Fontes principais

1. Cormem T. H.; Leiserson C. E.; Rivest R.: Stein C.. *Introduction to Algorithms*, 3^a edição, MIT Press, 2009

2. Análise de algoritmo - IME/USP (prof. Paulo Feofiloff) `http://www.ime.usp.br/~pf/analise_de_algoritmos`

Backtracking

algoritmos de enumeração

Backtracking

É um refinamento da técnica de força bruta.
Considera uma série de tomadas de decisões entre várias opções.
Algumas consequências de decisões podem conduzir a uma solução do problema.

Backtracking

Ideia geral:

(1) Soluções representadas por n tuplas ou vetores de solução $(s_1, s_2, \cdots, s_n)$ de maneira que cada s_i é escolhido a partir de um conjunto finito de opções v_i;

(2) Inicia um vetor vazio;

Backtracking

(3) Em cada nova etapa do vetor é extendido com um novo valor;

(4) O novo valor deve ser avaliado: se não for solução parcial, então o último valor do vetor é eliminado e outro candidato é considerado.

Note que em (4) pode ou não ocorrer retrocesso (backtracking).

Backtracking

Restrições

- Restrições explícitas:
  Correspondem às regras que restringem cada s_i em tomar valores de um determinado conjunto (relacionado ao problema e escolhas possíveis).

- Restrições implícitas:
  Determinam como os s_i's se relacionam entre si.

Algoritmo de backtracking genérico

backtrack($s[1 \cdot\cdot k]$)

$\triangleright$ s é um vetor promissor de tamanho k
se s é a solução **então**
    escreva(s)
senão
    para cada vetor promissor w de tamanho $k+1$ **faça**
        backtracking($w[1 \cdot\cdot k+1]$)
    $\triangleright$ $w[1 \cdot\cdot k] = s[1 \cdot\cdot k]$

Sequências

Sequências

Suponha o seguinte problema:

Gerar todas as sequências possíveis de 3 dígitos com os dígitos 1,2 e 3 armazenados no vetor $v[0 \cdots n]$, onde $n = 3$

Solução: 111, 112, 113, 121, 122, 123, 131, 132, 133, 211, 212, 213, 221, 222, 223, 231, 232, 233, 311, 312, 313, 321, 322, 323, 331, 332, 333

A quantidade é de $3^3 = 27$ sequências.

Sequências

algoritmo mostra_sequencias(s, i, v, n)

entrada: vetor solução: $s[0 \cdot\cdot n-1]$
inteiro $i = 0$ que controla a profundidade da recursão,
vetor de entrada: $v[0 \cdot\cdot n-1]$
inteiro n o tamanho do vetor a

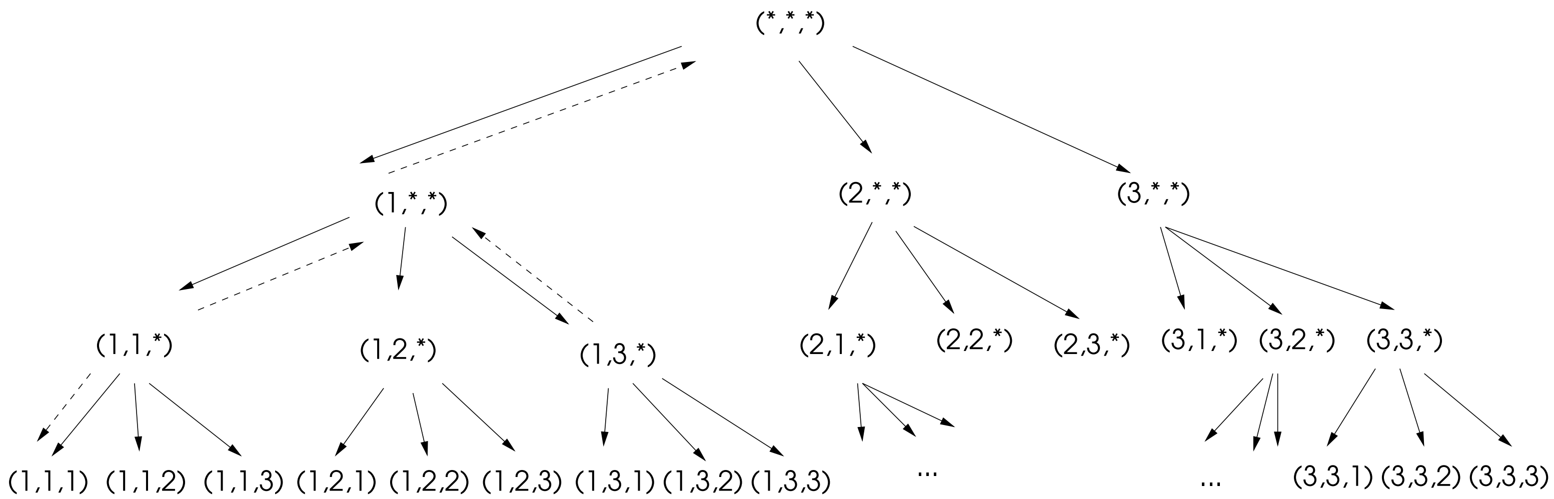
saída: apresenta todas as sequências de n elemntos de a

