

Ciência da Computação

Arquitetura Paralela e Distribuída

Exercícios

Professor: Leonardo Takuno
{leonardo.takuno@gmail.com}

10 de março de 2016

1. Dada uma máquina PRAM com n processadores, temos na memória compartilhada uma variável C e um vetor A de n posições. Um determinado algoritmo paralelo precisa, em um dos seus passos, atribuir o valor de C para cada um dos n elementos de A . Suponha que n é uma potência de 2 ou que $n = 2^k - 1$.

Em um modelo CREW, isto é feito da forma abaixo, com leitura simultânea na variável C :

para $1 \leq i \leq n$ faça em paralelo
 $A[i] := C$

- a) Apresente as complexidades do algoritmo acima e diga se ele é ótimo.
 - b) Escreva um algoritmo paralelo que realize a mesma tarefa que o algoritmo acima, porém para o modelo EREW. Apresente as complexidades do algoritmo.
 - c) Reescreva o algoritmo do item (b), de maneira que ele seja ótimo.
2. Dado um vetor A com n elementos, deseja-se um algoritmo paralelo para calcular a soma dos n elementos de A . Suponha que n é uma potência de 2. Escreva este algoritmo e apresente as suas complexidades.
 - a) Para o modelo EREW.
 - b) Para o modelo EREW, de maneira que o algoritmo seja ótimo.
 3. Dado um vetor A de n valores booleanos, um algoritmo paralelo que calcula o OR lógico dos n valores de A deve determinar o valor M , tal que:

$$M = A[1] \text{ OR } A[2] \text{ OR } \dots \text{ OR } A[n]$$

Suponha que n é potência de 2. Escreva este algoritmo paralelo e apresente as suas complexidades para:

- a) Para o modelo CRCW fraco.
 - b) Para o modelo CRCW fraco, com $p < O(n)$ processadores.
 - c) Para o modelo EREW.
 - d) Para o modelo EREW, de maneira que o algoritmo seja ótimo.
4. Dado um vetor A de n elementos, deseja-se um algoritmo paralelo que determine o elemento de valor mínimo de A . Suponha que n é uma potência de 2. Escreva este algoritmo e apresente as suas complexidades:
 - a) Para o modelo CRCW forte.

- b) Para o modelo CRCW fraco.
 - c) Para o modelo EREW.
 - d) Para o modelo EREW, de maneira que o algoritmo seja ótimo.
5. Dado um vetor A de n elementos, deseja-se um algoritmo paralelo que determine o índice do elemento de valor mínimo de A. Suponha que n é uma potência de 2. Escreva este algoritmo e apresente as suas complexidades:
- a) Para o modelo CRCW forte.
 - b) Para o modelo CRCW fraco.
 - c) Para o modelo EREW.
 - d) Para o modelo EREW, de maneira que o algoritmo seja ótimo.
6. Dado um vetor A de n elementos e uma variável C, deseja-se um algoritmo paralelo para determinar o número M de elementos de A que são menores que C. Suponha que n é potência de 2. Escreva este algoritmo paralelo e apresente as suas complexidades:
- a) Para o modelo CREW.
 - b) Para o modelo EREW.
 - c) Para o modelo EREW, de maneira que o algoritmo seja ótimo.

Exemplo:

C = 14

A =

12	13	19	15	18	24	17	11
----	----	----	----	----	----	----	----

M = 3

7. Dado um vetor A de n elementos e uma variável C, deseja-se um algoritmo paralelo para determinar a variável M que é o valor do primeiro elemento de A que é menor que C. Isto é:

$$M = A[k], \text{ tal que } A[k] < C \text{ e } k \text{ é mínimo.}$$

Suponha que n é uma potência de 2. Escreva este algoritmo paralelo e apresente as suas complexidades:

- a) Para o modelo CRCW forte.
- b) Para o modelo CRCW fraco.
- c) Para o modelo CREW.
- d) Para o modelo EREW.
- e) Para o modelo EREW, de maneira que o algoritmo seja ótimo.

Exemplo:

C = 14

A =

16	13	19	15	18	24	17	11
----	----	----	----	----	----	----	----

M = 13

8. Dado um vetor A de n elementos e uma variável C, deseja-se um algoritmo paralelo para determinar a variável M que é o índice do primeiro elemento de A que é menor que C. Isto é:

$$M = A[k], \text{ tal que } A[k] < C \text{ e } k \text{ é mínimo.}$$

Suponha que n é uma potência de 2. Escreva este algoritmo paralelo e apresente as suas complexidades:

- a) Para o modelo CRCW forte.
- b) Para o modelo CRCW fraco.
- c) Para o modelo CREW.
- d) Para o modelo EREW.
- e) Para o modelo EREW, de maneira que o algoritmo seja ótimo.

Exemplo:

$C = 14$

$A =$

16	13	19	15	18	24	17	11
----	----	----	----	----	----	----	----

$M = 2$

9. Dado um vetor A de n elementos booleanos, escreva um algoritmo paralelo para determinar o menor índice k , tal que $A[k] = TRUE$. Suponha que n é uma potência de 2. Apresente as complexidades do algoritmo:
- a) Para o modelo CRCW forte.
 - b) Para o modelo CRCW fraco.
 - c) Para o modelo CREW.
 - d) Para o modelo EREW.
 - e) Para o modelo EREW, de maneira que o algoritmo seja ótimo.

