6.3 规范正交基

Tiao Lu

Peking University

2019.11.19

规范正交基

Gram-Schmidt 正交化

规范正交基

- 给出规范正交基的定义
- 展示规范正交基给我们带来的好处
- 如何得到规范正交基

规范正交基 (orthonormal basis)

设 V 是一个有限维的非零内积空间, $\dim V = m$.

如果 $(e_1, e_2, \ldots, e_m)$ 是 V 的一个基, 且

$$\langle e_j, e_k \rangle = \begin{cases} 1 & \text{if } j = k \\ 0 & \text{if } j \neq k \end{cases}$$

那么称 $(e_1, e_2, \ldots, e_m)$ 是 V 的一个规范正交基.

Remark: ① $\underline{\text{ortho}}\,\underline{\text{normal}} = \underbrace{\text{orthogonal}}_{\text{正交的}} + \underbrace{\text{normal}}_{\text{规范的}}$

规范正交基 (orthonormal basis)

设 V 是一个有限维的非零内积空间，$\dim V = m$.

如果 $(e_1, e_2, \dots, e_m)$ 是 V 的一个基，且

$$\langle e_j, e_k \rangle = \begin{cases} 1 & \text{if } j = k \\ 0 & \text{if } j \neq k \end{cases}$$

两两相互正交

那么称 $(e_1, e_2, \dots, e_m)$ 是 V 的一个规范正交基.

Remark: ① orthonormal = orthogonal + normal

正交的　　规范的

规范正交基 (orthonormal basis)

设 V 是一个有限维的非零内积空间，$\dim V = m$.

如果 $(e_1, e_2, \cdots, e_m)$ 是 V 的一个基，且

$$\langle e_j, e_k \rangle = \begin{cases} 1 & \text{if } j = k \\ 0 & \text{if } j \neq k \end{cases}$$

每个基向量的范数都是 1

两两相互正交

那么称 $(e_1, e_2, \cdots, e_m)$ 是 V 的一个规范正交基.

Remark: ① orthonormal = orthogonal + normal

正交的　　规范的

规范正交基 (orthonormal basis)

设 V 是一个有限维的非零内积空间, $\dim V = m$.

如果 $(e_1, e_2, \dots, e_m)$ 是 V 的一个基, 且

$$\langle e_j, e_k \rangle = \begin{cases} 1 & \text{if } j = k \\ 0 & \text{if } j \neq k \end{cases}$$

每个基向量的范数都是1

两两相互正交

那么称 $(e_1, e_2, \dots, e_m)$ 是 V 的一个规范正交基.

Remark: ① orthonormal = orthogonal + normal

正交的　　规范的

例: $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$. (e_1, e_2) 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个 orthonormal basis

例 $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, (e_1, e_2) 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个规范正交向量组 (每个基向量的范数都是1, 而两两相互正交), 但不是一个 basis.

如何求一个向量的范数

例: $v_1=(1,1,1)$, $v_2=(1,0,7)$, $v_3=(2,3,8)$

易验证 (v_1, v_2, v_3) 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个 linearly independent 的向量组，那么它是 $\mathbb{R}^3$ 的一个基，

obviously, for $\mathbb{R}^3$ equipped with the standard inner product $\langle a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3,\ b_1e_1+b_2e_2+b_3e_3\rangle=\sum_{i=1}^{n} a_ib_i$

(v_1, v_2, v_3) is not an 规范正交基 (orthonormal basis)

用这个 bad basis (v_1, v_2, v_3) 表示的向量 $v=a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3$

是不易求长度的，

$$\|v\|^2=\langle v, v\rangle=\langle a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3,\ a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3\rangle$$

$$=\underbrace{\sum_i\sum_j a_ia_j\langle v_i, v_j\rangle}_{\text{九项之和}}$$

如何求一个向量的范数

例: $v_1=(1,1,1)$, $v_2=(1,0,7)$, $v_3=(2,3,8)$

易验证 (v_1,v_2,v_3) 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个 linearly independent 的向量组，那么它是 $\mathbb{R}^3$ 的一个基.

obviously, for $\mathbb{R}^3$ equipped with the standard inner product $\langle a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3, b_1e_1+b_2e_2+b_3e_3\rangle=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$

(v_1,v_2,v_3) is not an 规范正交基 (orthonormal basis)

用这个 bad basis (v_1,v_2,v_3) 表示的向量 $v=a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3$

是不易求长度的,

$$\|v\|^2=\langle v,v\rangle=\langle a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3,\ a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3\rangle$$

$$=\underbrace{\sum_i\sum_j a_ia_j\langle v_i,v_j\rangle}_{\text{九项之和}}$$

如果 $\langle v_i,v_j\rangle=\begin{cases}1 & \text{if } i=j\\ 0 & \text{if } i\neq j\end{cases}$, 那么 $\|v\|^2=\underbrace{\sum_i a_i^2}_{\text{仅仅三项之和}}$

规范向量组表示的向量的长度

6.15 命题： 如果 V 中的向量组 $(e_1, \dots, e_m)$ 是规范正交的，

不一定是基

那么

$$\|a_1e_1 + \cdots + a_me_m\|^2 = |a_1|^2 + \cdots + |a_m|^2,$$

其中 $a_1, \dots, a_m \in F$.

F 是复数域或实数域或别的数域 $|a_i|$ 表 a_i 的模

$|a_i|^2 = a_i\overline{a_i}$

orthonormal vector set 表示的向量的长度

6.15 命题：如果 V 中的向量组 $(e_1, \dots, e_m)$ 是规范正交的，

不一定是基

那么
$$\|a_1e_1 + \dots + a_me_m\|^2 = |a_1|^2 + \dots + |a_m|^2,$$

其中 $a_1, \dots, a_m \in F$.

