线性代数第四次习题课

李弢

2019 年 11 月 14 日

1 作业题选讲

1. 设 $T \in \mathcal{L}(V)$，$\dim \operatorname{range} T = k$，证明 T 最多有 $k+1$ 个互不相同的特征值。

Solution: 利用反证法，假设 T 有 m 个互不相同的特征值，$m \geq k+2$，那么 T 互不相同的非零 特征值至少有 $m-1=k+1$ 个。取 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{k+1}$ 是 T 的非零特征值，$v_1, v_2, \cdots, v_{k+1}$ 为对应的特征向量，那么由 $Tv_j = \lambda_j v_j$ 可知 $\operatorname{span}\{v_1, v_2, \cdots, v_{k+1}\} \subset \operatorname{range} T$，而前者维数为 $k+1$，后者维数为 k，矛盾！因此 T 最多有 $k+1$ 个互不相同的特征值。

---

2. 设 $S, T \in \mathcal{L}(V)$，证明 ST 和 TS 有相同的特征值。

Solution: 设 λ 是 ST 的特征值，v 是对应的特征向量，即 $STv = \lambda v$，那么两边同时用 T 作用，可知 $TS(Tv) = \lambda(Tv)$. 由特征值的定义，还需考虑 Tv 是否为 0. 如果 $Tv \neq 0$，那么显然 Tv 是 TS 的特征向量，对应的特征值为 λ; 如果 $Tv = 0$，那么 $\lambda v = S(Tv) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$. 这种情况下，只需要说明 $\lambda = 0$ 也是 TS 的特征值即可，这就等价于说明 TS 不是单射。由于 T 不是单射 (因为 $Tv = 0, v \neq 0$)，可知 T 不是满射，因而 TS 不是满射，由此即知 TS 不是单射，故证得。

---

3. 设 $T \in \mathcal{L}(V)$，并且 V 中每个向量都是 T 的本征向量。证明 T 是恒等算子的标量倍。

Solution: 随意取 V 的一组基 $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，由于 V 中每个向量都是 T 的本征向量，有 $Tv_j = \lambda_j v_j, j = 1, 2, \cdots, n$. 我们现在来证明 $v_i = v_j, \forall i, j = 1, 2, \cdots, n$. 只需考虑 $v_i + v_j$，它也是 T 的本征向量，即存在 λ_{ij} 使得 $T(v_i + v_j) = \lambda_{ij}(v_i + v_j)$. 另一方面，$T(v_i + v_j) = \lambda_i v_i + \lambda_j v_j$，因此 $(\lambda_{ij} - \lambda_i)v_i + (\lambda_{ij} - \lambda_j)v_j = 0$，由于 v_i, v_j 线性无关，$\lambda_i = \lambda_j = \lambda_{ij}$. 这样就证得了 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n$，即 T 是恒等算子的标量倍。

---

4. 设 $T \in \mathcal{L}(V)$，并且 V 的每个 $\dim V - 1$ 维子空间在 T 下都是不变的，证明 T 是恒等算子的标量倍。

Solution: 我们用数学归纳法证明：V 的每个 $\dim V - k$ 维子空间在 T 下都是不变的，其中 $k = 1, 2, \cdots, \dim V - 1$. 当 $k = 1$ 时，即是已知条件。假设当 k 时成立，我们考虑 $k+1$ 时，对于 V 的任意

一个 $\dim V-(k+1)$ 维子空间 V'，取其一组基 $\{v_1,v_2,\cdots,v_{\dim V-(k+1)}\}$，并添加上 $u_1,u_2,\cdots,u_{k+1}$，将其扩充为 V 的一组基。考虑

$$V_1=\operatorname{span}\{v_1,v_2,\cdots,v_{\dim V-(k+1)},u_1\},V_1=\operatorname{span}\{v_1,v_2,\cdots,v_{\dim V-(k+1)},u_2\},$$

它们都是 $\dim V-k$ 维子空间，由归纳假设可知都是 T 的不变子空间，因而它们的交也是不变子空间，而 $V_1\cap V_2=\operatorname{span}\{v_1,v_2,\cdots,v_{\dim V-(k+1)}\}=V'$，故 V' 也是 T 的不变子空间。特别地，我们知道 V 的所有 1 维子空间均是 T 的不变子空间，也就是说 V 的每个向量都是 T 的本征向量，因此 T 是恒等算子的常数倍。

---

5. 设 $S,T\in\mathcal{L}(V)$，并且 S 是可逆的，证明若 $p\in\mathcal{P}(\mathbf{F})$ 是多项式，则 $p(STS^{-1})=Sp(T)S^{-1}$.

