Estructuras de datos

Training Camp Argentina - Sexta edicióin

Fidel I. Schaposnik (UNLP) - fidel.s@gmail.com

24 de julio de 2015

Contenidos

- Introducción
- `set` de C++
- Mínimo en intervalos (RMQ)
  - caso estático: *sparse tables*
  - caso dinámico: *segment tree*
  - Aplicación: ancestro común más bajo (LCA)
- Suma en intervalos
  - caso estático: sumas parciales uni- y bi-dimensionales
  - caso dinámico: *binary indexed tree*
- Operaciones más generales en intervalos
  - caso estático
  - caso dinámico: *square root trick*
- Más sobre *segment trees*
  - Cambios en bloque: *lazy propagation*
  - Ventana al pasado: *persistencia*

Introducción

¿Qué es una estructura de datos?

- Una forma de almacenar datos y operar con ellos de modo de poder calcular eficientemente diversas cantidades.
- Puede pensarse como una "caja negra" donde están los datos (posiblemente sujetos a modificaciones), que nos responderá cierto tipo de preguntas de modo eficiente.

¿Cómo se usa una estructura de datos en una competencia de programación?

Las etapas o pasos intermedios del algoritmo muchas veces pueden verse como subproblemas menores, que debemos resolver para hallar la respuesta final. Si bien los problemas completos rara vez se repiten, los subproblemas muchas veces son "clásicos", y conocemos para ellos una estructura de datos adecuada.

`set` de C++

El `set` de C++ representa un conjunto de elementos, que podemos pensar como ordenados de "menor" a "mayor". Nos permite realizar distintas operaciones en $\mathcal{O}(\log N)$:

- insertar y borrar elementos (`insert` y `erase`, resp.);
- fijarnos si un elemento está presente (`find`);
- encontrar el primer elemento "mayor" o "mayor o igual" que otro (`upper_bound` y `lower_bound`, respectivamente).

Algunas observaciones:

- en un conjunto no puede haber repeticiones;
- no controlamos el funcionamiento interno de la estructura, solo la función de comparación;
- no podemos modificar elementos (pero sí eliminar una versión vieja de un elemento y reemplazarla por una nueva).

Ejemplo del uso de set de C++

```cpp
#include <iostream>
#include <set>
using namespace std;

int main() {
    set<int> c;

    for (int i=-15; i<17; i+=3) c.insert(i);

    cout << c.size() << endl;
    for (set<int>::iterator it=c.begin(); it!=c.end(); it++)
        cout << *it << ' ';

    cout << endl << (c.find(-9)!=c.end()) << endl;
    c.erase(-9);
    cout << (c.find(-9)!=c.end()) << endl;

    cout<<*c.lower_bound(6)<<' '<<*c.upper_bound(6)<<endl;
    cout<<*c.lower_bound(7)<<' '<<*c.upper_bound(7)<<endl;

    return 0;
}
```

Ejemplo del uso de set de C++

Ejemplo del uso de set de C++ (cont.)

Podemos utilizar nuestros propios elementos definiendo un orden

```
1  struct pt {
2      int x, y;
3      pt(int xx=0, int yy=0) {
4          x=xx; y=yy;
5      };
6  };
7
8  bool operator<(const pt &p1, const pt &p2) {
9      double a1=atan2(p1.y, p1.x), a2=atan2(p2.y, p2.x);
10     if (a1 != a2) return a1 < a2;
11     else return p1.x*p1.x+p1.y*p1.y < p2.x*p2.x+p2.y*p2.y;
12 }
13
14 [...]
15
16 set<pt> p;
17
18 p.insert(pt(1,1)); p.insert(pt(2,2));
19 p.insert(pt(2,1)); p.insert(pt(3,5));
```

