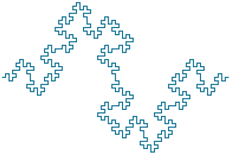
线性代数 B：线性映射的矩阵

Tiao Lu
Peking University



October 18, 2019

线性映射的矩阵

线性映射的逆

线性映射的逆

$\mathcal{L}(V,W)$ 是一个向量空间，$T\in\mathcal{L}(V,W)$ 自然有加法逆。

线性映射的逆

$\mathcal{L}(V,W)$ 是一个向量空间，$T\in\mathcal{L}(V,W)$ 自然有加法逆。

然而我们下面要研究的另外一种逆。

$T\in\mathcal{L}(V,W)$，$S\in\mathcal{L}(W,V)$.

那么 $TS\in\mathcal{L}(W,W)$ domain 和 codomain 相同，可简写成 $\mathcal{L}(W)$.

$ST\in\mathcal{L}(V,V)$.

如果 $TS=I(W,W)$，$ST=I(V,V)$ 称 S 是 T 的逆。

W 上的恒等映射　　V 上的恒等映射

映射的逆和高中学习的函数的反函数.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad$ $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x^3$ $\quad$ $x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$

大家可以验证 $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^{\frac{1}{3}}) = (x^{\frac{1}{3}})^3 = x$

$(g \circ f)(x) = x$

f 和 g 互为对方的反函数 $f = g^{-1}$, $g = f^{-1}$

映射的逆和高中学习的函数的反函数.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$x \mapsto x^3$ $\qquad$ $x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$

大家可以验证 $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^{\frac{1}{3}}) = (x^{\frac{1}{3}})^3 = x$

$(g\circ f)(x) = x$

f 和 g 互为对方的反函数 $f = g^{-1}$, $g = f^{-1}$

映射 $T: V \to W$ 和映射 $S: V \to W$ 如果满足

$T\circ S = I \qquad S\circ W = I$

则 T 和 S 互为对方的逆映射.

我们线性代数关心的是 $T \in \mathcal{L}(V, W)$. $S \in \mathcal{L}(W, V)$ 的情形.

$T \in \mathcal{L}(V,W)$ 的逆是唯一的.

正像有些函数没有反函数一样，不是所有的 $T \in \mathcal{L}(V,W)$ 都有逆，但如果有，则一定是唯一的。

$T \in \mathcal{L}(V,W)$ 的逆是唯一的.

正像有些数没有反函数一样, 不是所有的 $T \in \mathcal{L}(V,W)$ 都有逆, 但如果有, 则一定是唯一的。

命题: $T \in \mathcal{L}(V,W)$ 的逆如果存在则是唯一的.

证明: 设 $S, \tilde{S} \in \mathcal{L}(W,V)$ 是 T 的逆.

即 $TS = I \in \mathcal{L}(W,W)$, $ST = I \in \mathcal{L}(V,V)$

$T\tilde{S} = I$ $\qquad \tilde{S}T = I$

$$\tilde{S} = \tilde{S}\underset{\in \mathcal{L}(W,W)}{I} = \tilde{S}TS$$

$T\in\mathcal{L}(V,W)$ 的逆是唯一的.

正像有些数没有反函数一样, 不是所有的 $T\in\mathcal{L}(V,W)$ 都有逆, 但如果有, 则一定是唯一的。

命题: $T\in\mathcal{L}(V,W)$ 的逆如果存在则是唯一的.

证明: 设 $S,\tilde{S}\in\mathcal{L}(W,V)$ 是 T 的逆.

即 $TS=I\in\mathcal{L}(W,W)$, $ST=I\in\mathcal{L}(V,V)$

$T\tilde{S}=I$ $\qquad\qquad$ $\tilde{S}T=I$

$\tilde{S}=\tilde{S}\underbrace{I}_{\in\mathcal{L}(W,W)}$

$T \in \mathcal{L}(V,W)$ 的逆是唯一的.

正像有函数没有反函数一样，不是所有的 $T \in \mathcal{L}(V,W)$ 都有逆，但如果有，则一定是唯一的。

命题：$T \in \mathcal{L}(V,W)$ 的逆如果存在则是唯一的.

证明：设 $S, \tilde{S} \in \mathcal{L}(W,V)$ 是 T 的逆.

