Null T 和 Range T

设 $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Null T 是 V 的子空间，Range T 是 W 的子空间.

我们讨论 V 和 W 都是有限维空间的情况.

设 $\dim V = n$, $\dim W = m$.

Null T 和 Range T

设 $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Null T 是 V 的子空间, Range T 是 W 的子空间.

我们讨论 V 和 W 都是有限维空间的情况.

设 $\dim V = n$, $\dim W = m$.

$$\dim \operatorname{Null} T \leq n \qquad \dim \operatorname{Range} T \leq m.$$

Null T 和 Range T

设 $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Null T 是 V 的子空间, Range T 是 W 的子空间.

我们讨论 V 和 W 都是有限维空间的情况.

设 $\dim V = n$, $\dim W = m$.

$$\dim \text{Null } T \le n \qquad \dim \text{Range } T \le m.$$

设 $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ 是 V 的一个基, 那么

$\forall v \in V$, 存在惟一地 $a_i \in F, i=1,2,\cdots,n$ 使得

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$$

由于 T 是线性映射, $Tv = T(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) = a_1 T v_1 + \cdots + a_n T v_n$

Null T 和 Range T

设 $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Null T 是 V 的子空间，Range T 是 W 的子空间.

我们讨论 V 和 W 都是有限维空间的情况.

设 $\dim V = n$，$\dim W = m$.

$$\dim \mathrm{Null}\, T \leq n \qquad \dim \mathrm{Range}\, T \leq m.$$

设 $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ 是 V 的一个基，那么

$\forall v \in V$，存在惟一地 $a_i \in F, i = 1, 2, \cdots, n$ 使得

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$$

由于 T 是线性映射，$Tv = T(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) = a_1 T v_1 + \cdots + a_n T v_n$

这说明 $\mathrm{range}\, T = \mathrm{span}(Tv_1, \cdots, Tv_n)$

由上一页的讨论，我们可以得到

命题：设 V 和 W 是 $\mathbb{F}$ 上的有限维向量空间，
$T \in \mathcal{L}(V, W)$. 那么 $\dim \operatorname{Range} T \leq \dim V$.

由上一页的讨论，我们可以得到

命题：设 V 和 W 是 $\mathbb{F}$ 上的有限维向量空间，
$T \in \mathcal{L}(V,W)$，那么 $\dim \operatorname{Range} T \le \dim V$.

但是我们还不知 $\dim \operatorname{Range} T$ 和 $\dim V$
之间更加准确的关系。如果 T 是单射，
那么我们还可以得到 $\dim \operatorname{Range} T = \dim V$.

由上一页的讨论，我们可以得到

命题：设 V 和 W 是 F 上的有限维向量空间，

$T \in \mathcal{L}(V, W)$，那么 $\dim \operatorname{Range} T \leq \dim V$.

但是我们还不知 $\dim \operatorname{Range} T$ 和 $\dim V$

之间更加准确的关系。如果 T 是单射，

那么我们还可以得到 $\dim \operatorname{Range} T = \dim V$.

命题：设 V 和 W 是 F 上的有限维向量空间，

$T \in \mathcal{L}(V,W)$，是单射 那么 $\dim \operatorname{Range} T = \dim V$.

证明的提示：设 $(v_1, \dots, v_n)$ 是 V 的一个基. 去证 $(Tv_1, \dots, Tv_n)$ 线性无关.

$a_1 T v_1 + \cdots + a_n T v_n = 0 \Rightarrow T\left(\sum a_i v_i\right) = 0$，又因 T 是单射，所以

$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$. 又因为 $(v_1, \dots, v_n)$ 是 V 的基，故

$a_1 = \cdots = a_n = 0$

这就证明了 $(Tv_1, \dots, Tv_n)$ 线性无关. 又因为

$\operatorname{Range} T = \operatorname{span}(Tv_1, \dots, Tv_n)$

故 $\dim \operatorname{Range} T = n = \dim V$. 证毕.

