Fontes principais

1. E. Cáceres, H. Mongeli, S. Song: Algoritmos paralelos usando CGM/PVM/MPI: uma introdução
   `http://www.ime.usp.br/~song/papers/jai01.pdf`

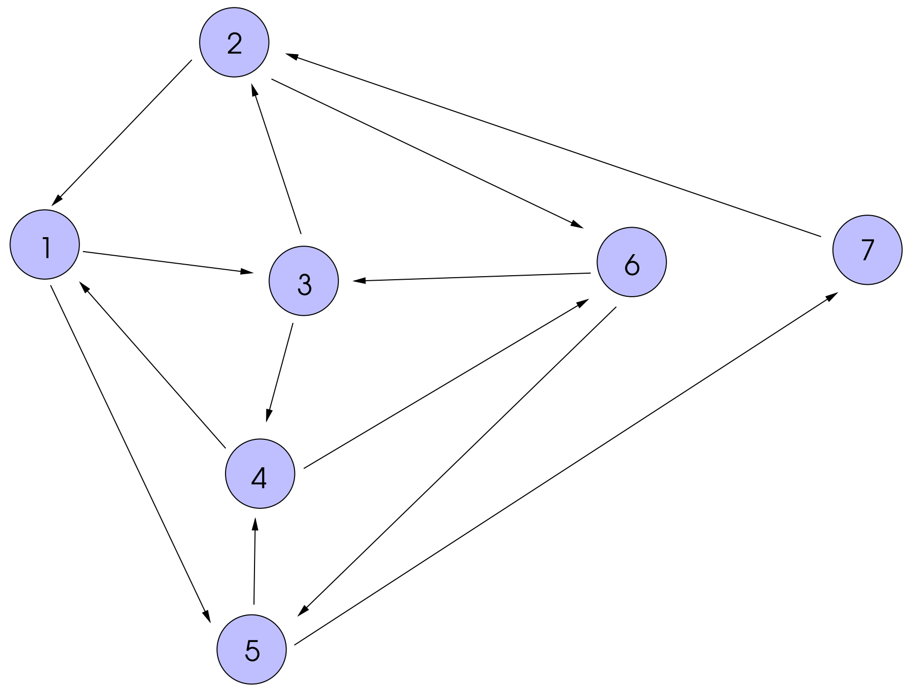
Circuito Euler em Grafos no modelo PRAM

Circuito Euler em Grafos no modelo PRAM

Um circuito Euleriano é um ciclo que passa por cada aresta do grafo exatamente uma vez.

Teorema 1. *Um grafo conexo dirigido contém somente um circuito Euleriano, se e somente se, para cada vértice* v*, o grau de entrada de v é igual ao grau de saída de* v*.*

Circuito Euler em Grafos no modelo PRAM



Algoritmo

- ▷ Atallah e Vishkin
- ▷ Modelo PRAM CREW
- ▷ Complexidade:
  - ▷ Tempo: $O(\log^2 n)$
  - ▷ Processadores: $O(m)$

Algoritmo

Entrada:

▷ Grafo dirigido $G = (V, E)$, onde $V = \{1, 2, \cdots, n\}$, Euleriano.

