Fontes principais

1. Cormem T. H.; Leiserson C. E.; Rivest R.: Stein C.. *Introduction to Algorithms*, 3^a edição, MIT Press, 2009

2. Análise de algoritmo - IME/USP (prof. Paulo Feofiloff) `http://www.ime.usp.br/~pf/analise_de_algoritmos`

Divisão e conquista

Método Iterativo

Método Iterativo

Mostre que $T(n) = 2T(n/2) + n$ é $\Theta(n \lg n)$.

Para n potência de 2 e $k = \lg n$, temos

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$

Método Iterativo

Mostre que $T(n) = 2T(n/2) + n$ é $\Theta(n \lg n)$.

Para n potência de 2 e $k = \lg n$, temos

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \\ &= 2\left(2T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{n}{2}\right) + n = 2^2 T\left(\frac{n}{2^2}\right) + 2n \end{aligned}$$

Método Iterativo

Mostre que $T(n) = 2T(n/2) + n$ é $\Theta(n \lg n)$.

Para n potência de 2 e $k = \lg n$, temos

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \\ &= 2\left(2T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{n}{2}\right) + n = 2^2T\left(\frac{n}{2^2}\right) + 2n \\ &= 2^2\left(2T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \frac{n}{2^2}\right) + 2n = 2^3T\left(\frac{n}{2^3}\right) + 3n \end{aligned}$$

Método Iterativo

Mostre que $T(n) = 2T(n/2) + n$ é $\Theta(n \lg n)$.

Para n potência de 2 e $k = \lg n$, temos

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \\
&= 2\left(2T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{n}{2}\right) + n = 2^2T\left(\frac{n}{2^2}\right) + 2n \\
&= 2^2\left(2T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \frac{n}{2^2}\right) + 2n = 2^3T\left(\frac{n}{2^3}\right) + 3n \\
&= 2^3\left(2T\left(\frac{n}{2^4}\right) + \frac{n}{2^3}\right) + 3n = 2^4T\left(\frac{n}{2^4}\right) + 4n \\
&= \cdots
\end{aligned}
$$

Método Iterativo

Mostre que $T(n) = 2T(n/2) + n$ é $\Theta(n \lg n)$.

Para n potência de 2 e $k = \lg n$, temos

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \\
&= 2\left(2T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{n}{2}\right) + n = 2^2 T\left(\frac{n}{2^2}\right) + 2n \\
&= 2^2\left(2T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \frac{n}{2^2}\right) + 2n = 2^3 T\left(\frac{n}{2^3}\right) + 3n \\
&= 2^3\left(2T\left(\frac{n}{2^4}\right) + \frac{n}{2^3}\right) + 3n = 2^4 T\left(\frac{n}{2^4}\right) + 4n \\
&= \cdots \\
&= 2T\left(\frac{n}{2^k}\right) + kn
\end{aligned}
$$

Método Iterativo

Mostre que $T(n) = 2T(n/2) + n$ é $\Theta(n \lg n)$.

Para n potência de 2 e $k = \lg n$, temos

$$\begin{aligned}
T(n) &= 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \\
&= 2\left(2T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{n}{2}\right) + n = 2^2 T\left(\frac{n}{2^2}\right) + 2n \\
&= 2^2\left(2T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \frac{n}{2^2}\right) + 2n = 2^3 T\left(\frac{n}{2^3}\right) + 3n \\
&= 2^3\left(2T\left(\frac{n}{2^4}\right) + \frac{n}{2^3}\right) + 3n = 2^4 T\left(\frac{n}{2^4}\right) + 4n \\
&= \cdots \\
&= 2T\left(\frac{n}{2^k}\right) + kn \\
&= n + n \lg n = \Theta(n \lg n)
\end{aligned}$$

Método Iterativo

Mostre que $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(1)$ é $\Theta(\lg n)$.

Método Iterativo

Mostre que $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(1)$ é $\Theta(\lg n)$.

Simplificando a recorrência acima:

$T(1) = 1$ e $T(n) = T(n/2) + 1$ para $n \geq 2$ potência de 2, temos:

$$T(n) \ = T\left(\frac{n}{2}\right) + 1$$

Método Iterativo

Mostre que $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(1)$ é $\Theta(\lg n)$.

$$T(n) \quad = T\left(\frac{n}{2}\right) + 1$$

Método Iterativo

Mostre que $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(1)$ é $\Theta(\lg n)$.