命题：设 V 和 W 是 F 上的有限维向量空间，

$T \in \mathcal{L}(V,W)$ 是单射，那么 $\dim \operatorname{Range} T = \dim V$.

证明的提示：设 $(v_1, \dots, v_n)$ 是 V 的一个基，去证 $(Tv_1, \dots, Tv_n)$ 线性无关。

$a_1 T v_1 + \cdots + a_n T v_n = 0 \Rightarrow T\left(\sum a_i v_i\right) = 0$，又因 T 是单射，所以

$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$. 又因为 $(v_1, \dots, v_n)$ 是 V 的基，故

$$a_1 = \cdots = a_n = 0$$

这就证明了 $(Tv_1, \dots, Tv_n)$ 线性无关，又因为

$$\operatorname{Range} T = \operatorname{span}(Tv_1, \dots, Tv_n)$$

故 $\dim \operatorname{Range} T = n = \dim V$. 证毕.

推论：如果 $\dim \operatorname{Range} T < \dim V$，那么 $T \in \mathcal{L}(V,W)$ 一定不是单射.

上面我们已经得出了，如果 $\mathrm{Null}\,T = \{0\}$

（即 $T \in \mathcal{L}(V, W)$ 是单射），那么 $\dim \mathrm{Range}\,T = \dim V$.

此时 $\dim \mathrm{Null}\,T = 0$.

上面我们已经得出了，如果 $\operatorname{Null} T = \{0\}$

(即 $T \in \mathcal{L}(V, W)$ 是单射)，那么 $\boxed{\dim \operatorname{Range} T = \dim V.}$

此时 $\boxed{\dim \operatorname{Null} T = 0.}$ 可得

$$\dim V = \dim \operatorname{Null} T + \dim \operatorname{Range} T.$$

上面我们已经得出了，如果 $\mathrm{Null}\,T=\{0\}$（即 $T\in\mathcal{L}(V,W)$ 是单射），那么 $\boxed{\dim \mathrm{Range}\,T=\dim V.}$

此时 $\boxed{\dim \mathrm{Null}\,T=0.}$ 可得

$$\dim V=\dim \mathrm{Null}\,T+\dim \mathrm{Range}\,T.$$

上面的等式对 $\mathrm{Null}\,T\neq\{0\}$ 的情形也成立.

定理 3.4：如果 V 是有限维的向量空间，并且 $T\in\mathcal{L}(V,W)$，那么 $\mathrm{range}\,T$ 是 W 的有限维的子空间，而且

$$\dim V=\dim \mathrm{Null}\,T+\dim \mathrm{Range}\,T.$$

证明思路： Null T 是 V 的一个子空间

我们由前面的某个定理知，存在一个空间 U

使得

$$V = \operatorname{Null} T \oplus U$$

且 $\dim V = \dim \operatorname{Null} T + \dim U$.

证明思路：NullT 是 V 的一个子空间

我们由前面的某个定理知，存在一个空间 U

使得

$$V = \mathrm{Null}\,T \oplus U$$

且 $\dim V = \dim \mathrm{Null}\,T + \underline{\dim U}$.

要证明 $\dim V = \dim \mathrm{Null}\,T + \underline{\dim \mathrm{Range}\,T}$

我们只需要证明 $\underline{\dim U = \dim \mathrm{Range}\,T}$ 即可

证明思路：　Null T 是 V 的一个子空间

我们由前面的某个定理知，存在一个空间 U

使得

$$V = \operatorname{Null} T \oplus U$$

且 $\dim V = \dim \operatorname{Null} T + \underline{\dim U}$.

要证明 $\dim V = \dim \operatorname{Null} T + \underline{\dim \operatorname{Range} T}$

我们只需要证明 $\dim U = \dim \operatorname{Range} T$ 即可

证明思路，证明存在

$\tilde{T} \in \mathcal{L}(U, \quad W \quad)$ 是单射.

