

# Dualidad Punto-Línea y Convex Hull Trick

Agustín Santiago Gutiérrez

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Universidad de Buenos Aires

Training Camp Argentina 2018

# Contenidos

- 1 Repaso de cápsula convexa (convex hull)
- 2 Problemas de ejemplo
- 3 Dualidad punto línea
- 4 Convex Hull Trick
- 5 Dualidad intervalo-punto

**Advertencia:** Estas diapos no son autocontenidas. Les faltan todos los dibujos (pizarrón), y explicaciones clave.

“[...] geometry, however, is not concerned with the relation of the ideas involved in it to objects of experience, but only with the logical **connection of these ideas among themselves.**”

Albert Einstein, *Relativity: The special and general theory*, 1920

# Contenidos

1 Repaso de cápsula convexa (convex hull)

2 Problemas de ejemplo

3 Dualidad punto línea

4 Convex Hull Trick

5 Dualidad intervalo-punto

# Cápsula convexa

- La forma que adopta una banda elástica, si la hacemos rodear “postes” clavados en los puntos.
- Se puede calcular con Graham Scan, en un solo recorrido.
- Se puede calcular en dos partes: La **cápsula superior** y la **cápsula inferior**.
- Ambos algoritmos se basan en “tener un stack e ir sacando hasta que encaje”.

# Contenidos

- 1 Repaso de cápsula convexa (convex hull)
- 2 Problemas de ejemplo
- 3 Dualidad punto línea
- 4 Convex Hull Trick
- 5 Dualidad intervalo-punto

# Problemas de ejemplo

- Cantidad de rectas “sobre las que pega la lluvia”
- Ancho de un conjunto de puntos en una cierta dirección
- Máxima cantidad de rectas concurrentes
- Cantidad de vértices de la cápsula convexa de puntos en el plano
- Máxima cantidad de puntos alineados
- “A qué altura pega la lluvia para un cierto  $x$ ”
- Máxima cantidad de “gráficos de rectas incomparables”
- Mínima cantidad de torres necesarias para apilar mesadas



# Problemas de ejemplo

- Cantidad de rectas “sobre las que pega la lluvia”
- Ancho de un conjunto de puntos en una cierta dirección
- Máxima cantidad de rectas concurrentes
- Cantidad de vértices de la cápsula convexa de puntos en el plano
- Máxima cantidad de puntos alineados
- “A qué altura pega la lluvia para un cierto  $x$ ”
- Máxima cantidad de “gráficos de rectas incomparables”
- Mínima cantidad de torres necesarias para apilar mesadas

**¿Cuáles de estos se relacionan?**

# Parejas de problemas duales

- Máxima cantidad de puntos alineados
- Máxima cantidad de rectas concurrentes
- Mínima cantidad de torres necesarias para apilar mesadas
- Máxima cantidad de “gráficos de rectas incomparables”
- Cantidad de vértices de la cápsula convexa de puntos en el plano
- Cantidad de rectas “sobre las que pega la lluvia”
- “A qué altura pega la lluvia para un cierto  $x$ ”
- Ancho de un conjunto de puntos en una cierta dirección

# Parejas de problemas duales

- Máxima cantidad de puntos alineados
- Máxima cantidad de rectas concurrentes
- Mínima cantidad de torres necesarias para apilar mesadas
- Máxima cantidad de “gráficos de rectas incomparables”
- Cantidad de vértices de la cápsula convexa de puntos en el plano
- Cantidad de rectas “sobre las que pega la lluvia”
- “A qué altura pega la lluvia para un cierto  $x$ ”
- Ancho de un conjunto de puntos en una cierta dirección

**¿Les parecen igual de fáciles/difíciles los emparejados?**

# Contenidos

- 1 Repaso de cápsula convexa (convex hull)
- 2 Problemas de ejemplo
- 3 Dualidad punto línea**
- 4 Convex Hull Trick
- 5 Dualidad intervalo-punto

# Representación de rectas en computadora

- Idea: ¿Cómo representamos una recta?

# Representación de rectas en computadora

- Idea: ¿Cómo representamos una recta?
- Dependiendo del contexto y de cómo la vamos a usar hay muchas maneras.
- Para “cálculos geométricos con rectas y figuras”, en general representaciones con **vectores** es lo mejor.

