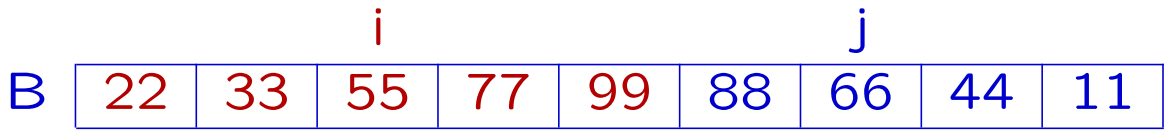




$c = 5$

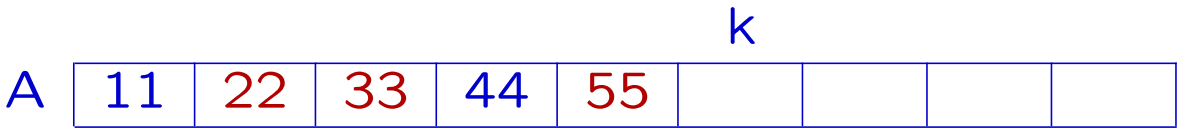
Simulação

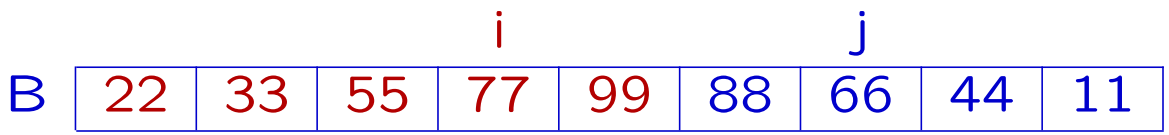




$c = 5 + 3 = 8$

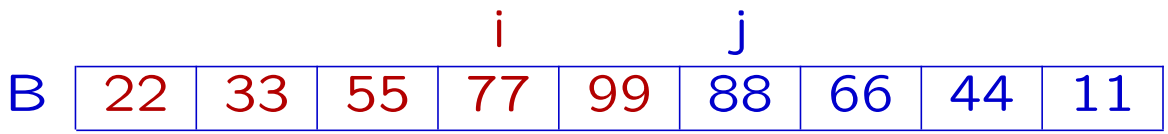
Simulação





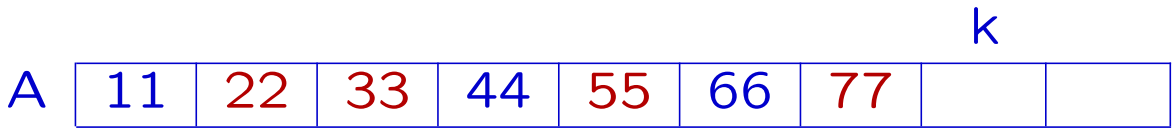
$c = 8$

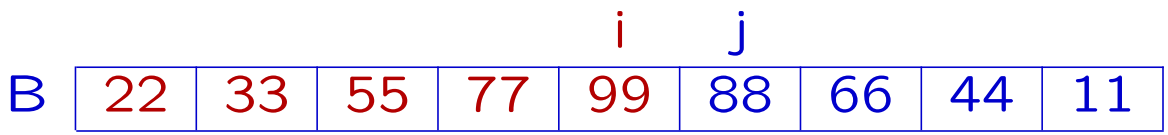
Simulação



$c = 8 + 2 = 10$

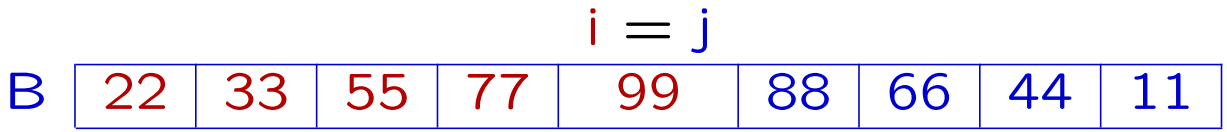
Simulação





$c = 10$

Simulação



$c = 10 + 1 = 11$

Simulação

A	11	22	33	44	55	66	77	88	99

					j	i			
B	22	33	55	77	99	88	66	44	11

$c = 11$

conta-e-intercala(A, p, q, r)

```
 1  para i = p até q faça
 2      B[i] = A[i]
 3  para j = q + 1 até r faça
 4      B[r + q + 1 − j] = A[j]
 5  i = p
 6  j = r
 7  c = 0
 8  para k = p até r faça
 9      se B[i] ≤ B[j] então
10              A[k] = B[i]
11              i = i + 1
12      senão A[k] = B[j]
13              j = j − 1
14              c = c + (q − i + 1)
15  retorne c
```

Contagem de inversões

Análise do algoritmo conta-e-intercala:

- ▷ linhas 1-4 : $O(n)$
- ▷ linhas 5-7 : $O(1)$
- ▷ linhas 8-14 : $O(n)$
- ▷ linha 15 : $O(1)$

total: $T(n) = 11n + 4 = O(n)$

Contagem de inversões

Análise do algoritmo conta-e-ordena:

$T(n) = 2T(n/2) + n$

definida para n potência de 2.