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T\left(\frac{n}{2}\right) + 1 \\
&= \left(T\left(\frac{n}{2^2}\right) + 1\right) + 1 = T\left(\frac{n}{2^2}\right) + 2 \\
&= \left(T\left(\frac{n}{2^3}\right) + 1\right) + 2 = T\left(\frac{n}{2^3}\right) + 3
\end{aligned}
$$

Método Iterativo

Mostre que $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(1)$ é $\Theta(\lg n)$.

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T\left(\frac{n}{2}\right) + 1 \\
&= \left(T\left(\frac{n}{2^2}\right) + 1\right) + 1 = T\left(\frac{n}{2^2}\right) + 2 \\
&= \left(T\left(\frac{n}{2^3}\right) + 1\right) + 2 = T\left(\frac{n}{2^3}\right) + 3 \\
&= \left(T\left(\frac{n}{2^4}\right) + 1\right) + 3 = T\left(\frac{n}{2^4}\right) + 4 \\
&= \cdots
\end{aligned}
$$

Método Iterativo

Mostre que $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(1)$ é $\Theta(\lg n)$.

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T\left(\frac{n}{2}\right) + 1 \\
&= \left(T\left(\frac{n}{2^2}\right) + 1\right) + 1 = T\left(\frac{n}{2^2}\right) + 2 \\
&= \left(T\left(\frac{n}{2^3}\right) + 1\right) + 2 = T\left(\frac{n}{2^3}\right) + 3 \\
&= \left(T\left(\frac{n}{2^4}\right) + 1\right) + 3 = T\left(\frac{n}{2^4}\right) + 4 \\
&= \cdots \\
&= T\left(\frac{n}{2^k}\right) + k \qquad \text{para } k = \lg n
\end{aligned}
$$

Método Iterativo

Mostre que $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(1)$ é $\Theta(\lg n)$.

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T\left(\frac{n}{2}\right) + 1 \\
&= \left(T\left(\frac{n}{2^2}\right) + 1\right) + 1 = T\left(\frac{n}{2^2}\right) + 2 \\
&= \left(T\left(\frac{n}{2^3}\right) + 1\right) + 2 = T\left(\frac{n}{2^3}\right) + 3 \\
&= \left(T\left(\frac{n}{2^4}\right) + 1\right) + 3 = T\left(\frac{n}{2^4}\right) + 4 \\
&= \cdots \\
&= T\left(\frac{n}{2^k}\right) + k \qquad \text{para } k = \lg n \\
&= T(1) + \lg n = \Theta(\lg n)
\end{aligned}
$$

Método Iterativo

Mostre que $T(n) = T(n-1) + \Theta(n)$ é $\Theta(n^2)$.

Método Iterativo

Mostre que $T(n) = T(n-1) + \Theta(n)$ é $\Theta(n^2)$.

Simplificando a recorrência:

$T(1) = 1$ e $T(n) = T(n-1) + n$ para $n \geq 2$

Método Iterativo

Mostre que $T(n) = T(n-1) + \Theta(n)$ é $\Theta(n^2)$.

$$T(n) = T(n-1) + n$$

Método Iterativo

Mostre que $T(n) = T(n-1) + \Theta(n)$ é $\Theta(n^2)$.

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1) + n \\ &= T(n-2) + (n-1) + n \end{aligned}$$

Método Iterativo

Mostre que $T(n) = T(n-1) + \Theta(n)$ é $\Theta(n^2)$.

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1) + n \\
&= T(n-2) + (n-1) + n \\
&= T(n-3) + (n-2) + (n-1) + n
\end{aligned}
$$

Método Iterativo

Mostre que $T(n) = T(n-1) + \Theta(n)$ é $\Theta(n^2)$.

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1) + n \\
&= T(n-2) + (n-1) + n \\
&= T(n-3) + (n-2) + (n-1) + n \\
&= \cdots
\end{aligned}
$$

Método Iterativo

Mostre que $T(n) = T(n-1) + \Theta(n)$ é $\Theta(n^2)$.