Uso del set *de C++ con una estructura propia*

Aplicación: Dijkstra

```
1  set< pair<int, int> > s;
2
3  void dijkstra(int start, int dest, int N) {
4    for (int i=0; i<N; i++) n[i].d = INF;
5    n[start].d = 0; s.insert(make_pair(0, start));
6    while (!s.empty()) {
7      int cur = s.begin()->second;
8      if (cur == dest) break;
9      for (int i=0; i<(int)n[cur].c.size(); i++) {
10       int next = n[cur].c[i].first;
11       if(n[next].d > n[cur].d+n[cur].c[i].second){
12         if (n[next].d != INF)
13           s.erase(make_pair(n[next].d, next));
14         n[next].d = n[cur].d + n[cur].c[i].second;
15         s.insert(make_pair(n[next].d, next));
16       }
17     }
18     s.erase(make_pair(n[cur].d, cur));
19   }
20 }
```

Algoritmo de Dijkstra usando un `set` - $\mathcal{O}(N \log N + E)$

Mínimo en intervalos (RMQ)

Dado un arreglo de N números $m_0, \ldots, m_{N-1}$, queremos responder preguntas de la forma

¿Cuál es el menor número en el intervalo $m_i, \ldots, m_{j-1}$?

$$\equiv \text{RMQ}\ [i, j\,)$$

- El algoritmo ingenuo recorre todos los elementos en $[i, j)$, y requiere $\mathcal{O}(N)$ en el peor caso;
- Si no se van a modificar los valores del arreglo, podemos preprocesar en $\mathcal{O}(N \log N)$ y responder preguntas en $\mathcal{O}(1)$;
- Si los elementos del arreglo pueden cambiar, podemos inicializar en $\mathcal{O}(N)$ y responder preguntas o modificar valores en $\mathcal{O}(\log N)$

RMQ - Sparse tables

Si los elementos del arreglo no pueden cambiar de valor, podemos **preprocesar** los datos para acelerar el cálculo de las respuestas:

- Hay $\mathcal{O}(N^2)$ preguntas posibles, y podemos precalcular todas sus respuestas en $\mathcal{O}(N^2)$ usando programación dinámica;
- No hace falta guardar todas las respuestas: basta con precalcular una cantidad suficiente como para poder responder cualquier pregunta.

Definimos

$$\mathrm{st}_k(i) = \min_{i \le j < i+2^k} \{m_j\} \equiv \mathrm{RMQ}[i, i+2^k) \qquad \text{para} \qquad k = 0, 1, \ldots$$

Observamos que podemos precalcular los $\mathcal{O}(N \log N)$ valores de st usando programación dinámica

$$\mathrm{st}_0(i) = m_i$$

$$\mathrm{st}_k(i) = \min\left\{\mathrm{st}_{k-1}(i), \mathrm{st}_{k-1}(i+2^{k-1})\right\}$$

RMQ - Sparse tables (cont.)

Para calcular $\mathrm{RMQ}\,[i,j)$, observamos que si $2^k \leq j-i < 2^{k+1}$,

$$\mathrm{RMQ}\,[i,j) = \min\left\{\mathrm{st}_k(i), \mathrm{st}_k(j-2^k)\right\}$$

```
1  void st_init(int *m, int N, int **st) {
2      for (int i=0; i<N; i++) st[0][i] = m[i];
3      for (int k=1; (1<<k)<=N; k++)
4        for (int i=0; i+(1<<k)<=N; i++)
5          st[k][i] = min(st[k-1][i], st[k-1][i+(1<<(k-1))]);
6  }
7
8  int st_query(int **st, int s, int e) {
9      int k = 31 - __builtin_clz(e-s);
10     return min(st[k][s], st[k][e-(1<<k)]);
11 }
```

RMQ estático con sparse tables - $\mathcal{O}(N \log N)$ init. y $\mathcal{O}(1)$ query

RMQ - Segment tree

Si los elementos del arreglo pueden cambiar, el preproceso o **inicialización** debe ser complementado con el **mantenimiento** de la estructura.