▷ Lista de arestas do grafo, armazenada no vetor $EDGE$ de dimensão $m = |E|$

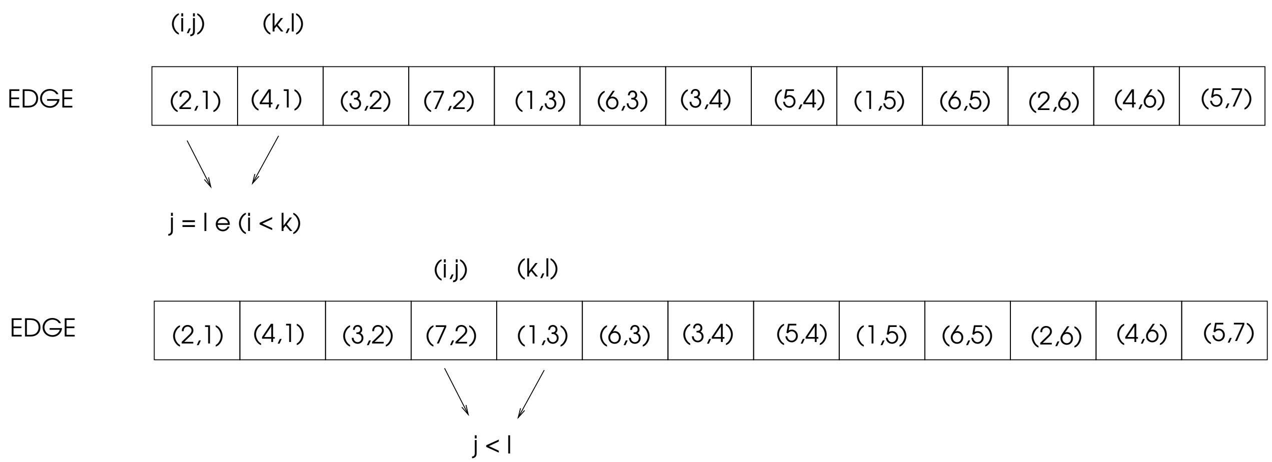
Saída:

▷ Um circuito Euleriano de G.

Algoritmo

Passo 1:

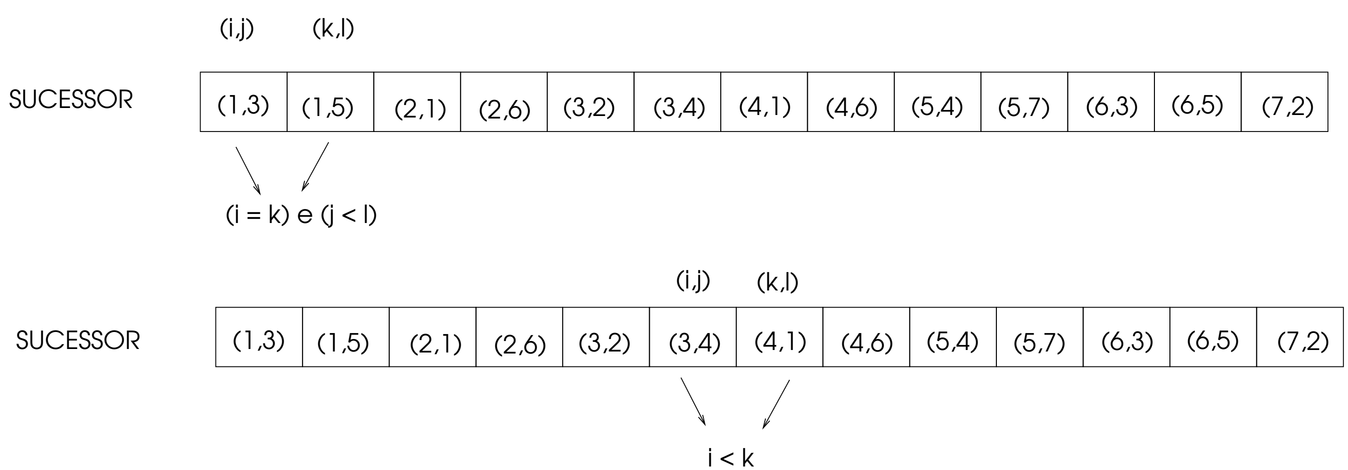
- ▷ Ordenação dos elementos de $EDGE$:
  - ∘ Dadas duas arestas (i, j) e (k, l), então, $(i, j) < (k, l)$ se $j < l$ ou $(j = l$ e $i < k)$.



Algoritmo

Passo 1: (cont.)

- ▷ Ordenação dos elementos de $SUCESSOR$:
  - ◦ Dadas duas arestas (i, j) e (k, l), então, $(i, j) < (k, l)$ se $i < k$ ou $(i = k$ e $j < l)$.



Algoritmo

Como a ordenação é lexicográfica, o número de arestas da primeira ordenação chegando ao vértice v é igual ao número de arestas saindo deste vértice nessa segunda ordenação.

