6.5 线性泛函与伴随

Tiao Lu

Peking University

2017.11.29

线性泛函的定义

定义 1 (线性泛函)

V 上的线性泛函 *(linear functional)* 是 V 到 F 的线性映射.

Remark 2

线性泛函是特殊的线性映射, 它的 *codomain* 是数域.

举例 3

见下页的两个例子

§6.5 线性泛函与伴随

V 上的**线性泛函** (**linear functional**) 是从 V 到 $\mathbf{F}$ 的线性映射. 例如, 如下定义的函数 $\varphi : \mathbf{F}^3 \to \mathbf{F}$

6.43 $$\varphi(z_1, z_2, z_3) = 2z_1 - 5z_2 + z_3$$

是 $\mathbf{F}^3$ 上的线性泛函. 又如, 考虑内积空间 $\mathcal{P}_6(\mathbf{R})$ (这里的内积是由 [0,1] 上的定积分所诱导的乘法; 参见 6.2). 如下定义的函数 $\varphi : \mathcal{P}_6(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$

6.44 $$\varphi(p) = \int_0^1 p(x)(\cos x)\mathrm{d}x$$

是 $\mathcal{P}_6(\mathbf{R})$ 上的线性泛函.

由内积导出的线性映射

V 是一个内积空间, 取定 $v \in V$, 我们可以这样定义一个线性泛函

$$\begin{array}{lcl} \langle \cdot, v \rangle : V & \to & F \\ u \in V & \to & \langle u, v \rangle \in F \end{array}$$

例如取 $v = (4, 2, 3+i) \in \mathbb{C}^3$, 于是它导出的线性泛函是

$$\underbrace{\langle \cdot, (4, 2, 3+i) \rangle}_{\text{线性泛函}}(u) = \langle u, v \rangle = \underbrace{4u_1 + 2u_2 + (3-i)u_3}_{\text{数}}, \forall u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{C}^3$$

V 上所有的线性泛函 $\mathcal{L}(V, F)$ 是一个线性空间.

$\dim \mathcal{L}(V,F) = \dim V \times \dim F = \dim V$

上一页, 我们学习了, $\forall v \in V$, 可以构造一个线性泛函

$$\langle \cdot , v \rangle : V \to F$$

$$u \longmapsto \langle u, v \rangle$$

V上所有的线性泛函 $\mathcal{L}(V,F)$ 是一个线性空间.

$\dim \mathcal{L}(V,F) = \dim V \times \dim F \qquad = \dim V$

上一页, 我们学习了, $\forall\, v \in V$, 可以构造一个线性泛函

$$\langle \cdot, v \rangle : V \to F$$

$$u \longmapsto \langle u, v \rangle$$

也就说, 我们建立了一个映射 from V 到 $\mathcal{L}(V,F)$

$$T : V \to \mathcal{L}(V,F)$$

$$v \longmapsto \langle \cdot, v \rangle$$

可以验证 $T(v+w) = Tv + Tw$ (利用内积关于 second slot 的加性)

V上所有的线性泛函 $\mathcal{L}(V,F)$ 是一个线性空间.

$\dim \mathcal{L}(V,F) = \dim V \times \dim F = \dim V$

上一页，我们学习了，$\forall v \in V$，可以构造一个线性泛函

$$\langle \cdot, v \rangle : V \to F$$

$$u \mapsto \langle u, v \rangle$$

也就说，我们建立了一个映射 from V 到 $\mathcal{L}(V,F)$

$$T : V \to \mathcal{L}(V,F)$$

$$v \mapsto \langle \cdot, v \rangle$$

从 V 到 $\mathcal{L}(V,F)$ 的映射是共轭线性映射

V 上所有的线性泛函 $\mathcal{L}(V,F)$ 是一个线性空间.

$\dim \mathcal{L}(V,F) = \dim V \times \dim F = \dim V$

上一页, 我们学习了, $\forall v \in V$, 可以构造一个线性泛函

$$\langle \cdot, v\rangle : V \to F$$

$$u \longmapsto \langle u, v\rangle$$

也就说, 我们建立了一个映射 from V 到 $\mathcal{L}(V,F)$

$$T : V \to \mathcal{L}(V,F)$$

$$v \longmapsto \langle \cdot, v\rangle$$

可以验证 ① $T(v+w) = Tv + Tw$ (利用内积关于 second slot 的加性)

② $T(kv) = \bar{k}\, Tv$ (利用内积关于 second slot 的共轭加性.

上页　定义的共轭线性映射

$$T: V \longrightarrow \mathcal{L}(V, F) \qquad (1)$$
$$v \longmapsto \langle \cdot, v \rangle$$

我们想研究共轭线性映射 T 是否是单射，是否是满射？如果既单又满，那么 T 就是可逆映射.

上页 定义的共轭线性映射

$$\begin{aligned} T: V &\longrightarrow \mathcal{L}(V,F) \\ v &\longmapsto \langle \cdot, v \rangle \end{aligned} \quad (1)$$

我们想研究 共轭线性映射 T 是否是单射，是否是满射？如果既单又满，那么 T 就是可逆映射。

命题：$T: V \to \mathcal{L}(V,F)$ defined by (1) 是单射.

证明：设 $v, w \in V$，且 $Tv = Tw$ in $\mathcal{L}(V,F)$. 那么 $\langle u, v\rangle = \langle u, w\rangle$ for all $u \in V$

上页 定义的共轭线性映射

$$T: V \to \mathcal{L}(V,\mathbb{F}) \quad (1)$$
$$v \mapsto \langle \cdot, v \rangle$$

我们想研究 共轭线性映射 T 是否是单射，是否是满射？如果既单又满，那么 T 就是可逆映射.