F 是复数域或实数域或别的数域

$|a_i|$ 表 a_i 的模

$|a_i|^2 = a_i\overline{a_i}$

证明：$\|a_1e_1 + \dots + a_me_m\|^2 = \langle \sum_{i=1}^m a_ie_i, \sum_{j=1}^m a_je_j \rangle$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_i\overline{a_j} \langle e_i, e_j \rangle$$

规范基表示的向量的长度

6.15 命题：如果 V 中的向量组 $(e_1, \cdots, e_m)$ 是规范正交的，

不一定是基

那么
$$\|a_1e_1 + \cdots + a_me_m\|^2 = |a_1|^2 + \cdots + |a_m|^2,$$

其中 $a_1, \cdots, a_m \in F$.

F是复数域或实数域或别的数域　$|a_i|$ 表 a_i 的模

$|a_i|^2 = a_i\overline{a_i}$

证明：$\|a_1e_1 + \cdots + a_me_m\|^2 = \langle \sum_{i=1}^m a_ie_i, \sum_{j=1}^m a_je_j \rangle$

$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_i\overline{a_j} \langle e_i, e_j \rangle$ → 利用 $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$

$= \sum_{i=1}^m a_i\overline{a_i} = \sum_{i=1}^m |a_i|^2.$

证毕.

每个不含零向量的正交向量组都是线性无关的

命题：每个不含zero vector的正交向量组都是线性无关的

证明：设 $(v_1, \dots, v_m)$ 是 V 中的一个正交向量组，且 $v_i \neq 0$, $i=1,\dots,m$.

反证法．如果 $(v_1, \dots, v_m)$ 线性相关，那么一定存在 $k \geq 2$.

使得 $v_k = \sum_{i=1}^{k-1} a_i v_i$,

$$\langle v_k, v_k \rangle = \langle v_k, \sum_{i=1}^{k-1} a_i v_i \rangle = \sum_{i=1}^{k-1} \bar{a_i} \langle v_k, v_i \rangle$$

得 0

i是从1到k-1，一定有 $i \neq k$

每个不含零向量的正交向量组都是线性无关的

命题：每个不含zero vector的正交向量组都是线性无关的

证明：设 $(v_1, \dots, v_m)$ 是 V 中的一个正交向量组，且 $v_i \neq 0$, $i=1,\dots,m$.

反证法，如果 $(v_1, \dots, v_m)$ 线性相关，那么一定存在 $k \geq 2$.

使得 $v_k = \sum_{i=1}^{k-1} a_i v_i$,

$$\langle v_k, v_k \rangle = \langle v_k, \sum_{i=1}^{k-1} a_i v_i \rangle = \sum_{i=1}^{k-1} \bar{a_i} \langle v_k, v_i \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} \bar{a_i}\, 0 = 0$$

i遍从1到k-1，一定有 $i \neq k$ 得0

而 $v_k \neq 0$，故 $\langle v_k, v_k \rangle > 0$ 用内积的正定性

矛盾，故 $(v_1, \dots, v_m)$ 是线性无关的。 □

每个规范正交向量组都是线性无关的

6.16 推论 每个规范向量组都是线性无关的

证明: $(v_1, \cdots, v_m)$ 是 V 中的一个规范正交向量组,
那么 它是一个正交组,且每个向量都不是 0
$(\|v_i\| = 1,\ i=1, \cdots, m.)$

由上一页的命题知此推论得证.

每个规范正交向量组都是线性无关的

6.16 推论 每个规范向量组都是线性无关的

证明：$(v_1, \dots, v_m)$ 是 V 中的一个规范正交向量组，

那么它是一个正交组，且每个向量都不是 0

$(\|v_i\| = 1, \ i = 1, \dots, m.)$

由上一页的命题知此推论得证.

Remark：对于每一个 n 维的内积空间而言，它的一个规范正交组的长度最长为 n.

每个规范正交向量组都是线性无关的

6.16 推论 每个规范向量组都是线性无关的

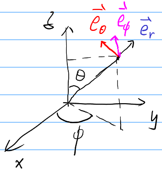
证明：$(v_1, \cdots, v_m)$ 是 V 中的一个规范正交向量组，
那么 它是一个正交组，且每个向量都不是 0
$(\|v_i\| = 1,\ i=1, \cdots, m.)$

由上一页的命题知此推论得证.

Remark: ① 对于每一个 n 维的内积空间而言，它的一个规范正交组的长度最长为 n.

② 对于 an n-dimensional inner product space，任何一个长度为 n 的规范正交向量组都是它的一个 basis 当然还是一个 orthonormal basis.

举例：$\mathbb{R}^3$中的向量组 (v_1, v_2, v_3)



$$v_1 = (-\sin\phi, \cos\phi, 0)$$

$$v_2 = (-\cos\theta\cos\phi, -\cos\theta\sin\phi, \sin\theta)$$

$$v_3 = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$$

其中 $0<\theta<\pi, 0\le\phi<2\pi$，易验证 $\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$ (you do it)

且 (v_1, v_2, v_3) 的长度是3，故 (v_1, v_2, v_3) 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个规范正交基.

求一个向量的坐标

设 V 是一个 n 维 vector space，$(v_1, \dots, v_n)$ 是 V 的一个基.

For any given $v \in V$，都存在唯一的 $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{F}^n$，

使得
$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n$$

其中 $c_1, \dots, c_n$ 称为 v 在基 $(v_1, \dots, v_n)$ 下的坐标 coordinates. c_i 称为坐标分量.