Com isto, a i-ésima aresta (u, v) da primeira ordenação terá como correspondente a i-ésima aresta da segunda ordenação (v, w)

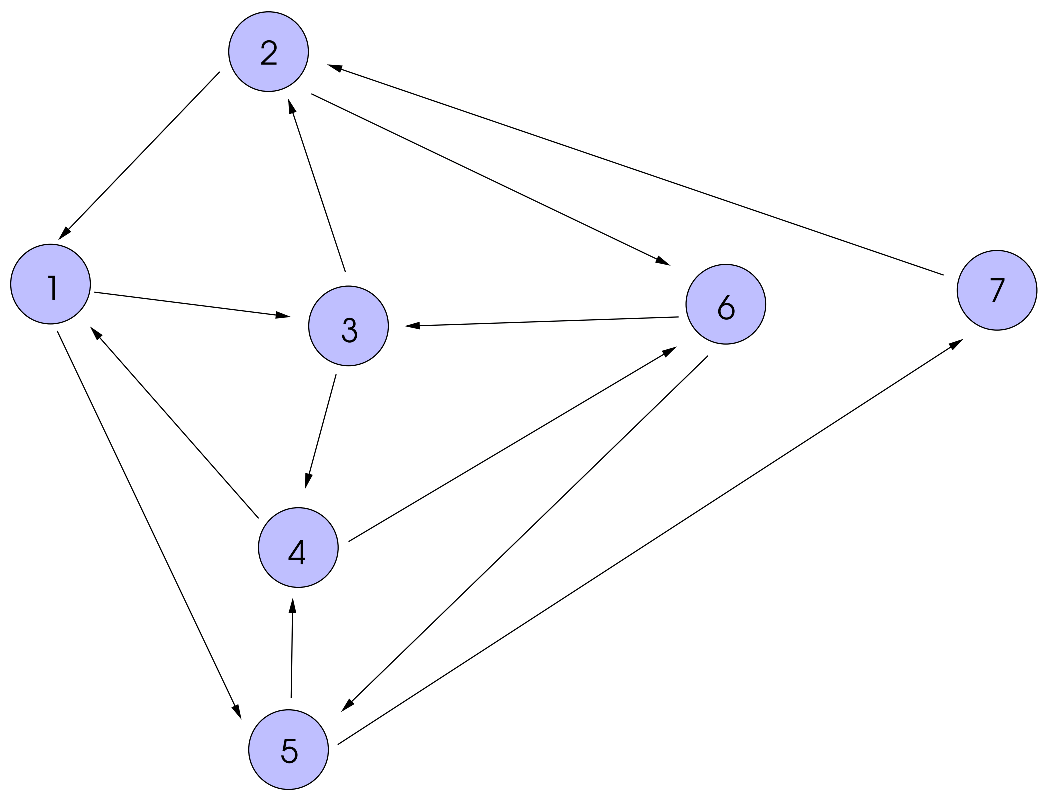
Algoritmo

Passo 1: (cont.)

$\triangleright$ Os vetores $EDGE$ e $SUCESSOR$ definem juntos um conjunto de ciclos (arestas disjuntas). Em qualquer ciclo, a aresta seguinte à aresta armazenada em $EDGE(i)$ está em $SUCESSOR(i)$

$\triangleright$ $P(i)$ aponta para o $SUCESSOR(j)$, onde j é o endereço em $EDGE$ da aresta armazenada como $SUCESSOR(i)$.

EDGE	(2,1)	(4,1)	(3,2)	(7,2)	(1,3)	(6,3)	(3,4)	(5,4)	(1,5)	(6,5)	(2,6)	(4,6)	(5,7)
SUCESSOR	(1,3)	(1,5)	(2,1)	(2,6)	(3,2)	(3,4)	(4,1)	(4,6)	(5,4)	(5,7)	(6,3)	(6,5)	(7,2)



Passo 2:

$CYCREP(i)$ armazena a aresta representante do ciclo ao qual $EDGE(i)$ pertence.

Algoritmo

para $1 \leq i \leq m$ **faça em paralelo**

$CYCREP(i) := SUCESSOR(i)$

para $1 \leq j \leq \log_2 n$ **faça**

para $1 \leq i \leq m$ **faça em paralelo**

$CYCREP(i) = min\{CYCREP(i), CYCREP(P[i])\}$

$P(i) := P(P(i))$

CYCREP	(1,3)	(1,5)	(1,3)	(1,5)	(1,3)	(1,5)	(1,5)	(1,5)	(1,5)	(1,5)	(1,5)	(1,5)	(1,5)

Passo 2: (cont.)