命题：$T: V \to \mathcal{L}(V,\mathbb{F})$ defined by (1) 是单射.

证明：设 $v, w \in V$，且 $Tv = Tw$ in $\mathcal{L}(V,\mathbb{F})$. 那么
$\langle u, v \rangle = \langle u, w \rangle$ for all $u \in V$.

利用内积关于第二变量的加性，可得 $\langle u, v-w \rangle =$ for all $u \in V$

特别地取 $u = v-w$，那么 $\langle v-w, v-w \rangle = 0$

上页　定义的共轭线性映射

$$T: V \longrightarrow \mathcal{L}(V,F) \quad (1)$$
$$v \longmapsto \langle \cdot, v \rangle$$

我们想研究共轭线性映射 T 是否是单射，是否是满射？如果既单又满，那么 T 就是可逆映射。

命题：$T: V \to \mathcal{L}(V,F)$ defined by (1) 是单射

证明：设 $v, w \in V$，且 $Tv = Tw$ in $\mathcal{L}(V,F)$，那么

$$\langle u, v \rangle = \langle u, w \rangle \quad \text{for all } u \in V.$$

利用内积关于第二变量的加性，可得 $\langle u, v-w \rangle = 0$ for all $u \in V$

特别地取 $u = v-w$，那么 $\langle v-w, v-w \rangle = 0$

由内积的正定性知 $v-w=0$，即 $v=w$. $\square$

$T: V \longrightarrow \mathcal{L}(V, F)$ 是否是满射呢?

例

V 上的**线性泛函 (linear functional)** 是从 V 到 $\mathbf{F}$ 的线性映射. 例如, 如下定义的函数 $\varphi: \mathbf{F}^3 \to \mathbf{F}$

6.43 $$\varphi(z_1, z_2, z_3) = 2z_1 - 5z_2 + z_3$$

$\varphi \in \mathcal{L}(F^3, F)$ 是 F^3 上的一个线性泛函

显然, $\varphi(z_1, z_2, z_3) = \langle (z_1, z_2, z_3), (2, -5, 1) \rangle$ for all $(z_1, z_2, z_3) \in F^3$

这说明 6.43 定义的 φ 在 T 的值域中.

$T: V \to \mathcal{L}(V,F)$ 是否是满射呢？

例：~~是 $\mathbf{F}^3$ 上的线性泛函~~. 又如，考虑内积空间 $\mathcal{P}_6(\mathbf{R})$ (这里的内积是由 [0,1] 上的定积分所诱导的乘法; 参见 6.2). 如下定义的函数 $\varphi: \mathcal{P}_6(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$

6.44
$$\varphi(p) = \int_0^1 p(x)(\cos x)\mathrm{d}x$$

是 $\mathcal{P}_6(\mathbf{R})$ 上的线性泛函.

6.44 中的 φ 在 T 的值域中吗？也就说是否存在一个 $v \in \mathcal{P}_6(\mathbb{R})$ 使得

$\varphi(p) = \langle p, v \rangle = \int_0^1 p(x)v(x)\,dx$ for all $p \in \mathcal{P}_6(\mathbb{R})$ 呢？

$T: V \to \mathcal{L}(V, F)$ 是否是满射呢?

例: ~~是 $\mathbf{F}^3$ 上的线性泛函~~. 又如, 考虑内积空间 $\mathcal{P}_6(\mathbf{R})$ (这里的内积是由 [0,1] 上的定积分所诱导的乘法; 参见 6.2). 如下定义的函数 $\varphi : \mathcal{P}_6(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$

6.44 $$\varphi(p) = \int_0^1 p(x)(\cos x)\mathrm{d}x$$

是 $\mathcal{P}_6(\mathbf{R})$ 上的线性泛函.

6.44 中的 φ 在 T 的值域中吗? 也就说是否存在一个 $v \in P_6(\mathbb{R})$ 使得

$$\varphi(p) = \langle p, v \rangle = \int_0^1 p(x)v(x)\,dx \quad \text{for all } p \in P_6(\mathbb{R}) \text{ 呢?}$$

注意 $\cos x \notin P_6(\mathbb{R})$, 因为 $\cos x$ 不是多项式.

这还真不是一眼就能说出答案的问题了.

$T: V \longrightarrow \mathcal{L}(V,F)$ 是否是满射呢？

YES. 我们有下面的定理

6.45 定理： 设 φ 是 V 上的线性泛函，则存在唯一一个向量 $v \in V$ 使得

$$\varphi(u) = \langle u, v \rangle, \quad u \in V.$$

这个定理也就说 $T: V \longrightarrow \mathcal{L}(V,F)$ 是单射也是满射.

$$v \longmapsto \langle \cdot, v \rangle$$

当然，使得我们感到不爽的是 T 不是一个线性映射.

$T: V \longrightarrow \mathcal{L}(V,F)$ 是否是满射呢?

YES. 我们有下面的定理

6.45 定理: 设 φ 是 V 上的线性泛函, 则存在唯一一个向量 $v \in V$ 使得

$$\varphi(u) = \langle u, v \rangle, \quad u \in V.$$

这个定理也就说 $T: V \longrightarrow \mathcal{L}(V,F)$ 是单射也是满射.

$$v \longmapsto \langle \cdot, v \rangle$$

当然, 使得我们感到不爽的是 T 不是一个线性映射.

证明: 我们已经证明了唯一性. 现在证明存在性.