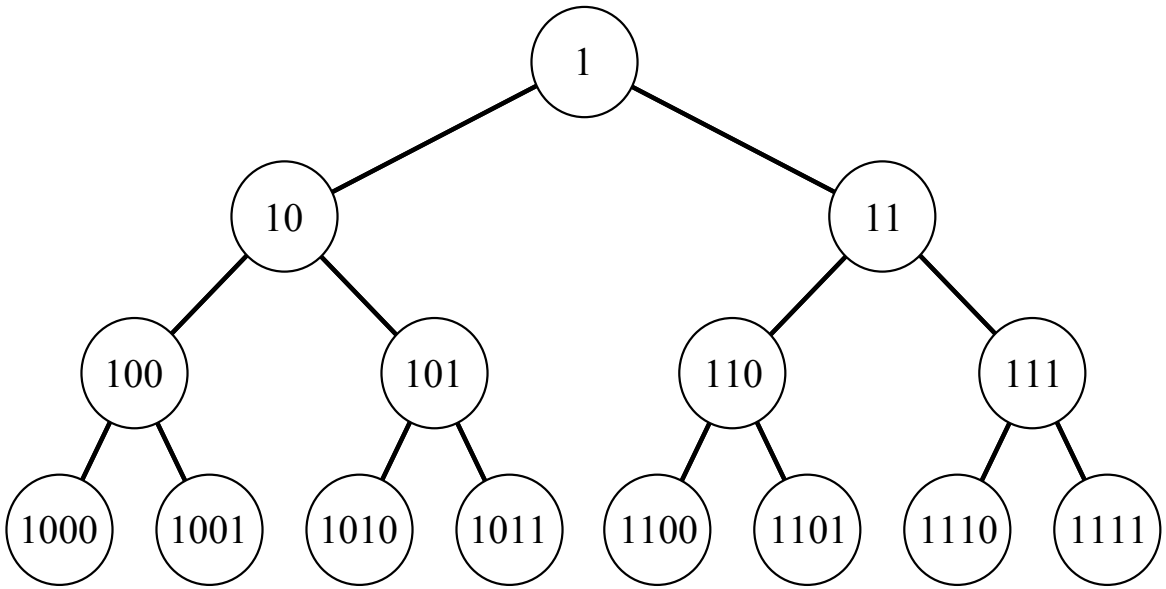
Vamos a usar un árbol binario del siguiente modo:

- Cada nodo representa un intervalo, en particular la raíz representa al $[0, N)$
- El hijo izquierdo de un nodo representa la primera mitad del segmento de su padre, el derecho la otra
- Las hojas del árbol representan segmentos de longitud uno, y almacenan el correspondiente valor del arreglo
- En cada nodo interno se almacena el mínimo de los dos valores almacenados en sus dos hijos

RMQ - Segment tree (cont.)

Una forma elegante de definir un árbol binario usando un arreglo

- El "nombre" de un nodo es su posición en el arreglo
- La raíz es el nodo 1
- El hijo izquierdo de i es el nodo $2i$, el derecho es el $2i + 1$
- El padre del nodo i es el $i/2$
- El valor almacenado en el nodo es el valor en la posición correspondiente del arreglo



RMQ - Segment tree (cont.)

- Para inicializar, debemos llenar los valores de los nodos desde las hojas hasta la raíz: $\mathcal{O}(N)$
- Para modificar un valor, debemos cambiar el valor de la hoja correspondiente y luego actualizar los valores de todos los nodos internos en el camino de la hoja hasta la raíz: $\mathcal{O}(\log N)$
- Para realizar una consulta, debemos tomar el mínimo entre los valores almacenados en los nodos cuyos segmentos corresponden exactamente al intervalo deseado: $\mathcal{O}(\log N)$
- La estructura tipo árbol sugiere una implementación recursiva de todas estas funciones

RMQ - Segment tree (código)

```
1  #define LEFT(n) ( 2*(n) )
2  #define RIGHT(n) ( 2*(n)+1 )
3  #define NEUTRO 2147483647
4
5  int oper(int a, int b) {
6      return min(a, b);
7  }
8
9  void init(int n, int s, int e, int *rmq, int *m) {
10     if (s+1 == e) rmq[n] = m[s];
11     else {
12         init(LEFT(n), s, (s+e)/2, rmq, m);
13         init(RIGHT(n), (s+e)/2, e, rmq, m);
14         rmq[n] = oper(rmq[LEFT(n)], rmq[RIGHT(n)]);
15     }
16 }
```