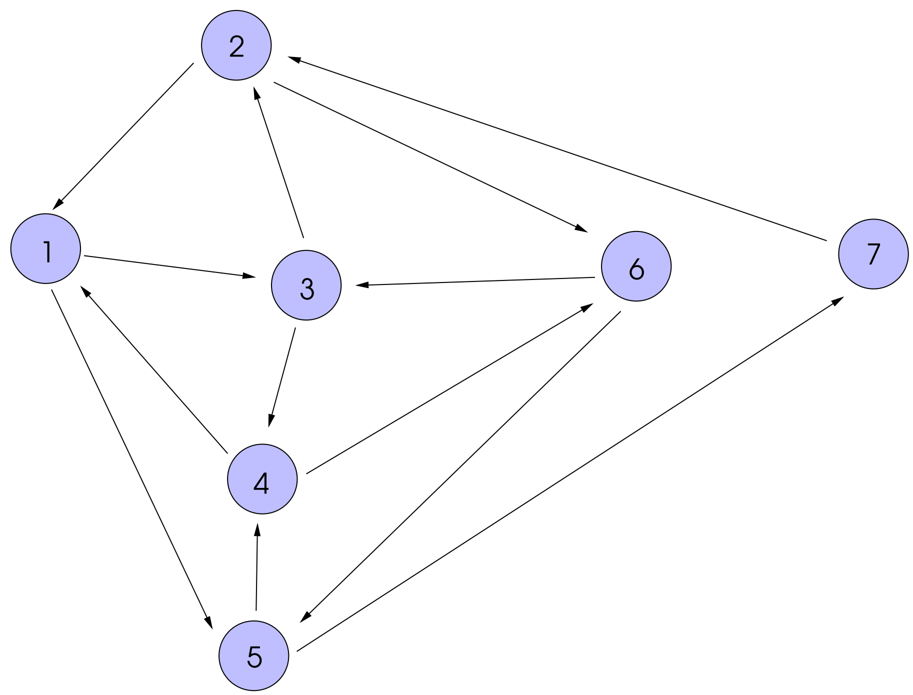
Grafo bipartido $G' = (V', E')$

$\triangleright$ $V' = V \cup C$, onde C denota o conjunto de arestas representando os ciclos.

$\triangleright$ $E' = \{(u, v) | u \in V, v \in C$ e u está no circuito representado por $v\}$

para $1 \leq i \leq m$ **faça em paralelo**
  para $EDGE'(i) = (u, v)$ **faça**
    $EDGE'(2i - 1) = (u, CYCREP(i))$
    $EDGE'(2i) = (v, CYCREP(i))$

EDGE	(2,1)	(4,1)	(3,2)	(7,2)	(1,3)	(6,3)	(3,4)	(5,4)	(1,5)	(6,5)	(2,6)	(4,6)	(5,7)



EDGE′ = (2,(1,3)) (1,(1,3)) (4,(1,5)) (1,(1,5)) (3,(1,3)) (2,(1,3)) (7,(1,5)) (2,(1,5)) (1,(1,3)) (3,(1,3)) ...