$\forall\, u \in U$, 定义 $\tilde{T}u = Tu$.

易验证 $\tilde{T}$ 是线性映射 (加性和齐性)

$\forall\ u \in U$, 定义 $\tilde{T}u = Tu$.

易验证 $\tilde{T}$ 是线性映射 (加性和齐性)

再证 $\tilde{T}$ 是单射. 因为 如果

$\tilde{T}u = \tilde{T}v \qquad u, v \in U$

那么 $Tu = Tv \qquad u, v \in U$

那么 $T(u-v) = 0$

那么

$\forall\ u \in U$，定义 $\tilde{T}u = Tu$.

易于验证 $\tilde{T}$ 是线性映射（加性和齐性）.

再证 $\tilde{T}$ 是单射，因为如果

$$\tilde{T}u = \tilde{T}v \qquad u, v \in U$$

那么 $\quad Tu = Tv \qquad u, v \in U$

那么 $\quad T(u-v) = 0$

那么 $\quad u-v \in \text{Null}\, T$，而 $u-v \in U$

$\forall\, u \in U$, 定义 $\tilde{T}u = Tu$.

易于验证 $\tilde{T}$ 是线性映射 (加性和齐性)

再证 $\tilde{T}$ 是单射, 因为 如果

$$\tilde{T}u = \tilde{T}v \qquad u, v \in U$$

那么 $Tu = Tv \qquad u, v \in U$

那么 $T(u-v) = 0$

那么 $u-v \in \operatorname{null} T$, 而 $u-v \in U$

$\forall\, u \in U$，定义 $\tilde{T} u = T u$.

易于验证 $\tilde{T}$ 是线性映射（加性和齐性）.

再证 $\tilde{T}$ 是单射，因为如果

$$\tilde{T} u = \tilde{T} v \qquad u, v \in U$$

那么 $\quad T u = T v \qquad \underbrace{u, v \in U}$

那么 $\quad T(u-v) = 0$

那么 $\quad u-v \in \operatorname{Null} T$，而 $u-v \in U$

这与 $V = \operatorname{Null} T \oplus U$ 知 $\operatorname{Null} T \cap U = \{0\}$

故 $u = v$.

$\forall\ u \in U$，定义 $\tilde{T}u = Tu$.

易验证 $\tilde{T}$ 是线性映射（加性和齐性）

再证 $\tilde{T}$ 是单射. 因为如果

$\tilde{T}u = \tilde{T}v \qquad u, v \in U$

那么 $\quad Tu = Tv \qquad \underbrace{u, v \in U}$

那么 $\quad T(u-v) = 0$

那么 $\quad u-v \in \operatorname{Null} T$，而 $u-v \in U$

这与 $V = \operatorname{Null} T \oplus U$ 和 $\operatorname{Null} T \cap U = \{0\}$

故 $u = v$. 这就证明了 $\tilde{T}$ 是单射.

$\forall\ u \in U$, 定义 $\tilde{T}u = Tu$.

易验证 $\tilde{T}$ 是线性映射 (加性和齐性)

再证 $\tilde{T}$ 是单射. 因为如果

$\tilde{T}u = \tilde{T}v \quad u, v \in U$

那么 $Tu = Tv \quad u, v \in U$

那么 $T(u-v) = 0$

那么 $u - v \in \operatorname{Null} T$, 而 $u - v \in U$

这与 $V = \operatorname{Null} T \oplus U$ 知 $\operatorname{Null} T \cap U = \{0\}$

故 $u = v$. 这就证明了 $\tilde{T}$ 是单射.

再证 $\operatorname{Range}\tilde{T} = \operatorname{Range} T$.