$A =$

FALSE	FALSE	TRUE	FALSE	TRUE	TRUE	FALSE	TRUE
-------	-------	------	-------	------	------	-------	------

$k = 3$

10. Dado um vetor A de n inteiros e dado um vetor L de n posições. O vetor L possui os rótulos associados a cada elemento de A , isto é, $L[i]$ possui um rótulo associado ao elemento $A[i]$. Os valores dos rótulos estão dentro do intervalo $[1, \log_2 n]$. Deseja-se um algoritmo paralelo para obter um vetor M de $\log_2 n$ posições, onde $M[i]$ é a soma dos valores dos elementos de A com rótulo i , isto é:

$$M[i] = \sum A[k], \text{ tal que } L[k] = i, 1 \leq k \leq n, 1 \leq i \leq \log_2 n$$

Caso não exista nenhum elemnto de A com rótulo i , $M[i]$ deve ficar com o valor 0. Suponha que n é uma potência de 2. Escreva este algoritmo paralelo e apresente suas complexidades e o modelo PRAM utilizado.

Exemplo:

$n = 8$

$\log_2 8 = 3$

$A =$

12	13	19	15	18	14	17	11
----	----	----	----	----	----	----	----

$L =$

1	2	3	2	1	3	2	1
---	---	---	---	---	---	---	---

$M =$

41	45	33
----	----	----

11. Dado um vetor A de n inteiros e dado um vetor L de n posições. O vetor L possui os rótulos associados a cada elemento de A , isto é, $L[i]$ possui um rótulo associado ao elemento $A[i]$. Os valores dos rótulos estão no intervalo $[1, \log_2 n]$. Deseja-se um algoritmo paralelo para obter um vetor M de $\log_2 n$ posições, onde $M[i]$ é o número de elemntos de A com rótulo i . Caso não exista nenhum elemnto de A com rótulo i , $M[i]$ deve ficar com o valor 0. Suponha que n é uma potência de 2. Escreva este algoritmo paralelo e apresente

suas complexidades e o modelo PRAM utilizado.

Exemplo:

$n = 8$

$\log_2 8 = 3$

$A =$

12	13	19	15	18	14	17	11
----	----	----	----	----	----	----	----

$L =$

1	2	3	2	1	3	2	1
---	---	---	---	---	---	---	---

$M =$

3	3	2
---	---	---

12. Dado um vetor A de n inteiros e dado um vetor L de n posições. O vetor L possui os rótulos associados a cada elemento de A , isto é, $L[i]$ possui um rótulo associado ao elemento $A[i]$. Os valores dos rótulos estão dentro do intervalo $[1, \log_2 n]$. Deseja-se um algoritmo paralelo para obter um vetor M de $\log_2 n$ posições, onde $M[i]$ é o elemento de valor mínimo de A com rótulo i , isto é:

$$M[i] = A[k], \text{ tal que } A[k] \text{ é mínimo e } L[k] = i, 1 \leq k \leq n, 1 \leq i \leq \log_2 n$$

Caso não exista nenhum elemento de A com rótulo i , $M[i]$ deve ficar com o valor Nulo. Suponha que n é uma potência de 2. Escreva este algoritmo paralelo e apresente suas complexidades:

- a) Para o modelo CRCW forte.
- b) Para o modelo CRCW fraco.
- c) Para o modelo EREW e CREW. testes

Exemplo:

$n = 8$

$\log_2 8 = 3$

$A =$

12	13	19	15	18	14	17	11
----	----	----	----	----	----	----	----

$L =$

1	2	3	2	1	3	2	1
---	---	---	---	---	---	---	---

$M =$

11	13	14
----	----	----

13. Dado um vetor A de n inteiros e dado um vetor L de n posições. O vetor L possui os rótulos associados a cada elemento de A , isto é, $L[i]$ possui um rótulo associado ao elemento $A[i]$. Os valores dos rótulos estão dentro do intervalo $[1, \log_2 n]$. Deseja-se um algoritmo paralelo para obter um vetor M de $\log_2 n$ posições, onde $M[i]$ é o índice do elemento de valor mínimo de A com rótulo i , isto é:

$$M[i] = A[k], \text{ tal que } A[k] \text{ é mínimo e } L[k] = i, 1 \leq k \leq n, 1 \leq i \leq \log_2 n$$

Caso não exista nenhum elemento de A com rótulo i , $M[i]$ deve ficar com o valor Nulo. Suponha que n é uma potência de 2. Escreva este algoritmo paralelo e apresente suas complexidades:

- a) Para o modelo CRCW forte.
- b) Para o modelo CRCW fraco.
- c) Para o modelo EREW e CREW. testes

Exemplo:

$$n = 8$$

$$\log_2 8 = 3$$

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 13 & 19 & 15 & 18 & 14 & 17 & 11 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