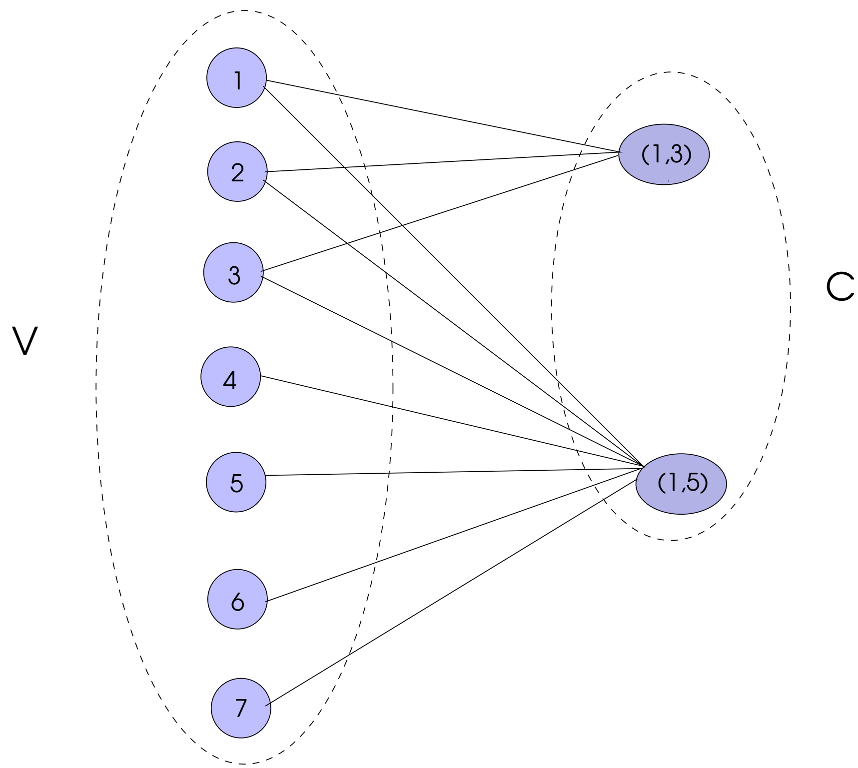
Passo 2: (cont.)

Problema: as arestas aparecem pelo menos duas vezes no vetor, pois duas arestas consecutivas em um determinado ciclo tem um vértice em comum.

Solução: ordenar as arestas e eliminar as cópias.

Passo 2: (cont.)

Grafo bipartido $G' = (V', E')$



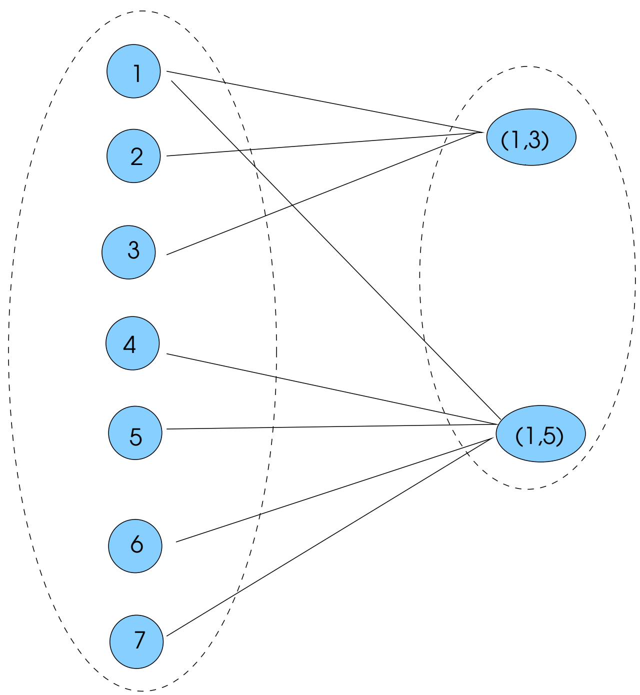
Passo 3:

▷ Determina uma árvore geradora T de G'.

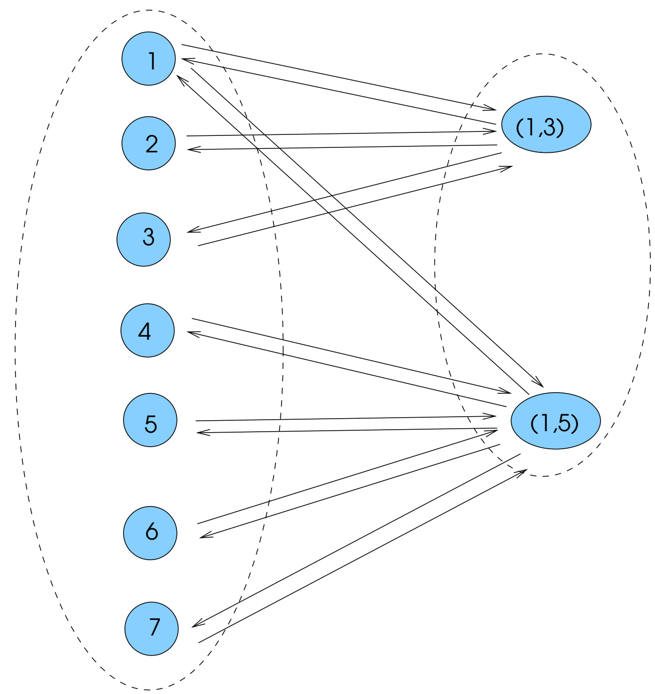
▷ T' é o grafo obtido de T substituindo-se cada aresta (i, j) por duas arestas direcionadas e anti-paralelas (i, j) e (j, i).