Solution: 由 $(STS^{-1})^n=STS^{-1}STS^{-1}\cdots STS^{-1}=ST^nS^{-1}$ 即得。

---

6. 设 $\mathbf{F}=\mathbb{C},T\in\mathcal{L}(V),p\in\mathcal{P}(\mathbb{C}),a\in\mathbb{C}$. 证明 a 是 $p(T)$ 的特征值当且仅当对于 T 的某个特征值 λ 有 $a=p(\lambda)$.

*Solution:*由于所考虑的空间是复向量空间，因此存在 V 的某组基，在这组基的表示下 T 的矩阵 $M(T)$ 是一个上三角矩阵，且由命题 5.18 可知该上三角矩阵的对角元就是 T 的特征值。根据矩阵乘法的定义与线性映射复合的关系，有 $p(M(T))=M(p(T))$，也就是说在这组基的选取下 $p(T)$ 的矩阵表示就是 $p(M(T))$，下面我们来看 $p(M(T))$ 是什么。特别地，我们只需要关注 $p(x)=x^n$ 的特殊情况，因为任何多项式都可以写成单项式的线性组合。我们用数学归纳法证明，$M(T)^n$ 仍是上三角矩阵，且第 i 个对角元为 $M(T)^n_{i,i}$. 当 $n=1$ 时结论是显然的，现在假设 n 时成立，考虑 $n+1$ 时。

- $M(T)^{n+1}$ 是上三角矩阵：对于 $i>j$，

  $$M(T)^{n+1}_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}M(T)^n_{i,k}M(T)_{k,j}=\sum_{k=1}^{i}M(T)^n_{i,k}M(T)_{k,j}+\sum_{k=i+1}^{n}M(T)^n_{i,k}M(T)_{k,j}.$$

  当 $k\le i$ 时，$M(T)^n i,k=0$; 当 $k\ge i+1$ 时，$M(T)_{k,j}=0$. 因此 $M(T)^{n+1}_{i,j}=0$，即 $M(T)^{n+1}$ 是上三角矩阵

- $$M(T)^{n+1}_{i,i}=\sum_{k=1}^{n}M(T)^n_{i,k}M(T)_{k,i}=M(T)^n_{i,i}M(T)_{i,i}=M(T)^{n+1}_{i,i}.$$

综上，我们可知 $p(M(T))$ 是上三角矩阵，且对角元 $p(M(T))_{i,i}=p(M(T)_{i,i})$，这就证明了题目中的结果。

---

7. 证明前一个习题的结果对于 $\mathbf{F}=\mathbb{R}$ 不成立。

Solution: 考虑 $\mathbb{R}^2$ 上的旋转 (90 度) 映射：$T(x,y)=(y,-x)$，它没有特征值，但 $T^2=-\mathrm{Id}$ 有特征值 -1.

---

8. 给出一个可逆算子，使得该算子关于某个基的矩阵的对角线上只有 0.

Solution: 上题中的例子在标准基下即是。

---

9. 给出一个不可逆算子，使得该算子关于某个基的矩阵的对角线上的数都非零。

Solution: 考虑 $\mathbb{R}^2, T((x,y))=(x+y,x+y)$，那么 T 在标准基下的矩阵元素全为 1.

2 期中考试备选题讲解

Q1. (线性空间)

(a). 给定集合 $\mathbb{R}_{++}=\{x>0|x\in\mathbb{R}\}$ 及其上面的加法运算与数乘运算：

$$x+y=xy \quad , \quad \lambda x=x^{\lambda}.$$

问 $\mathbb{R}_{++}$ 在上述加法与数乘的意义下是否构成一线性空间？若不是，请说明理由；若是，请验证，并求出维数，并进一步给出它到 $\mathbb{R}^{\dim\mathbb{R}_{++}}$ 的一个可逆线性映射。

(b). 任给一线性空间 V，我们把 $\mathcal{L}(V;\mathbb{F})$ 称为 V 的对偶空间，可记作 V^*. 设 V 是有限维的，$\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 是一组基，定义 $v_i^*\in V^*$，

$$v_i^*:V\to\mathbb{F}, v_i^*(v_j)=\delta_{ij}, \quad \forall i,j=1,2,\cdots,n,$$

其中 δ_{ij} 当且仅当 $i=j$ 时为 1，否则为 0. 求证 $\{v_1^*,v_2^*,\cdots,v_n^*\}$ 是 V^* 的一组基。

(c). 对于 V 的对偶空间 V^*，我们还可以考虑它的对偶空间 V^{**}. 证明，V 是 V^{**} 子空间。特别地，当 V 为有限维空间时，$V=V^{**}$.