求一个向量的坐标

设 V 是一个 n 维 vector space，$(v_1,\cdots,v_n)$ 是 V 的一个基.

For any given $v\in V$，都存在唯一的 $(c_1,\cdots,c_n)\in\mathbb{F}^n$，

使得 $$v = c_1v_1+c_2v_2+\cdots+c_nv_n$$

其中 $c_1,\cdots,c_n$ 称为 v 在基 $(v_1,\cdots,v_n)$ 下的坐标. c_i 称为坐标分量.

coordinates

How to find the coordinates of a given vector in an 内积空间 V with respect to a given basis $(v_1,v_2,\cdots,v_n)$?

我们举一个例子：Find the coordinates of $v=(1,2,3)$ in $\mathbb{R}^3$ with respect to $(\underbrace{(1,1,1)}_{v_1},\underbrace{(1,3,8)}_{v_2},\underbrace{(2,4,7)}_{v_3})$.

接上页

解： 设 $v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$

$$M(v) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad M(c) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

$$M(v_1, v_2, v_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

接上页

解：设 $v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$

$$\boxed{\mathcal{M}(v) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \mathcal{M}(c) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}}$$

$$\mathcal{M}(v_1, v_2, v_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

R^3中的向量的矩阵是把向量在R^3的标准基下的坐标写成一个列向量

前面我们学习了这个，大家应能轻松接受。

(v_1, v_2, v_3) 的矩阵是什么呢？它和一个映射对应起来，把它的映射的矩阵称为它的矩阵。这个映射是 $T \in \mathcal{L}(V)$ defined by

$$T e_i = v_i \quad i = 1, 2, 3.$$

故 $\mathcal{M}(T) = [v_1, v_2 \;\; v_3]$

接上页

解：设 $v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$

$$\boxed{M(v) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad M(c) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}}$$

$$M(v_1\ \ v_2,\ \ v_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

R^3中的向量的矩阵是把向量在R^3的标准基下的坐标写成3个列向量

前面，我们学习了这个，大家应能轻松接受。

(v_1, v_2, v_3)的矩阵是什么呢？让和一个映射对应起来，把它的映射的矩阵称为它的矩阵。这个映射是 $T \in \mathcal{L}(V)$ defined by

$$T e_i = v_i \quad i = 1, 2, 3.$$

故 $M(T) = [v_1,\ v_2\ \ v_3]$ $\qquad \sum_{i=1}^{3} v_i c_i = T\left(\sum_{i=1}^{n} c_i e_i\right)$

接上页

解：设 $\boxed{v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3}$ ①

$$M(v) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad M(c) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

$$M\left(v_1 \quad v_2, \quad v_3 \right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

①式写成矩阵形式. $M(v_1, v_2, v_3)\, M(c) = M(v)$

即

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 8 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

通过求解上面的线性方程组 就得到 c_1, c_2, c_3.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 8 & 7 \end{bmatrix}}_{M(T)} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$T \in \mathcal{L}(V) \quad Te_i = v_i \quad i=1,2,3$

只要求 T^{-1} 即可。可是 T^{-1} 如何求.

如果写成线性方程组

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + 2c_3 = 1 & ① \\ c_1 + 3c_2 + 4c_3 = 2 & ② \\ c_1 + 8c_2 + 7c_3 = 3 & ③ \end{cases}$$

加减消元法. ②-①，得 $2c_2 + 2c_3 = 1$ ④

③-①，得 $7c_2 + 5c_3 = 2$ ⑤

④⑤是关于 c_2, c_3 的二元一次方程组，解得 c_2, c_3. 再代入①.

解得 c_1.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 8 & 7 \end{bmatrix}}_{M(T)} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$T \in \mathcal{L}(V)$　　$Te_i = v_i$　　$i=1,2,3$

只要求 T^{-1} 即可。可是 T^{-1} 如何求.

如果写成线性方程组

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + 2c_3 = 1 & ① \\ c_1 + 3c_2 + 4c_3 = 2 & ② \\ c_1 + 8c_2 + 7c_3 = 3 & ③ \end{cases}$$

加减消元法.　②－①，得　$2c_2 + 2c_3 = 1$　④

③－①，得　$7c_2 + 5c_3 = 2$　⑤

④⑤是关于 c_2, c_3 的二元一次方程组，解得 c_2, c_3. 再代入①.

解得 c_1. ～～～～ 总之，就是很麻烦了.

求一个向量在一个规范正交基下的坐标（容易）

6.17 定理： 设 $(e_1, \cdots, e_n)$ 是 V 的规范正交基，则对每个 $v \in V$，都有

6.18
$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \cdots + \langle v, e_n \rangle e_n$$

而且

6.19
$$\|v\|^2 = |\langle v, e_1 \rangle|^2 + \cdots + |\langle v, e_n \rangle|^2.$$

求一个向量在一个规范正交基下的坐标（容易）

6.17 定理： 设 $(e_1, \cdots, e_n)$ 是 V 的规范正交基，则对每个 $v \in V$，都有

6.18
$$v = \langle v, e_1\rangle e_1 + \cdots + \langle v, e_n\rangle e_n$$

坐标只需要计算内积即可得到

而且

6.19
$$\|v\|^2 = |\langle v, e_1\rangle|^2 + \cdots + |\langle v, e_n\rangle|^2.$$

这里 V 是 F 上的有限维内积空间

证明. 设 $v = c_1 e_1 + \cdots + c_n e_n$，其中 $(c_1, \cdots, c_n) \in F$.