即 $TS = I \in \mathcal{L}(W,W)$, $ST = I \in \mathcal{L}(V,V)$

$T\tilde{S} = I$　　$\tilde{S}T = I$

$$\tilde{S} = \tilde{S}\underset{\in \mathcal{L}(W,W)}{I} = \tilde{S}(TS)$$

$T\in\mathcal{L}(V,W)$ 的逆是唯一的.

正像有些数没有反些数一样，不是所有的 $T\in\mathcal{L}(V,W)$ 都有逆，但如果有，则一定是唯一的。

命题：$T\in\mathcal{L}(V,W)$ 的逆如果存在则是唯一的.

证明：设 $S,\tilde{S}\in\mathcal{L}(W,V)$ 是 T 的逆.

即 $\boxed{TS=I}\in\mathcal{L}(W,W)$, $ST=I\in\mathcal{L}(V,V)$

$T\tilde{S}=I$ $\qquad$ $\tilde{S}T=I$

$$\tilde{S}=\tilde{S}\underset{\in\mathcal{L}(W,W)}{I}=(\tilde{S}T)S$$

映射乘积的结合律

$T \in \mathcal{L}(V,W)$ 的逆是唯一的.

正像有些数没有反函数一样，不是所有的 $T \in \mathcal{L}(V,W)$ 都有逆，但如果有，则一定是唯一的。

命题：$T \in \mathcal{L}(V,W)$ 的逆如果存在则是唯一的.

证明：设 $S, \tilde{S} \in \mathcal{L}(W,V)$ 是 T 的逆.

即 $TS = I \in \mathcal{L}(W,W)$, $ST = I \in \mathcal{L}(V,V)$

$T\tilde{S} = I$ $\quad$ $\tilde{S}T = I$

$$\tilde{S} = \tilde{S}\underset{\in \mathcal{L}(W,W)}{I} = (\tilde{S}T)S = IS$$

映射乘积的结合律

$T \in \mathcal{L}(V,W)$ 的逆是唯一的.

正像有些数没有反函数一样，不是所有的 $T \in \mathcal{L}(V,W)$ 都有逆，但如果有，则一定是唯一的。

命题：$T \in \mathcal{L}(V,W)$ 的逆如果存在则是唯一的.

证明：设 $S, \tilde{S} \in \mathcal{L}(W,V)$ 是 T 的逆.

即 $TS = I \in \mathcal{L}(W,W)$, $ST = I \in \mathcal{L}(V,V)$

$T\tilde{S} = I$ $\qquad$ $\tilde{S}T = I$

$$\tilde{S} = \tilde{S}\underset{\in \mathcal{L}(W,W)}{I} = (\tilde{S}T)S = IS = S$$ 证毕.

映射乘积的结合律

$Iv = v \quad \forall v \in V$

$T \in \mathcal{L}(V,W)$ 的逆是唯一的.

命题: $T \in \mathcal{L}(V,W)$ 的逆如果存在则是唯一的.

由于 T 的逆是唯一的, we say the inverse of T

$T \in \mathcal{L}(V,W)$ 的逆是唯一的.

命题: $T \in \mathcal{L}(V,W)$ 的逆如果存在则是唯一的.

由于 T 的逆是唯一的, we say $\boxed{\text{the}}$ inverse of T.

记作 T^{-1}.

再次提醒 $T \in \mathcal{L}(V,W)$, $T^{-1} \in \mathcal{L}(W,V)$.

$$TT^{-1} = I \in \mathcal{L}(W,W)$$

$$T^{-1}T = I \in \mathcal{L}(V,V)$$

不是每个 $T \in \mathcal{L}(V,W)$ 都是可逆的

例：零映射 $0 \in \mathcal{L}(V,W)$ 定义如下

$$0v = 0 \qquad \forall v \in V$$

$\downarrow$ 零映射 $\quad \downarrow$ W中的零元素

显然 $\forall S \in \mathcal{L}(W,V)$

可以验证 $0S = 0$

不是每个 $T \in \mathcal{L}(V,W)$ 都是可逆的

例：零映射 $0 \in \mathcal{L}(V,W)$ 定义如下

$$0v = 0 \quad \forall v \in V$$

零映射　W中的零元素

显然 $\forall S \in \mathcal{L}(W,V)$

可以验证 $0S = 0$.