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1) + n \\
&= T(n-2) + (n-1) + n \\
&= T(n-3) + (n-2) + (n-1) + n \\
&= \cdots \\
&= T(1) + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n
\end{aligned}
$$

Método Iterativo

Mostre que $T(n) = T(n-1) + \Theta(n)$ é $\Theta(n^2)$.

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1) + n \\
&= T(n-2) + (n-1) + n \\
&= T(n-3) + (n-2) + (n-1) + n \\
&= \cdots \\
&= T(1) + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n \\
&= 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}
$$

Método Iterativo

Mostre que $T(n) = T(n-1) + \Theta(n)$ é $\Theta(n^2)$.

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1) + n \\
&= T(n-2) + (n-1) + n \\
&= T(n-3) + (n-2) + (n-1) + n \\
&= \cdots \\
&= T(1) + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n \\
&= 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \Theta(n^2)
\end{aligned}
$$

Método de substituição

Método de substituição (Ex 1)

Mostre que $T(n) = T(n-1) + n$ é $O(n^2)$.

Método de substituição (Ex 1)

Mostre que $T(n) = T(n-1) + n$ é $O(n^2)$.

Palpite: $T(n) = O(n^2) \Rightarrow T(n) \leq cn^2$

Método de substituição (Ex 1)

Mostre que $T(n) = T(n-1) + n$ é $O(n^2)$.

Palpite: $T(n) = O(n^2) \Rightarrow T(n) \leq cn^2$

Base: $T(2) = T(1)+2 = 1+2 = 3 \leq c2^2$ é verdade para $c = 3/4$

Hipótese: $T(n) \leq cn^2$, para todo $m < n$

Passo indutivo: $T(n) = T(n-1) + n$

Método de substituição (Ex 1)

Mostre que $T(n) = T(n-1) + n$ é $O(n^2)$.

Passo indutivo: $T(n) = T(n-1) + n$

$$
\begin{aligned}
&\leq c(n-1)^2 + n \\
&\leq cn^2 - 2nc + c + n \\
&\leq cn^2 + n(1-2c) + c \\
&\leq cn^2
\end{aligned}
$$

O último passo é valido para $c > \frac{1}{2}$.

Método de substituição (Ex 2)

Mostre que $T(n) = 2T(\lceil n/2 \rceil) + n$ é $O(n \lg n)$.

Método de substituição (Ex 2)

Mostre que $T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n$, $T(1) = 1$ é $O(n \lg n)$.

Palpite: $T(n) = O(n \lg n) \Rightarrow T(n) \leq cn \lg n$

Método de substituição (Ex 2)

Mostre que $T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n$, $T(1) = 1$ é $O(n \lg n)$.

Palpite: $T(n) = O(n \lg n) \Rightarrow T(n) \leq cn \lg n$

Base: $T(2) = 4$ e $T(3) = 5$. Queremos $T(n) \leq cn \lg n$, então para $c = 2$, $T(2)$ e $T(3)$ é válido.

Hipótese de Indução: Assuma que $T(m) \leq cm \lg m$ para todo $m < n$.

Passo indutivo: provar que $T(n) \leq cn \lg n$.

Método de substituição (Ex 2)

Mostre que $T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n$, $T(1) = 1$ é $O(n \lg n)$.

Passo indutivo: provar que $T(n) \leq cn \lg n$.

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2T(n/2) + n \\
&\leq 2cn/2 \lg n/2 + n \\
&= cn \lg n/2 + n \\
&= cn \lg n - cn \lg 2 + n \\
&= cn \lg n - cn + n \\
&\leq cn \lg n \qquad\qquad \text{quando } c \geq 1
\end{aligned}
$$

Método de substituição (Ex 3)

Mostre que $T(n)$ é $O(n^3)$.

$$T(n) = \begin{cases} O(1) & \text{se } n = 1 \\ 4T(n/2) + O(n) & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

Método de substituição (Ex 3)

Mostre que $T(n) = 4T(n/2) + O(n)$ é $O(n^3)$.

Prova:

Palpite: $T(n) = O(n^3) \Rightarrow T(n) \leq cn^3$.

- Existem constantes positivas n_0 e c tal que para todo $n \geq n_0$, $T(n) \leq cn^3$.

- Use indução para encontrar as constantes n_0 e c

Método de substituição (Ex 3)

Mostre que $T(n) = 4T(n/2) + O(n)$ é $O(n^3)$.