求一个向量在一个规范正交基下的坐标（容易）

6.17 定理： 设 $(e_1, \cdots, e_n)$ 是 V 的规范正交基，则对每个 $v \in V$，都有

6.18 $$v = \langle v, e_1\rangle e_1 + \cdots + \langle v, e_n\rangle e_n$$

坐标只需要计算内积即可得到

而且

6.19 $$\|v\|^2 = |\langle v, e_1\rangle|^2 + \cdots + |\langle v, e_n\rangle|^2.$$

这里 V 是 F 上的非零有限维内积空间

证明. 设 $v = c_1 e_1 + \cdots + c_n e_n$ ①，其中 $(c_1, \cdots, c_n) \in F$.

① 式两边同时与 e_j 作内积，

$$\langle v, e_j\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} c_i e_i, e_j \right\rangle$$

利用内积对第一个变量是线性的，得 $\langle v, e_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i \langle e_i, e_j\rangle$

求一个向量在一个规范正交基下的坐标（容易）

6.17 定理： 设 $(e_1, \cdots, e_n)$ 是 V 的规范正交基，则对每个 $v \in V$，都有

这里 V 是 F 上的非零有限维内积空间

6.18
$$v = \underbrace{\langle v, e_1\rangle}e_1 + \cdots + \underbrace{\langle v, e_n\rangle}e_n$$

坐标只需要计算内积即可得到

而且

6.19
$$\|v\|^2 = |\langle v, e_1\rangle|^2 + \cdots + |\langle v, e_n\rangle|^2.$$

证明. 设 $v = c_1 e_1 + \cdots + c_n e_n$ ①，其中 $(c_1, \cdots, c_n) \in F$.

① 式两边同时与 e_j 作内积，

$$\langle v, e_j\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} c_i e_i, e_j\rangle$$

利用内积对第一个变量是线性的，得 $\langle v, e_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i \langle e_i, e_j\rangle$

因为 $(e_1, \cdots, e_n)$ 是规范正交基，所以 $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$

求一个向量在一个规范正交基下的坐标（容易）

6.17 定理: 设 $(e_1, \cdots, e_n)$ 是 V 的规范正交基, 则对每个 $v \in V$, 都有

6.18 $$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \cdots + \langle v, e_n \rangle e_n$$

坐标只需要计算内积即可得到

而且

6.19 $$\|v\|^2 = |\langle v, e_1 \rangle|^2 + \cdots + |\langle v, e_n \rangle|^2.$$

这里 V 是 F 上的非零有限维内积空间

证明. 设 $v = c_1 e_1 + \cdots + c_n e_n$ ①, 其中 $(c_1, \cdots, c_n) \in F$.

① 式两边同时与 e_j 作内积,

$$\langle v, e_j \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} c_i e_i, e_j \rangle$$

利用内积对第一个变量是线性的, 得 $\langle v, e_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i \langle e_i, e_j \rangle$

因为 $(e_1, \cdots, e_n)$ 是规范正交基, 所以 $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$

代入, 得到 $c_j = \langle v, e_j \rangle$. 从而 6.18 得证. 6.19 显然成立

规范正交基

Gram-Schmidt 正交化

Gram-Schmidt 正交化

下面讲如何从一个线性无关的向量组得到一个规范正交的向量组。

Gram-Schmidt procedure (格拉姆-施密特过程)

Orthonormal basis 很有用? 那么是不是每个 finite dimensional 内积 space 都有一个 orthonormal basis 呢?

Gram-Schmidt procedure（格拉姆-施密特过程）

Orthonormal basis 很有用？那么是不是每个 finite dimensional 内积 space 都有一个 orthonormal basis 呢？ YES. You will see why and how.

我们所用的方法，是把一个线性无关的向量组通过一个算法（Gram-Schmidt procedure）转化成一个具有相同张成的 orthonormal vector group

规范正交向量组

Gram-Schmidt procedure (格拉姆-施密特过程)

Orthonormal basis 很有用？那么是不是每个 finite dimensional 内积 space 都有一个 orthonormal basis 呢？ YES. You will see why and how.

我们所用的方法，是把一个线性无关的向量组通过一个算法 (Gram-Schmidt procedure) 转化成一个具有相同张成的 orthonormal vector group.

规范正交向量组

Remark: 两个向量组具有同样的张成 (span)

中西结合表达更清楚 | Transform a 线性无关 vector 组 into a orthonormal 向量组 with the same span

Gram-Schmidt procedure

6.20 Gram-Schmidt procedure：如果 $(v_1, \cdots, v_m)$ 是 V 中的一个线性无关组，则 V 中有一个规范正交向量组 $(e_1, e_2, \cdots, e_m)$ 使得

6.21 $$\operatorname{span}(v_1, \cdots, v_j) = \operatorname{span}(e_1, \cdots, e_j), \quad j=1, \cdots, m.$$

Gram-Schmidt procedure

6.20 Gram-Schmidt procedure：如果 $(v_1,\dots,v_m)$ 是 V 中的一个线性无关组，则 V 中有一个规范正交向量组 $(e_1,e_2,\dots,e_m)$ 使得

6.21 $$\operatorname{span}(v_1,\dots,v_j)=\operatorname{span}(e_1,\dots,e_j),\quad j=1,\dots,m.$$

Remark: $\operatorname{span}(v_1)=\operatorname{span}(e_1)$ 可知 v_1 和 e_1 是线性相关的

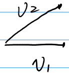
$$\operatorname{span}(v_1,v_2)=\operatorname{span}(e_1,e_2)$$

$$\vdots$$

$$\operatorname{span}(v_1,\dots,v_m)=\operatorname{span}(e_1,e_2,\dots,e_m)$$

例：$\mathbb{R}^2$ 中的 $\big(\overset{v_1}{(1,0)},\ \overset{v_2}{(1,1)}\big)$，可取 $e_1=v_1$.