$0 \in \mathcal{L}(V,W)$

不是每个 $T\in\mathcal{L}(V,W)$ 都是可逆的

例：零映射 $0\in\mathcal{L}(V,W)$ 定义如下

$$\underbrace{0}_{\text{零映射}}v=\underbrace{0}_{W\text{中的零元素}}\qquad\forall v\in V$$

显然 $\forall S\in\mathcal{L}(W,V)$.

可以验证 $\underbrace{0}_{0\in\mathcal{L}(V,W)}S=\underbrace{0}_{0\in\mathcal{L}(V,V)}$,

因此 $0\in\mathcal{L}(V,W)$ 是不可逆的. 就是没有逆的.

什么样的 $T \in \mathcal{L}(V,W)$ 是可逆的？

这和函数具有反函数的特征一样：f 是单射和满射。

3.17 命题：一个线性映射是可逆的当且仅当它是既是单的又是满的。

证明：$T \in \mathcal{L}(V,W)$ 是可逆的 $\Rightarrow T$ 既单又满。

$\forall\ v, u \in V$，且 $Tv = Tu$.

T 可逆，即有 $T^{-1} \in \mathcal{L}(W,V)$，使得

$$T^{-1}T = I \in \mathcal{L}(V,V)$$

什么样的 $T \in \mathcal{L}(V,W)$ 是可逆的?

这和函数 f 具有反函数的特征一样: f 是单射和满射.

3.17 命题: 一个线性映射是可逆的当且仅当它是既是单的又是满的.

证明: $T \in \mathcal{L}(V,W)$ 是可逆的 $\Rightarrow$ T 既单又满.

$\forall\ v, u \in V$, 且 $\boxed{Tv = Tu.}$

T 可逆, 即有 $T^{-1} \in \mathcal{L}(W,V)$, 使得

$$T^{-1}T = I \in \mathcal{L}(V,V)$$

两边同时左乘 T^{-1}, 得 $T^{-1}Tv = T^{-1}Tu$

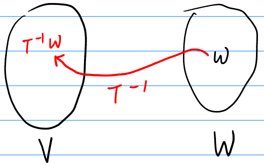
$\nearrow$ 是 V 上的恒等映射

$Iv = Iu$

从而 $v = u$. 这就证明了 T 是单射.

继续证 T 是满射.

$\forall\ w \in W$,



↗ 是 V 上的恒等映射

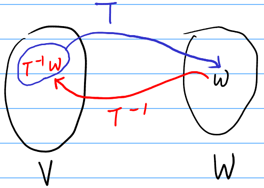
$Iv = Iu$

从而 $v = u$. 这就证明了 T 是单射.

继续证 T 是满射.

$\forall\ w \in W$,

Recall that $TT^{-1} = I$



↗ 是V上的恒等映射

$$Iv = Iu$$

从而 $v = u$. 这就证明了 T 是单射.

继续证 T 是满射.

Recall that $TT^{-1} = I$

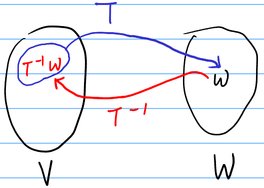
$\forall\ w \in W$,

由于T可逆, $T^{-1} \in \mathcal{L}(W,V)$

$$T^{-1}w \in V$$

而且 $T(T^{-1}w) = (TT^{-1})w$

$$= Iw = w$$



↗ 是V上的恒等映射

$$Iv = Iu$$

从而 $v = u$. 这就证明了 T 是单射.

继续证 T 是满射.

Recall that $TT^{-1} = I$

$\boxed{\forall\ w \in W,}$

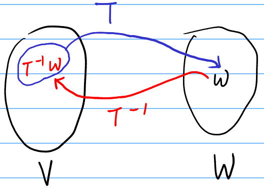
由于T可逆, $T^{-1} \in \mathcal{L}(W,V)$

$\boxed{\text{能找到}\ T^{-1}w \in V}$

使得

而且 $\boxed{T(T^{-1}w)} = (TT^{-1})w$

$= Iw = w$



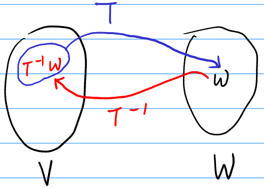
I 是 V 上的恒等映射

$$Iv = Iu$$

从而 $v = u$. 这就证明了 T 是单射.