Sequências

mostra_sequencias(s, i, v, n)

se $i = n$ **então**
    escreva(s, n)
senão
    para $j = 0$ **até** $n - 1$ **faça**
        $s[i] = v[j]$
        mostra_sequencias($s, i + 1, v, n$)

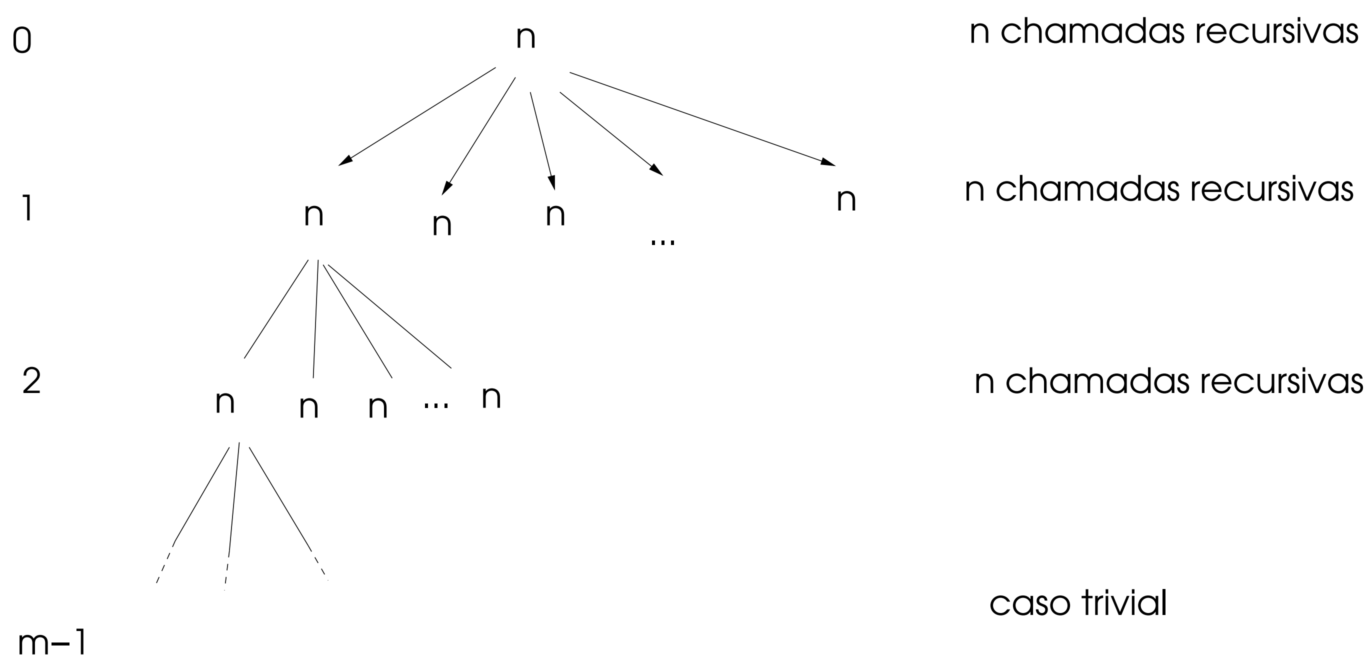
Sequências


(*,*,*)
(1,*,*)
(2,*,*)
(3,*,*)
(1,1,*)
(1,2,*)
(1,3,*)
(2,1,*)
(2,2,*)
(2,3,*)
(3,1,*)
(3,2,*)
(3,3,*)
(1,1,1)
(1,1,2)
(1,1,3)
(1,2,1)
(1,2,2)
(1,2,3)
(1,3,1)
(1,3,2)
(1,3,3)
...
...
(3,3,1)
(3,3,2)
(3,3,3)

Sequências

Suponha que agora queremos gerar todas as combinações de tamanho 3 utilizando os dígitos $a = \{1, 2, 3, 4\}$. Nesta caso, temos que definir $s[0 \cdot\cdot m - 1]$, com $m = 3$, e o vetor $a[0 \cdot\cdot n - 1]$, com $n = 4$.

Sequências



Complexidade do algoritmo: $O(n^m)$

Permutações

Permutações