Solution:

(a). 根据定义可以验证这是一个线性空间，其加法单位元为 1，维数为 1。对数映射 $\log:\mathbb{R}_{++}\to\mathbb{R}$ 是一可逆线性映射:

$$\log(\lambda x+\mu y)=\log(x^{\lambda}y^{\mu})=\lambda\log(x)+\mu\log(y).$$

其逆为 $\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_{++}$.

(b). 首先注意到若 $v=\sum_{j=1}^n\lambda_j v_j$，那么

$$v_i^*(v)=v_i^*(\sum_{j=1}^n\lambda_j v_j)=\sum_{j=1}^n\lambda_j v_i^*(v_j)=\lambda_i.$$

我们先说明 $\{v_1^*, v_2^*, \cdots, v_n^*\}$ 是 V^* 的张成组。任意 $l \in V^*, v \in V$，有

$$l(v) = l(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i l(v_i) = \sum_{i=1}^{n} l(v_i) v_i^*(v),$$

这就说明了任意 $l \in V^*$ 都可以由 $\{v_1^*, v_2^*, \cdots, v_n^*\}$ 线性表示。

再来说明 $\{v_1^*, v_2^*, \cdots, v_n^*\}$ 是线性无关的。设存在 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 使得 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i^* = 0$，那么作用在 $v_j, j = 1, 2, \cdots, n$ 上可知 $\lambda_j = 0$，进而说明了它们线性无关。

因此 $\{v_1^*, v_2^*, \cdots, v_n^*\}$ 是 V^* 的一组基。特别地，若 V 是有限维线性空间，V^* 也是有限维线性空间，且维数与 V 相等。

(c). 任取 $v \in V$，可以将其视为 V^* 上的线性函数：$v(l) = l(v)$. 这样定义的函数确实是线性的：

$$v(\lambda l_1 + \mu l_2) = (\lambda l_1 + \mu l_2)(v) = \lambda l_1(v) + \mu l_2(v) = \lambda v(l_1) + \mu v(l_2).$$

这就说明了 V 是 V^{**} 的子空间。若 V 是有限维的，那么由 (b) 可知，$\dim V^* = \dim V$，再一次利用 (b) 可知 $\dim V^{**} = \dim V^* = \dim V$，由此可知 $V^{**} = V$.

Q2. (子空间, 线性无关, 基, 直和) 设 U 是 $\mathbb{R}^\infty$ 的一个子集, U 中的元素 v 对所有 i 都满足 $v_i + v_{i+2} = v_{i+1}$.

(a). 求证: U 是 $\mathbb{R}^\infty$ 的一个子空间.

(b). 设 $x, y \in U$, 满足: $x = (0, 1, 1, 0, -1, -1, 0, 1, 1, \cdots)$, $y = (1, 0, -1, -1, 0, 1, 1, 0, -1, \cdots)$. 求证: x, y 线性无关.

(c). 求证: x, y 是 U 的一组基.

(d). 设 W 是 $\mathbb{R}^\infty$ 的一个子集, W 中的元素满足 $v_1 = 0$ 且 $v_2 = 0$. 求证: $\mathbb{R}^\infty = U \oplus W$.

Solution:

(a). 显然 $0 \in U$. 如果 $u, v \in \mathbb{R}^\infty$ 满足 $u_i + u_{i+2} = u_{i+1}, v_i + v_{i+2} = v_{i+1}$，那么显然也有 $(u_i + v_i) + (u_{i+2} + v_{i+2}) = (u_{i+1} + v_{i+1}), \lambda u_1 + \lambda u_{i+2} = \lambda u_{i+1}$. 因此 U 是 $\mathbb{R}^\infty$ 的一个子空间。

(b). 设 $\lambda x + \mu y = 0$，那么考察 $\lambda x + \mu y$ 的前两个位置，必须有 $\lambda = 0, \mu = 0$，这就说明了 x, y 线性无关。

(c). 我们已经证明了 x, y 线性无关，为说明它们是 U 的基，只需证明它们是 U 的张成组。对于任何 $v \in U$，实际上 v 仅由其前两个元素 v_1, v_2 决定，其他元素必须满足

$$v_3 = v_2 - v_1, v_4 = v_3 - v_2 = -v_1, v_5 = v_4 - v_3 = -v_2, v_6 = v_5 - v_4 = -(v_2 - v_1), ...$$

因此，只需要将 v 的前两个元素写成 x, y 前两个元素的线性组合即可知 $v = v_1 y + v_2 x$. 严格来说，也可以用数学归纳法去证明。

(d). 为说明 $\mathbb{R}^\infty = U \oplus W$，我们要说明 $U+W=\mathbb{R}^\infty$ 且 $U\cap W=\{0\}$. 后者是显然的，设 $v\in W\cap U$，那么由上一小问可知 $v=v_1x+v_2y$，但又因 $v\in W$，$v_1=v_2=0$，所以 $v=0$. 再证 $U+W=\mathbb{R}^\infty$，$U+W\subset\mathbb{R}^\infty$ 是显然的，只需证明任何 $v\in\mathbb{R}^\infty$，总存在 $u\in U, w\in W$ 使得 $v=u+w$. 实际上，定义 $u=v_1x+v_2y$，那么 $u\in U$ 是显然的。再令 $w=v-u$，那么 $w_1=v_1-u_1=0, w_2=v_2-u_2=0$，因此 $w\in W$. 综上，$\mathbb{R}^\infty=U\oplus W$.

