Fontes principais

1. Cormem T. H.; Leiserson C. E.; Rivest R.: Stein C.. *Introduction to Algorithms*, 3^a edição, MIT Press, 2009
2. Análise de algoritmo - IME/USP (prof. Paulo Feofiloff) `http://www.ime.usp.br/~pf/analise_de_algoritmos`

Análise amortizada

Análise amortizada

Útil para analisar sequências de operações ou iterações, que normalmente envolve estruturas de dados.

Serve para melhorar análises de pior caso que baseiam-se no pior caso de uma operação ou iteração.

Diferente de análise de caso médio.

Técnicas de análise amortizada

- Agregado
- Contábil
- Potencial

Lembre-se que análise amortizada não envolve probabilidade!

Método agregado

$\triangleright$ $T(n)$ é o custo de uma sequência de n operações.

$\triangleright$ Custo amortizado é dado por $\dfrac{T(n)}{n}$.

$\triangleright$ Cada operação recebe o mesmo custo amortizado, mesmo se são diferentes.

Exemplo da pilha

Considere uma pilha com operações usuais

push(x, S) = empilha x em S
pop(S) = desempilha do topo de S

Cada operação executa em $O(1)$

O custo de uma sequência de n operações push(x, S) e pop(S) é $T(n) = n$

Consideremos uma operação multipop(k, S)

```
multipop(k, S)
    enquanto (!pilha_vazia(S) e k ≠ 0) faça
        pop(S)
        k = k − 1
```

Qual é o tempo de execução do multipop()?

▷ Número de iterações do multipop() é $min\{k, |S|\}$

▷ Como o custo do pop(S) é 1, então o custo total do multipop() é $min\{k, |S|\}$.

▷ Portanto, o tempo de execução é $O(min\{k, |S|\})$.

Análise ingênua

$\triangleright$ Considere uma sequência de n operações push, pop e multipop em uma pilha inicialmente vazia.

$$\underbrace{\text{push} \quad \text{push} \quad \text{multipop} \quad \cdots \quad \text{pop} \quad \text{pop} \quad \text{multipop}}_{n}$$

$\triangleright$ Consumo de tempo?

Análise ingênua

$\triangleright$ Considere uma sequência de n operações push, pop e multipop em uma pilha inicialmente vazia.

$$\underbrace{\text{push} \quad \text{push} \quad \text{multipop} \quad \cdots \quad \text{pop} \quad \text{pop} \quad \text{multipop}}_{n}$$

$\triangleright$ Custo do pior caso push e pop é n.

Análise ingênua

▷ Considere uma sequência de n operações push, pop e multipop em uma pilha inicialmente vazia.

$$\underbrace{\text{push} \quad \text{push} \quad \text{multipop} \quad \cdots \quad \text{pop} \quad \text{pop} \quad \text{multipop}}_{n}$$

▷ Custo do pior caso multipop é n, pois a pilha tem no máximo n elementos.

Análise ingênua

▷ Considere uma sequência de n operações push, pop e multipop em uma pilha inicialmente vazia.

$$\underbrace{\text{push} \quad \text{push} \quad \text{multipop} \quad \cdots \quad \text{pop} \quad \text{pop} \quad \text{multipop}}_{n}$$

▷ Podemos ter n operações multipop's na sequência, então o custo total é $O(n^2)$.

Aplicando o método agregado

Aplicando o método agregado

Embora uma operação multipop possa ser “cara”, qualquer sequência de n operações push, pop e multipop executa no máximo em $O(n)$.

- $\triangleright$ n push’s $\Rightarrow$ n pop’s
- $\triangleright$ Custo total é $2n = O(n)$
- $\triangleright$ Custo amortizado para cada operação da sequência é:

$$\frac{2n}{n} = 2 = O(1).$$

Método contábil

Método contábil

▷ Atribui cobranças diferentes à operações diferentes.

▷ Custo amortizado igual a preço cobrado.

▷ Se custo amortizado maior que custo atual, então armazena a diferença como crédito.

▷ Use o crédito depois para pagar por operações cujo custo atual é maior que o custo amortizado.

Método contábil

- $\triangleright$ c_i é o custo atual da $i-$ésima operação.
- $\triangleright$ $\widehat{c}_i$ é o custo amortizado da $i-$ésima operação.
- $\triangleright$ Então, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \widehat{c}_i \geq \sum_{i=1}^{n} c_i$
- $\triangleright$ Crédito armazenado: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \widehat{c}_i - \sum_{i=1}^{n} c_i \geq 0$

Método contábil

operação	custo atual	custo amortizado
push	1	2
pop	1	0
multipop	$min\{k, \|S\|\}$	0

Intuição envolvida: Cobra $R\$2,00$ para empilhar.

$\triangleright$ $R\$1,00$ para o push

$\triangleright$ $R\$1,00$ é pré-pagamento para desempilhar com pop ou multipop.

Método contábil

Como cada objeto tem $R\$1,00$, que é crédito, o crédito armazenado nunca fica negativo.

Portanto, para n operações o custo é $2n = O(n)$.

Método potencial

Método potencial

$\triangleright$ Estrutura inicial D_0, onde n operações são realizadas, resultando em uma sequência $D_0, D_1, D_2, \cdots D_n$.

$\triangleright$ c_i é o custo real (atual) da i-ésima operação.

$\triangleright$ Uma função potencial Φ, atribui a cada estrutura D_i um número real $\Phi(D_i)$.

Método potencial

O custo amortizado da i-ésima operação é definida por:

$$\widehat{c}_i = c_i + \underbrace{\Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1})}_{\text{''energia potencial´´}}$$

O custo amortizado total é:

$$\sum_{i=1}^{n} \widehat{c}_i = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \right) + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1})$$

Se $\Phi(D_n) - \Phi(D_0) \geq 0$, então $\sum_{i=1}^{n} \widehat{c}_i$ é um limitante superior para o custo real (atual).

Método potencial

Exemplo da pilha:

- $\triangleright$ $\Phi(D_i)$ = número de elementos na pilha ($|D_i|$)
- $\triangleright$ $\Phi(D_0)$ = 0 (início)
- $\triangleright$ $\Phi(D_n) = |D_n|$ (final)
- $\triangleright$ Note que $\Phi(D_n) - \Phi(D_0) \geq 0$

Quando uma operação push é executada em uma pilha com $|D_{i-1}| = s$ elementos, a variação de energia potencial é:

$$\Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) = (s+1) - s = 1$$

Método potencial

Lembremos que o custo real (atual) da operação é $c_i = 1$

Custo amortizado da operação push:

$$\widehat{c}_i = c_i + \underbrace{\Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1})}_{1} = 1 + 1 = 2$$

Custo amortizado da operação pop: 0 (zero)

Método potencial

Suponha que a i-ésima operação executa multipop(k, S) e assim $\bar{K} = min\{k, |S|\}$ são desempilhados.

Custo real(atual) da operação é $c_i = \bar{K}$

A variação de energia potencial é:

$$\Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) = (|S| - \bar{K}) - |S| = -\bar{K}$$

Custo amortizado:

$$\hat{c}_i = c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) = \bar{K} - \bar{K}$$

Método potencial

O custo amortizado total de n operações é $O(n)$.

Portanto, o custo real de n operações no pior caso é $O(n)$.

Lembre-se que o custo amortizado é um limite superior de custo real.

Obrigado