$T: V \longrightarrow \mathcal{L}(V,F)$ 是否是满射呢？

YES. 我们有下面的定理

6.45 定理： 设 φ 是 V 上的线性泛函，则存在唯一一个向量 $\boldsymbol{v} \in V$ 使得

$$\varphi(\boldsymbol{u}) = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle, \quad \boldsymbol{u} \in V.$$

这个定理也就说 $T: V \longrightarrow \mathcal{L}(V,F)$ 是单射也是满射.

$$v \longmapsto \langle \cdot, v \rangle$$

当然，使得我们感到不爽的是 T 不是一个线性映射.

证明：我们已经证明了唯一性. 现在证明存在性.

设 $\varphi \in \mathcal{L}(V,F)$，设 $(e_1, \dots, e_n)$ 是 V 的一个 orthonormal 基.

$\forall u \in V$，那么存在唯一的 $c_1, \dots, c_n \in F$ 使得 $u = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i$

而且还可计算得 $c_i = \langle u, e_i \rangle$

$$\varphi(u) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} c_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi(e_i)$$

利用 $c_i = \langle u, e_i \rangle$

$$= \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i \rangle \varphi(e_i)$$

$$\varphi(u) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} c_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi(e_i)$$

利用 $c_i = \langle u, e_i \rangle$

$$= \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i \rangle \varphi(e_i)$$

利用内积对 second slot 的共轭线性.

$$= \left\langle u, \sum_{i=1}^{n} \overline{\varphi(e_i)}\, e_i \right\rangle$$

因此取 $v = \sum_{i=1}^{n} \overline{\varphi(e_i)}\, e_i$, 就满足 $\varphi(u) = \langle u, v \rangle$ for all $u \in V$.

这就证明了存在性

$$\varphi(u) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} c_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi(e_i)$$

利用 $c_i = \langle u, e_i \rangle$

$$= \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i \rangle \varphi(e_i)$$

利用内积对 second slot

而共轭线性.

$$= \left\langle u, \sum_{i=1}^{n} \overline{\varphi(e_i)}\, e_i \right\rangle$$

因此取 $v = \sum_{i=1}^{n} \overline{\varphi(e_i)}\, e_i$，就满足 $\varphi(u) = \langle u, v \rangle$ for all $u \in V$.

这就证明了存在性

这里 v 是依赖于 e_i 而选取的（至少表面上看起来如此），

因此还要证明唯一性．也就是 v 是不依赖于基 $(e_1, \dots, e_n)$

而选取。 前面证明了，这里不在赘述。

Riesz 表示定理

定理 6.45 是 Riesz 表示定理在有限维内积空间上的特例. 我们后面就把这个定理称作 Riesz 表示定理. Riesz 表示定理是我们定义伴随算子的基础.

内积的记号

我们考虑 $T \in \mathcal{L}(V, W)$, 其中 V 和 W 分别是 n 维和 m 维的内积空间. 这两个空间上的内积的定义当然是可以完全不同的, 但是我们的课本还是使用 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示, 没有加以区别. 为了强调这种区别, 我们将这样来表示

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_V \text{表示 } V \text{ 的内积}$$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_W \text{表示 } W \text{ 的内积}$$

线性映射和内积导出的线性泛函

线性映射 $T \in \mathcal{L}(V, W)$ 和 $\langle \cdot, w \rangle_W$ 复合导出的线性泛函 $T_w : V \to F$.

$$V \to W \to F$$

在黑板上标出 $T : V \to W$ 和 $\langle \cdot, w \rangle_W : W \to F$
然后指出它们的复合定义出一个线性泛函 $T_w : V \to F$.

复合得到的泛函 $T_w \in \mathcal{L}(V, F)$

$$T_w v = \underbrace{\langle \cdot, w \rangle_W \, T}_{\text{两个算子的复合}} \; v = \langle Tv, w \rangle_W$$

复合映射 II

应用 Riesz 表示定理, $T_w \in \mathcal{L}(V, F)$ 对应到唯一一个元素 $u_w \in V$

T 是给定的, 对于 W 中的元素, 我们定义了一个线性泛函 $T_w \in \mathcal{L}(V, F)$. 根据 Riesz representation thoerem, there exists a unique element $u_w \in V$ such that

$$\underbrace{T_w v}_{\langle Tv, w\rangle_W} = \langle v, u_w \rangle_V .$$

复合映射 III

从 W 到 V 的映射

总结一下，当给定 T 的时候，对于任意给定的 $w \in W$，我们找到了唯一的一个元素 $u_w \in V$ 使得

$$\langle Tv, w \rangle_W = \langle v, u_w \rangle_V, \quad \forall v \in V.$$

这样，我们就可以定义一个映射 $W \to V$，这个映射是和 T 有关系的，我们把它记作 T^*.

$$\begin{aligned} T^* : \quad W &\to V \\ w &\to u_w \end{aligned}$$

也就是说 $T^* w$ 就是等于那个使得

$$\langle Tv, w \rangle_W = \langle v, u_w \rangle_V, \quad \forall v \in V.$$

的 u_w. 因此根据 $T^* w$ 的定义知道，$T^* w$ 满足

$$\langle Tv, w \rangle_W = \langle v, T^* w \rangle_V, \quad \forall v \in V.$$

复合映射 IV

问题

$T^* : W \to V$ 是一个映射, 但是是线性映射吗?
YES. 但是我们先看一个如何计算 T^* 的例子, 稍后再证明这一点.