Q3. (维数公式)

(a). 设 V 是有限维线性空间，U_1,U_2 是 V 的子空间，那么有怎样的维数公式（不用证明）?

(b). 设 V,W 是有限维线性空间，$T\in\mathcal{L}(V;W)$ 是从 V 到 W 的线性映射，记 T 的像与核分别为 $\operatorname{range}T$ 与 $\operatorname{null}T$，那么有怎样的维数公式（不用证明）?

(c). 给定两个线性空间 U_1,U_2，我们定义它们的笛卡尔积 $U_1\times U_2=\{(u_1,u_2),u_1\in U_1,u_2\in U_2\}$，定义加法运算和数乘运算为

$$(u_1,u_2)+(u_1',u_2')=(u_1+u_1',u_2+u_2') \quad , \quad \lambda(u_1,u_2)=(\lambda u_1,\lambda u_2).$$

请验证 $U_1\times U_2$ 是一个线性空间。若 U_1,U_2 均是有限维，再求 $U_1\times U_2$ 的维数。

(d). 设 V 是有限维线性空间，U_1,U_2 是 V 的子空间，考虑 $T: U_1\times U_2\to V, T((u_1,u_2))=u_1+u_2$. 证明 $T\in\mathcal{L}(U_1\times U_2;V)$，并利用该 T 和 (b) 对 (a) 中的结果给出证明。

(e). 考虑一个齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+ & a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n= & 0\\ a_{21}x_1+ & a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n= & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1}x_1+ & a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n= & 0\end{cases}$$

记该线性方程组的系数矩阵为 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}, [A]_{ij}=a_{ij}$，$A$ 的第 j 列为 $A_j, j=1,2,\cdots,n$，解空间为 U，则 $\dim U$ 与系数矩阵 A 有何关系?

Solution:

(a). $\dim U_1+U_2=\dim U_1+\dim U_2-\dim U_1\cap U_2$.

(b). $\dim V=\dim\operatorname{range}T+\dim\operatorname{null}T$.

(c). 逐一验证线性空间的性质即可。取 U_1 一组基 $\{e_1,e_2,\cdots,e_{\dim U_1}\}$,$U_2$ 一组基 $\{f_1,f_2,\cdots,f_{\dim U_2}\}$，那么说明

$$\{(e_1,0),(e_2,0),\cdots,(e_{\dim U_1},0)\}\cup\{(0,f_1),(0,f_2),\cdots,(0,f_{\dim U_2})\}$$

是 $U_1\times U_2$ 的一组基即可知，

$$\dim U_1\times U_2=\dim U_1+\dim U_2.$$

(d). 容易验证 T 是线性映射：

$$T(\lambda(u_1,u_2)+\mu(v_1,v_2)) = T((\lambda u_1+\mu v_1, \lambda u_2+\mu v_2)) = \lambda u_1+\mu v_1+\lambda u_2+\mu v_2 = \lambda T((u_1,u_2))+\mu T((v_1,v_2)).$$

下面考虑其像与核:

$$\operatorname{range} T = \{u_1+u_2 | u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\} = U_1+U_2,$$

$$\operatorname{null} T = \{u_1+u_2 = 0 | u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}.$$

实际上，$\operatorname{null} T = \{(u,-u) | u \in U_1 \cap U_2\}$. 这是因为任意 $(u_1,u_2) \in \operatorname{null} T$，都有 $-u_1 = u_2 \in U_2$，从而 $u_1 \in U_2$，因此可以写成 $(u_1,-u_1)$，其中 $u_1 \in U_1 \cap U_2$. 另一方面，对于任意 $u \in U_1 \cap U_2$，$T((u,-u)) = 0$. 由 (b) 可知，

$$\dim U_1 + \dim U_2 = \dim (U_1 \times U_2) = \dim \operatorname{range} T + \dim \operatorname{null} T = \dim U_1 + \dim U_2 + \dim U_1 \cap U_2.$$

(e). 考虑线性映射 $T : \mathbb{F}^n \to \mathbf{F}^m, T(x) = Ax$，那么

$$\operatorname{null} T = U \quad , \quad \operatorname{range} T = \operatorname{span}\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}.$$

由 (b) 可知，

$$\dim U = \dim \operatorname{null} T = m - \dim \operatorname{span}\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}.$$

Q4. (线性变换与多项式空间)
考虑一个线性变换 $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}), \mathcal{P}_3(\mathbb{R}))$. 假设我们知道 T 的部分信息如下:

$$T(x^2+1) = x^2 - x,$$

$$T(1) = 2x+1.$$

基于以上信息, 回答问题, 简要给出证明或举出反例.