$\operatorname{span}(e_1,v_2)=\operatorname{span}(v_1,v_2)$



Gram-Schmidt procedure

6.20 Gram-Schmidt procedure：如果 $(v_1,\dots,v_m)$ 是 V 中的一个线性无关组，则 V 中有一个规范正交向量组 $(e_1,e_2,\dots,e_m)$ 使得

6.21 $$\operatorname{span}(v_1,\dots,v_j)=\operatorname{span}(e_1,\dots,e_j),\ j=1,\dots,m.$$

Remark: $\operatorname{span}(v_1)=\operatorname{span}(e_1)$ 可知 v_1 和 e_1 是线性相关的

$$\operatorname{span}(v_1,v_2)=\operatorname{span}(e_1,e_2)$$

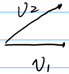
$$\vdots$$

$$\operatorname{span}(v_1,\dots,v_m)=\operatorname{span}(e_1,e_2,\dots,e_m)$$

例：$\mathbb{R}^2$ 中的 $\big(\overset{v_1}{(1,0)},\ \overset{v_2}{(1,1)}\big)$，可取 $e_1=v_1$.

$\operatorname{span}(e_1,e_2)=\operatorname{span}(e_1,v_2)$?

$\operatorname{span}(e_1,\underbrace{v_2}_{}) = \operatorname{span}(v_1,v_2)$



如何得到 e_2，使得 $e_2\perp e_1$ 是

$v_2 \in \mathrm{span}(e_1, e_2)$

那么 $v_2 = c_1 e_1 + c_2 e_2$ ①

①式两边同时和 e_1 作内积，得

$\langle v_2, e_1 \rangle = \langle c_1 e_1 + c_2 e_2, e_1 \rangle$ ②

因为 (e_1, e_2) 是 orthonormal group 所以 $\boxed{\begin{aligned}\langle e_1, e_2 \rangle &= 0 \\ \langle e_1, e_1 \rangle &= 1\end{aligned}}$ 代入

得 $c_1 = \langle v_2, e_1 \rangle$

$v_2 = \underbrace{\langle v_2, e_1 \rangle e_1}$ $+ c_2 e_2$

这称作 v_2 在 e_1 上的投影. 记作 $\mathrm{proj}_{e_1}(v_2)$

$$v_2 \in \mathrm{span}(e_1, e_2)$$

那么 $\quad v_2 = c_1 e_1 + c_2 e_2 \quad$ ①

①式两边同时和 e_1 作内积，得

$$\langle v_2, e_1 \rangle = \langle c_1 e_1 + c_2 e_2, e_1 \rangle \quad ②$$

代入

因为 (e_1, e_2) 是 orthonormal group 所以 $\boxed{\begin{array}{l}\langle e_1, e_2 \rangle = 0 \\ \langle e_1, e_1 \rangle = 1\end{array}}$

得 $\quad c_1 = \langle v_2, e_1 \rangle$

$$v_2 = \langle v_2, e_1 \rangle e_1 + c_2 e_2$$

这称作 v_2 在 e_1 上的投影，记作 $\mathrm{proj}_{e_1}(v_2)$

其中的 $c_2 e_2$ 如何确定呢？

$$v_2 \in \mathrm{span}(e_1, e_2)$$

那么 $\quad v_2 = c_1 e_1 + c_2 e_2 \quad$ ①

①式两边同时和 e_1 作内积，可得

$$\langle v_2, e_1 \rangle = \langle c_1 e_1 + c_2 e_2, e_1 \rangle \quad ②$$

代入

因为 (e_1, e_2) 是 orthonormal group 所以 $\boxed{\begin{matrix}\langle e_1, e_2 \rangle = 0 \\ \langle e_1, e_1 \rangle = 1\end{matrix}}$

可得 $\quad c_1 = \langle v_2, e_1 \rangle$

$$v_2 = \langle v_2, e_1 \rangle e_1 + c_2 e_2$$

这称作 v_2 在 e_1 上的投影，记作 $\mathrm{proj}_{e_1}(v_2)$

其中的 $c_2 e_2$ 如何确定呢？

首先，$c_2 \neq 0$ 不然 v_2 和 e_1 是线性相关的，也即 v_2 和 v_1 是线性相关的，矛盾。

$$v_2 \in \mathrm{span}(e_1, e_2)$$

那么 $v_2 = c_1 e_1 + c_2 e_2$ ①

①式两边同时和 e_1 作内积，得

$$\langle v_2, e_1 \rangle = \langle c_1 e_1 + c_2 e_2, e_1 \rangle \quad ②$$ 代入

因为 (e_1, e_2) 是 orthonormal group 所以 $\boxed{\begin{matrix}\langle e_1, e_2 \rangle = 0 \\ \langle e_1, e_1 \rangle = 1\end{matrix}}$

得 $c_1 = \langle v_2, e_1 \rangle$

$$v_2 = \underbrace{\langle v_2, e_1 \rangle e_1}\ + c_2 e_2$$

这称作 v_2 在 e_1 上的投影. 记作 $\mathrm{proj}_{e_1}(v_2)$

其中的 $c_2 e_2$ 如何确定呢?

首先，$c_2 \neq 0$ 不然 v_2 和 e_1 是线性相关的，也即 v_2 和 v_1 是线相关的. 矛盾. 这样 $e_2 = \frac{1}{c_2}(v_2 - \mathrm{proj}_{e_1}(v_2))$

下页继续

接上页.

$$e_2 \text{ 和 } v_2 - \underbrace{\mathrm{proj}_{e_1}(v_2)}_{v_2\text{ 在 }e_1\text{ 上的投影}}$$

仅仅相差一个标量倍，而且 $\|e_2\| = 1$.