# Representación de rectas en computadora

- Idea: ¿Cómo representamos una recta?
- Dependiendo del contexto y de cómo la vamos a usar hay muchas maneras.
- Para “cálculos geométricos con rectas y figuras”, en general representaciones con **vectores** es lo mejor.
- Si la recta representa naturalmente una cierta *función lineal* que a veces evaluamos, la **forma explícita**  $y = ax + b$  puede ser más útil.
- Notar que de ser así no tienen sentido las rectas verticales (no son funciones).

# Rectas y puntos en struct

```
struct Recta
{
    int a,b; // Forma explicita:
              // contiene los puntos (x,y)
              // que cumplen  $y = ax + b$ 
};

struct Punto
{
    int x,y;
};
```



# Rectas y puntos en struct

```
struct Recta
{
    int a,b; // Forma explicita:
              // contiene los puntos (x,y)
              // que cumplen  $y = ax + b$ 
};
```

```
struct Punto
{
    int x,y;
};
```

- ¿Qué diferencia hay entre ambas?

# Rectas y puntos en struct

```
struct Recta
{
    int a,b; // Forma explícita:
              // contiene los puntos (x,y)
              // que cumplen  $y = ax + b$ 
};
```

```
struct Punto
{
    int x,y;
};
```

- ¿Qué diferencia hay entre ambas?
- Los nombres. “Names Don’t Constitute Knowledge” R. Feynman

<https://www.youtube.com/watch?v=1FIYKmos3-s>

# La transformación

- Transformar rectas en puntos:  $y = ax + b \mapsto (a, b)$

# La transformación

- Transformar rectas en puntos:  $y = ax + b \mapsto (a, b)$
- ¿Eso es todo? ¿Eso es dualidad punto recta?

# La transformación

- Transformar rectas en puntos:  $y = ax + b \mapsto (a, b)$
- ¿Eso es todo? ¿Eso es dualidad punto recta?
- Sí.

# La transformación

- Transformar rectas en puntos:  $y = ax + b \mapsto (a, b)$
- ¿Eso es todo? ¿Eso es dualidad punto recta?
- Sí.
- ¿De verdad?

# La transformación

- Transformar rectas en puntos:  $y = ax + b \mapsto (a, b)$
- ¿Eso es todo? ¿Eso es dualidad punto recta?
- Sí.
- ¿De verdad?
- Sí.

# La transformación

- Transformar rectas en puntos:  $y = ax + b \mapsto (a, b)$
- ¿Eso es todo? ¿Eso es dualidad punto recta?
- Sí.
- ¿De verdad?
- Sí.
- Pero para que sea útil hay que entender la **relación** entre ellos.



# Relaciones

- $y = f(x) = ax + b \Leftrightarrow (a, b) = p$

# Relaciones

- $y = f(x) = ax + b \Leftrightarrow (a, b) = p$
- “rectas no verticales” = “funciones lineales”  $\Leftrightarrow$  “puntos del plano”

# Relaciones

- $y = f(x) = ax + b \Leftrightarrow (a, b) = p$
- “rectas no verticales” = “funciones lineales”  $\Leftrightarrow$  “puntos del plano”
- “pendiente mayor”  $\Leftrightarrow$  “coordenada x mayor”

# Relaciones

- $y = f(x) = ax + b \Leftrightarrow (a, b) = p$
- “rectas no verticales” = “funciones lineales”  $\Leftrightarrow$  “puntos del plano”
- “pendiente mayor”  $\Leftrightarrow$  “coordenada x mayor”
- “rectas paralelas”  $\Leftrightarrow$  “alineados en vertical”

# Relaciones

- $y = f(x) = ax + b \Leftrightarrow (a, b) = p$
- “rectas no verticales” = “funciones lineales”  $\Leftrightarrow$  “puntos del plano”
- “pendiente mayor”  $\Leftrightarrow$  “coordenada  $x$  mayor”
- “rectas paralelas”  $\Leftrightarrow$  “alineados en vertical”
- “rectas concurrentes”  $\Leftrightarrow$  “alineados salvo verticales”