(a). T 可能是单射吗?

(b). T 可能是满射吗?

(c). 我们能够确定 $T(x^2+x+1)$ 吗?

(d). 我们能够确定 $x^2+3x+2 \in \operatorname{Range}(T)$ 吗?

Solution:

(a). T 可能是单射。我们可以考虑 $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ 的一组基 $\{1, x, x^2\}$，那么已知条件为 $T(1) = 2x+1, T(x^2) = x^2-x-2x-1 = x^2-3x-1$. 如果 $T(x) = x$，那么 $T(ax^2+bx+c) = ax^2+(2c+b-3a)x+c-a = 0$ 可知 $a = b = c = 0$，即 $\operatorname{null} T\{0\}$，说明 T 是单射。

(b). T 不可能是满射。这是因为 $3 = \dim \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) = \dim \operatorname{range} T + \dim \operatorname{null} T$，由此可知 $\dim \operatorname{range} T \leq 3 < \dim \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

(c). 不能确定，这与 T 作用于 x 上的结果有关。

(d). 可以确定，因为 $T(x^2+2)=x^2+3x+2$.

Q5. (投影算子) 设 V 是有限维线性空间，$P\in\mathcal{L}(V)$，如果 P 满足 $P^2=P$，那么我们称其为投影算子。

(a). 设 $V=U\oplus W$，证明 $P_{U,W}$ 是投影算子。

(b). 证明：若 $P\in\mathcal{L}(V)$ 是一投影算子，λ 是 P 的特征值，则 $\lambda=0$ 或 1.

(c). 证明：若 $P\in\mathcal{L}(V)$ 是一投影算子，则 P 可对角化。

(d). 证明 V 上所有的投影算子都可以写成 (a) 中的形式。

Solution:

(a). $P_{U,W}^2=P_{U,W}$ 课上已经证明过。

(b). 设 λ 为 P 的特征值，v 是对应的（非零）特征向量，那么 $Pv=\lambda v$. 由于 P 是投影算子，两边同时用 P 作用，得到 $Pv=P^2v=\lambda Pv$，即 $(1-\lambda)Pv=0$. 由某道作业题，可知 $1-\lambda=0$ 或 $Pv=0$. 如果 $1-\lambda=0$，就是 $\lambda=1$; 如果 $Pv=0$，由于 v 是对应于 λ 的特征向量，可知 $\lambda=0$.

(c). 由于 P 是投影算子，$P(P-I)=0$，也就是说 $\operatorname{range}(P-I)\subset\operatorname{null}P$. 由维数公式，

$$\dim V=\dim\operatorname{range}(P-I)+\dim\operatorname{null}(P-I)\leq\dim\operatorname{null}P+\dim\operatorname{null}(P-I).$$

若 P 只有 0 特征值或 1 特征值，由上式可以看出 $\operatorname{null}P=V$ 或 $\operatorname{null}(P-I)=V$，$P$ 显然可以对角化。否则，由于 0 和 1 都是 P 的特征值，$\operatorname{null}P\oplus\operatorname{null}(P-I)$ 是 V 的子空间，故

$$\dim\operatorname{null}P+\dim\operatorname{null}(P-I)\leq\dim V.$$

结合上两式可知

$$\dim\operatorname{null}P+\dim\operatorname{null}(P-I)=\dim V.$$

这就说明了 P 可以对角化。

(d). 由 (c) 中的结论，$V=\operatorname{null}(P-I)\oplus\operatorname{null}P$. 对于任意 $v\in V, v=v_1+v_2, v_1\in\operatorname{null}(P-I), v_2\in\operatorname{null}P$，那么 $P(v)=P(v_1)+P(v_2)=v_1$. 这就说明了 $P=P_{\operatorname{null}(P-I),\operatorname{null}P}$.

Q6. (特征值与特征向量, 对角化)
设 V 是一个有限维向量空间, 且 $\dim V=n$. 设 $S\in\mathcal{L}(V)$ 是 V 上的线性算子, 且有 n 个不同的特征值. 设 $T\in\mathcal{L}(V)$ 是另一个线性算子. 求证: 如果 $ST=TS$, 那么 T 可对角化.