RMQ dinámico con segment tree - Inicialización

RMQ - Segment tree (código cont.)

```
1  void update(int n,int s,int e,int *rmq,int *m,int p,int v) {
2      if (s+1 == e) rmq[n] = m[s] = v;
3      else {
4          if (p < (s+e)/2)
5              update(LEFT(n), s, (s+e)/2, rmq, m, p, v);
6          else update(RIGHT(n), (s+e)/2, e, rmq, m, p, v);
7          rmq[n] = oper(rmq[LEFT(n)], rmq[RIGHT(n)]);
8      }
9  }
10
11 int query(int n, int s, int e, int *rmq, int a, int b) {
12     if (e <= a || s >= b) return NEUTRO;
13     else if (s >= a && e <= b) return rmq[n];
14     else {
15         int l = query(LEFT(n), s, (s+e)/2, rmq, a, b);
16         int r = query(RIGHT(n), (s+e)/2, e, rmq, a, b);
17         return oper(l, r);
18     }
19 }
```

RMQ dinámico con segment tree - Mantenimiento y consulta

RMQ - Segment tree (observaciones)

- Todas las funciones se llaman con $n = 1$, $s = 0$ y $e = N$
- En algunos casos conviene almacenar la *posición* del menor elemento, en lugar de su valor
- `oper` puede ser otras operaciones además de $<$: podemos usar $>$, pero también operaciones algebraicas como $+$ y $*$, operaciones binarias como $\vee$, $\wedge$ y $|$, etc.
- `NEUTRO` debe ser el elemento neutro de la operación `oper`

Aplicación: ancestro común más bajo

El problema consiste en hallar el **ancestro común más bajo** entre pares de nodos de un árbol enraizado.

Aplicación: ancestro común más bajo

El problema consiste en hallar el **ancestro común más bajo** entre pares de nodos de un árbol enraizado.

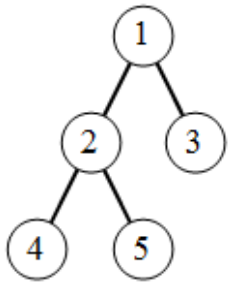
- Puede pensarse como un caso particular de la estructura analizada para operaciones generales en arreglos estáticos.
- Puede reducirse a la aplicación de RMQ sobre un arreglo generado con un recorrido DFS del árbol $\Longrightarrow \mathcal{O}(N)$

Sirve para resolver muchos problemas que involucran pares de nodos (o caminos entre ellos), e.g. calcular eficientemente distancias entre los nodos del árbol.

Aplicación: ancestro común más bajo (cont.)

En un recorrido de DFS:

- Calculamos la altura H_i para todos los nodos $i = 1, \ldots, N$
- Generamos un arreglo O de tamaño $2N - 2$ conteniendo los identificadores de los nodos desde los que se sale cada vez que se recorre una arista:



$$O \Longrightarrow \{1, 2, 4, 2, 5, 2, 1, 3\}$$

Luego

- Definimos L_i como la posición de la primera aparición del nodo i en el arreglo O, para $i = 1, \ldots, N$
- Utilizamos una *sparse table* para hacer RMQ sobre O con la operación "nodo a" $<$ "nodo b" $\longleftrightarrow$ $H_a < H_b$
- $LCA(i, j) = \mathrm{RMQ}[\min(L_i, L_j), \max(L_i, L_j) + 1)$

Suma en intervalos

Dado un arreglo de N números $m_0, \ldots, m_{N-1}$, queremos responder preguntas de la forma

¿Cuál es el valor de $S[i, j) = m_i + \cdots + m_{j-1}$**?**

- El algoritmo ingenuo recorre todos los elementos en $[i, j)$, y requiere $\mathcal{O}(N)$ en el peor caso;
- Si no se van a modificar los valores del arreglo, podemos preprocesar en $\mathcal{O}(N)$ y responder preguntas en $\mathcal{O}(1)$;
- Si los elementos del arreglo pueden cambiar, podemos inicializar en $\mathcal{O}(N \log N)$ y responder preguntas o modificar valores en $\mathcal{O}(\log N)$