Prova:

Palpite: $T(n) = O(n^3) \Rightarrow T(n) \leq cn^3$.

Base: $n = 1$, trivial

Hipótese de indução: Assuma que $T(m) \leq cm^3$ para todo $m < n$

Passo de indução: Temos que provar que $T(n) \leq cn^3$.

Método de substituição (Ex 3)

Mostre que $T(n) = 4T(n/2) + O(n)$ é $O(n^3)$.

Prova:

Passo de indução: Temos que provar que $T(n) \leq cn^3$.

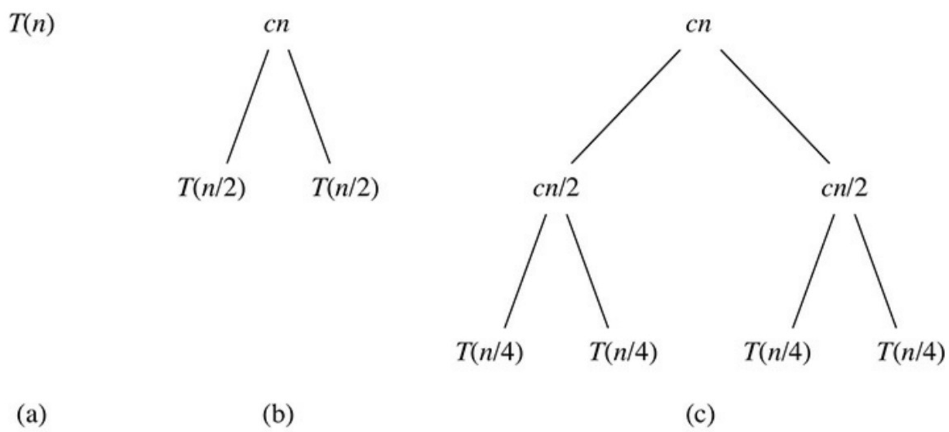
$$\begin{aligned} T(n) &= 4T(n/2) + O(n) \\ &\leq 4c(n/2)^3 + bn \\ &= cn^3/2 + bn \\ &= cn^3 - (cn^3/2 - bn) \\ &\leq cn^3 \end{aligned}$$

A última inequação é valida quando $cn^3/2 - bn \geq 0$, por exemplo $c = 2b$ e $n_0 = 1$