这样.我们只要把 $v_2 - \mathrm{proj}_{e_1}(v_2)$ 单位化就得到 e_2

所以

$$e_2 = \pm \frac{v_2 - \mathrm{proj}_{e_1}(v_2)}{\| v_2 - \mathrm{proj}_{e_1}(v_2) \|}$$

接上页.

$$e_2 \quad 和 \quad v_2 - \underbrace{proj_{e_1}(v_2)}_{v_2\text{在}e_1\text{上的投影}}$$

仅仅相差一个标量倍, 而且 $\|e_2\| = 1$.

这样 我们只要把 $v_2 - proj_{e_1}(v_2)$ 单位化 就得到 e_2

所以

$$e_2 = \underbrace{\pm}_{\text{一般取正号}} \frac{v_2 - proj_{e_1}(v_2)}{\| v_2 - proj_{e_1}(v_2) \|}$$

再验证 $span(e_1, e_2) = span(v_1, v_2)$.

接上页.

e_2 和 $\underbrace{v_2 - proj_{e_1}(v_2)}$

v_2 在 e_1 上的投影

仅仅相差一个标量倍，而且 $\|e_2\| = 1$.

这样.我们只要把 $v_2 - proj_{e_1}(v_2)$ 单位化就得到 e_2

所以
$$e_2 = \frac{v_2 - proj_{e_1}(v_2)}{\underbrace{\|v_2 - proj_{e_1}(v_2)\|}_{c_2}} \quad ①$$

再验证 $span(e_1, e_2) = span(v_1, v_2)$.

显然 $span(e_1, e_2) \subset span(e_1, v_2) = span(v_1, v_2)$

再利用 ① 可得 $v_2 = c_2 e_2 + \underbrace{proj_{e_1}(v_2)}$

这是 v_2 在 e_1 上的投影.

接上页.

$$e_2 \quad 和 \quad v_2 - \underbrace{proj_{e_1}(v_2)}_{v_2\text{在}e_1\text{上的投影}}$$

仅仅相差一个标量倍，而且 $\|e_2\| = 1$.

这样，我们只要把 $v_2 - proj_{e_1}(v_2)$ 单位化就得到 e_2

所以
$$e_2 = \frac{v_2 - proj_{e_1}(v_2)}{\underbrace{\|v_2 - proj_{e_1}(v_2)\|}_{c_2}} \qquad ①$$

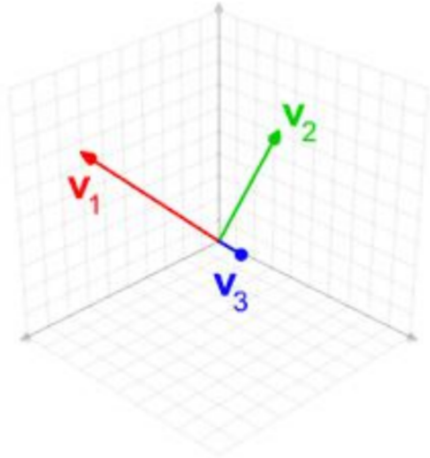
再验证 $span(e_1, e_2) = span(v_1, v_2)$. ②

显然 $span(e_1, e_2) \subset span(e_1, v_2) = span(v_1, v_2)$

再利用 ① 可得 $v_2 = c_2 e_2 + proj_{e_1}(v_2) \in span(e_1, e_2)$

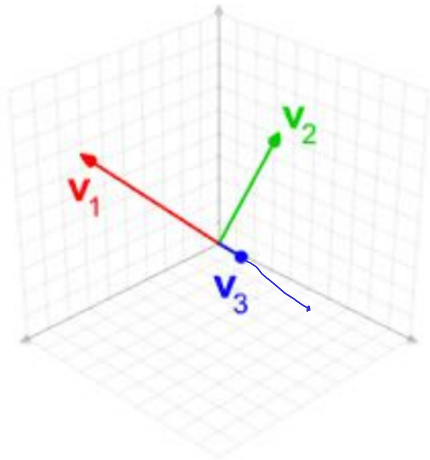
故 $span(v_1, v_2) \subset span(e_1, e_2)$ ③. 由 ② ③ 就得证 $span(e_1, e_2) = span(v_1, v_2)$.