由 $\tilde{T}$ 的定义　$\tilde{T}u = Tu \quad \forall u \in U$

知 $\tilde{T}: U \to W$ 的值域 $\text{Range}\,\tilde{T} \subset \text{Range}\,T$

再证 $\text{Range}\,T \subset \text{Range}\,\tilde{T}$

$\forall\ w \in \text{Range}\,T$，那么存在 $v \in V$，使得

$Tv = w$.

由 $V = \text{Null}\,T \oplus U$，知，存在 $v_1 \in \text{Null}\,T$，$v_2 \in U$

使得 $v = \underbrace{v_1}_{\in \text{Null}\,T} + \underbrace{v_2}_{\in U}$

用 $\tilde{T}$ 的定义 和 $v_2 \in U$

$w = Tv = T(v_1+v_2) = Tv_1 + Tv_2 = Tv_2 = \tilde{T}v_2$

由 $\tilde{T}$ 的定义 $\quad \tilde{T}u = Tu \quad \forall u \in U$

知 $\tilde{T}: U \to W$ 的值域 $\mathrm{Range}\,\tilde{T} \subset \mathrm{Range}\,T$

再证 $\mathrm{Range}\,T \subset \mathrm{Range}\,\tilde{T}$

$\forall\ w \in \mathrm{Range}\,T$, 那么存在 $v \in V$, 使得

$Tv = w$.

由 $V = \mathrm{Null}\,T \oplus U$. 知. 存在 $v_1 \in \mathrm{Null}\,T$, $v_2 \in U$

使得 $v = \underbrace{v_1}_{\in \mathrm{Null}\,T} + \underbrace{v_2}_{\in U}$

用 $\tilde{T}$ 的定义 和 $v_2 \in U$

$$\boxed{w} = Tv = T(v_1+v_2) = Tv_1 + Tv_2 = Tv_2 = \tilde{T}v_2$$

这就证明了 $w \in \mathrm{Range}\,\tilde{T}$. 从而 $\mathrm{Range}\,T \subset \mathrm{Range}\,\tilde{T}$.

由 $\tilde{T}$ 的定义 $\quad \tilde{T}u = Tu \quad \forall u \in U$

知 $\tilde{T}: U \to W$ 的值域 $\text{Range}\,\tilde{T} \subset \text{Range}\,T$

再证 $\text{Range}\,T \subset \text{Range}\,\tilde{T}$

$\forall\, w \in \text{Range}\,T$, 那么存在 $v \in V$, 使得

$Tv = w$.

由 $V = \text{Null}\,T \oplus U$, 知, 存在 $v_1 \in \text{Null}\,T$, $v_2 \in U$

使得 $v = \underbrace{v_1}_{\in \text{Null}\,T} + \underbrace{v_2}_{\in U}$

用 $\tilde{T}$ 的定义 和 $v_2 \in U$

$$w = Tv = T(v_1 + v_2) = Tv_1 + Tv_2 = Tv_2 = \tilde{T}v_2$$

这就证明了 $w \in \text{Range}\,\tilde{T}$. 从而 $\text{Range}\,T \subset \text{Range}\,\tilde{T}$.

从而得证 $\text{Range}\,\tilde{T} = \text{Range}\,T$

回顾一下，我们证明了 $\tilde{T} \in \mathcal{L}(U, W)$ 是单射，故 $\dim U = \dim \operatorname{Range} \tilde{T}$

回顾一下，我们证明了 $\tilde{T} \in \mathcal{L}(U, W)$ 是单射，故 $\dim U = \dim \operatorname{Range} \tilde{T}$

又证明了 $\operatorname{Range} \tilde{T} = \operatorname{Range} T$

回顾一下，我们证明了 $\tilde{T} \in \mathcal{L}(U, W)$ 是单射，故 $\dim U = \dim \operatorname{Range} \tilde{T}$ ①

又证明了 $\operatorname{Range} \tilde{T} = \operatorname{Range} T$ ②

故 $\dim U = \dim \operatorname{Range} T$.