Solution: 设 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 分别是 S 的对应于特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的特征值，即 $Sv_j=\lambda_jv_j, j=1,2,\cdots,n$. 由于这些 λ_j 互不相同，那么 $\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 构成了 V 的一组基，由命题 5.12，S 在这组

基下可对角化，且 $V = \operatorname{null}(S-\lambda_1 I) \oplus \operatorname{null}(S-\lambda_2 I) \oplus \cdots \oplus \operatorname{null}(S-\lambda_n I)$，这里 $\operatorname{null}(S-\lambda_j I) = \operatorname{span}\{v_j\}$。此外，$STv_j = TSv_j = T(\lambda_j v_j) = \lambda_j Tv_j$，也就是说 Tv_j 也是 S 对应特征值 λ_j 的特征向量，$Tv_j \in \operatorname{null}(S-\lambda_j I) = \operatorname{span}\{v_j\}$，即存在 μ_j 使得 $Tv_j = \mu_j v_j$。这就说明了 $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 也都是 T 的特征向量，因此 T 可以对角化。

Q7. (可逆映射, 对角化) 设 V 是有限维的向量空间, 且 $T \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$. 假设 $\operatorname{Range}(T) \neq \operatorname{Range}(T^2)$.

(a). 求证: T 不可以对角化.

(b). 以下说法正确的是?

(i).. T 一定可逆.

(ii).. T 一定不可逆.

(iii).. T 可能可逆也可能不可逆.

证明你的结论.

Solution:

(a). 利用反证法。假设 T 可以对角化，那么存在由 T 的特征向量构成的一组基 $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，满足 $Tv_j = \lambda_j v_j$. 显然 $\operatorname{range} T^2 \subset \operatorname{range} T$. 另一方面，对于任意 $v \in \operatorname{range} T$，存在 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 使得 $v = T(\sum_{j=1}^n x_j v_j) = T(\sum_{\lambda_j \neq 0} x_j v_j)$. 定义 $\mu_j = 1/\lambda_j$，若 $\lambda_j \neq 0$，否则 $\mu_j = 0$，那么

$$T^2(\sum_{j=1}^n \mu_j x_j v_j) = T(\sum_{j=1}^n \mu_j x_j T v_j) = T(\sum_{j=1}^n x_j \mu_j T v_j) = T(\sum_{\lambda_j \neq 0} x_j v_j) = v.$$

这说明 $\operatorname{range} T \subset \operatorname{range} T^2$，从而 $\operatorname{range} T = \operatorname{range} T^2$，与题设矛盾！所以假设不成立，$T$ 不能对角化。

(b). T 一定不可逆。否则，T 可逆等价于 T 是满射，$\operatorname{range} T = V$. 此外，可逆映射的复合仍然可逆，故 T^2 也可逆，从而 $\operatorname{range} T^2 = V = \operatorname{range} T$，矛盾!

3 期中考试题讲解

一、判断题

1. 如果 $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的 5 个互不相同的向量，那么 $(v_1, \cdots, v_5)$ 一定是线性相关的。

2. 如果 (v_1, v_2, v_3) 是线性空间 V 中的一个线性无关的向量组，那么 $(v_1 + v_2, v_2, v_3)$ 也一定是一个线性无关的向量组。

3. 设 $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$. 如果 T 有 4 个不同的实特征值，则可以找到 $\mathbb{R}^4$ 的一组基，使得 T 在此基下的矩阵是对角矩阵。

4. 从一个 3 维的向量空间到一个 5 维的向量空间的线性映射不可能是满射。

5. 次数不高于 3 的复系数多项式空间 $\mathcal{P}_3(\mathbb{C})$ 和 $\mathbb{C}^3$ 作为复数域上的线性空间是同构的。

Solution:

1. 对。线性无关向量组的长度不超过空间的维数。

2. 对。设 $\lambda_1(v_1+v_2)+\lambda_2 v_2+\lambda_3 v_3=0$，那么 $\lambda_1 v_1+(\lambda_1+\lambda_2)v_2+\lambda_3 v_3=0$，由 (v_1,v_2,v_3) 线性无关可知 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$.

3. 对。T 对应不同特征值的特征向量组成的向量组一定线性无关，而 T 是 4 维空间上的线性映射，又有 4 个不同特征值，因此存在特征向量构成的一组基，故可以对角化。

4. 对。由维数公式可知，从一个 3 维的向量空间到一个 5 维的向量空间的线性映射，其 range 的维数小于等于 3，不可能是满射。

5. 错。$\mathcal{P}_3(\mathbb{C})$ 的维数是 4，而 $\mathbb{C}^3$ 的维数是 3.