14. Dado um vetor A com n elementos, deseja-se um algoritmo paralelo para obter os valores P e S , de n posições cada, tal que P contém as somas dos prefixos de A , e S contém as somas dos sufixos de A . Isto é:

$$P[i] = A[1] + A[2] + \dots + A[i], 1 \leq i \leq n, \text{ e}$$
$$S[i] = A[n] + A[n-1] + \dots + A[i], 1 \leq i \leq n.$$

Suponha que n é uma potência de 2. Escreva este algoritmo paralelo e apresente suas complexidades:

- Para o modelo CREW.
 - Para o modelo CREW, de maneira que o algoritmo seja ótimo.
15. O algoritmo paralelo para determinar a soma de prefixos e de sufixos de um vetor A de n elementos, visto na questão 5, possui leitura simultânea. Reescreva o algoritmo para eliminar a leitura simultânea, isto é para passá-lo para o modelo EREW. Apresente as complexidades do algoritmo.
16. Dado um vetor A de n elementos, deseja-se um algoritmo paralelo para determinar os vetores P e S de n posições cada, onde P contém os mínimos dos prefixos de A , e S contém os mínimos dos sufixos de A .

Isto é:

$$P[i] = \text{Mínimo}(A[1], A[2], \dots, A[i]), 1 \leq i \leq n, \text{ e}$$
$$S[i] = \text{Mínimo}(A[i] + A[i+1] + \dots + A[n]), 1 \leq i \leq n.$$

Suponha que n é uma potência de 2. Escreva este algoritmo paralelo e apresente suas complexidades:

- Para o modelo CRCW forte.
 - Para o modelo CRCW fraco.
 - Para o modelo CREW.
 - Para o modelo CREW, de maneira que o algoritmo seja ótimo.
17. Dado um vetor A de n elementos, deseja-se um algoritmo paralelo para determinar os vetores P e S de n posições cada, onde P contém os índices dos mínimos dos prefixos de A , e S contém os índices dos mínimos dos sufixos de A . Isto é:

$$P[i] = \text{Índice do Mínimo}(A[1], A[2], \dots, A[i]), 1 \leq i \leq n, \text{ e}$$
$$S[i] = \text{Índice do Mínimo}(A[i] + A[i+1] + \dots + A[n]), 1 \leq i \leq n.$$

Se dois elementos possuem o mesmo valor mínimo, o índice deve ser o menor.

Suponha que n é uma potência de 2. Escreva este algoritmo paralelo e apresente suas complexidades:

- Para o modelo CRCW forte.
- Para o modelo CRCW fraco.
- Para o modelo CREW.
- Para o modelo CREW, de maneira que o algoritmo seja ótimo.

A =

12	13	19	15	18	14	17	11
----	----	----	----	----	----	----	----

P =

1	2	3	3	3	6	6	6
---	---	---	---	---	---	---	---

S =

6	6	6	6	6	6	8	8
---	---	---	---	---	---	---	---

18. Dada uma variável C escreva um algoritmo paralelo para calcular o vetor A de n posições, onde:

$$A[i] = C^i, 1 \leq i \leq n.$$

Seu algoritmo deve utilizar apenas operações de multiplicação (não deve utilizar operações de exponenciação). Apresente as complexidades do algoritmo e o modelo PRAM utilizado. Suponha que n é uma potência de 2.

19. Dado um vetor A de n elementos e dados duas variáveis X e Y. Escreva um algoritmo paralelo para armazenar os elementos que pertençam ao intervalo [X, Y], em posição consecutivas de um vetor B de n posições. As posições não ocupadas de B devem ficar com o valor Nulo. Suponha que n é uma potência de 2. Apresente as complexidades do algoritmo e o modelo PRAM utilizado.

Exemplo:

A =

12	13	19	15	18	14	17	11
----	----	----	----	----	----	----	----

X = 13, Y = 17

S =

13	15	14	17	Nulo	Nulo	Nulo	Nulo
----	----	----	----	------	------	------	------

20. Dado um vetor A de n elementos, deseja-se obter os vetores L (left - esquerda) e R (right - direita) de n posições, tal que:

$L[i] = A[k]$, onde k é o maior índice tal que, $k < i$, e $A[k] < A[i]$, $1 \leq i \leq n$, e

$R[i] = A[k]$, onde k é o menor índice tal que, $i < k$, e $A[k] < A[i]$, $1 \leq i \leq n$.

Isto é, $L[i]$ é o elemento de A menor que $A[i]$, mais próximo de $A[i]$ pela esquerda e $R[i]$ é o elemento de A menor que $A[i]$, mais próximo de $A[i]$ pela direita. Se tal elemento não existe, $L[i] = \text{Nulo}$ ou $R[i] = \text{Nulo}$, respectivamente.

Escreva um algoritmo paralelo para obter os vetores L e R, para o modelo CRCW forte, com custo $O(n^2)$.

Exemplo:

A =

12	13	19	15	18	14	17	11
----	----	----	----	----	----	----	----

L =

Nulo	12	13	13	15	13	14	Nulo
------	----	----	----	----	----	----	------

R =

11	11	15	14	14	11	11	Nulo
----	----	----	----	----	----	----	------