Centro Universitário Senac
Bacharelado em Ciência da Computação
Análise e projeto de algoritmos - Exercícios aula 01

Professor: Leonardo Takuno
{leonardo.takuno@gmail.com}

18 de fevereiro de 2021

1. Dado $f(n)$ determine a notação assintótica

   (a) $f(n) = 10^{80}$
   Resposta: $\Theta(1)$

   (b) $f(n) = (20n)^7$
   Resposta: $\Theta(n^7)$

   (c) $f(n) = (\log n)^{100}$
   Resposta: $(\log n)^{100} = 100 \log n = \Theta(\log n)$

   (d) $f(n) = \log_{\ln(5)}(\log n^{100})$
   Resposta: $\log_{\ln(5)}(\log n^{100}) = \frac{1}{\log \ln(5)} \log(\log n^{100}) = \frac{1}{\log \ln(5)} \log(100 \log n) = \frac{1}{\log \ln(5)}(\log(100) + \log\log n))$
   $\therefore f(n) = \Theta(\log\log n)$

   (e) $f(n) = \log\left(\begin{pmatrix} n \\ n/2 \end{pmatrix}\right)$
   Obs. 1: $\begin{pmatrix} n \\ n/2 \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{\frac{n!}{2} \cdot \frac{n!}{2}}$
   Obs. 2:
   Fórmula de Stirling: $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n, e = 2,718$
   Resposta:

$$
\begin{aligned}
&= \log\left(\begin{pmatrix} n \\ n/2 \end{pmatrix}\right) &&= \\
&= \log\left(\frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{\left(\sqrt{2\pi \frac{n}{2}}\left(\frac{n}{2e}\right)^{\frac{n}{2}}\right)^2}\right) &&= \\
&= \log\left(\frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{\left(\sqrt{\pi n}\left(\frac{n}{2e}\right)^{\frac{n}{2}}\right)^2}\right) &&= \\
&= \log\left(\frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{\left(\pi n\left(\frac{n}{2e}\right)^n\right)}\right) &&= \\
&= \log\left(\frac{\sqrt{2\pi n}2^n}{(\pi n)}\right) &&= \\
&= \log\left(\frac{\sqrt{2\pi}2^n}{\pi\sqrt{n}}\right) &&= \\
&= \log\left(\frac{2^n}{\sqrt{n}}\right) &&= \\
&= \log 2^n - \log\sqrt{n} &&= \\
&= \Theta(n) - \tfrac{1}{2}\log n
\end{aligned}
$$

2. Demonstrar que

   (a) $n^2 + 800 = O(n^2)$
   Prova:
   $n^2 + 800 \leq n^2 + 800n^2 = 801n^2 \forall n \geq 1 \Rightarrow c = 801$ e $n_0 = 1$
   Prova alternativa:
   $n^2 + 800 \leq n^2 + n * n = 2n^2 \forall n \geq 800 \Rightarrow c = 2$ e $n_0 = 800$

   (b) $100n^2 = O(n^3)$
   Prova:
   $100n^2 \leq n * n^2 \forall n \geq 100 \Rightarrow c = 1$ e $n_0 = 100$

   (c) $10n^3 - 3n^2 + 27 = O(n^3)$
   Prova:
   $10n^3 - 3n^2 + 27 = \leq 10n^3$ se $(3n^2 - 27) \geq 0$ ou seja
   $10n^3 - 3n^2 + 27 = \leq 10n^3 \forall n \geq 3 \Rightarrow c = 10, n_0 = 3$

   (d) $n = O(2^n)$
   Prova por indução:
   Devemos mostrar que $n \leq 2^n \forall n \geq 1 \Rightarrow c = 1$ e $n_0 = 1$.
   Base: Se $n = 1$ temos $1 \leq 2$.
   Hipótese de indução: Para $n \geq 2$ temos $(n - 1) \leq 2^{n-1}$
   Passo de indução: Então $n \leq n + (n - 2) = (n - 1) + (n - 1) \leq 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2(2^{n-1}) = 2^n$.