R^3 中的 (v_1, v_2, v_3) 的 Gram-Schmidt 正交化过程



v_3 画得比较短

R^3 中的 (v_1, v_2, v_3) 的 Gram-Schmidt 正交化过程

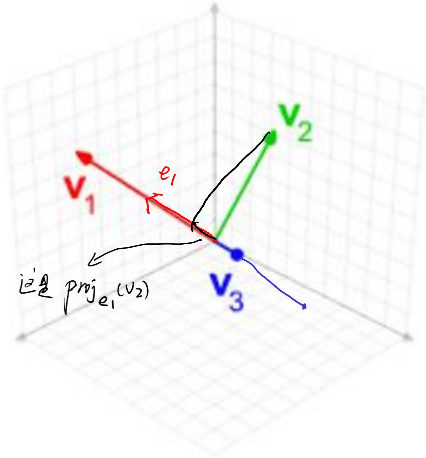


v_3 画得比较短（视觉点）

$u_1 = u_1$

$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$ 单位化

R^3 中的 (v_1, v_2, v_3) 的 Gram-Schmidt 正交化过程



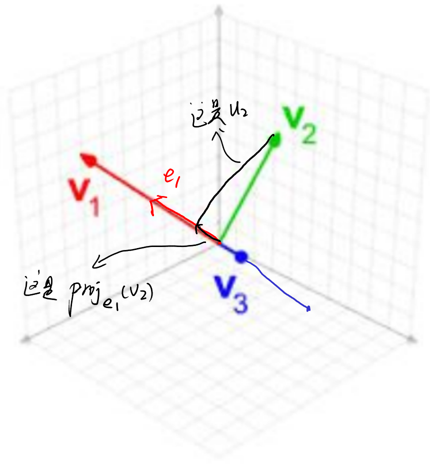
v_3 画得比较短（刻意点）

$u_1 = v_1$

$e_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|}$ 单位化

$u_2 = v_2 - proj_{e_1}(v_2)$

R^3 中的 (v_1, v_2, v_3) 的 Gram-Schmidt 正交化过程



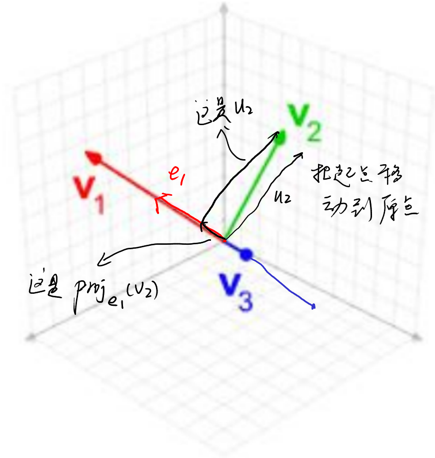
v_3 画得比较短 (该长点)

$u_1 = v_1$

$e_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|}$ 单位化

$u_2 = v_2 - proj_{e_1}(v_2)$

R^3 中的 (v_1, v_2, v_3) 的 Gram-Schmidt 正交化过程



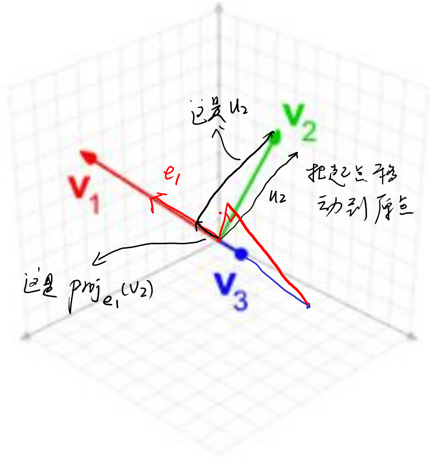
v_3 画得比较短 (划长点)

$$u_1 = v_1$$

$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} \quad \text{单位化}$$

$$u_2 = v_2 - proj_{e_1}(v_2)$$

R^3 中的 (v_1, v_2, v_3) 的 Gram-Schmidt 正交化过程



v_3 画得比较短（刻意点）

$u_1 = u_1$

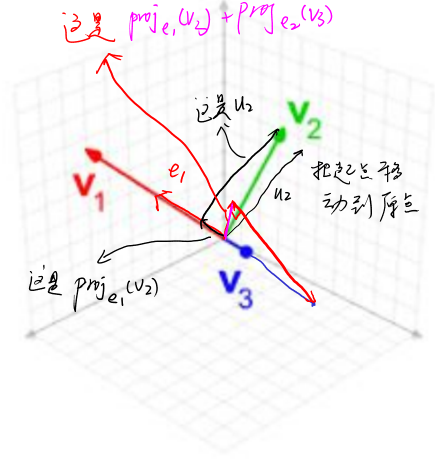
$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$ 单位化

$u_2 = v_2 - proj_{e_1}(v_2)$ 正交化

$e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}$ 单位化

$u_3 = V_3 - proj_{e_1}(V_3) - proj_{e_2}(V_3)$

$\mathbb{R}^3$ 中的 (v_1, v_2, v_3) 的 Gram-Schmidt 正交化过程



v_3 画得比较短（到此点）

$u_1 = u_1$

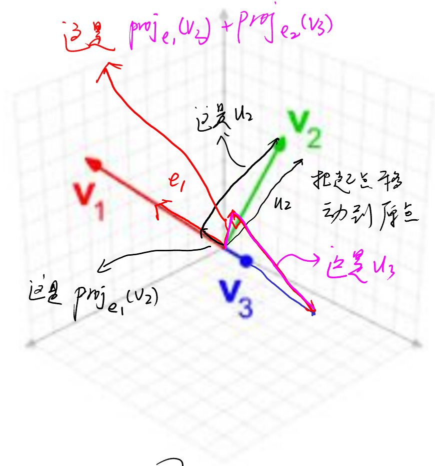
$e_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|}$ 单位化

$u_2 = v_2 - proj_{e_1}(v_2)$ 正交化

$e_2 = \dfrac{u_2}{\|u_2\|}$ 单位化

$u_3 = v_3 - proj_{e_1}(v_3) - proj_{e_2}(v_3)$

R^3 中的 (v_1, v_2, v_3) 的 Gram-Schmidt 正交化过程



v_3 画得比较短（别在意）

$$u_1 = u_1$$

$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} \quad \text{单位化}$$

$$u_2 = v_2 - proj_{e_1}(v_2) \quad \text{正交化}$$

$$e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} \quad \text{单位化}$$

$$u_3 = V_3 - proj_{e_1}(V_3) - proj_{e_2}(V_3)$$

$$e_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} \quad \text{单位化}$$

图示. Gram-Schmidt 正交化过程

Gram-Schmidt procedure

6.20 格拉姆–施密特过程 (Gram-Schmidt procedure)： 如果 $(v_1, \cdots v_m)$ 是 V 中的线性无关向量组，则 V 有规范正交向量组 $(e_1, \cdots, e_m)$ 使得