▷ Determinar um circuito Euleriano de T' utilizando a técnica de Euler-tour em árvores.

Passo 3: (cont.)

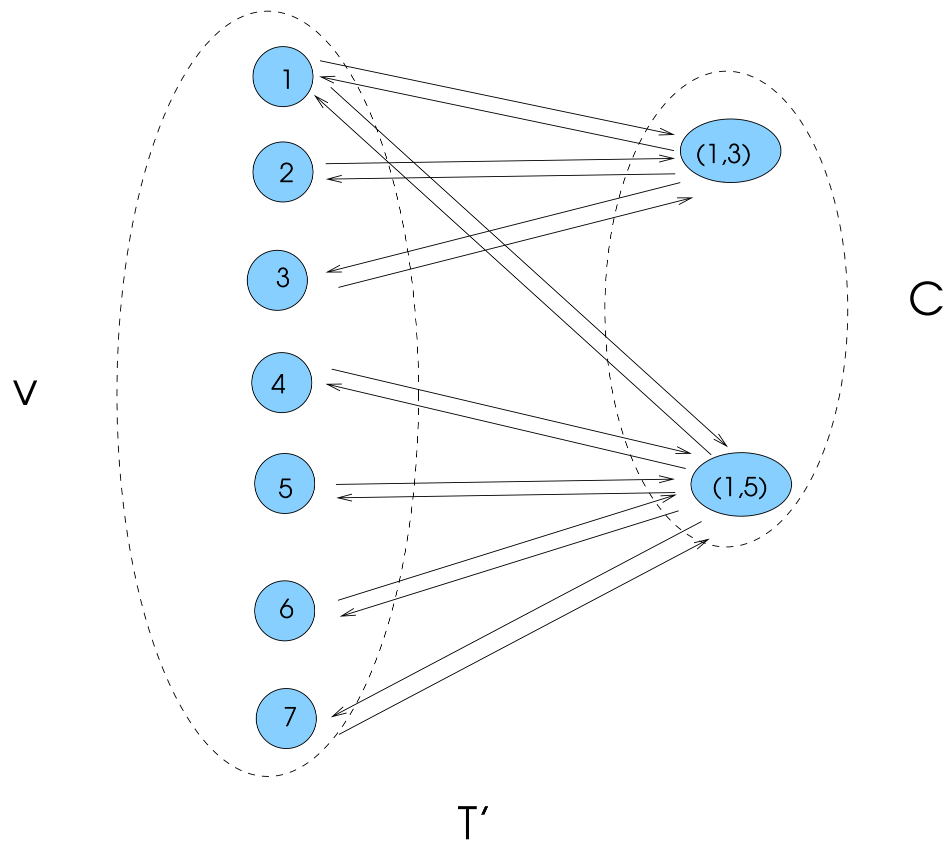


T



T′

Passo 3: (cont.)



Passo 4:

$\triangleright$ Determinar um ciclo L cujas arestas se alternam entre arestas de T' e arestas de G.

$\triangleright$ Propriedade de L: as arestas de G e de T' aparecem em L na ordem de um circuito Euleriano em G e um circuito Euleriano em T'.

$\triangleright$ Definir uma ordem circular para cada $w \in C$.

$\triangleright$ Considere w de grau d em T. Seja $(v_0, w), (v_1, w), \cdots, (v_{d-1}, w)$ vértices adjacentes a w em T, onde $v_0, v_1, \cdots v_{d-1}$, são vértices, tais que $v_i \in V$.

Passo 4: (cont.)