二、填空题

1. 设 U 和 V 是 $\mathbb{R}^9$ 的两个子空间，$\dim U=7, \dim V=5$ 且 $\mathbb{R}^9=U+V$，那么 $\dim U\cap V=\underline{(1)}$

2. 设 T 是 $\mathbb{R}^2$ 上的一个旋转变换，具体说来是以坐标原点为中心逆时针旋转 $\frac{3\pi}{2}$，请写出 T 关于 $\mathbb{R}^2$ 的标准基的矩阵 $\mathcal{M}(T)=\underline{(2)}$.

3. $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ 是次数不超过 3 次的多项式空间。定义 $T\in\mathcal{L}(\mathcal{P}_3(\mathbb{R}),\mathcal{P}_3(\mathbb{R}))$ 为
$$Tp(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xp(x)), \qquad \forall p\in\mathcal{P}_3(\mathbb{R}).$$
请写出 T 关于 $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ 的基 $(1,x,x^2,x^3)$ 的矩阵 $\underline{(3)}$.

4. 定义 $T\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ 为
$$T(x,y,z)=(2x+y,5y+2z,8z), \qquad \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$
则 T 关于 $\mathbb{R}^3$ 的标准基的矩阵是 $\underline{(4)}$，T 的特征值是 $\underline{(5)}$.

Solution:

1. 由维数公式可知，$\dim U\cap V=\dim U+\dim V-\dim(U+V)=3$.

2. $T(1,0)=(0,-1), T(0,1)=(1,0)$，所以
$$\mathcal{M}(T)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

3. 由于 $T(x^k)=\frac{\mathrm{d}x^{k+1}}{\mathrm{d}x}=(k+1)x^k$，
$$\mathcal{M}(T)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}.$$

4. 由于 $T(1,0,0)=(2,0,0), T(0,1,0)=(1,5,0), T(0,0,1)=(0,2,8)$，

$$\mathcal{M}(T)=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&5&2\\0&0&8\end{pmatrix}.$$

由于在这组基下 T 是上三角矩阵，其对角线上的元素就是特征值，故特征值为 $2,5,8$.

三、解答题和证明题

1. $U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2-y^2=0\}$ 是否 $\mathbb{R}^2$ 的一个子空间？是的话请给出证明，不是的话请给出理由。

   Solution: U 不是 $\mathbb{R}^2$ 的子空间。考虑 $(1,1)\in U,(1,-1)\in U$，但 $(1,1)+(1,-1)=(1,0)\notin U$，说明 U 对加法不封闭。

   Remark: 这题说 U 是 $\mathbb{R}^2$ 的子空间的都得零分。如果举的不是具体例子，而是 $(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in U$，然后说 $(x_1+y_1)^2-(x_2+y_2)^2=2(x_1y_1-x_2y_2)\neq 0$ 的，可能会酌情扣分，需要指出具体在 x_1,x_2,y_1,y_2 什么情况下才不等于 0，否则这个式子完全是有可能等于 0 的.

2. 设 m 是一个正整数，V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的一个线性空间。设 $T\in\mathcal{L}(V),\alpha\in V$ 满足 $T^{m-1}\alpha\neq 0, T^m\alpha=0$. 证明：$(\alpha,T\alpha,\cdots,T^{m-1}\alpha)$ 是线性无关的。

   Solution: 设有 $\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_{m-1}$ 使得 $\lambda_0\alpha+\cdots+\lambda_{m-1}T^{m-1}\alpha=0$. 在该式两边用 T 作用，可得

$$\lambda_0T\alpha+\cdots+\lambda_{m-2}T^{m-1}\alpha=0.$$

   再用 T 作用，可得

$$\lambda_0T^2\alpha+\cdots+\lambda_{m-3}T^{m-1}\alpha=0.$$

   作用 k 次 $(k=1,2,\cdots,m-1)$ 即可得到

$$\lambda_0T^k\alpha+\cdots+\lambda_{m-k-1}T^{m-1}\alpha=0.$$

   特别地，当 $k=m-1$ 时，由 $\lambda_0T^{m-1}\alpha=0$ 可知 $\lambda_0=0$. 将 $\lambda_0=0$ 代入 $k=m-2$ 时的式子 $\lambda_0T^{m-2}\alpha+\lambda_1T^{m-1}\alpha=0$ 可知 $\lambda_1=0$，以此类推可知 $\lambda_0=\lambda_1=\cdots=\lambda_{m-1}=0$，即证得 $(\alpha,T\alpha,\cdots,T^{m-1}\alpha)$ 线性无关。

3. 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. 请证明 A 是单位矩阵的常数倍当且仅当对所有的矩阵 $B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 都有 $BA=AB$.