Prova utilizando a técnica da **árvore de recorrência**.

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ 2T(n/2) + n & \text{se } n \geq 2, n \text{ potência de 2} \end{cases}$$

Contagem de inversões

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ 2T(n/2) + n & \text{se } n \geq 2, n \text{ potência de 2} \end{cases}$$

Desenrolando a recorrência:

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$

Contagem de inversões

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ \\ 2T(n/2) + n & \text{se } n \geq 2, n \text{ potência de } 2 \end{cases}$$

Desenrolando a recorrência:

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n/2) + n \\ T(n) &= 2T(2T(n/2^2) + n/2) + n = 2^2T(n/2^2) + 2n \end{aligned}$$

Contagem de inversões

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ \\ 2T(n/2) + n & \text{se } n \geq 2, n \text{ potência de 2} \end{cases}$$

Desenrolando a recorrência:

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n/2) + n \\ T(n) &= 2T(2T(n/2^2) + n/2) + n = 2^2T(n/2^2) + 2n \\ T(n) &= 2^2T(2T(n/2^3) + n/2^2) + 2n = 2^3T(n/2^3) + 3n \end{aligned}$$

Contagem de inversões

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ \\ 2T(n/2) + n & \text{se } n \geq 2, n \text{ potência de 2} \end{cases}$$

Desenrolando a recorrência:

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n/2) + n \\ &= 2T(2T(n/2^2) + n/2) + n = 2^2T(n/2^2) + 2n \\ &= 2^2T(2T(n/2^3) + n/2^2) + 2n = 2^3T(n/2^3) + 3n \\ &= 2^3T(2T(n/2^4) + n/2^3) + 3n = 2^4T(n/2^4) + 4n \end{aligned}$$

Contagem de inversões

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ \\ 2T(n/2) + n & \text{se } n \geq 2, n \text{ potência de 2} \end{cases}$$

Desenrolando a recorrência:

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n/2) + n \\ &= 2T(2T(n/2^2) + n/2) + n = 2^2T(n/2^2) + 2n \\ &= 2^2T(2T(n/2^3) + n/2^2) + 2n = 2^3T(n/2^3) + 3n \\ &= 2^3T(2T(n/2^4) + n/2^3) + 3n = 2^4T(n/2^4) + 4n \\ &= \cdots \\ &= 2^kT(n/2^k) + kn \end{aligned}$$

onde $k = \lg n$. Disso concluimos que $T(n) = n + n \lg n$

Contagem de inversões

Análise do algoritmo conta-e-ordena:

$T(n) = 2T(n/2) + n$

definida para n potência de 2.

Prova utilizando o **método da substituição**

Palpite: $T(n) = O(n \lg n)$

Contagem de inversões

Afirmação: A recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ 2T(n/2) + n & \text{se } n \geq 2, n \text{ potência de } 2 \end{cases}$$

tem como solução $T(n) = n + n \lg n$

Prova: Por indução em n

Base: $n = 1$

$$T(1) = 1 + 1 \cdot \lg 1 = 1 + 1 \cdot 0 = 1$$

Contagem de inversões

Hipótese de indução: $T(n) = n + n \lg n$ para $m < n$

Passo de indução: $n \geq 2$

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$

Contagem de inversões

Hipótese de indução: $T(n) = n + n \lg n$ para $m < n$

Passo de indução: $n \geq 2$

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n/2) + n \\ &= 2(n/2 + (n/2)\lg(n/2)) + n \end{aligned}$$

Contagem de inversões

Hipótese de indução: $T(n) = n + n \lg n$ para $m < n$

Passo de indução: $n \geq 2$

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n/2) + n \\ &= 2(n/2 + (n/2)\lg(n/2)) + n \\ &= 2n + n\lg(n/2) \end{aligned}$$

Contagem de inversões

Hipótese de indução: $T(n) = n + n \lg n$ para $m < n$

Passo de indução: $n \geq 2$

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n/2) + n \\ &= 2(n/2 + (n/2)\lg(n/2)) + n \\ &= 2n + n\lg(n/2) \\ &= 2n + n(\lg n - 1) \end{aligned}$$