$\triangleright$ Modificar os vetores $EDGE$ e $SUCESSOR$ de maneira que descrevam L.

$\triangleright$ Adicionar a $EDGE$ as arestas de T' e, para cada $w \in C$ e $0 \leq \alpha \leq d-1$:

$$SUCESSOR(v_\alpha, w) \leftarrow (v_\alpha, j_\alpha)$$

$\triangleright$ Para as arestas de G:

$$SUCESSOR(i_\alpha, v_\alpha) \leftarrow (w_\alpha, v_\alpha)$$

$\triangleright$ Para as arestas do tipo (w, v_α), em T considere v_α adjacente a $w_0, w_1, \cdots, w_{d-1}$:

$$SUCESSOR(w_i, v_\alpha) \leftarrow (v_\alpha, w_{i+1 (\text{mod } d)})$$

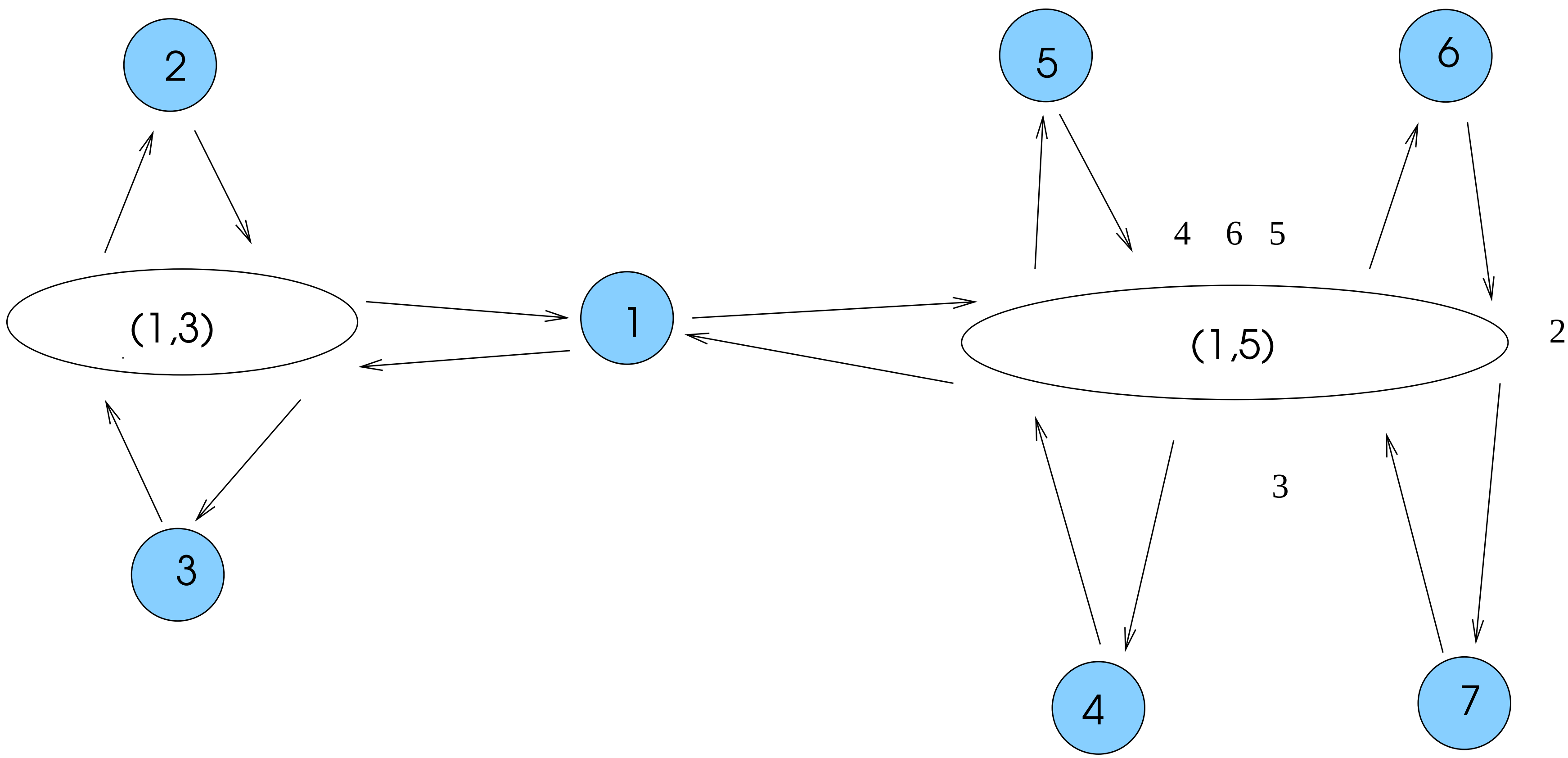
Passo 4: (cont.)