我们举例说明如何计算伴随. 定义 $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ 为

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + 3x_3, 2x_1).$$

因此 T^* 是从 $\mathbf{R}^2$ 到 $\mathbf{R}^3$ 的函数. 要计算 T^*, 固定一个点 $(y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2$, 则对所有 $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ 都有

$$\begin{aligned}
\underbrace{\langle (x_1, x_2, x_3), T^*(y_1, y_2) \rangle}_{R^3\text{中的内积}} &= \langle T(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2) \rangle \quad R^2\text{中的内积} \\
&= \langle (x_2 + 3x_3, 2x_1), (y_1, y_2) \rangle \\
&= x_2 y_1 + 3x_3 y_1 + 2x_1 y_2 \\
&= \underline{\langle (x_1, x_2, x_3), (2y_2, y_1, 3y_1) \rangle}. \quad R^3\text{内积}
\end{aligned}$$

由此得

$$T^*(y_1, y_2) = (2y_2, y_1, 3y_1).$$

注意到在上面的例子中, T^* 不只是从 $\mathbf{R}^2$ 到 $\mathbf{R}^3$ 的函数, 而且还是线性映射. 这是普遍成立的. 具体地, 若 $T \in \mathcal{L}(V, W)$, 则 $T^* \in \mathcal{L}(W, V)$. 为了证明这一点, 设 $T \in \mathcal{L}(V, W)$. 首先验证加性. 给定 $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \in W$, 则

$$\begin{aligned}\langle T\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2\rangle &= \langle T\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1\rangle + \langle T\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_2\rangle \\ &= \langle \boldsymbol{v}, T^*\boldsymbol{w}_1\rangle + \langle \boldsymbol{v}, T^*\boldsymbol{w}_2\rangle \\ &= \langle \boldsymbol{v}, T^*\boldsymbol{w}_1 + T^*\boldsymbol{w}_2\rangle,\end{aligned}$$

这说明 $T^*\boldsymbol{w}_1+T^*\boldsymbol{w}_2$ 和 $T^*(\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2)$ 扮演了同样的角色. 因为满足这一性质的向量是唯一的, 所以必有

$$T^*\boldsymbol{w}_1+T^*\boldsymbol{w}_2=T^*(\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2).$$

现在来验证 T^* 的齐性. 若 $a\in\mathbf{F}$, 则

$$\begin{aligned}\langle T\boldsymbol{v},a\boldsymbol{w}\rangle&=\bar{a}\langle T\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\rangle\\&=\bar{a}\langle\boldsymbol{v},T^*\boldsymbol{w}\rangle\\&=\langle\boldsymbol{v},aT^*\boldsymbol{w}\rangle,\end{aligned}$$

这说明 $aT^*\boldsymbol{w}$ 和 $T^*(a\boldsymbol{w})$ 扮演了同样的角色. 因为满足这一性质的向量是唯一的, 所以必有

$$aT^*\boldsymbol{w}=T^*(a\boldsymbol{w}).$$

因此 T^* 是线性映射.

你应该验证, 函数 $T \mapsto T^*$ 具有如下性质:

加性 (additivity)

对所有 $S, T \in \mathcal{L}(V, W)$ 都有 $(S+T)^* = S^* + T^*$;

共轭齐性 (conjugate homogeneity)

对所有 $a \in \mathbf{F}, T \in \mathcal{L}(V, W)$ 都有 $(aT)^* = \bar{a}T^*$;

伴随的伴随 (adjoint of adjoint)

对所有 $T \in \mathcal{L}(V, W)$ 都有 $(T^*)^* = T$;

恒等算子 (identity)

$I^* = I$, 其中 I 是 V 上的恒等算子;

乘积 (products)

对所有 $T \in \mathcal{L}(V, W), S \in \mathcal{L}(W, U)$ 都有 $(ST)^* = T^*S^*$ (这里 U 是 $\mathbf{F}$ 上的内积空间).

$$(T^*)^* = T.$$

命题：设 V 和 W 是 finite dimensional nonzero 内积空间.
如果 $T \in \mathcal{L}(V, W)$，那么 $(T^*)^* = T$.

证明 $T \in \mathcal{L}(V, W)$，由 T^* 的定义知

$T^* : W \to V$ is a linear map 且满足

$$\langle Tv, w \rangle_W = \langle v, T^* w \rangle \text{ for all } v \in V, w \in W.$$

$$(T^*)^* = T.$$

命题：设 V 和 W 是 finite dimensional nonzero 内积空间.
如果 $T \in \mathcal{L}(V,W)$，那么 $(T^*)^* = T$.

证明 $T \in \mathcal{L}(V,W)$，由 T^* 的定义知

$T^*: W \to V$ is a linear map 且满足

$$\langle Tv, w\rangle_W = \langle v, T^*w\rangle \text{ for all } v \in V, w \in W.$$

再由 $T^{**} = (T^*)^*$ 的定义知 $T^{**} \in \mathcal{L}(V,W)$
is a linear map 且满足

$$\langle T^*w, v\rangle_V = \langle w, (T^*)^*v\rangle_W \text{ for all } v \in V, w \in W.$$

$$(T^*)^* = T.$$

命题：设 V 和 W 是 finite dimensional nonzero 内积空间.

如果 $T \in \mathcal{L}(V, W)$，那么 $(T^*)^* = T$.