6.21 $\operatorname{span}(v_1, \cdots, v_j) = \operatorname{span}(e_1, \cdots, e_j), \quad j = 1, \cdots, m.$

证明：

$$u_1 = v_1 \qquad e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$$

$$u_2 = v_2 - \operatorname{proj}_{e_1}(v_2) \qquad e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}$$

$$u_3 = v_3 - \operatorname{proj}_{e_1}(v_3) - \operatorname{proj}_{e_2}(v_3) \qquad e_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|}$$

$$\vdots$$

$$u_m = v_m - \sum_{j=1}^{m-1} \operatorname{proj}_{e_j}(u_m) \qquad e_m = \frac{u_m}{\|u_m\|}.$$

you do it. $\Big\{$ 验证 $(e_1, \cdots, e_m)$ 是规范正交向量组 (you can do it!)

再验证 $\operatorname{span}(e_1, \cdots, e_j) = \operatorname{span}(v_1, \cdots, v_j), j = 1, 2, \cdots, m$. $\square$

每个 finite dimensional inner produce space 都有 orthonomal basis

6.24 推论：每个有限维内积空间都有规范正交基．

证明：V is a finite dimensional space. so there is a basis $(v_1, \cdots, v_n)$, 应用上面的 Gram-schmidt 正交化过程，我们得到一个规范正交的向量组 $(e_1, \cdots, e_n)$

而且 $\text{span}(e_1, \cdots, e_n) = \text{span}(v_1, \cdots, v_n) = V$

且 $(e_1, \cdots, e_n)$ 的长度是 n.

所以 $(e_1, \cdots, e_n)$ 是 V 的一个 orthonormal basis.

每个 finite dimensional inner produce space 都有 orthonormal basis

6.24 推论：每个有限维内积空间都有规范正交基.

证明：V is a finite dimensional space. so there is a basis $(v_1, \cdots, v_n)$，应用上面的 Gram-schmidt 正交化过程. 我们得到一个规范正交的向量组 $(e_1, \cdots, e_n)$

而且 $\mathrm{span}(e_1, \cdots, e_n) = \mathrm{span}(v_1, \cdots, v_n) = V$

且 $(e_1, \cdots, e_n)$ 的长度是 n.

所以 $(e_1, \cdots, e_n)$ 是 V 的一个 orthonormal basis.

6.25 推论：V 中的每个规范正交的向量组都可以扩充成 V 的一个规范正交基。

证明：$(e_1, \cdots, e_m)$ 是 V 的一个正交组. 必然是线性无关的. 下页继续

从命prop扩充成 V 的一个基 $(e_1, \dots, e_m, f_1, \dots, f_n)$

然后对这个基应用 Gram-Schmidt 正交化过程.

就得到 V 的一个规范正交基

$$(\underbrace{e_1, \dots, e_m}, e_{m+1}, \dots, e_{m+n})$$

为啥 Gram-Schmidt procedure 没有改变 $(e_1, \dots, e_m)$?

原因是 …… 你自己做一遍看看就知道了.

从而可以扩充成 V 的一个基 $(e_1, \dots, e_m, f_1, \dots, f_n)$

然后对这个基应用 Gram-Schmidt 正交化过程.

就得到 V 的一个规范正交基

$(\underbrace{e_1, \dots, e_m}, e_{m+1}, \dots, e_{m+n})$

为啥 Gram-Schmidt procedure 没有改变 $(e_1, \dots, e_m)$?

规范正交基

Gram-Schmidt 正交化

算子的规范正交上三角化

一个可上三角化的算子一定可以规范正交上三角化。

回想一下, 如果一个矩阵对角线下方的所有元素都等于 0, 则称这个矩阵是上三角的. 也就是说, 一个上三角矩阵形如:

$$\begin{bmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{bmatrix}.$$

在上一章我们证明了, 如果 V 是复向量空间, 那么对 V 上的每个算子都存在一个基使得该算子关于此基具有上三角矩阵 (参见 5.13). 既然现在讨论的是内积空间, 我们想知道何时存在规范正交基使得算子关于此基有上三角矩阵. 下一个推论表明, 能使得 T 具有上三角矩阵的基的存在性蕴含着具有同样性质的规范正交基的存在性. 这一结果在实向量空间和复向量空间上都成立 (但在实向量空间上, 这个假设只对某些算子成立).

6.27 推论：假设 $T \in \mathcal{L}(V)$. 如果 T 关于 V 的某个基具有上三角矩阵，那么 T 关于 V 的某个规范正交基也具有上三角矩阵.

证明：设 T 关于 V 的基 $(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n)$ 具有上三角矩阵，那么对每个 $j = 1, \cdots, n$, 都有 $\operatorname{span}(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_j)$ 在 T 下是不变的 (参见 5.12).

对 $(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n)$ 应用格拉姆-施密特过程，得到了 V 的规范正交基 $(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$. 因为对每个 j 都有

$$\operatorname{span}(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_j) = \operatorname{span}(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_j)$$

(参见 6.21), 所以，对每个 $j = 1, \cdots, n$, $\operatorname{span}(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_j)$ 在 T 下都是不变的. 因此，由 5.12, T 关于规范正交基 $(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ 具有上三角矩阵. ■

下一个结果是上一个推论的重要应用.

6.28 推论：设 V 是复向量空间，并且 $T \in \mathcal{L}(V)$，则 T 关于 V 的某个规范正交基具有上三角矩阵.

证明：由 5.13 和 6.27 立即可得. ■

这个结果有时称为舒尔定理. 德国数学家舒尔 (Issai Schur) 在 1909 年发表了这个结果的第一个证明.