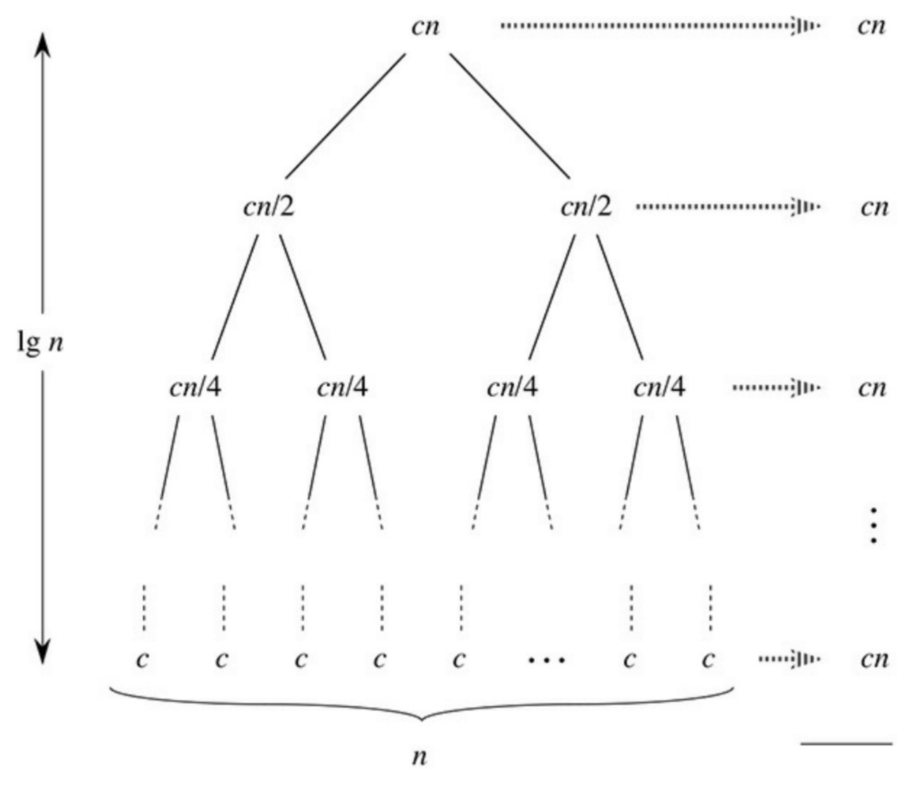
Método de árvore de recursão

Método de árvore de recursão

Mostre que $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$ é $O(n \lg n)$.



Mostre que $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$ é $O(n \lg n)$.



(d)

Método de substituição

Mostre que $T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ é $O(\lg n)$.

Palpite: $T(n) \leq c \lg n$

Método de substituição

Mostre que $T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ é $O(\lg n)$.

Palpite: $T(n) \leq c \lg n$

Base: $T(2) = T(1) + 2 = 3 \leq c \lg 2$ para $c = 3$

Método de substituição

Mostre que $T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ é $O(\lg n)$.

Palpite: $T(n) \leq c \lg n$

Base: $T(2) = T(1) + 2 = 3 \leq c \lg 2$ para $c = 3$

Hipótese: $T(n) \leq c \lg n$, para todo $m < n$

Método de substituição

Mostre que $T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ é $O(\lg n)$.

Palpite: $T(n) \leq c \lg n$

Base: $T(2) = T(1) + 2 = 3 \leq c \lg 2$ para $c = 3$

Hipótese: $T(n) \leq c \lg n$, para todo $m < n$

Passo indutivo: $T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + 1$

Método de substituição

Mostre que $T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ é $O(\lg n)$.

Passo indutivo: $T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + 1$

$$
\begin{aligned}
&\leq c \lg \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 \\
&< c \lg \left(\frac{n}{2} + 1 \right) + 1 \\
&< c \lg \left(\frac{n+2}{2} \right) + 1 \\
&= c \lg(n+2) - c \lg 2 + 1 \\
&= c \lg(n+2) - c + 1
\end{aligned}
$$

Método Mestre

Método Mestre

Dê o limitante assintótico superior e inferior para

$$T(n) = 4T(n/4) + 5n$$

$a = 4,\ b = 4,\ f(n) = 5n$
$n^{\log_b a} = n^{\log_4 4} = n$

caso 2: $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, ou seja $5n = \Theta(n)$

Então
$T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$
$T(n) = \Theta(n \log n)$

Método Mestre

Dê o limitante assintótico superior e inferior para

$$T(n) = 4T(n/5) + 5n$$

$a = 4$, $b = 5$, $f(n) = 5n$
$n^{\log_b a} = n^{\log_5 4} = n^{0.86135}$

caso 3: $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$, ou seja, $5n = \Omega(n^{0.86135+\varepsilon})$.
Para $\varepsilon = 0.249$

Método Mestre

Ainda temos verificar se $af(n/b) \leq cf(n)$ para alguma constante $c < 1$.

$a = 4$, $b = 5$, $f(n) = 5n$

$4f(n/5) =$
$4(5n/5) \leq$
$4/5.5n \leq cf(n)$, para $c = 4/5$
Então $T(n) = \Theta(f(n))$, ou seja $T(n) = \Theta(n)$.

Método Mestre

Dê o limitante assintótico superior e inferior para

$$T(n) = 5T(n/4) + 4n$$

$a = 5,\ b = 4,\ f(n) = 4n$
$n^{\log_b a} = n^{\log_4 5} = n^{1.1609}$

caso 1: $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$, ou seja $4n = O(n^{1.1609})$ para $\varepsilon = 0.1609$

Então
$T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
$T(n) = \Theta(n^{\log_4 5})$
$T(n) = \Theta(n^{\frac{\log_2 5}{\log_2 4}})$
$T(n) = \Theta(n^{\frac{\log_2 5}{2}})$
$T(n) = \Theta(n^{\frac{1}{2}\log_2 5})$
$T(n) = \Theta(n^{\sqrt{\log_2 5}})$
$T(n) = \Theta(n^{\sqrt{\lg 5}})$

Obrigado