证明 $T \in \mathcal{L}(V, W)$，由 T^* 的定义知

$T^* : W \to V$ is a linear map 且满足

$$\langle Tv, w \rangle_W = \langle v, T^*w \rangle_V \text{ for all } v \in V, w \in W. \quad ①$$

再由 $T^{**} = (T^*)^*$ 的定义知 $T^{**} \in \mathcal{L}(V, W)$

is a linear map 且满足

$$\langle T^*w, v \rangle_V = \langle w, (T^*)^* v \rangle_W \text{ for all } v \in V, w \in W \quad ②$$

③

观察 ①② 中的红圈中的式，且利用内积的共轭对称性. $\langle v, T^*w \rangle = \overline{\langle T^*w, v \rangle}$

由①②③(上三式)，可得 $\langle Tv, w\rangle_W = \overline{\langle w, T^{**}v\rangle_W}$ ④

由①②③（上页中），得 $\langle Tv, w\rangle_W = \overline{\langle w, T^{**}v\rangle_W}$ ④

再利用内积的共轭对称性，得

$$\langle Tv, w\rangle_W = \langle T^{**}v, w\rangle_W. \quad \text{for all } v \in V \quad \text{for all } w \in W$$

由①②③(上页中)，得 $\langle Tv, w\rangle_W = \overline{\langle w, T^{**}v\rangle_W}$ ④

再利用内积的共轭对称性，得

$$\boxed{\langle Tv, w\rangle_W = \langle T^{**}v, w\rangle_W. \quad \text{for all } v\in V \quad \text{for all } w\in W}$$

这就证明 $T = T^{**}$. 一点点解释

$\forall\, v\in V$, $\langle Tv, w\rangle = \langle T^{**}v, w\rangle$ for all w

这就证明 $Tv = T^{**}v$.

由 v 的任意性知 $T = T^{**}$

$$(TS)^* = S^*T^*$$

命题：设 U, V 和 W 是 finite dimensional nonzero 内积空间.

设 $S \in \mathcal{L}(U,V)$, $T \in \mathcal{L}(V,W)$.

那么 $(TS)^* = S^*T^*$

证明: 由定义知 $(TS)^* \in \mathcal{L}(W,U)$ 满足

$$\langle \underbrace{TS}_{\text{看成一个整体}} u, w \rangle_W = \langle u, (TS)^* w \rangle \quad \text{for all } u \in U, w \in W.$$

$$(TS)^* = S^*T^*$$

命题：设 U, V 和 W 是 finite dimensional nonzero 内积空间.

设 $S \in \mathcal{L}(U,V)$, $T \in \mathcal{L}(V,W)$.

那么 $(TS)^* = S^*T^*$

证明：由定义知 $(TS)^* \in \mathcal{L}(W,U)$ 满足

$$\langle TSu, w\rangle_W = \langle u, (TS)^*w\rangle \quad \text{for all } u \in U,\ w \in W.$$

由 $(TS)u = T(Su)$ 知 上式左端 $= \langle T(Su), w\rangle \overset{\text{用}T^*\text{的定义}}{=} \langle Su, T^*w\rangle$

$$\overset{\text{用}S^*\text{的定义}}{=} \langle u, S^*T^*w\rangle$$

$$(TS)^* = S^*T^*$$

命题：设 U, V 和 W 是 finite dimensional nonzero 内积空间.

设 $S \in \mathcal{L}(U,V)$, $T \in \mathcal{L}(V,W)$.

那么 $(TS)^* = S^*T^*$

证明：由定义知 $(TS)^* \in \mathcal{L}(W,U)$ 满足

$$\langle TSu, w\rangle_W = \langle u, (TS)^*w\rangle_U \text{ for all } u \in U,\ w \in W \quad (1)$$

由 $(TS)u = T(Su)$ 知 (1) 式左端 $= \langle T(Su), w\rangle_W = \langle Su, T^*w\rangle_V$ (用 T^* 的定义) for all $u \in U$, $w \in W$

$= \langle u, S^*T^*w\rangle_U$ (用 S^* 的定义) (2)

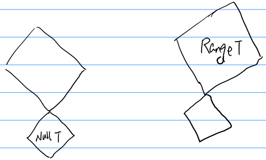
由(1)(2)得 $\langle u, (TS)^*w\rangle_U = \langle u, S^*T^*w\rangle$ for all $u \in U$, $w \in W$.

这就证明了 $(TS)^* = S^*T^*$.

为引入 Fredholm 二择一定理作准备

复习

Rank-Nullity Theorem



$$T: V \longrightarrow W$$

$$\dim V = \dim \operatorname{Null} T + \dim \operatorname{Range} T$$

设 V 和 W 是有限维的非零内积空间.

Range T 是 W 的子空间

Problem:

Is there a solution of $Tv = w$?

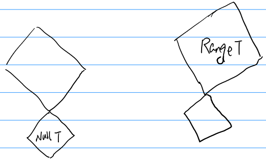
如何验证 $w \in \operatorname{Range} T$? 我们要借助 T^*. sometimes $\operatorname{Null} T^*$ 是容易求到的, 我们待证明 $\operatorname{Range} T \perp \operatorname{Null} T^* = \operatorname{span}(w_1, \dots, w_m)$ 我们只要验证 $\langle w, w_i \rangle = 0$ for $i = 1, \dots, m$ 是否成立.

If Yes, then $w \in \operatorname{Range} T$; If No, then $w \notin \operatorname{Range} T$, 即 $Tv = w$ 无解.

为引入 Fredholm 二择一定理作准备

复习

Rank-Nullity Theorem



$$T: V \longrightarrow W$$

$$\dim V = \dim \operatorname{Null} T + \dim \operatorname{Range} T$$

设 V 和 W 是有限维的非零内积空间.

$\operatorname{Range} T$ 是 W 的子空间

Problem: ① Is there a solution of $Tv = w$?

