Chapter 7 内积空间上的算子

Tiao Lu

Peking University

2017.12.1

Introduction

谱定理 (复内积空间)

谱分解定理是最重要最好用的一个定理. 简单的说, 它告诉我们复内积空间上的正规算子都可以对角化. 再详细点, 存在一个规范正交基, 使得规范算子在该基下的矩阵是对角矩阵, 对角元是算子的特征值.

Introduction

谱定理 (复内积空间)

谱分解定理是最重要最好用的一个定理. 简单的说, 它告诉我们复内积空间上的正规算子都可以对角化. 再详细点, 存在一个规范正交基, 使得规范算子在该基下的矩阵是对角矩阵, 对角元是算子的特征值.

谱定理 (实内积空间)

实内积空间上的自伴算子都可以对角化. 再详细点, 存在一个规范正交基, 使得规范算子在该基下的矩阵是对角矩阵, 对角元是算子的特征值.

因为谱定理的结论依赖于 $\mathbf{F}$, 所以我们把谱定理分成两部分, 分别叫做复谱定理和实谱定理. 同线性代数中的多数情形一样, 研究复向量空间要比研究实向量空间容易, 因此我们先给出复谱定理.

作为复谱定理的一个例证, 考虑正规算子 $T \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^2)$, 它 (关于标准基) 的矩阵是

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

你应该验证,

$$\left(\frac{(i,1)}{\sqrt{2}}, \frac{(-i,1)}{\sqrt{2}} \right)$$

是 $\mathbf{C}^2$ 的由 T 的本征向量组成的规范正交基, 并且 T 关于此基的矩阵是对角矩阵

$$\begin{bmatrix} 2+3i & 0 \\ 0 & 2-3i \end{bmatrix}.$$

7.9 复谱定理 (Complex Spectral Theorem): 设 V 是复内积空间, 并且 $T \in \mathcal{L}(V)$, 则 V 有一个由 T 的本征向量组成的规范正交基当且仅当 T 是正规的.

因为自伴算子
都是正规的, 所
以复谱定理意
味着有限维复
内积空间上的
自伴算子关于
某个规范正交
基有对角矩阵.

证明复谱分解定理 part I

首先证明：T 可对角化 $\Rightarrow T^*T = TT^*$

设存在一个正交规范基 $(\phi_1, \cdots, \phi_n)$，使得 T 的矩阵对角阵如下

$$\mathcal{M}(T) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是 n 个复数.
那么 T^* 在这个规范正交基下的矩阵是

$$\mathcal{M}(T^*) = \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \bar{\lambda}_n \end{bmatrix}$$

这样，我们很容易验证 $\mathcal{M}(T^*)\mathcal{M}(T) = \mathcal{M}(T)\mathcal{M}(T^*)$，从而证明了

$$T^*T = TT^*.$$

证明复谱分解定理 part II

再证明:$TT^*T = TT^*$ 可对角化 $\Rightarrow$ T 可以对角化

T 是复内积空间上的算子, 那么它一定可以上三角化, 也就是存在一个规范正交基 $e_1, \cdots, e_n$ 使得

$$\mathcal{M}(T) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是 n 个复数, $a_{i,j}$, $i = 1, \cdots, n$, $j > i$ 是复数.
那么 T^* 在这个规范正交基下的矩阵是

$$\mathcal{M}(T^*) = \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \overline{a_{1,2}} & \bar{\lambda}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{1,n}} & \overline{a_{2,n}} & \cdots & \bar{\lambda}_n \end{bmatrix}$$

$$T^*T = TT^*.$$

等价于

$$\mathcal{M}(T^*)\mathcal{M}(T) = \mathcal{M}(T)\mathcal{M}(T^*)$$

证明复谱定理 Part III

我们观察到 $\mathcal{M}(T^*)$ 是一个下三角矩阵, $\mathcal{M}(T)$ 是一个上三角矩阵, 二者互为共轭转置. 我们观察一个例子

$$A=\begin{bmatrix}1+i & 2+i & 3\\ 0 & 2 & 3-5i\\ 0 & 0 & 3+i\end{bmatrix}\ A^*=\begin{bmatrix}1-i & 0 & 0\\ 2-i & 2 & 0\\ 3 & 3+5i & 3-i\end{bmatrix}$$

$$A^*A=$$

$$AA^*=$$

在黑板上做把, 看到如果两个矩阵可交换, 非对角线元素一定要是 0.