   Solution: 若 $A=\lambda I$，则 $AB=\lambda B=BA$ 是显然的。反之，我们考虑 $E_{ij},i,j=1,2,\cdots,n$，其第 i 行第 j 列元素为 1，其余元素全都为 0. 考虑 AE_{ii}，只有第 i 列非零；考虑 $E_{ii}A$，只有第 i 行非零。由 $AE_{ii}=E_{ii}A$ 可知，$A_{ij}=0,\forall i\neq j$，即 A 必须是对角阵。再考虑 AE_{ij}，其 i 行 j 列元素为 A_{ii}；考虑 $E_{ij}A$，其 i 行 j 列元素为 A_{jj}. 由 $AE_{ij}=E_{ij}A$ 可知 $A_{ii}=A_{jj}$，即 A 的对角元素都相等，故 A 是单位矩阵的常数倍。

   Remark: 这一道题分为两个方向，左推右占 6 分，右推左占 9 分。再右推左时，有些同学把 A,B 的元素设了出来，乘一下然后直接说“由对应元素相等可知”，这种做法会被扣分，因为过程不够详细，有投机取巧之嫌。

4. 设 V 是一个有限维的非零向量空间，$T, S \in \mathcal{L}(V)$. 请证明如果 λ 是 TS 的一个非零特征值，那么 λ 是 ST 的一个非零特征值。

   Solution: 设 $v \neq 0$ 是 TS 对应与特征值 λ 的特征向量，$TSv = \lambda v$，在两边同时用 S 作用即可得到 $STSv = \lambda Sv$. 若 $Sv \neq 0$，则该式说明 Sv 是 ST 对应于 λ 的特征向量，λ 是 ST 的特征值；若 $Sv = 0$，则 $\lambda v = TSv = 0$ 推出 $\lambda = 0$，这与条件矛盾。因此，λ 是 ST 的特征值。

5. 设 V 是一个有限维的非零向量空间，且 $\dim V = n$. 再设 $T \in \mathcal{L}(V)$ 有 n 个互不相同的特征值。请证明：如果 $S \in \mathcal{L}(V)$ 满足 $ST = TS$，那么 S 可对角化。

   Solution: 设 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 分别是 S 的对应于特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 的特征值，即 $Sv_j = \lambda_j v_j, j = 1, 2, \cdots, n$. 由于这些 λ_j 互不相同，那么 $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 构成了 V 的一组基，由命题 5.12，S 在这组基下可对角化，且 $V = \operatorname{null}(S - \lambda_1 I) \oplus \operatorname{null}(S - \lambda_2 I) \oplus \cdots \oplus \operatorname{null}(S - \lambda_n I)$，这里 $\operatorname{null}(S - \lambda_j I) = \operatorname{span}\{v_j\}$。此外，$STv_j = TSv_j = T(\lambda_j v_j) = \lambda_j T v_j$，也就是说 Tv_j 也是 S 对应特征值 λ_j 的特征向量，$Tv_j \in \operatorname{null}(S - \lambda_j I) = \operatorname{span}\{v_j\}$，即存在 μ_j 使得 $Tv_j = \mu_j v_j$。这就说明了 $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 也都是 T 的特征向量，因此 T 可以对角化。

   <u>Remark:</u> 该题评分分为 3 大块，说明 Tv_j 也是 S 的特征向量占 5 分，说明 $Tv_j = \mu_j v_j$ 占 5 分，说明 T 有一组特征向量构成的基 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 占 5 分。其中第三步有些同学试图证明 T 有 n 个不同的特征向量，即说明 $\mu_j, j = 1, 2, \cdots, n$ 不互相等，这是证不出来的，按照这个思路去做会被酌情扣 2-3 分。

6. 设 V 是一个有限维的向量空间，W 是一个向量空间。再设 $S, T \in \mathcal{L}(V, W)$，请证明：

$$\dim \operatorname{range}(S+T) \leq \dim \operatorname{range} S + \dim \operatorname{range} T.$$

   Solution:

$$\operatorname{range}(S+T) = \{Sv + Tv : v \in V\} \subset \{Sv_1 + Tv_2 : v_1, v_2 \in V\} = \operatorname{range} S + \operatorname{range} T.$$

   因此，由维数公式，

$$\dim \operatorname{range}(S+T) \leq \dim(\operatorname{range} S + \operatorname{range} T) \leq \dim \operatorname{range} S + \dim \operatorname{range} T.$$

   <u>Remark:</u> 该题有些同学试图证明 $\operatorname{range}(S+T) = \operatorname{range} S + \operatorname{range} T$，这是证不出来的（取 $W = V, S = \mathrm{Id}_V, T = -S$ 即知），只要出现了这个式子就只得 2 分。