Fontes principais

1. Cormem T. H.; Leiserson C. E.; Rivest R.: Stein C.. *Introduction to Algorithms*, 3^a edição, MIT Press, 2009
2. Análise de algoritmo - IME/USP (prof. Paulo Feofiloff) `http://www.ime.usp.br/~pf/analise_de_algoritmos`

Programação dinâmica

Programação dinâmica

"Recursão com apoio de uma tabela"

Programação dinâmica $\neq$ programação de computadores

Aplicável a problemas de otimização

Combina solução de subproblemas que **não são independentes**

Programação dinâmica

Relação problema - subproblema geralmente expressa em termos de uma fórmula recursiva.

"Não existe"prova de corretude

Estratégia bottom-up (diferente de divisão e conquista que é top down) e possui muitas sequências de decisões.

Cálculo fatorial

Cálculo fatorial

solução recursiva natural

```
fatorial(n)
  se n = 0
      então retorne 1
      senão
          retorne n * fatorial(n − 1)
```

Como é uma solução com programação dinâmica?

Cálculo fatorial (PD)

```
fatorial(n)
se n = 0
    então retorne 1
    senão
        se (fat[n]! = 0) ▷ caso já calculado
            então retorne fat[n]
            senão
                retorne fat[n] = n * fatorial(n − 1)
```

Multiplicação de matrizes

Multiplicação de matrizes

Problema: Multiplicar n matrizes realizando o número mínimo de operações.

$$M = M_1 \times M_2 \times \ldots M_n$$

Multiplicação de matrizes

Exemplo: $(A_1)_{10\times100}$, $(A_2)_{100\times5}$ e $(A_3)_{5\times50}$

Quantas multiplicações são realizadas nas sequencias abaixo?

$$\begin{aligned} A &= (A_1 \times A_2) \times A_3 \\ A &= A_1 \times (A_2 \times A_3) \end{aligned}$$

Multiplicação de matrizes

Exemplo: $(A_1)_{10\times100}$, $(A_2)_{100\times5}$ e $(A_3)_{5\times50}$

Número de multiplicações:

$$\begin{aligned} A &= (A_1 \times A_2) \times A_3 \\ &= (10 \times 100 \times 5) + (10 \times 5 \times 50) \\ &= 7500 \text{ operações} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= A_1 \times (A_2 \times A_3) \\ &= (100 \times 5 \times 50) + (10 \times 100 \times 50) \\ &= 75000 \text{ operações} \end{aligned}$$

Multiplicação de matrizes

Exemplo: $(A_1)_{10\times 100}$, $(A_2)_{100\times 5}$ e $(A_3)_{5\times 50}$

Número de multiplicações:

$$\begin{aligned} A &= (A_1 \times A_2) \times A_3 \\ &= 7500 \text{ operações} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= A_1 \times (A_2 \times A_3) \\ &= 75000 \text{ operações} \end{aligned}$$

Conclusão: A ordem das multiplicações faz **muita** diferença

Multiplicação de matrizes

Como determinar a sequência ótima de multiplicação?

Multiplicação de matrizes

Como determinar a sequência ótima de multiplicação?

▷ Algoritmo força bruta é "impraticável": existem $\Omega(2^n)$ possibilidades (número de Catalão)

Aplicando programação dinâmica:

▷ É possível determinar uma sequência ótima eficiente (polinomial)

Multiplicação de matrizes

Para resolver este problema, tudo que precisamos é saber qual o melhor índice k tal que

$$A = (A_1 \times A_2 \times \cdots A_k) \cdot (A_{k+1} \times A_{k+2} \times \cdots A_n)$$

onde k varia de 1 a $n-1$.