# Relaciones

- $y = f(x) = ax + b \Leftrightarrow (a, b) = p$
- “rectas no verticales” = “funciones lineales”  $\Leftrightarrow$  “puntos del plano”
- “pendiente mayor”  $\Leftrightarrow$  “coordenada  $x$  mayor”
- “rectas paralelas”  $\Leftrightarrow$  “alineados en vertical”
- “rectas concurrentes”  $\Leftrightarrow$  “alineados salvo verticales”
- “ $y$ ” (o sea  $f(x)$  dado  $x$ )  $\Leftrightarrow p \cdot (x, 1)$

# Relaciones

- $y = f(x) = ax + b \Leftrightarrow (a, b) = p$
- “rectas no verticales” = “funciones lineales”  $\Leftrightarrow$  “puntos del plano”
- “pendiente mayor”  $\Leftrightarrow$  “coordenada  $x$  mayor”
- “rectas paralelas”  $\Leftrightarrow$  “alineados en vertical”
- “rectas concurrentes”  $\Leftrightarrow$  “alineados salvo verticales”
- “ $y$ ” (o sea  $f(x)$  dado  $x$ )  $\Leftrightarrow p \cdot (x, 1)$
- “Mayor  $f(x)$ ”  $\Leftrightarrow$  “ $p$  está más avanzado en la dirección apuntada por  $\vec{v} = (x, 1)$ ”.

# Relaciones

- $y = f(x) = ax + b \Leftrightarrow (a, b) = p$
- “rectas no verticales” = “funciones lineales”  $\Leftrightarrow$  “puntos del plano”
- “pendiente mayor”  $\Leftrightarrow$  “coordenada  $x$  mayor”
- “rectas paralelas”  $\Leftrightarrow$  “alineados en vertical”
- “rectas concurrentes”  $\Leftrightarrow$  “alineados salvo verticales”
- “ $y$ ” (o sea  $f(x)$  dado  $x$ )  $\Leftrightarrow p \cdot (x, 1)$
- “Mayor  $f(x)$ ”  $\Leftrightarrow$  “ $p$  está más avanzado en la dirección apuntada por  $\vec{v} = (x, 1)$ ”.
- **“Rectas sobre las que pega la lluvia”  $\Leftrightarrow$  “Cápsula superior”.**



# Relaciones

- $y = f(x) = ax + b \Leftrightarrow (a, b) = p$
- “rectas no verticales” = “funciones lineales”  $\Leftrightarrow$  “puntos del plano”
- “pendiente mayor”  $\Leftrightarrow$  “coordenada  $x$  mayor”
- “rectas paralelas”  $\Leftrightarrow$  “alineados en vertical”
- “rectas concurrentes”  $\Leftrightarrow$  “alineados salvo verticales”
- “ $y$ ” (o sea  $f(x)$  dado  $x$ )  $\Leftrightarrow p \cdot (x, 1)$
- “Mayor  $f(x)$ ”  $\Leftrightarrow$  “ $p$  está más avanzado en la dirección apuntada por  $\vec{v} = (x, 1)$ ”.
- **“Rectas sobre las que pega la lluvia”  $\Leftrightarrow$  “Cápsula superior”.**
- Esta última es la que da el nombre a “convex hull trick”
- ¡Revisar los problemas anteriores para verificar los emparejamientos!

# Contenidos

- 1 Repaso de cápsula convexa (convex hull)
- 2 Problemas de ejemplo
- 3 Dualidad punto línea
- 4 Convex Hull Trick**
- 5 Dualidad intervalo-punto

# Qué es

- Es la técnica que usamos para calcular eficientemente, a partir de un  $x$ , el valor de  $\max_{i=1}^n f_i(x)$ , si tenemos  $n$  funciones lineales  $f_i$

# Qué es

- Es la técnica que usamos para calcular eficientemente, a partir de un  $x$ , el valor de  $\max_{i=1}^n f_i(x)$ , si tenemos  $n$  funciones lineales  $f_i$
- Es como tener las “Rectas donde pega la lluvia” rápido, que son las que importan. O por dualidad, es como tener la cápsula superior, que son los únicos puntos candidatos a ser los más alejados en una dirección  $\vec{v} = (x, 1)$ .