证明：首先假设 V 有一个由 T 的本征向量组成的规范正交基，则 T 关于此基有对角矩阵. T^* (关于同一个基) 的矩阵显然是 T 的矩阵的共轭转置，故 T^* 也有对角矩阵. 任意两个对角矩阵都交换，故 T 和 T^* 交换，从而 T 是正规的.

为了证明另一个方面, 现在假设 T 是正规的, 则 V 有规范正交基 $(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ 使得 T 关于此基有上三角矩阵 (由 6.28). 于是,

7.10 $$\mathcal{M}(T, (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

我们将证明这个矩阵实际上是对角矩阵, 即 $(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ 是 V 的由 T 的本征向量组成的规范正交基.

我们将证明这个矩阵实际上是对角矩阵, 即 $(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ 是 V 的由 T 的本征向量组成的规范正交基.

由上面的矩阵可得,

$$\|T\boldsymbol{e}_1\|^2 = |a_{1,1}|^2$$

并且

$$\|T^*\boldsymbol{e}_1\|^2 = |a_{1,1}|^2 + |a_{1,2}|^2 + \cdots + |a_{1,n}|^2.$$

因为 T 是正规的, 所以 $\|T\boldsymbol{e}_1\| = \|T^*\boldsymbol{e}_1\|$ (参见 7.6). 于是由上面的两个等式可知, 7.10 中矩阵的第一行除了第一个元素 $a_{1,1}$ 之外都等于 0.

现在由 7.10 可得

$$\|T\boldsymbol{e}_2\|^2 = |a_{2,2}|^2$$

(因为如上一段所证, $a_{1,2} = 0$) 并且

$$\|T^*\boldsymbol{e}_2\|^2 = |a_{2,2}|^2 + |a_{2,3}|^2 + \cdots + |a_{2,n}|^2.$$

因为 T 是正规的, 所以 $\|T\boldsymbol{e}_2\| = \|T^*\boldsymbol{e}_2\|$. 于是由上面的两个等式知, 7.10 中矩阵的第二行除了对角线元素 $a_{2,2}$ 之外都等于 0.

如此继续下去可知, 7.10 中矩阵的非对角线元素都等于 0.

■

把复谱定理和实谱定理合并到一起可以得出结论：V 上每个自伴算子关于某个规范正交基都有对角矩阵. 这个结论无论是对 $\mathbf{F}=\mathbf{C}$ 还是对 $\mathbf{F}=\mathbf{R}$ 都成立, 它是谱定理最有用的部分.

7.13 实谱定理 (Real Spectral Theorem)：设 V 是实内积空间, $T \in \mathcal{L}(V)$, 则 V 有一个由 T 的本征向量组成的规范正交基当且仅当 T 是自伴的.

$T \in \mathcal{L}(V)$, V 是一个实内积空间, 设 $e_1, \cdots, e_n$ 是 V 的一个规范正交基.

$$V = \operatorname{span}(e_1, \cdots, e_n) = \{a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n : a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

我们可以把 V 扩充成下面的复内积空间

$$\widetilde{V} = \{c_1 e_1 + \cdots + c_n e_n : c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{C}\}$$

$u = c_j e_j$ 和 $v = d_j e_j$(用了爱因斯坦求和约定) 的内积定义成

$$\langle u, v \rangle_{\widetilde{V}} = \langle c_j e_j, d_k e_k \rangle_{\widetilde{V}} := c_j \overline{d_k} \langle e_j, e_k \rangle_V .$$

定义 $\widetilde{T} \in \mathcal{L}(\widetilde{V})$

$$\widetilde{T}(c_1 e_1 + \cdots + c_n e_n) = c_1 T e_1 + \cdots + c_n T e_n$$

定理 7.14 实谱定理的证明 II

请你验证

$$\tilde{T}v = Tv \in V, \quad \forall v \in V.$$

都成立, 也就是

$$T = \widetilde{T}\Big|_V$$

请你验证

$$\widetilde{T} \in \mathcal{L}(\widetilde{V}) \text{ 是自伴算子.}$$

Hints: 在规范正交基 $(e_1, \cdots, e_n)$ 下, $\widetilde{T}$ 的矩阵等于 T 的矩阵, 是厄米特矩阵. 这意味着 $\widetilde{T}^* = \widetilde{T}$.