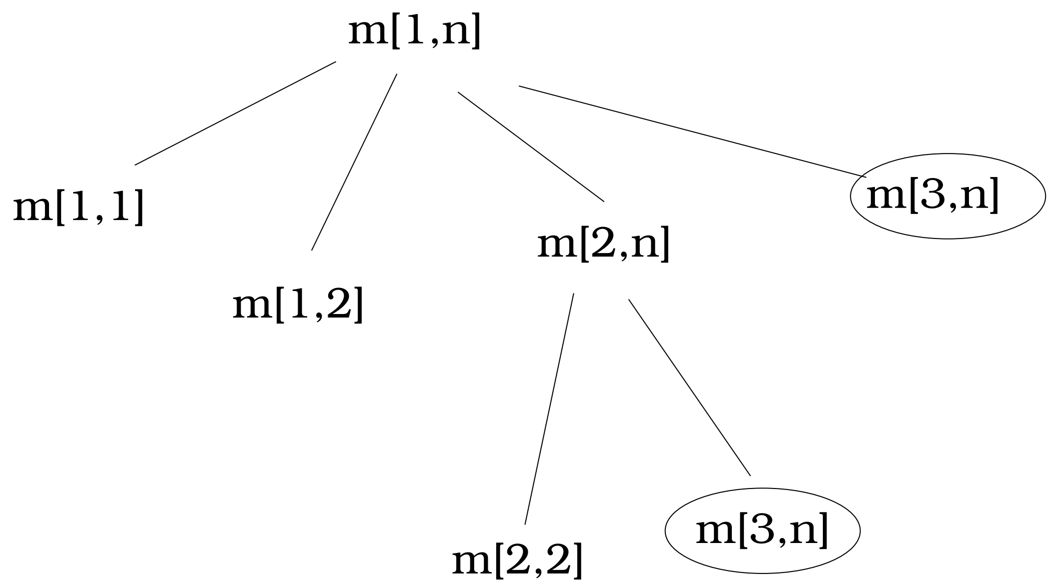
Multiplicação de matrizes

Denotemos por $m[i,j]$ o número mínimo de multiplicações necessárias para multiplicar $A_i \cdots A_j$, $i \leq j$. Temos que:

$$m[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{, se } i = j \\ min\{m[i,k] + m[k+1,j] + p_{i-1}p_kp_j\} & \text{, se } i < j \end{cases}$$

onde $p_0, p_1, \cdots p_n$ determinam as dimensões das matrizes: cada A_i tem dimensão $p_{i-1} \times p_i$.

Multiplicação de matrizes



O algoritmo recursivo para calcular $m[i,j]$ por esta fórmula seria excessivamente lenta (exponencial)

Multiplicação de matrizes

Com a programação dinâmica é possível construir uma tabela para armazenar os valores de $m[i,j]$ de forma *bottom-up*, usando memoização.

1. $m[i,i] = 0$, para $1 \leq i \leq n$.
2. $m[i,i+1]$ são calculados, para $1 \leq i \leq n-1$.
3. $m[i,i+2]$ são calculados, para $1 \leq i \leq n-2$.
4. e assim por diante

Multiplicação de matrizes

Exemplo: $A = A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4$ com $p = \{200, 2, 30, 20, 5\}$

$A \;\; = A_1 \quad\quad \times A_2 \quad\quad \times A_3 \quad\quad\quad \times A_4$

Multiplicação de matrizes

Exemplo: $A = A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4$ com $p = \{200, 2, 30, 20, 5\}$

$$\begin{array}{llllll} A & = A_1 & \times A_2 & \times A_3 & \times A_4 \\ & (200 \times 2) & (2 \times 30) & (30 \times 20) & (20 \times 5) \end{array}$$

Multiplicação de matrizes

Exemplo: $A = A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4$ com $p = \{200, 2, 30, 20, 5\}$

$$\begin{array}{llllll} A & = A_1 & \times A_2 & \times A_3 & \times A_4 \\ & (200 \times 2) & (2 \times 30) & (30 \times 20) & (20 \times 5) \\ & (p_0 \times p_1) & (p_1 \times p_2) & (p_2 \times p_3) & (p_3 \times p_4) \end{array}$$

Multiplicação de matrizes

Exemplo: $A = A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4$ com $p = \{200, 2, 30, 20, 5\}$

$$\begin{array}{llll} A = A_1 & \times A_2 & \times A_3 & \times A_4 \\ (200 \times 2) & (2 \times 30) & (30 \times 20) & (20 \times 5) \\ (p_0 \times p_1) & (p_1 \times p_2) & (p_2 \times p_3) & (p_3 \times p_4) \end{array}$$

$m[1,1] = m[2,2] = m[3,3] = m[4,4] = 0$

Multiplicação de matrizes

Exemplo: $A = A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4$ com $p = \{200, 2, 30, 20, 5\}$

$$\begin{array}{llll} A = A_1 & \times A_2 & \times A_3 & \times A_4 \\ (200 \times 2) & (2 \times 30) & (30 \times 20) & (20 \times 5) \\ (p_0 \times p_1) & (p_1 \times p_2) & (p_2 \times p_3) & (p_3 \times p_4) \end{array}$$