Uma permutação da sequência $1 \cdot\cdot\, n$ é qualquer rearranjo dos termos dessa sequência. Em outras palavras, uma permutação da sequência $1 \cdot\cdot\, n$ troca os elementos de lugar gerando uma nova sequência com estes mesmos elementos.

Permutações - Exemplo

Dado uma vetor v, escreva um programa que imprima todas as permutações. Se v tem n elementos, então o programa deve imprimir $n!$ permutações.

entrada: $v = \{1, 2, 3\}$
saída: $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 3, 2\}$, $\{2, 1, 3\}$,
$\{2, 3, 1\}$, $\{3, 1, 2\}$, $\{3, 2, 1\}$.

Permutações

algoritmo permuta(s, i, v, n, x)

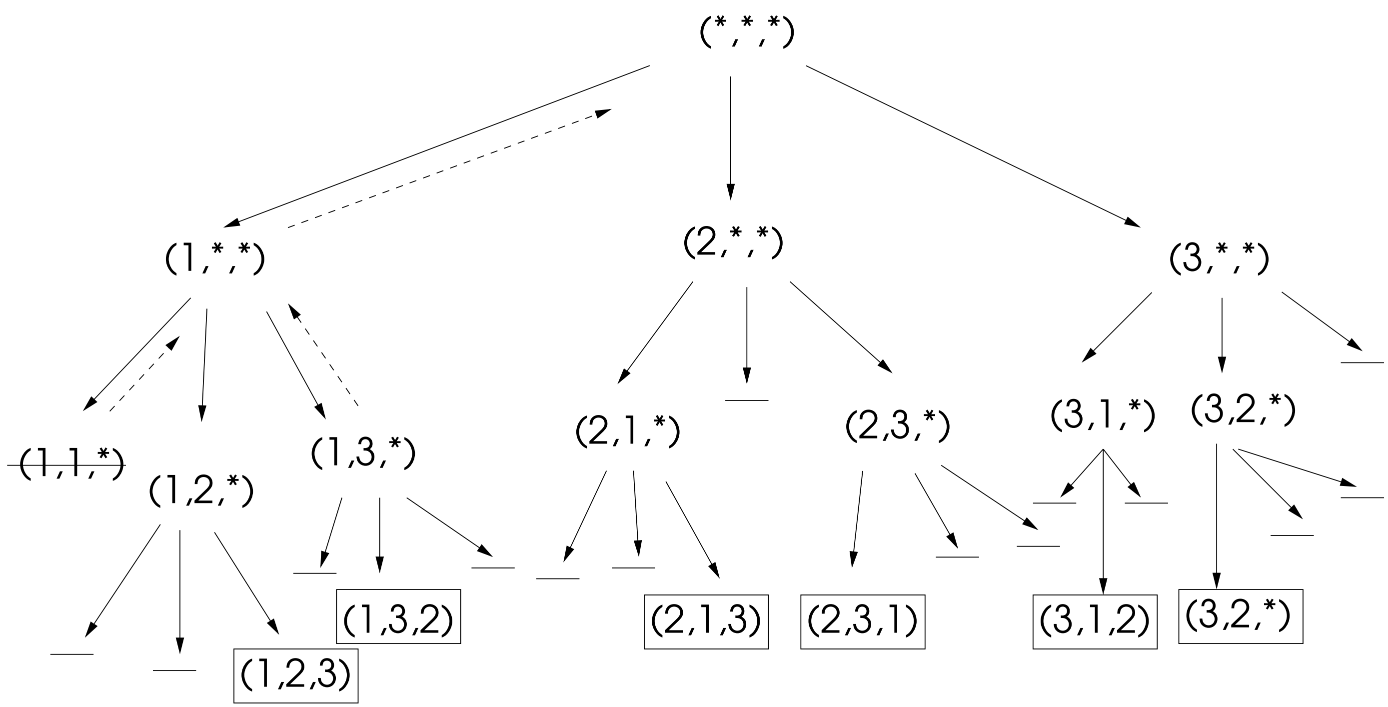
entrada: vetor solução: $s[0 \cdot\cdot n-1]$
inteiro $i = 0$ que controla a profundidade da recursão,
vetor de entrada: $v[0 \cdot\cdot n-1]$
inteiro n o tamanho do vetor a
vetor de marcação: $x[0 \cdot\cdot n-1]$ marca os elementos que já foram inseridos no conjunto solução.