定理 7.14 实谱定理的证明 III

对自伴算子 (当然也是正规算子)$\widetilde{T}$ 应用复谱分解定理, 我们知道存在一组正交基 $\phi_1, \cdots, \phi_n$ 和 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$(因为 $\widetilde{T}$ 是自伴算子, 因此它的所有特征值都是实数) 使得

$$\mathcal{M}\left(\widetilde{T}, (\phi_1, \cdots, \phi_n)\right) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$\phi_1, \cdots, \phi_n$ 如果都属于 V, 那么他们肯定也是 V 的规范正交基, 那么我们就证明了实谱分解定理, 也就是实内积空间的自伴算子都可以对角化. 但是这一步看起来不是很显然了.

已有的结果

$$\widetilde{T}\phi_i = \lambda_i \phi_i \quad \text{这里不是爱因斯坦求和约定, 后面的靠大家自己判断了}$$

其中 λ_i 是实数, ϕ 是复内积空间中 $\widetilde{V}$ 的规范正交基.

定理 7.14 实谱定理的证明 IV

目标

从上面的 $\phi_i, i=1,\cdots,n$ 中想法寻找 V 中的规范正交基 $\psi_i, i=1,\cdots,n$ 使得

$$\widetilde{T}\psi_i = \lambda_i\psi_i$$

这样，就必然有

$$T\psi_i = \lambda_i\psi_i$$

我们把 ϕ 写成 $\phi = c_k e_k$，其中 $c_k \in \mathbb{C}$. 我们称 ϕ 的实部为 V 中的的一个向量，定义为

$$\mathrm{Real}\,(\phi) := \mathrm{Real}\,(c_k)\, e_k$$

ϕ 的虚部为 V 的向量，定义为

$$\mathrm{Imag}\,(\phi) := \mathrm{Imag}\,(c_k)\, e_k$$

定理 7.14 实谱定理的证明 V

$\widetilde{T}\phi_j = \lambda_j\phi_j$ 可以推出

$$\widetilde{T}\mathrm{Real}\left(\phi_j\right) = \lambda_j\mathrm{Real}\left(\phi_j\right), \quad \widetilde{T}\mathrm{Imag}\left(\phi_j\right) = \lambda_j\mathrm{Imag}\left(\phi_j\right),$$

从一个复特征向量 $\phi_j \in \widetilde{V}$, 我们能找到两个实特征向量 $\mathrm{Real}\left(\phi_j\right)$ 和 $\mathrm{Imag}\left(\phi_j\right)$

它们两个可能线性先关, 但至少有一个不是 0.

那么是不是这样，我们就可以很容易找到 n 个相互正交的特征向量使得 $\tilde{T}$ 可对角化?

实内积空间扩充成复内积空间的例子 I

实内积空间 $\mathbb{R}^2$, 基 $(e_1, e_2) = ((1,0),(0,1))$. 扩充成复内积空间 $\mathbb{C}^2$,

$$\mathbb{C}^2 = \{\alpha e_1 + \beta e_2 : \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$$

$T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ defined by

$$Te_1 = ae_1 + be_2; \quad Te_2 = ce_1 + de_2, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

把算子 T 扩充成 $\tilde{T}$

$$\tilde{T}e_1 := Te_1; \quad \tilde{T}e_2 := Te_2$$

但是现在 $\tilde{T}$ 可以作用在

$$\alpha e_1 + \beta e_2 \in \mathbb{C}^2$$

$$\tilde{T}(\alpha e_1 + \beta e_2) = \alpha Te_1 + \beta Te_2$$

$\mathcal{M}(T, (e_1, e_2))$ 和 $\mathcal{M}\left(\tilde{T}, (e_1, e_2)\right)$ 是相同的。

继续证明实谱分解定理 I

晴朗的天空飘过来一朵乌云

我们找到的实的特征向量的个数会不会变少? $\phi_1, \cdot, \phi_n$ 是复内积空间中的 n 个特征向量, $2n$ 个实的特征向量

$$\mathrm{Real}\left(\phi_1\right), \cdots, \mathrm{Real}\left(\phi_n\right),$$

$$\mathrm{Imag}\left(\phi_1\right), \cdots, \mathrm{Imag}\left(\phi_n\right)$$

有可能出现这种情况吗? 上面的 $2n$ 个特征向量只能挑出 $m(m<n)$ 个是线性无关的.