$m[1,1] = m[2,2] = m[3,3] = m[4,4] = 0$

$m[1,2] = 12000, \quad m[2,3] = 1200, \quad m[3,4] = 3000$

Multiplicação de matrizes

$m[i, j] = min\{m[i, k] + m[k + 1, j] + p_{i-1}p_kp_j\}$, para $i \cdots j - 1$

Multiplicação de matrizes

$$m[i,j] = min\{m[i,k] + m[k+1,j] + p_{i-1}p_kp_j\}, k = i \cdots j-1$$

$$m[1,3] = min\{m[1,k] + m[k+1,3] + p_0p_kp_3\}, k = 1,2$$

Multiplicação de matrizes

$$m[i,j] = min\{m[i,k] + m[k+1,j] + p_{i-1}p_kp_j\}, k = i \cdots j-1$$

$$m[1,3] = min\{m[1,k] + m[k+1,3] + p_0p_kp_3\}, k = 1,2$$

$$m[1,3] \;\; = min\{m[1,1] + m[2,3] + p_0p_1p_3, m[1,2] + m[3,3] + p_0p_2p_3\}$$

Multiplicação de matrizes

$$m[i,j] = min\{m[i,k] + m[k+1,j] + p_{i-1}p_kp_j\}, k = i \cdots j-1$$

$$m[1,3] = min\{m[1,k] + m[k+1,3] + p_0p_kp_3\}, k = 1,2$$

$$\begin{aligned} m[1,3] &= min\{m[1,1] + m[2,3] + p_0p_1p_3, m[1,2] + m[3,3] + p_0p_2p_3\} \\ &= min\{0 + 1200 + 8000, 12000 + 0 + 120000\} \end{aligned}$$

Multiplicação de matrizes

$$m[i,j] = min\{m[i,k] + m[k+1,j] + p_{i-1}p_kp_j\}, k = i \cdots j-1$$

$$m[1,3] = min\{m[1,k] + m[k+1,3] + p_0p_kp_3\}, k = 1,2$$

$$\begin{aligned} m[1,3] \;&= min\{m[1,1] + m[2,3] + p_0p_1p_3, m[1,2] + m[3,3] + p_0p_2p_3\} \\ &= min\{0 + 1200 + 8000, 12000 + 0 + 120000\} \\ &= 9200 \quad (A_1 \times (A_2 \times A_3)) \end{aligned}$$

Multiplicação de matrizes

$m[i,j] = min\{m[i,k] + m[k+1,j] + p_{i-1}p_kp_j\}$, para $i \cdots j-1$

Multiplicação de matrizes

$$m[i,j] = min\{m[i,k] + m[k+1,j] + p_{i-1}p_kp_j\}, k = i \cdots j-1$$

$$m[2,4] = min\{m[2,k] + m[k+1,4] + p_1p_kp_4\}, k = 2,3$$

Multiplicação de matrizes

$$m[i,j] = min\{m[i,k] + m[k+1,j] + p_{i-1}p_kp_j\}, k = i \cdots j-1$$

$$m[2,4] = min\{m[2,k] + m[k+1,4] + p_1p_kp_4\}, k = 2,3$$

$$\begin{aligned} m[2,4] &= min\{m[2,2] + m[3,4] + p_1p_2p_4, m[2,3] + m[4,4] + p_1p_3p_4\} \\ &= min\{0 + 3000 + 300, 1200 + 0 + 200\} \\ &= 1400 \quad ((A_2 \times A_3) \times A_4) \end{aligned}$$

Multiplicação de matrizes

$m[i,j] = min\{m[i,k] + m[k+1,j] + p_{i-1}p_kp_j\}$, para $i \cdots j-1$

Multiplicação de matrizes

$$m[i,j] = min\{m[i,k] + m[k+1,j] + p_{i-1}p_kp_j\}, k = i \cdots j-1$$

$$m[1,4] = min\{m[1,k] + m[k+1,4] + p_0p_kp_4\}, k = 1,2,3$$

Multiplicação de matrizes

$$m[i,j] = min\{m[i,k] + m[k+1,j] + p_{i-1}p_kp_j\}, k = i \cdots j-1$$

$$m[1,4] = min\{m[1,k] + m[k+1,4] + p_0p_kp_4\}, k = 1,2,3$$

$$\begin{aligned} m[1,4] &= min\{m[1,1] + m[2,4] + p_0p_1p_4, \\ &\qquad m[1,2] + m[3,4] + p_0p_2p_4, \\ &\qquad m[1,3] + m[4,4] + p_0p_3p_4\} \\ &= min\{0 + 1400 + 2000, \\ &\qquad 12000 + 3000 + 30000, \\ &\qquad 9200 + 0 + 20000\} \\ &= 3400 \quad (A_1 \times ((A_2 \times A_3) \times A_4)) \end{aligned}$$