Suma en intervalos: sumas parciales

- Si los elementos del arreglo no pueden modificarse, podemos precalcular todas las respuestas en $\mathcal{O}(N^2)$ y responder en $\mathcal{O}(1)$.
- Observamos que basta poder responder cuando $i = 0$, porque

$$S[i, j) = S[0, j) - S[0, i)$$

Luego podemos precalcular sólo los valores de $S[0, i)$ en $\mathcal{O}(N)$, y responder en $\mathcal{O}(1)$

```
1 void init(int *m, int *sm, int N) {
2     sm[0] = 0;
3     for (int i=1; i<=N; i++) sm[i] = sm[i-1]+m[i-1];
4 }
5
6 int query(int *sm, int a, int b) {
7     return sm[b]-sm[a];
8 }
```

Suma en intervalos usando sumas parciales

Suma en intervalos: sumas parciales bidimensionales

El problema anterior puede generalizarse para el caso de arreglos bidimensionales: si queremos calcular

$$S_2(a, b, c, d) = \sum_{i=a}^{b-1} \sum_{j=c}^{d-1} m_{ij}$$

para $a < c$ y $b < d$, basta conocer $S_2(0, 0, i, j)$, dado que

$$S_2(a, b, c, d) = S_2(0, 0, c, d) - S_2(0, 0, a, d) - S_2(0, 0, c, b) + S_2(0, 0, a, b)$$

Luego el preprocesamiento será en $\mathcal{O}(N^2)$ y las consultas en $\mathcal{O}(1)$.

El principio de inclusión exclusión nos permite generalizar esto a arreglos n-dimensionales, obteniendo consultas en $\mathcal{O}(2^n)$ realizando un preprocesamiento en $\mathcal{O}(N^n)$

Suma en intervalos: binary indexed tree

Si los elementos del arreglo pueden modificarse, ya conocemos una estructura eficiente: usamos un segment tree con `oper` $\mapsto +$ y `NEUTRO` $\mapsto 0$.

Una estructura más eficiente aprovecha la observación $S[i,j) = S[0,j) - S[0,i)$ modificando los intervalos almacenados en cada posición del arreglo

- Definimos $\text{bit}(i) = \sum_{j=i-k+1}^{i} m_j$ con k la mayor potencia de 2 que divide a i (o $k = 1$ si $i = 0$).
- Para calcular $S[0, i+1)$ sumamos los intervalos que lo componen sacando progresivamente los 1's de la expresión binaria de i.
- Para modificar una posición (sumar una cantidad en una posición dada) agregamos la cantidad deseada a todos los intervalos que contienen esa posición.

Suma en intervalos: binary indexed tree (código)

P. Fenwick, "*A New Data Structure for Cumulative Frequency Tables*", Software - Practice and Experience, **24**(3), pp. 327-336 (1994)

```
1  int get_cf(int idx, int *bit) {
2      int cf = bit[0];
3      while (idx > 0) {
4          cf += bit[idx];
5          idx &= idx-1;
6      }
7      return cf;
8  }
9
10 void upd_f(int idx, int f, int *bit) {
11     if (idx == 0) bit[idx] += f;
12     else while (idx < MAXN) {
13         bit[idx] += f;
14         idx += idx&(-idx);
15     }
16 }
```

Suma en intervalos usando binary indexed tree

Suma en intervalos: binary indexed tree (observaciones)

- Las posiciones del arreglo acumulan los cambios, luego para modificar una posición llamamos a `upd_f` con

$$v = m_i^{(\text{nuevo})} - m_i^{(\text{viejo})}$$

- Las dos operaciones son $\mathcal{O}(\log N)$
- La inicialización es $\mathcal{O}(N \log N)$ porque debemos modificar todas las posiciones una por una
- También puede modificarse para ser utilizado con otras operaciones
- Se puede extender fácilmente esta estructura para operar sobre arreglos bidimensionales

Operaciones más generales: caso estático

Dada una operación asociativa $\otimes$ y un arreglo de N elementos $m_0, \ldots, m_{N-1}$ que no se pueden modificar, si queremos responder preguntas de la forma

¿Cuál es el valor de $O[i,j) = m_i \otimes \cdots \otimes m_{j-1}$?