Contagem de inversões

Hipótese de indução: $T(n) = n + n \lg n$ para $m < n$

Passo de indução: $n \geq 2$

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n/2) + n \\ &= 2(n/2 + (n/2)\lg(n/2)) + n \\ &= 2n + n\lg(n/2) \\ &= 2n + n(\lg n - 1) \\ &= n + n\lg n \end{aligned}$$

□

Máximo e o mínimo de um vetor

Máximo e o mínimo de um vetor

Entrada: um vetor $A[]$, um par (l, r) representando $A[l \cdots r]$
Saída: um par (A_i, A_j) contendo o maior e o menor valor de $A[l \cdots r]$

Máximo e o mínimo de um vetor

```
maxMin(A, l, r)
 1  se l = r
 2      então retorne (A[l], A[r])
 3      senão se l = r
 4              então se A_l ≥ A_r
 5                      então retorne (A[l], A[r])
 6                      senão retorne (A[r], A[l])
 7              senão k = ⌊(l + r)/⌋2
 8                      (MaxL, MinL) = maxMin(A, l, k)
 9                      (MaxR, MinR) = maxMin(A, l + 1, k)
10                      max = maximo(MaxL, MaxR)
11                      min = maximo(MinL, MinR)
12              retorne (max, min)
```

Tempo gasto pelo maxMin

Seja $T(n)$ o número de comparações feitas pelo maxMin para um vetor com n elementos. Então:

$T(1) = 0$, $T(2) = 1$
$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + 2$

Vamos mostrar que

$$T(n) \leq \frac{5n}{3} - 2$$

Tempo gasto pelo maxMin

$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + 2$$

$$\leq \frac{5\lceil n/2 \rceil}{3} - 2 + \frac{5\lceil n/2 \rceil}{3} - 2 + 2$$

$$\leq \frac{5}{3}(\lceil n/2 \rceil + \lfloor n/2 \rfloor) - 2$$

$$\leq \frac{5n}{3} - 2$$

seleção do k-ésimo mínimo

seleção do k-ésimo mínimo

Dado um vetor $L[1 \cdots n]$ com n elementos, escreva um algoritmo para determinar o k-ésimo menor elemento, para $1 \leq k \leq n$.

seleção do k-ésimo mínimo

Dado um vetor $L[1 \cdots n]$ com n elementos, escreva um algoritmo para determinar o k-ésimo menor elemento, para $1 \leq k \leq n$.

Solução: ordenar o vetor.

seleção do k-ésimo mínimo

Dado um vetor $L[1 \cdots n]$ com n elementos, escreva um algoritmo para determinar o k-ésimo menor elemento, para $1 \leq k \leq n$.

Solução: ordenar o vetor.

Tempo: $O(n \log n)$

seleção do k-ésimo mínimo

Dado um vetor $L[1 \cdots n]$ com n elementos, escreva um algoritmo para determinar o k-ésimo menor elemento, para $1 \leq k \leq n$.

Solução: ordenar o vetor.

Tempo: $O(n \log n)$

Utilizando divisão e conquista, vamos projetar um algoritmo linear.

seleção do k-ésimo mínimo

Idéia: dividir L em três sublistas L_1, L_2 e L_3 de acordo com um elemento m de L tais que:

- L_1 contenha todos os elementos **menores** do que m.
- L_2 contém todos os elementos **iguais** a m.
- L_3 contenha todos os elementos **maiores** do que m.

Escolha de m

- ▷ Divida L em $|L|/5$ listas de 5 elementos cada;
- ▷ Ordene separadamente cada uma dessas listas;
- ▷ Seja M a lista das medianas das listas de 5 elementos;
- ▷ m será a mediana de M;

Escolha de m

ex.: 10, 8, 15, 9, 7, 20, 6, 1, 4, 19, 12, 11, 2, 5, 3, 18, 13, 14, 16, 17

15	20	12	18
10	19	11	17
9	6	5	16
8	4	3	14
7	1	2	13

Escolha de m

ex.: 10, 8, 15, 9, 7, 20, 6, 1, 4, 19, 12, 11, 2, 5, 3, 18, 13, 14, 16, 17

15	20	12	18
10	19	11	17
9	6	5	16
8	4	3	14
7	1	2	13

Escolha de m

ex.: 10, 8, 15, 9, 7, 20, 6, 1, 4, 19, 12, 11, 2, 5, 3, 18, 13, 14, 16, 17

15	20	12	18
10	19	11	17
9	6	5	16
8	4	3	14
7	1	2	13

12	20	15	18
11	19	10	17
5	6	9	16
3	4	8	14
2	1	7	13

seleção do k-ésimo mínimo

Algoritmo: seleção(k, L)

Entrada: Um inteiro k e um vetor $L[1..n]$.