saída: apresenta a permutação dos elementos do vetor a

Permutações

```
permuta(s, i, v, n, x)
    se i = n então
        escreva(s, n)
    senão
        para j = 0 até n − 1 faça
            ▷ verifica se a solução é promissora
            se x[j] == 0 então
                x[j] = 1 ▷ inclui na solução
                s[i] = v[j]
                permuta(s, i + 1, v, n, x)
                x[j] = 0
```

Permutações



Permutações

Restrições explícitas: O conjunto solução s tem uma permutação ao chegar ao caso base.

Restrições explícitas: Na permutação não há repetição de elementos.

Sudoku

Sudoku

É um jogo (quebra-cabeça) com foco no posicionamento de números inteiros.

Cada coluna, linha e região só deve ter um único valor de $\{1, 2, \cdots, n\}$.

O problema presente no Sudoku é NP-Completo.

Sudoku simples

Tomemos $n = 4$

	2	4	
1			3
4			2
	1	3	

Solução:

- 4-upla (v_1, v_2, v_3, v_4) em que cada v_i é uma linha.
- Restrição explícita: $S_i = \{1, 2, 3, 4\}$, $1 \leq i \leq 4$
- Restrição implícita: Um número pode aparecer apenas uma vez em cada linha e coluna.

Sudoku simples

$n = 4$

	2	4	
1			3
4			2
	1	3	

Vamos construir a solução posição por posição.

Sudoku simples

$n = 4$

1	2	4	
1			3
4			2
	1	3	

Tente colocar o número 1 no primeiro espaço vazio.

Sudoku simples

$n = 4$

1	2	4	
1			3
4			2
	1	3	

Não é possível! O 1 já se encontra na coluna.

Sudoku simples

$n = 4$

2	2	4	
1			3
4			2
	1	3	

Tente o número 2.

Sudoku simples

$n = 4$

2	2	4	
1			3
4			2
	1	3	

Não é possível! O 2 já se encontra na linha.

Sudoku simples

$n = 4$

3	2	4	
1			3
4			2
	1	3	

Tente o número 3.

Sudoku simples

$n = 4$

3	2	4	
1			3
4			2
	1	3	

Esta é uma solução parcial promissora! Agora tentaremos preencher a próxima posição vazia.

Sudoku simples

$n = 4$

3	2	4	1
1			3
4			2
	1	3	

Comece pelo 1.

Sudoku simples

$n = 4$

3	2	4	1
1			3
4			2
	1	3	

Esta é uma solução parcial promissora! Agora tentaremos preencher a próxima posição vazia.

Sudoku simples

$n = 4$

3	2	4	1
1	1		3
4			2
	1	3	

Comece pelo 1.