$\triangleright$ O ciclo L é descrito por $EDGE$ e $SUCESSOR$.

$\triangleright$ Segue que, L conterá as arestas de T' na ordem de um único circuito Euleriano.

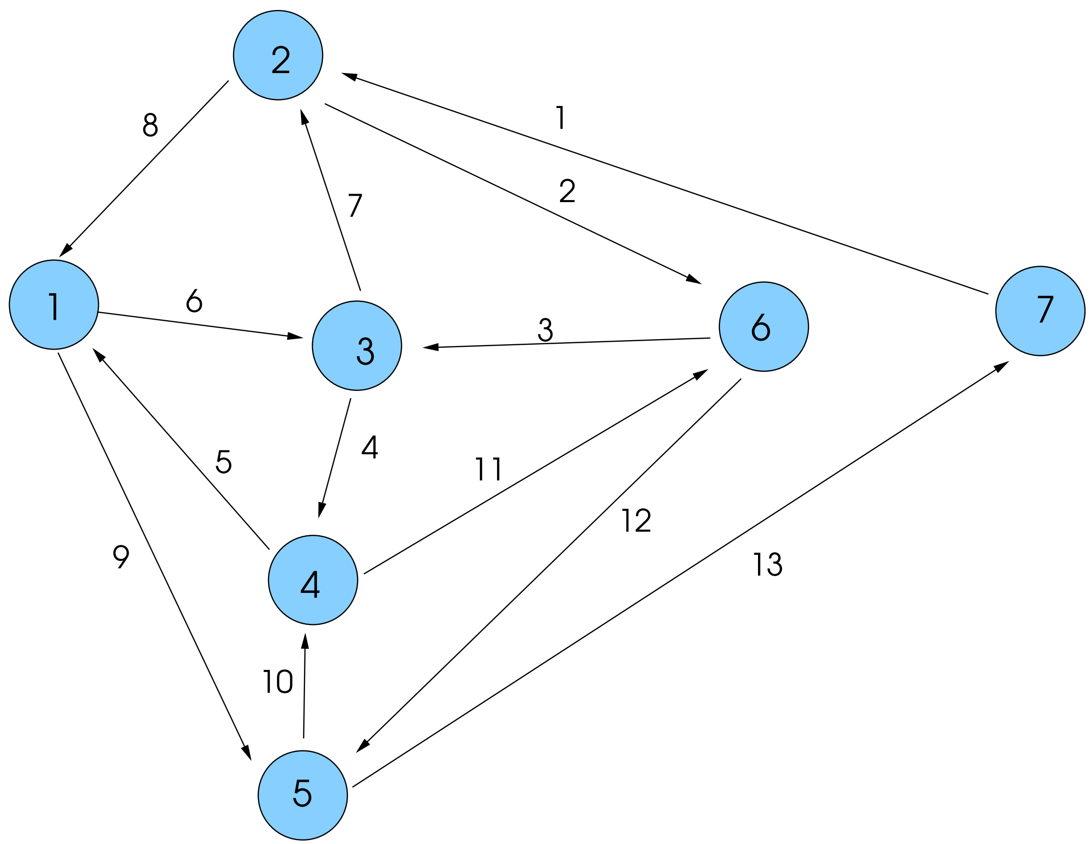
$\triangleright$ Agora, cada aresta $w \in T'$ é expandido para o circuito definido por $SUCESSOR$

Passo 4: (cont.)



Passo 5:

▷ O algoritmo descarta de L as arestas de T', obtendo, assim, o circuito Euleriano de G.



Fim