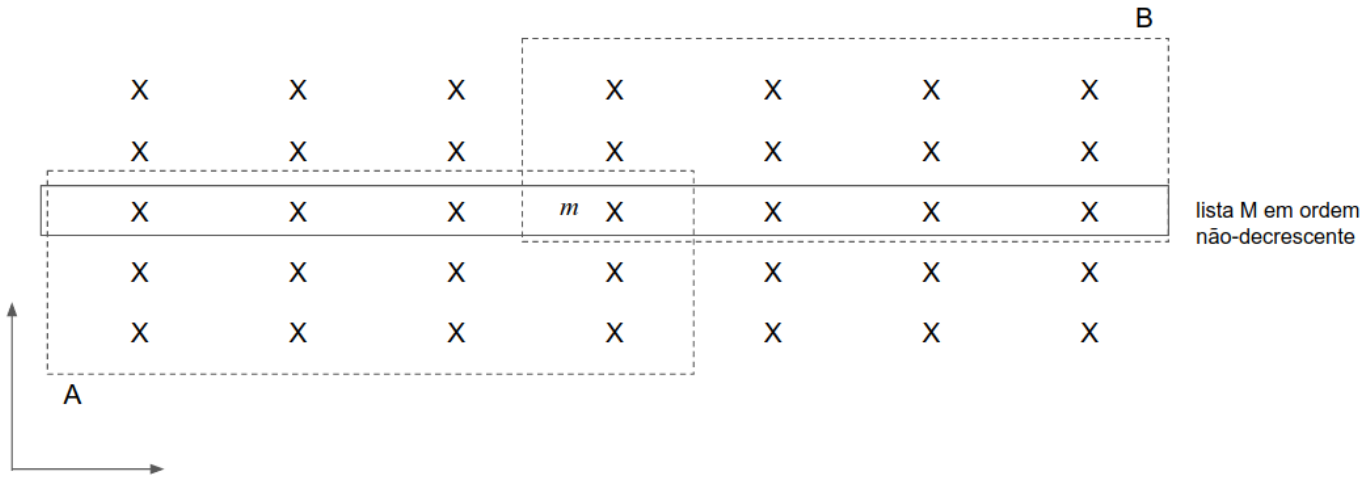
Saída: O k-ésimo menor elemento de L.

seleção do k-ésimo mínimo

Algoritmo: seleção(k, L)

1. Se $n < 15$ então "ordene L e devolva L_k;
2. Divida L em listas de 5 elementos cada;
3. Ordene separadamente cada uma dessas listas;
4. Seja M a lista das medianas das listas de 5 elementos;
5. $m =$ seleção$(\lceil |M|/2 \rceil, M)$;
6. Sejam L_1, L_2 e L_3 as sublistas dos elementos de L que são menores, iguais e maiores do que m, respectivamente;
7. Se $|L_1| \geq k$ então devolva seleção(k, L_1)
8. senão Se $(|L_1| + |L_2|) \geq k$
   - então devolva m
   - senão devolva seleção$(k - |L_1| - |L2|, L_3)$

seleção do k-ésimo mínimo



- Elementos de A são menores ou iguais a m.
- Elementos de B são maiores ou iguais a m.

seleção do k-ésimo mínimo

▷ A lista M das medianas contém no máximo $n/5$ elementos então

  ▷ linha 5: $T(n/5)$ no máximo.

▷ As chamada recursivas de seleção(k, L_1) e seleção$(k - |L_1| - |L2|, L_3)$ requerem tempo máximo $T(3n/4)$.

▷ As demais linhas requerem tempo $O(n)$.

seleção do k-ésimo mínimo

Tempo de execução:

- ▷ linhas 1 a 4: $O(n)$
- ▷ linha 5: $T(n/5)$
- ▷ linha 6: $O(n)$
- ▷ linhas 7 e 8: $T(3n/4)$

seleção do k-ésimo mínimo

Podemos expressar o tempo $T(n)$ pela seguinte recorrência:

$$T(n) \leq \begin{cases} cn & \text{para } n < 15, \\ T(n/5) + T(3n/4) + cn & \text{para } n \geq 15 \end{cases}$$

seleção do k-ésimo mínimo

Vamos mostrar, por indução em n que

$$T(n) \leq 20cn$$

seleção do k-ésimo mínimo

Vamos mostrar, por indução em n que

$$T(n) \leq 20cn$$

Prova:

Base: A afirmação é verdadeira para $n < 15$

Hipótese: Vamos supor, por hipótese de indução, que ela é válida para valores menores do que n, e vamos provar a sua validade para n.