如何验证 $w \in \operatorname{Range} T$? 我们要借助 T^*. sometimes $\operatorname{Null} T^*$ 是容易求到的. 我们待证明 $\operatorname{Range} T \perp \operatorname{Null} T^* = \operatorname{span}(w_1, \dots, w_m)$

我们只要验证 $\langle w, w_i \rangle = 0$ for $i = 1, \dots, m$ 是否成立.

If Yes, then $w \in \operatorname{Range} T$; If No, then $w \notin \operatorname{Range} T$, 即 $Tv = w$ 无解.

二择一: 要么 w 与 $T^*u=0$ 的所有解都正交, 问题①有解; 要么 w 与 $T^*u=0$ 的某个解不正交, 问题①无解.

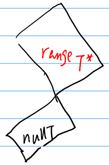
命题 6.46：设 V 和 W 都是有限维的非零内积空间，且 $T \in \mathcal{L}(V, W)$，则

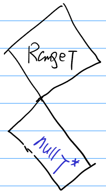
(a) $\operatorname{range} T = (\operatorname{null} T^*)^{\perp}$

(b) $\operatorname{null} T = (\operatorname{range} T^*)^{\perp}$

(c) $\operatorname{range} T^* = (\operatorname{null} T)^{\perp}$

(d) $\operatorname{null} T^* = (\operatorname{range} T)^{\perp}$





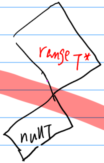
命题 6.46：设 V 和 W 都是有限维的非零内积空间，且 $T \in \mathcal{L}(V, W)$，则

(a) $\operatorname{range} T = (\operatorname{null} T^*)^\perp$

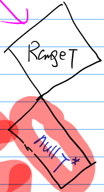
(b) $\operatorname{null} T = (\operatorname{range} T^*)^\perp$

(c) $\operatorname{range} T^* = (\operatorname{null} T)^\perp$

(d) $\operatorname{null} T^* = (\operatorname{range} T)^\perp$



(a) 是说这两个空间正交.



命题 6.46：设 V 和 W 都是有限维的非零内积空间，且 $T \in \mathcal{L}(V, W)$，则

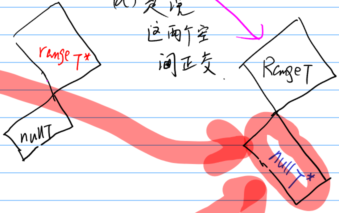
(a) $\operatorname{range} T = (\operatorname{null} T^*)^{\perp}$

(b) $\operatorname{null} T = (\operatorname{range} T^*)^{\perp}$

(c) $\operatorname{range} T^* = (\operatorname{null} T)^{\perp}$

(d) $\operatorname{null} T^* = (\operatorname{range} T)^{\perp}$

(a) 是说这两个空间正交.



证明：因为一个子空间的正交补的正交补是它本身，所以 (a) $\Leftrightarrow$ (d).

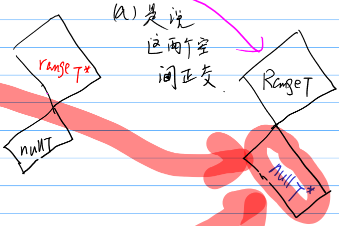
命题 6.46：设 V 和 W 都是有限维的非零内积空间，且 $T \in \mathcal{L}(V, W)$，则

(a) $\operatorname{range} T = (\operatorname{null} T^*)^\perp$

(b) $\operatorname{null} T = (\operatorname{range} T^*)^\perp$

(c) $\operatorname{range} T^* = (\operatorname{null} T)^\perp$

(d) $\operatorname{null} T^* = (\operatorname{range} T)^\perp$



证明：因为一个子空间的正交补的正交补是它本身，所以 (a) $\Longleftrightarrow$ (d)。

再利用 $T^{**} = T$，知 (b) $\Longleftrightarrow$ (d)，(a) $\Longleftrightarrow$ (c)。例如

(b) $\Rightarrow$ (d) 可这样证明：把 (b) 中的 T 换成 T^*，得 $\operatorname{null} T^* = (\operatorname{range} T^{**})^\perp$

再由 $T^{**} = T$，得 $\operatorname{null} T^* = (\operatorname{range} T)^\perp$。

由上页的讨论知 我们仅需要证明 (a) (b) (c) (d) 中的一个即可。我们下面证明 (d). $\operatorname{null} T^* = (\operatorname{range} T)^\perp$.

$\forall\, w \in \operatorname{null} T^*$, 由 $\operatorname{null} T^*$ 的定义 知 $T^* w = 0$.

那么 $\langle T^* w, v \rangle = 0$ ① for all $v \in V$

再由 adjoint 算子的定义知 $\langle T^* w, v \rangle = \langle w, T^{**} v \rangle$ ② for all $v \in V$

而 $T^{**} = T$ ③.

由 ① ② ③, 可得 $\langle w, Tv \rangle = 0$ for all $v \in V$.

这就证明了 $w \in (\operatorname{range} T)^\perp$.

由上页的讨论知 我们仅需要证明 (a) (b) (c) (d) 中的一个即可。我们下面证明 (d). $\operatorname{null} T^* = (\operatorname{range} T)^\perp$.

$\forall\, w \in \operatorname{null} T^*$, 由 $\operatorname{null} T^*$ 的定义知 $T^* w = 0$.

那么 $\langle T^* w, v \rangle = 0$ ① for all $v \in V$

再由 adjoint 算子的定义知 $\langle T^* w, v \rangle = \langle w, T^{**} v \rangle$ ② for all $v \in V$

而 $T^{**} = T$ ③.