Sudoku simples

$n = 4$

3	2	4	1
1	1		3
4			2
	1	3	

Não é possível! Pois já existe o número 1 na linha. Agora, tente o número 2.

Sudoku simples

$n = 4$

3	2	4	1
1	2		3
4			2
	1	3	

Não é possível! Pois já existe o número 2 na coluna. Agora, tente o número 3.

Sudoku simples

$n = 4$

3	2	4	1
1	3		3
4			2
	1	3	

Não é possível! Pois já existe o número 3 na linha. Agora, tente o número 4.

Sudoku simples

$n = 4$

3	2	4	1
1	4		3
4			2
	1	3	

Esta é uma solução parcial promissora! Agora tentaremos preencher a próxima posição vazia.

Sudoku simples

$n = 4$

3	2	4	1
1	4	1	3
4			2
	1	3	

Comece pelo 1.

Sudoku simples

$n = 4$

3	2	4	1
1	4	1	3
4			2
	1	3	

Não é possível! Pois já existe o número 1 na linha. Agora, tente o número 2.

Sudoku simples

$n = 4$

3	2	4	1
1	4	2	3
4			2
	1	3	

Esta é uma solução parcial promissora! Agora tentaremos preencher a próxima posição vazia.

Sudoku simples

$n = 4$

3	2	4	1
1	4	2	3
4	1		2
	1	3	

Comece pelo 1.

Sudoku simples

$n = 4$

3	2	4	1
1	4	2	3
4	1		2
	1	3	

Não é possível! Pois já existe o número 1 na coluna. Agora, tente o número 2.

Sudoku simples

$n = 4$

3	2	4	1
1	4	2	3
4	2		2
	1	3	

Não é possível! Pois já existe o número 2 na linha. Agora, tente o número 3.

Sudoku simples

$n = 4$

3	2	4	1
1	4	2	3
4	3		2
	1	3	

Esta é uma solução parcial promissora! Agora tentaremos preencher a próxima posição vazia.

Sudoku simples

$n = 4$

3	2	4	1
1	4	2	3
4	3	1	2
	1	3	

Comece pelo 1.

Sudoku simples

$n = 4$

3	2	4	1
1	4	2	3
4	3	1	2
	1	3	

Esta é uma solução parcial promissora! Agora tentaremos preencher a próxima posição vazia.

Sudoku simples

$n = 4$

3	2	4	1
1	4	2	3
4	3	1	2
1	1	3	

Comece pelo 1.

Sudoku simples

$n = 4$

3	2	4	1
1	4	2	3
4	3	1	2
1	1	3	

Não é possível! Pois já existe o número 1 na linha e na coluna. Agora, tente o número 2.

Sudoku simples

$n = 4$

3	2	4	1
1	4	2	3
4	3	1	2
2	1	3	

Esta é uma solução parcial promissora! Agora tentaremos preencher a próxima posição vazia.

Sudoku simples

$n = 4$

3	2	4	1
1	4	2	3
4	3	1	2
2	1	3	4

Só é possível colocar o número 4.

Sudoku simples

```
void sudoku(int m[4][4], int linha, int coluna) {
  if (coluna == 4){  linha = linha + 1;  coluna = 0; }
  if (linha == 4) mostra_matriz(m);
  else if (m[l][c] > 0) sudoku(m, linha, coluna + 1);
       else {
         for (int i = 1; i <= 4; i++){
             if (valor_valido(i, m, linha, coluna)){
               m[l][c] = i;
               sudoku(m, linha, coluna + 1);
             }
          }
       }
} // fim
```

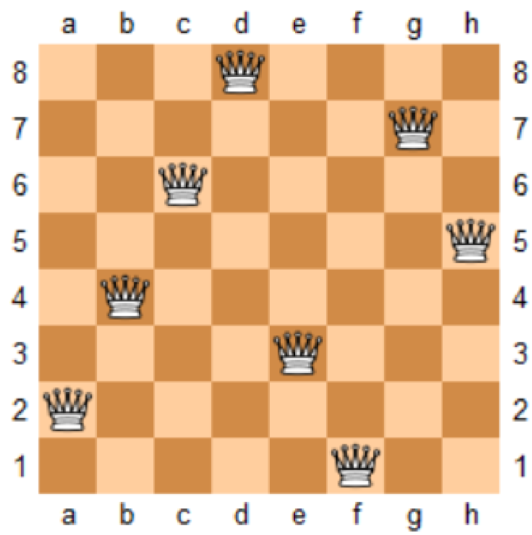
Sudoku simples

```
int valor_valido(int valor, int m[4][4], int linha, int coluna) {
   for (int i = 0; i < 4; i++) {
      if (m[linha][i] == valor || m[i][coluna] == valor)
              return 0;
   }
   return 1;
}
```