Passo de indução:

$$T(n) \leq T(n/5) + T(3n/4) + cn$$

Passo de indução:

$$\begin{aligned} T(n) &\leq T(n/5) + T(3n/4) + cn \\ &\leq 20c(n/5) + 20c(3n/4) + cn \end{aligned}$$

Passo de indução:

$$\begin{aligned} T(n) &\leq T(n/5) + T(3n/4) + cn \\ &\leq 20c(n/5) + 20c(3n/4) + cn \\ &= 20c(n/5 + 3n/4) + cn \end{aligned}$$

Passo de indução:

$$\begin{aligned} T(n) &\leq T(n/5) + T(3n/4) + cn \\ &\leq 20c(n/5) + 20c(3n/4) + cn \\ &= 20c(n/5 + 3n/4) + cn \\ &= 20c(19n/20) + cn \end{aligned}$$

Passo de indução:

$$\begin{aligned} T(n) &\leq T(n/5) + T(3n/4) + cn \\ &\leq 20c(n/5) + 20c(3n/4) + cn \\ &= 20c(n/5 + 3n/4) + cn \\ &= 20c(19n/20) + cn \\ &= 20cn \end{aligned}$$

Multiplicação de matriz

Multiplicação de matriz

Entrada: $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$

$C = [c_{ij}] = A \cdot B$

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Multiplicação de matriz

Algoritmo padrão : $\Theta(n^3)$

```
1  para i = 1 até n faça
2      para j = 1 até n faça
3          c_ij = 0
4          para k = 1 até n faça
5              c_ij = c_ij + a_ik · b_kj
```

Multiplicação de matriz

Algoritmo divisão e conquista

Idéia: matriz $n \times n$

▷ Dividir a matriz em 4 submatrizes de dimensões $n/2 \times n/2$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|c} r & s \\ \hline t & u \end{array}\right]}_{C} = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & d \end{array}\right]}_{A} \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} e & f \\ \hline g & h \end{array}\right]}_{B}$$

Multiplicação de matriz

$$\underbrace{\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}}_{C} = \underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}}_{B}$$

$r = ae + bg$
$s = af + bh$
$t = ce + dg$
$u = cf + dh$

Obtemos 8 multiplicações recursivas de matrizes $n/2 \times n/2$ e 4 adições de matrizes ($\Theta(n^2)$)

Multiplicação de matriz

$$\underbrace{\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}}_{C} = \underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}}_{B}$$

$$\begin{aligned} r &= ae + bg \\ s &= af + bh \\ t &= ce + dg \\ u &= cf + dh \end{aligned}$$

$$T(n) = 8T(n/2) + \Theta(n^2)$$

Multiplicação de matriz

$$\underbrace{\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}}_{C} = \underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}}_{B}$$

$$\begin{aligned} r &= ae + bg \\ s &= af + bh \\ t &= ce + dg \\ u &= cf + dh \end{aligned}$$

$$T(n) = 8T(n/2) + \Theta(n^2)$$

$$= \Theta(n^3) \text{ (caso 1)}$$

Multiplicação de matriz

Algoritmo de Strassen

Idéia: reduzir o número de multiplicações

$$P_1 = a \cdot (f - h)$$
$$P_2 = (a + b) \cdot h$$
$$P_3 = (c + d) \cdot e$$
$$P_4 = d \cdot (g - e)$$
$$P_5 = (a + d) \cdot (e + h)$$
$$P_6 = (b - d) \cdot (g + h)$$
$$P_7 = (a - c) \cdot (e + f)$$

$$r = P_5 + P_4 - P_2 + P_6$$
$$s = P_1 + P_2$$
$$t = P_3 + P_4$$
$$u = P_5 + P_1 - P_3 + P_7$$

Multiplicação de matriz

Algoritmo de Strassen

1. **Dividir:** Computar os termos por produto

2. **Conquistar:** Recursivamente computar $P_1, P_2, \cdots, P_7$

3. **Combinar:** Computar r, s, t, u ($\Theta(n^2)$)

Tempo: $T(n) = 7T(n/2) + \Theta(n^2)$

$= \Theta(n^{\lg_2 7}) = O(n^{2.81})$

O melhor algoritmo encontrado até o momento: $O(n^{2.376})$

Obrigado