由 ① ② ③. 可得 $\langle w, Tv \rangle = 0$ for all $v \in V$.

这就证明了 $w \in (\operatorname{range} T)^\perp$, so $\operatorname{null} T^* \subset (\operatorname{range} T)^\perp$

$\forall\, w \in (\operatorname{range} T)^\perp$, 那么由正交补的定义知

$\langle Tv, w \rangle = 0$ for all $v \in V$

由上页的讨论知，我们仅需要证明 (a) (b) (c) (d) 中的一个即可。我们下面证明 (d). $\operatorname{null} T^* = (\operatorname{range} T)^\perp$.

$\forall\, w \in \operatorname{null} T^*$, 由 $\operatorname{null} T^*$ 的定义知 $T^* w = 0$.

那么 $\underline{\langle T^* w, v \rangle = 0}$ ① for all $v \in V$

再由 adjoint 算子的定义知 $\underline{\langle T^* w, v \rangle = \langle w, T^{**} v \rangle}$ ② for all $v \in V$

而 $\underline{T^{**} = T}$ ③

由 ① ② ③ 可得 $\langle w, Tv \rangle = 0$ for all $v \in V$.

这就证明了 $w \in (\operatorname{range} T)^\perp$, so $\operatorname{null} T^* \subset (\operatorname{range} T)^\perp$

$\forall\, w \in (\operatorname{range} T)^\perp$, 那么由正交补的定义知

$\langle Tv, w \rangle = 0$ for all $v \in V$

$\langle v, T^* w \rangle = 0$ for all $v \in V$.

特别地，取 $v = T^* w$, $\langle T^* w, T^* w \rangle = 0$ 即得 $T^* w = 0$. so $(\operatorname{range} T) \subset \operatorname{null} T^*$.

由上页的讨论知 我们仅需要证明 (a) (b) (c) (d) 中任一个即可。我们下面证明 (d). $\operatorname{null} T^* = (\operatorname{range} T)^\perp$.

$\forall\, w \in \operatorname{null} T^*$, 由 $\operatorname{null} T^*$ 的定义知 $T^* w = 0$.

那么 $\langle T^* w, v \rangle = 0$ ① for all $v \in V$

再由 adjoint 算子的定义知 $\langle T^* w, v \rangle = \langle w, T^{**} v \rangle$ ② for all $v \in V$

而 $T^{**} = T$ ③

由 ① ② ③ 可得 $\langle w, Tv \rangle = 0$ for all $v \in V$.

这就证明了 $w \in (\operatorname{range} T)^\perp$, so $\boxed{\operatorname{null} T^* \subset (\operatorname{range} T)^\perp}$

$\forall\, w \in (\operatorname{range} T)^\perp$, 那么由正交补的定义知

$\langle Tv, w \rangle = 0$ for all $v \in V$

$\langle v, T^* w \rangle = 0$ for all $v \in V$.

特别地 取 $v = T^* w$, $\langle T^* w, T^* w \rangle = 0$ 即得 $T^* w = 0$. so $\boxed{(\operatorname{range} T)^\perp \subset \operatorname{null} T^*}$.

(d) 成立.

一个 $m \times n$ 矩阵的**共轭转置** (**conjugate transpose**) 是通过互换行和列, 然后再对每个元素取复共轭所得到的 $n \times m$ 矩阵. 例如,

$$\begin{bmatrix} 2 & 3+4i & 7 \\ 6 & 5 & 8i \end{bmatrix}$$

的共轭转置是矩阵

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3-4i & 5 \\ 7 & -8i \end{bmatrix}.$$

下一个命题说明了怎样通过 T 的矩阵来计算 T^* 的矩阵. 要注意, 下面的命题只有在处理规范正交基时才能使用, 而对于非规范正交基, T^* 的矩阵不一定等于 T 的矩阵的共轭转置.

6.47 命题: 设 $T \in \mathcal{L}(V, W)$. 如果 $(e_1, \cdots, e_n)$ 是 V 的规范正交基, 并且 $(\boldsymbol{f}_1, \cdots, \boldsymbol{f}_m)$ 是 W 的规范正交基, 那么

$$\mathcal{M}(T^*, (\boldsymbol{f}_1, \cdots, \boldsymbol{f}_m), (e_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n))$$

是

$$\mathcal{M}(T, (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n), (\boldsymbol{f}_1, \cdots, \boldsymbol{f}_m)).$$

的共轭转置.

命题 6.47 的证明 I

记号简记

$\mathcal{M}\left(T,(e_1,\cdots,e_n),(f_1,\cdots,f_m)\right)$ 的 (i,j) 元记作

$\mathcal{M}(T)_{i,j},\quad i=1,\cdots,m, j=1,\cdots,n$

$\mathcal{M}\left(T^*,(f_1,\cdots,f_m),(e_1,\cdots,e_n)\right)$ 的 (j,i) 元记作

$\mathcal{M}(T^*)_{j,i},\quad i=1,\cdots,m, j=1,\cdots,n$

根据映射的矩阵的定义, $Te_j=\sum_{i=1}^{m}\mathcal{M}(T)_{i,j}f_i$ 利用 $f_1,\cdots,f_m$ 是 W 的一个规范正交基, 得到

$$\mathcal{M}(T)_{i,j}=\langle Te_j,f_i\rangle_W$$

规范正交基

体会一下, 我们是如何使用规范正交基的特性的

命题 6.47 的证明 II

根据映射的矩阵的定义，$T^*f_i = \sum_{j=1}^{m} \mathcal{M}(T^*)_{j,i} e_j$ 利用 $e_1, \cdots, e_m$ 是 V 的一个规范正交基，得到

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(T^*)_{j,i} &= \langle T^* f_i, e_j \rangle_V \\ &\text{用内积的共轭对称性} \\ &= \overline{\langle e_j, T^* f_i \rangle_V} \\ &\text{用伴随算子的定义} \\ &= \overline{\langle T e_j, f_i \rangle_W} \end{aligned}$$

比较一下就得到我们的想要的结论了，也就是

$\mathcal{M}(T, (e_1, \cdots, e_n), (f_1, \cdots, f_m))$ 的 (i, j) 元的共轭转置 $=$ $\mathcal{M}(T^*, (f_1, \cdots, f_m), (e_1, \cdots, e_n))$ 的 (j, i) 元.