Oito rainhas

Oito rainhas

Oito rainhas devem ser dispostas num tabuleiro de xadrez de tal modo que nenhuma delas seja atacada por outra.



Oito rainhas

Utilizamos a técnica de backtracking, que consiste em, a cada passo, caso a solução parcial encontrada seja inválida, voltar ao passo anterior, reformulando-o.

Oito rainhas

```
coloca_coluna(i)
repita
    selecione uma posição
    se "rainha está salva"então
        posicione a rainha
        se i < 7 então
            coloca_coluna(i + 1)
            se "sem sucesso"então
                remova rainha
até que "ocorra sucesso"ou "não há mais pos"
```

Simulação com quatro rainhas

Q_1			

Selecione uma posição. A rainha Q_1 está salva.
Agora vamos tentar incluir mais uma rainha.

Simulação com quatro rainhas

Q_1	Q_2		

Selecione uma posição. A rainha Q_2 não está salva.
Procure outra posição para Q_2.

Simulação com quatro rainhas

Q_1			
	Q_2		

A rainha Q_2 não está salva.
Procure outra posição para Q_2.

Simulação com quatro rainhas

Q_1			
	Q_2		

A rainha Q_2 está salva.

Agora vamos tentar incluir mais uma rainha.

Simulação com quatro rainhas

Q_1		Q_3	
	Q_2		

Selecione uma posição. A rainha Q_3 não está salva.
Procure outra posição para Q_3.

Simulação com quatro rainhas

Q_1			
		Q_3	
	Q_2		

A rainha Q_3 não está salva.
Procure outra posição para Q_3.

Simulação com quatro rainhas

Q_1			
	Q_2	Q_3	

A rainha Q_3 não está salva.
Procure outra posição para Q_3.

Simulação com quatro rainhas

Q_1			
	Q_2		
		Q_3	

A rainha Q_3 não está salva.
Não há mais posição válida para Q_3.

Simulação com quatro rainhas

Q_1			
	Q_2		

Retrocede e reposicione Q_2.
Agora tente novamente para Q_3.

Simulação com quatro rainhas

Q_1		Q_3	
	Q_2		

A rainha Q_3 não está salva.
Procure outra posição para Q_3.

Simulação com quatro rainhas

Q_1			
		Q_3	
	Q_2		

A rainha Q_3 está salva.

Agora vamos tentar incluir mais uma rainha.

Simulação com quatro rainhas

Q_1			Q_4
		Q_3	
	Q_2		

A rainha Q_4 não está salva.
Procure outra posição para Q_4.

Simulação com quatro rainhas

Q_1			
		Q_3	Q_4
	Q_2		

A rainha Q_4 não está salva.

Procure outra posição para Q_4.

Simulação com quatro rainhas

Q_1			
		Q_3	
			Q_4
	Q_2		

A rainha Q_4 não está salva.

Procure outra posição para Q_4.

Simulação com quatro rainhas

Q_1			
		Q_3	
	Q_2		Q_4

A rainha Q_4 não está salva.

Não há mais posição válida para Q_4.

Simulação com quatro rainhas

Q_1			
		Q_3	
	Q_2		

Retrocede e reposicione Q_3.

Simulação com quatro rainhas

Q_1			
		Q_3	
	Q_2		

A rainha Q_3 não está salva.
Procure outra posição para Q_3.

Simulação com quatro rainhas

Q_1			
	Q_2	Q_3	

A rainha Q_3 não está salva.

Não há mais posição válida para Q_3.