No, 不会的

原因是如果上面的 $2n$ 个实向量只有 $m(m<n)$ 个是线性相关的, 那么它们不可能通过线性组合得到 $\psi_1, \cdots, \psi_n$ 这 n 个规范正交 (当然是线性无关的) 的向量来. 大家验证一下上面的结论.

最后一个问题: 挑出的特征向量相互是正交的吗?

从 $2n$ 个向量里挑出了 n 个, 会不会出现它们是不正交的?

首先, 属于 ϕ_j 和 ϕ_k 如果相应两个不同的特征值, 那么它们一定是正交的.

如果多个特征向量来自同一个特征值呢? 它们的确可能不是正交的, 那我们就用 Gram-Schmidt 正交化, 使得它们正交.

最后把得到一个正交基础做一个归一化 (也就是把他们的长度都放缩到 1), 这样我们就的得到了一个规范正交基了, 而且全部有实内积空间中的向量组成. 实际上, 这就是 V 中的一个规范正交基, 使得 $T \in \mathcal{L}(V)$ 的矩阵是对角阵.

对于自伴的 $T \in \mathcal{L}(V)$ (或更一般地, 当 $\mathbf{F} = \mathbf{C}$ 时, 正规的 $T \in \mathcal{L}(V)$), 下面的推论给出了 V 的最可能的不变子空间直和分解. 在每个 $\operatorname{null}(T - \lambda_j I)$ 上, 算子 T 的作用相当于乘以 λ_j.

7.14 推论: 设 $T \in \mathcal{L}(V)$ 是自伴的 (或当 $\mathbf{F} = \mathbf{C}$ 时, $T \in \mathcal{L}(V)$ 是正规的). 令 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ 表示 T 的所有互不相同的本征值, 那么

$$V = \operatorname{null}(T - \lambda_1 I) \oplus \cdots \oplus \operatorname{null}(T - \lambda_m I).$$

进一步, $\operatorname{null}(T - \lambda_j I)$ 中的向量正交于此分解中其他子空间中的向量.

证明：由谱定理 (7.9 和 7.13) 可知，V 有一个由 T 的本征向量组成的基. 现在由 5.21 即得想要的分解.

由 7.8 可得关于正交性的结论. ■

用谱分解定理来证明引理 7.11

我们证明实谱分解定理的时候, 并没有用引理 7.11. 因此, 我们现在要用谱分解定理来证明引理 7.11, 这不是循环论证.
我只是想告诉大家, 谱分解定理很重要, 记住了这个, 其他的结论都是很容易得到.

推论 1 (引理 7.11)

设 $T \in \mathcal{L}(V)$ 是自伴的. 若 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 使得 $\alpha^2 < 4\beta$, 则

$$T^2 + \alpha T + \beta I$$

是可逆的.

证明引理 7.11

Proof.

因为 T 是自伴算子, 由自伴算子的谱分解定理知道, 存在 V 的一个规范正交基 $e_1, \cdots, e_n$ 使得

$$\mathcal{M}(T) = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$$

其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 都是实数. 因此 $T^2 + \alpha T + \beta$ 在该基下的矩阵是

$$\mathcal{M}(T^2 + \alpha T + \beta) = \mathrm{diag}\{\lambda_1^2 + \alpha\lambda_1 + \beta, \cdots, \lambda_n^2 + \alpha\lambda_n + \beta\}$$

$$\lambda_j^2 + \alpha\lambda_j + \beta = \left(\lambda_j + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \beta - \frac{\alpha^2}{4} > 0, \forall j = 1, \cdots n$$

上面的不等式成立的一个原因是 λ_j 是实数.
$\mathcal{T}^{\in} + \alpha\mathcal{T} + \beta$ 的对角元都大于 0, 因此 $T^2 + \alpha T + \beta$ 可逆. □

Remark 2

实际上我们证明的结论更强, 我们证明 $T^2 + \alpha T + \beta$ 是一个自伴算子, 而且每个特征值都大于 0. 后面我们会学到, 它实际上是一个正算子 (正算子是特征值都大于等于 0 的自伴算子).

Homework

Problems 1-5.
提示见 lectureLA15hw.pdf (见 ftp)