Definimos

$$O_k(i) = \bigotimes_{j=i}^{i+2^k-1} m_j \equiv O\left[i, i+2^k\right)$$

y para calcular $O[i,j)$ aplicamos la operación adelantando i a medida que encontramos 1's en la cantidad $j-i$

Operaciones más generales: caso estático (código)

```
1  void init(int *m, int **sm, int N) {
2      for (int i=0; i<N; i++) sm[0][i] = m[i];
3      for (int k=1; (1<<k)<=N; k++)
4          for (int i=0; i+(1<<k)<=N; i++)
5              sm[k][i]=oper(sm[k-1][i],sm[k-1][i+(1<<(k-1))]);
6  }
7
8  int query(int **sm, int a, int b) {
9      int RES = 0, l = b-a;
10     for (int i=0; (1<<i)<=l; i++) if (l&(1<<i)) {
11         RES = oper(RES, sm[i][a]);
12         a += (1<<i);
13     }
14     return RES;
15 }
```

Operaciones más generales: caso estático - $\mathcal{O}(N \log N)$ inicialización y $\mathcal{O}(\log N)$ consulta

Operaciones más generales: caso dinámico

Si los elementos del arreglo pueden modificarse, podemos usar el siguiente truco:

- Partimos el intervalo $[0, N)$ en $\sqrt{N}$ segmentos s_i con $i = 0, \ldots, \sqrt{N}$
- Para mayor comodidad, definimos $a_i = i\sqrt{N}$ y $b_i = (i+1)\sqrt{N}$; luego el i-ésimo segmento corresponde a $[a_i, b_i)$, con $i = 0, \ldots, \sqrt{N}$
- Para cada segmento, guardamos el valor de

$$O_i = \bigotimes_{j=a_i}^{b_i-1} m_j \equiv O[a_i, b_i)$$

- Al realizar una modificación en la posición j, debemos recalcular el O_i tal que $j \in [a_i, b_i) \Longrightarrow \mathcal{O}(\sqrt{N})$
- Al realizar una consulta, debemos realizar la operación $\otimes$ sobre los segmentos completos (a lo sumo $\sqrt{N}$) y los elementos sueltos a ambos lados (a lo sumo $2\sqrt{N}$) $\Longrightarrow \mathcal{O}(\sqrt{N})$

Lazy propagation

En ocasiones puede ser necesaria una estructura que permita realizar modificaciones sobre muchos elementos a la vez, por ejemplo actualizar el rango $[a, b)$ fijándolo en un cierto valor o sumándole a cada elemento una cantidad dada:

- Los *segment trees* discutidos anteriormente soportan estas operaciones en $\mathcal{O}(N \log N)$, pero queremos algo más eficiente;
- El poder del *segment tree* radica en que todo segmento puede ser representado mediante la unión de $\mathcal{O}(\log N)$ segmentos disjuntos;
- Podemos alcanzar un tiempo de ejecución $\mathcal{O}(\log N)$ si ampliamos la estructura para "marcar" segmentos sobre los que queremos realizar una operación (a ser efectuada sólo en caso de ser necesario).

Lazy propagation (cont.)

En general requerimos por cada nodo/segmento

- Los parámetros de la operación que debemos aplicar (incluyendo posiblemente un *flag* para indicar si hay una operación pendiente que no hemos efectuado aún);
- Una forma de calcular el valor asociado a **todo** el segmento sin realizar la operación pendiente;
- Una forma de "partir" operaciones en dos partes, para "transferirlas" a los hijos de un nodo si este no está totalmente contenido en el segmento que nos interesa;

La estructura funciona como un *segment tree* usual pero que "empuja" las operaciones pendientes hacia las hojas a medida que realiza otras operaciones. El tiempo de ejecución por operación es $\mathcal{O}(\log N)$ amortizado.