也就是

命题 6.47 的证明 III

结论

$$\left(\mathcal{M}\left(T,(e_1,\cdots,e_n),(f_1,\cdots,f_m)\right)\right)^* = \mathcal{M}\left(T^*,(f_1,\cdots,f_m),(e_1,\cdots,e_n)\right)$$

注意

我们是在 domain 和 codomain 都是规范正交基的时候证明的伴随算子的矩阵等于算子矩阵的转置. 换了非规范正交基, 上面的结论就不一定成立了.

Homework

24. 求多项式 $q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ 使得

$$p(\tfrac{1}{2}) = \int_0^1 p(x)\,q(x)\,dx, \quad \text{for all } p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}). \qquad (1)$$

提示：咋一看，设 $q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ 用基 $(1, x, x^2)$ 展开

(1) 式成立 $\Longleftrightarrow$ $p(\tfrac{1}{2}) = \int_0^1 p(x)\,q(x)\,dx$ p 取遍 $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ 的一个基中的所有向量即可

但 $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ 定义一个合适的内积，再找一个 orthonormal basis

--- 会不会容易些？

25 求多项式 $q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ 使得

$$\int_0^1 p(x)(\cos \pi x)\,dx = \int_0^1 p(x)\,q(x)\,dx. \quad \text{for all } p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$$

26. 取定向量 $v \in V$，把 $T \in \mathcal{L}(V, \mathbf{F})$ 定义为 $Tu = \langle u, v \rangle$.

求 $T^* a$ for $a \in \mathbf{F}$. （这个题目是对给定的 $T \in \mathcal{L}(V, \mathbf{F})$，求 T^*）

27. 设 n 为正整数，把 $T \in \mathcal{L}(F^n)$ 定义为

$$T(z_1, \cdots, z_n) = (0, z_1, \cdots, z_{n-1}).$$

求 $T^*(z_1, \cdots, z_n)$

有点像我们课中讲的右移算子

28. 设 $T \in \mathcal{L}(V)$，并且 $\lambda \in F$，证明

λ 是 T 的特征值当且仅当 $\bar{\lambda}$ 是 T^* 的特征值.

提示：λ 是 T 的特征值 $\Leftrightarrow \exists v \neq 0$ s.t. $Tv = \lambda v$.

$\Leftrightarrow \operatorname{null}(T - \lambda I) \neq \{0\}$.

$\operatorname{range}((T-\lambda I)^*)$ 和 $\operatorname{null}(T-\lambda I)$ 互为正交补、和 rank-nullity 定理，也许会对此题有帮助.

29. 设 $T\in\mathcal{L}(V)$，并且 U 是 V 的子空间. 证明 U 在 T 下是不变的当且仅当 $U^\perp$ 在 T^* 下是不变的.

提示：先证明 $\Rightarrow$

$\forall u\in U$, $Tu\in U$. 那么

$$\langle Tu, w\rangle = 0 \quad \text{for all } w\in U^\perp$$

$$\langle u, T^*w\rangle = 0 \quad \text{for all } w\in U^\perp$$

上面的几个式子还意味着，

$\forall w\in U^\perp$. $\langle u, T^*w\rangle = 0$ for all $u\in U$.

这说明 $T^*w\in U^\perp$. 从而证明了 $U^\perp$ 是 T^* 的不变子空间。

由于 $T^{**}=T$, $(U^\perp)^\perp = U$. 所以上面证明中把 T 换成 T^*, 把 $U^\perp$ 换成 U 就证明了 "$\Leftarrow$"

30. 设 $T\in\mathcal{L}(V,W)$. 证明:

(a) T 是单的当且仅当 T^* 是满的;

(b) T 是满的当且仅当 T^* 是单的.

31. 证明对每个 $T\in\mathcal{L}(V,W)$ 都有

$$\dim \operatorname{null} T^* = \dim \operatorname{null} T + \dim W - \dim V,$$

并且

$$\dim \operatorname{range} T^* = \dim \operatorname{range} T.$$

32. 设 A 为 $m\times n$ 实矩阵. 证明: A 的所有列 (在 $\mathbf{R}^m$ 中) 所张成的子空间的维数等于 A 的所有行 (在 $\mathbf{R}^n$ 中) 所张成的子空间的维数.

这个题目就是证明 A 的列秩 $=$ A 的行秩

32 的提示

把 A 看成映射 $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$v \longmapsto Av$$

易验证 $\text{null } A = A$ 的 row space 的正交补.

所以 $n = \dim \text{null } A + \underbrace{\dim A \text{ 的 row space}}_{\text{row rank}}$ ①

再由 rank-nullity theorem,

$n = \dim \text{null } A + \underbrace{\dim \text{range } A}_{\text{column rank}}$ ②

由 ① ② 知 A 的 row rank = A 的 column rank