补充 $\begin{cases} V = \operatorname{null} T \oplus U \\ \tilde{T} : U \to W \text{ 定义是 } \tilde{T}u = Tu \quad \forall u \in U \end{cases}$

回顾一下，我们证明了 $\tilde{T} \in \mathcal{L}(U, W)$ 是单射，故 $\dim U = \dim \operatorname{Range} \tilde{T}$

又证明了 $\operatorname{Range} \tilde{T} = \operatorname{Range} T$

故 $\dim U = \dim \operatorname{Range} T.$

再回想 $\dim V = \dim \operatorname{Null} T + \dim U$

补充 $\begin{cases} V = \operatorname{null} T \oplus U \\ \tilde{T}: U \to W \text{ 定义是 } \tilde{T}u = Tu \quad \forall u \in U \end{cases}$

回顾一下，我们证明了 $\tilde{T} \in \mathcal{L}(U, W)$ 是

单射，故 $\dim U = \dim \operatorname{Range} \tilde{T}$

又证明了 $\operatorname{Range} \tilde{T} = \operatorname{Range} T$

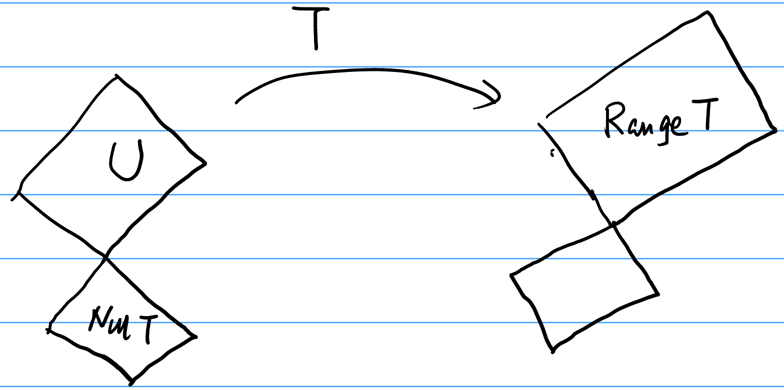
故 $\dim U = \dim \operatorname{Range} T.$ ①

再回想 $\dim V = \dim \operatorname{Null} T + \dim U$ ②

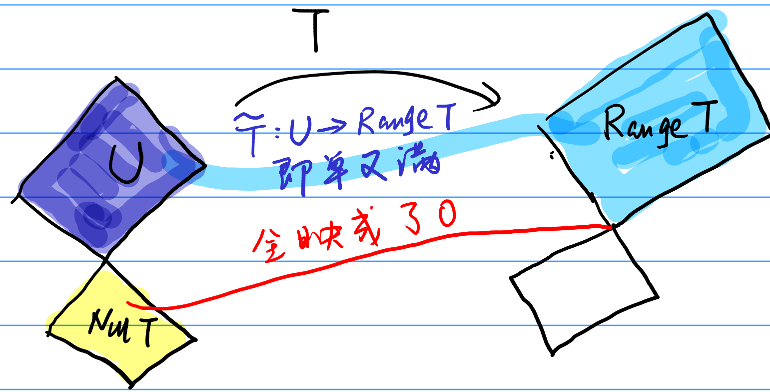
这就证明了 $\dim V = \dim \operatorname{Null} T + \dim \operatorname{Range} T.$

也就是 $T \in \mathcal{L}(V, W)$，则 V 的维数，是 T 的核空间和 range 空间的维数之和.