Persistencia

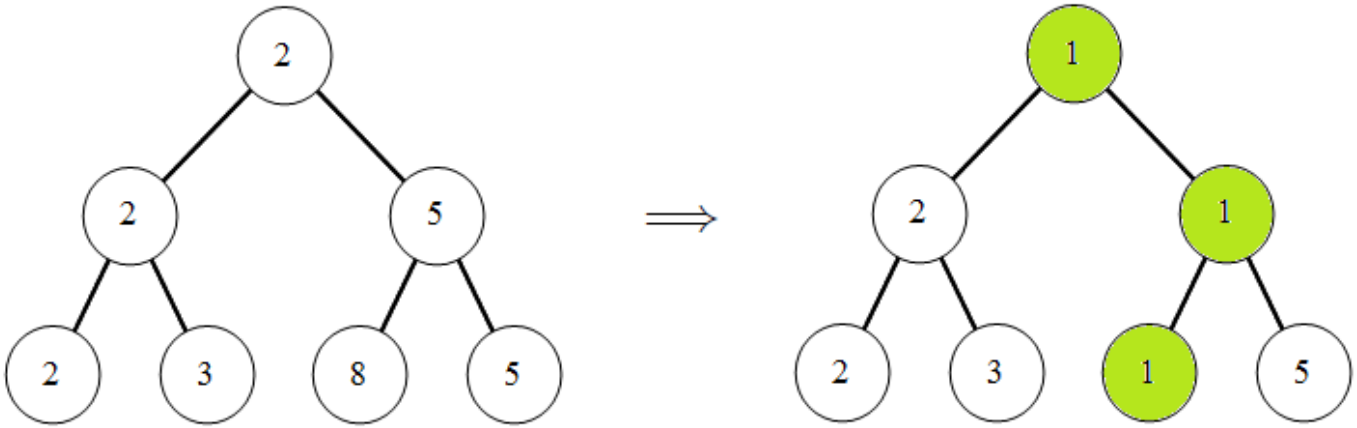
Nos interesa una estructura de datos con "ventana al pasado":

- Queremos realizar K operaciones de modificación de los datos;
- Las consultas deben responderse con la estructura tal como era justo después de la k-ésima modificación, pero pueden realizarse después de haber realizado más operaciones;
- Guardar K copias completas de la estructura de datos es demasiado costoso.

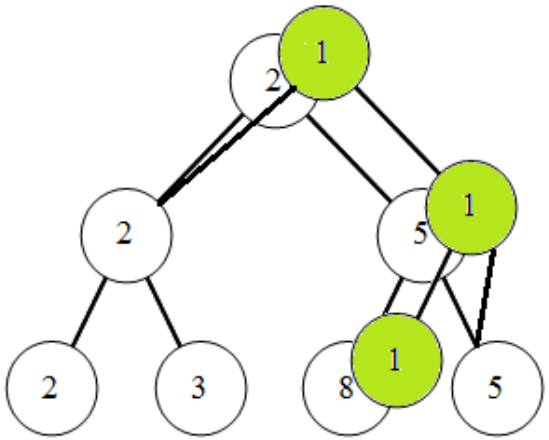
Observación: Al modificar una estructura, la mayor parte de la misma no sufre cambios, de modo que puede reutilizarse.

Persistencia (cont.)

Usual



Persistente



Persistencia (cont.)

- Mantenemos una lista de raíces R_k para $k = 1, \ldots, K$
- Para responder consultas utilizamos una función similar a la del *segment tree* usual empezando en la raíz R_k deseada y cambiando LEFT(n) y RIGHT(n) por punteros a (o identificadores de) los hijos de cada nodo;
- Para modificar los datos generamos nuevos nodos en lugar de modifcar los existentes en la versión de referencia;
- Cada nuevo nodo tiene un "reflejo" en la versión de referencia que nos indica cuál es el nodo correspondiente al hijo que no sufre modificaciones;
- Por cada modificación generamos solamente $\mathcal{O}(\log N)$.

Persistencia: código de inserción

```
1  void insert(int cur, int s, int e, int ref, int p, int v) {
2    int left, right, m;
3    if (e-s > 1) {
4      m = (s+e)/2;
5      if (p < m) {
6        left = tree[cur].l = NODES++;
7        right = tree[cur].r = tree[ref].r;
8        insert(left, s, m, tree[ref].l, p, v);
9      } else {
10       left = tree[cur].l = tree[ref].l;
11       right = tree[cur].r = NODES++;
12       insert(right, m, e, tree[ref].r, p, v);
13     }
14     tree[cur].v = oper(tree[left].v, tree[right].v);
15   } else tree[cur].v = v;
16 }
```

Inserción en un segment tree con persistencia

¡Gracias!