# Convex Hull Trick offline

- Si las rectas van apareciendo **en orden de pendiente**, o si las podemos ordenar libremente, podemos hacer como al construir la cápsula superior: vamos “descartando hasta que encaje” del vector de rectas, y siempre tendremos las rectas de lluvia **ordenadas** (binary search).

# Convex Hull Trick online

- Si las rectas aparecen en forma dinámica y en cualquier orden, podemos tenerlas en un `set` **ordenadas por pendiente**, y usar `lower_bound` para ver dónde insertar la nueva (si es que hay que hacerlo).

# Convex Hull Trick online

- Si las rectas aparecen en forma dinámica y en cualquier orden, podemos tenerlas en un `set` **ordenadas por pendiente**, y usar `lower_bound` para ver dónde insertar la nueva (si es que hay que hacerlo).
- Podemos usar la dualidad para razonar más fácil en términos de puntos (si así nos resulta más fácil), pues es análogo a mantener la cápsula superior cuando aparecen nuevos puntos: allí los mantendríamos ordenados por coordenada  $x$ , y luego “borraríamos adyacentes a cada lado” hasta que la banda elástica quede “correctamente tensada”.

# Convex Hull Trick online

- Si las rectas aparecen en forma dinámica y en cualquier orden, podemos tenerlas en un `set` **ordenadas por pendiente**, y usar `lower_bound` para ver dónde insertar la nueva (si es que hay que hacerlo).
- Podemos usar la dualidad para razonar más fácil en términos de puntos (si así nos resulta más fácil), pues es análogo a mantener la cápsula superior cuando aparecen nuevos puntos: allí los mantendríamos ordenados por coordenada  $x$ , y luego “borraríamos adyacentes a cada lado” hasta que la banda elástica quede “correctamente tensada”.
- Truco de implementación: suele ser conveniente agregar rectas centinelas en los extremos, con pendientes enormes, para evitar problemas por accesos fuera de rango.
- Equivalentemente, para trabajar con la cápsula superior de un conjunto de puntos, agregaríamos dos puntos centinela con valores extremos de la coordenada  $x$ .



# Contenidos

- 1 Repaso de cápsula convexa (convex hull)
- 2 Problemas de ejemplo
- 3 Dualidad punto línea
- 4 Convex Hull Trick
- 5 Dualidad intervalo-punto

# Otro ejemplo de transformación

- Consiste en pensar un intervalo  $(A, B)$  en la recta numérica, como un punto  $(A, B)$  en el plano.
- La recta numérica original puede pensarse como la recta  $y = x$ , que contiene los intervalos de longitud 0 (puntos).
- Todos los intervalos válidos viven en la parte superior  $y > x$  del plano.
- Los  $(A, B)$  con  $A > B$  podrían usarse para representar el “complemento” de un intervalo: tiene sentido en problemas circulares.

# Relaciones

- Un intervalo contiene a otro, si y solo si este último está más “abajo a la derecha”.
- Si imaginamos que el punto de un intervalo lanza una “sombra” haba abajo y hacia la derecha, los puntos de la recta  $y = x$  cubiertos son exactamente el intervalo original.
- Así que dos intervalos se tocan si y solo si sus sombras chocan.
- Dado un punto (que representa un intervalo), los puntos de intervalos que se intersecan con él, son los que están en un “cuadrante” arriba y a la izquierda de su reflejo por  $y = x$ .
- Para algunos es más fácil visualizar puntos que visualizar intervalos, y la transformación puede facilitar tener algunas ideas clave.

# Problema de ejemplo

- Updates: Aparecen y desaparecen puntos con peso. Todos en la parte **superior**  $y > x$  del plano.
- Query: Dado un punto del plano en la parte **inferior**  $y < x$ , suma de los pesos de los que están arriba y a su izquierda.

# Problema de ejemplo

- Updates: Aparecen y desaparecen puntos con peso. Todos en la parte **superior**  $y > x$  del plano.
- Query: Dado un punto del plano en la parte **inferior**  $y < x$ , suma de los pesos de los que están arriba y a su izquierda.
- Este problema es el equivalente exacto que resulta al aplicar la dualidad intervalo-punto que vimos, al problema F del TAP 2017