Simulação com quatro rainhas

Q_1			
	Q_2		

Retrocede e reposicione Q_2.
Não há mais posição válida para Q_2.

Simulação com quatro rainhas

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Q_1</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Retrocede e reposicione Q_1.

Agora tente novamente a rainha Q_2

Simulação com quatro rainhas

	Q_2		
Q_1			

A rainha Q_2 não está salva.
Procure outra posição para Q_2.

Simulação com quatro rainhas

Q_1	Q_2		

A rainha Q_2 não está salva.
Procure outra posição para Q_2.

Simulação com quatro rainhas

Q_1			
	Q_2		

A rainha Q_2 não está salva.
Procure outra posição para Q_2.

Simulação com quatro rainhas

		Q_3	
Q_1			
	Q_2		

A rainha Q_2 está salva.
Agora tente novamente para Q_3.

Simulação com quatro rainhas

		Q_3	
Q_1			
	Q_2		

A rainha Q_3 está salva.
Agora tente novamente para Q_4.

Simulação com quatro rainhas

		Q_3	Q_4
Q_1			
	Q_2		

A rainha Q_4 não está salva.
Procure outra posição para Q_4.

Simulação com quatro rainhas

		Q_3	
Q_1			Q_4
	Q_2		

A rainha Q_4 não está salva.

Procure outra posição para Q_4.

Simulação com quatro rainhas

		Q_3	
Q_1			
			Q_4
	Q_2		

A rainha Q_4 está salva.

Todas as rainhas estão salvas!

Oito rainhas

Mais importante, num determinado passo do que saber a exata posição das rainhas que já estão no tabuleiro é saber se ela está salva.

Oito rainhas

Vamos utilizar as seguintes estruturas:

- ▷ Um vetor x tal que $x[i] = j$ onde j é a posição da rainha na coluna i, $0 \leq i \leq 7$
- ▷ Um vetor a tal que:

$$a[j] = \begin{cases} 1, & \text{se a linha j encontra-se livre} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$0 \leq j \leq 7$

Oito rainhas

▷ Um vetor b tal que:

$$b[i+j] = \begin{cases} 1, & \text{se a diagonal "/" encontra-se livre} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$0 \leq i + j \leq 14$$

▷ Um vetor c tal que

$$c[i-j+7] = \begin{cases} 1, & \text{se a diagonal "\textbackslash" encontra-se livre} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$0 \leq i - j + 7 \leq 14$$

Oito rainhas

Executar o comando "posicionar rainha" é o mesmo que executar

$$
\begin{aligned}
&x[i] = j \\
&a[j] = 0 \\
&b[i+j] = 0 \\
&c[i-j+7] = 0
\end{aligned}
$$

Para testar se a rainha está salva na linha j e na coluna i basta testar se:

$$
\begin{aligned}
&a[j] \neq 0 \\
&b[i+j] \neq 0 \\
&c[i-j+7] \neq 0
\end{aligned}
$$

Oito rainhas - implementação

```
// variáveis globais
int a[8], b[15], c[15], x[8];

void rainhas(){
   int i, ok;
   for( i = 0; i < 8; i++)  a[i] = 1;
   for( i = 0; i < 15; i++) b[i] = c[i] = 1;

   coloca_rainha(0, &ok);

   for( i = 0; i < 8; i++)
      cout << " x[ " << i+1 << " ] = " << x[i] + 1 << endl;
}
```

```
void posicione_rainha(int i, int j){
   x[i] = j;
   a[j] = 0;   b[i+j] = 0;   c[i-j+7] = 0;
}

void remova_rainha(int i, int j){
   a[j] = 1;   b[i+j] = 1;   c[i-j+7] = 1;
}

bool rainha_salva(int i, int j){
   return (a[j] && b[i+j] && c[i-j+7]);
}
```

```
void coloca_rainha(int i, int *ok){
   int j = 0;
   do{
      *ok = 0;
      if (rainha_salva(i, j)){
         posicione_rainha(i, j);
         if (i < 7){
            coloca_rainha(i+1, ok);
            if (!*ok) remove_rainha(i, j);
         }
         else *ok = 1;
      }
      j++;
   } while (!*ok && j <= 7);
}
```

Obrigado