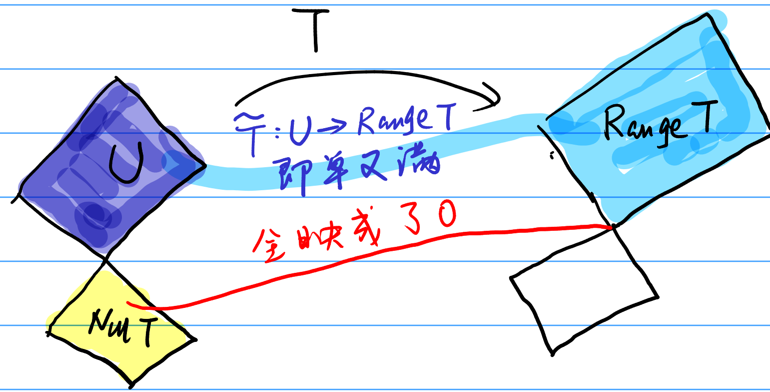
$\dim V = \dim \mathrm{Null}\, T \oplus \dim \mathrm{Range}\, T$ 证明图示



$\dim V = \dim \text{Null}\, T \oplus \dim \text{Range}\, T$ 证明图示



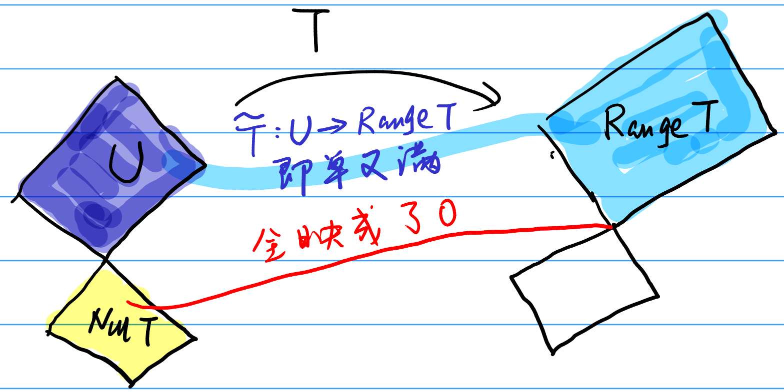
$\dim V = \dim \text{Null}\, T \oplus \dim \text{Range}\, T$ 证明图示



$\tilde{T}: U \to \text{Range}\, T$ 是一一对应，故 $\dim U = \dim \text{Range}\, T$

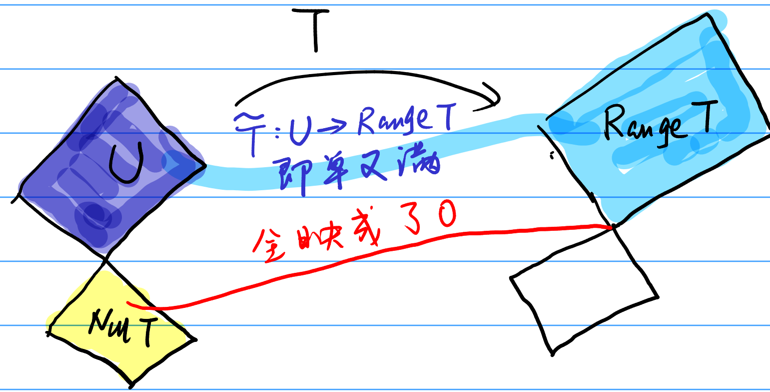
$V = \text{Null}\, T \oplus U$ 故 $\dim V = \dim \text{Null}\, T + \dim U$

$\dim V = \dim \mathrm{Null}\, T \oplus \dim \mathrm{Range}\, T$ 证明图示



$\tilde{T}: U \to \mathrm{Range}\, T$ 是一一对应，故 $\dim U = \dim \mathrm{Range}\, T$

$\dim V = \dim \text{Null}\,T \oplus \dim \text{Range}\,T$ 证明图示



$\tilde{T}: U \to \text{Range}\,T$ 是一一对应，故 $\dim U = \dim \text{Range}\,T$

$V = \text{Null}\,T \oplus U$ 故 $\dim V = \dim \text{Null}\,T + \dim U$

得到 $\dim V = \dim \text{Null}\,T + \dim \text{Range}\,T$

Don't forget the condition $\dim V < \infty$，且 $T \in \mathcal{L}(V, W)$