Multiplicação de matrizes

$$m[i,j] = min\{m[i,k] + m[k+1,j] + p_{i-1}p_kp_j\}, k = i \cdots j-1$$

$$m[1,4] = min\{m[1,k] + m[k+1,4] + p_0p_kp_4\}, k = 1,2,3$$

$$\begin{aligned}
m[1,4] &= min\{m[1,1] + m[2,4] + p_0p_1p_4, \\
&\qquad m[1,2] + m[3,4] + p_0p_2p_4, \\
&\qquad m[1,3] + m[4,4] + p_0p_3p_4\} \\
&= min\{0 + 1400 + 2000, \\
&\qquad 12000 + 3000 + 30000, \\
&\qquad 9200 + 0 + 20000\} \\
&= 3400 \quad (A_1 \times ((A_2 \times A_3) \times A_4))
\end{aligned}$$

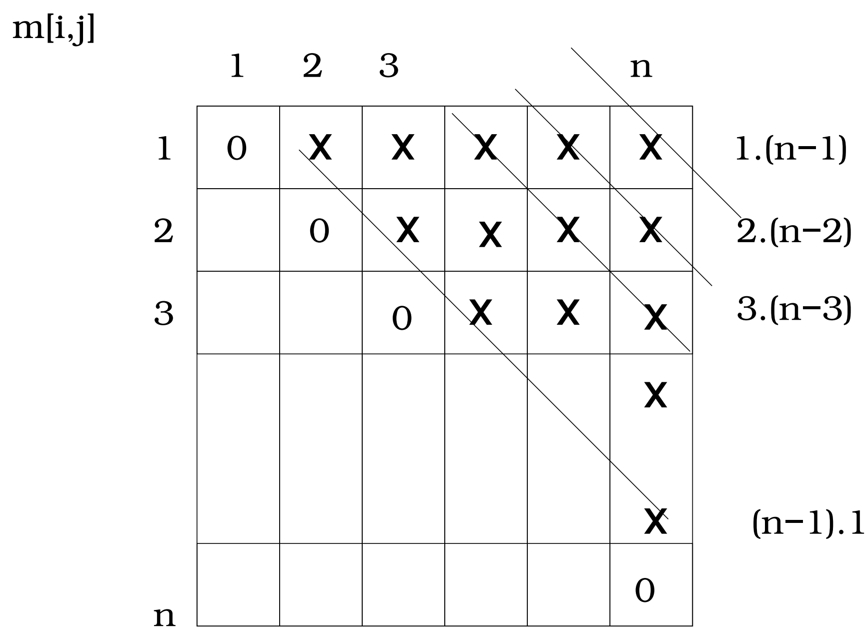
Solução ótima: $(A_1 \times ((A_2 \times A_3) \times A_4))$

Exercícios

1) Aplique o algoritmo para multiplicar 5 matrizes, onde $p = \{30, 35, 15, 5, 10, 20\}$

2) Apresente uma solução para a variante do problema de multiplicação de matrizes em que o objetivo é maximizar o número de operações.

Multiplicação de matrizes



$$\sum_{i=1}^{n-1} i \cdot (n - i) = O(n^3)$$

Multiplicação de matrizes

algoritmo: ordem-cadeia-matriz()

entrada: um vetor $p[0..n]$ das dimensões das matrizes, e n o número de matrizes

saída: $m[1, n]$ (solução ótima)

Multiplicação de matrizes

ordem-cadeia-matriz(p, n)

```
para i = 1 até n faça m[i, i] = 0
para l = 2 até n faça
        para i = 1 até n − l + 1 faça
            j = i + l − 1
            m[i, j] = ∞
            para k = i até j − 1 faça
                q = m[i, k] + m[k + 1, j] + p[i − 1]p[k]p[j]
                se q < m[i, j] então
                    m[i, j] = q
                    s[i, j] = k ▷ usado para recuperar a
                                ▷ parentização ótima
```

Multiplicação de matrizes

imprime-parenteses-otimo(A, s, i, j)

se $i = j$
    então imprime A_i
    senão
        imprime "("
        imprime-parenteses-otimo$(A, s, i, s[i, j])$
        imprime-parenteses-otimo$(A, s, s[i, j] + 1, j)$
        imprime ")"

Multiplicação de matrizes

calcula-produto(A, s, i, j)

se $i = j$
    então retorne A_i
    senão
        $X =$ calcula-produto$(A, s, i, s[i, j])$
        $Y =$ calcula-produto$(A, s, s[i, j] + 1, j)$
        retorne multiplica(X,Y)

Obrigado