继续证 T 是满射.

Recall that $TT^{-1} = I$



$\boxed{\forall\ w \in W,}$

由于 T 可逆, $T^{-1} \in \mathcal{L}(W, V)$

$\boxed{\text{能找到 } T^{-1}w \in V}$

使得 ~~而且~~ $T(T^{-1}w) = (TT^{-1})w$

$= Iw = w$

这就证明了 T 是满射. 至此, 我们就由 T 可逆 证出了 T 既单且满.

再证明 T既单且满 ⇒ T是可逆的.

因为 $T \in \mathcal{L}(V,W)$ 是满射，所以 $\forall w \in W$,

都存在 $v \in V$, 使得

$$Tv = w$$

因为T是单射，使得 $Tv = w$ 的 v 还是唯一的。

再证明 T 既单且满 ⇒ T 是可逆的.

因为 $T \in \mathcal{L}(V,W)$ 是满射，所以 $\forall w \in W$，都存在 $v \in V$，使得

$$Tv = w,$$

再证明 T 既单且满 $\Rightarrow$ T 是可逆的.

因为 $T \in \mathcal{L}(V,W)$ 是满射，所以 $\forall w \in W$，

都存在 $v \in V$，使得

$$Tv = w$$

因为 T 是单射，使得 $Tv = w$ 的 v 还是唯一的。

也就是说 $\forall w \in W$，存在唯一的 $v \in V$，与 w 对应.

这就得到了从 W 到 V 的一个映射. 记为 S

$Sw = v$ 其中 v 就是满足 $Tv = w$ 的那个唯一的 v.

验证 $ST=I$, $TS=I$ 这由 S 的定义易验证.

验证 $ST = I$, $TS = I$ 这由 S 的定义易验证.

还要验证 S 是线性映射.

$\forall\ w, \tilde{w} \in W$, 由 S 的定义知

$Sw = v$, 其中 $Tv = w$

$S\tilde{w} = \tilde{v}$, 其中 $T\tilde{v} = \tilde{w}$

验证 $ST = I$, $TS = I$ 这由 S 的定义易验证.

还要验证 S 是线性映射.

$\forall\ w, \tilde{w} \in W$, 由 S 的定义知

$Sw = v$, 其中 $Tv = w$

$S\tilde{w} = \tilde{v}$, 其中 $T\tilde{v} = \tilde{w}$

由这个 以及 T 是线性映射知 $Tv + T\tilde{v} = w + \tilde{w}$

验证 $ST = I$, $TS = I$ 这由 S 的定义易验证.

还要验证 S 是线性映射.

$\forall\ w, \tilde{w} \in W$, 由 S 的定义知

$$Sw = v, \quad 其中\ Tv = w$$
$$S\tilde{w} = \tilde{v}, \quad 其中\ T\tilde{v} = \tilde{w}$$

由这个以及 T 是线性映射知 $Tv + T\tilde{v} = w + \tilde{w}$

$$T(v + \tilde{v}) = w + \tilde{w}$$

验证 $ST=I$，$TS=I$ 这由 S 的定义易验证.

还要验证 S 是线性映射.

$\forall\ w, \tilde{w} \in W$，由 S 的定义知

$$Sw = v \text{，其中 } Tv = w$$
$$S\tilde{w} = \tilde{v} \text{，其中 } T\tilde{v} = \tilde{w}$$

由这个 以及 T 是线性映射知 $Tv + T\tilde{v} = w + \tilde{w}$

$$T(v+\tilde{v}) = w+\tilde{w}$$

由 S 的定义知 $S(w+\tilde{w}) = v+\tilde{v}$

验证 $ST = I$, $TS = I$ 这由 S 的定义易验证.

还要验证 S 是线性映射.

$\forall\ w, \tilde{w} \in W$, 由 S 的定义知

$Sw = v$, 其中 $Tv = w$

$S\tilde{w} = \tilde{v}$, 其中 $T\tilde{v} = \tilde{w}$

由这个 以及 T 是线性映射知 $Tv + T\tilde{v} = w + \tilde{w}$

$T(v + \tilde{v}) = w + \tilde{w}$

由 S 的定义知 $S(w + \tilde{w}) = v + \tilde{v}$

验证 $ST=I$, $TS=I$ 这由 S 的定义易验证.

还要验证 S 是线性映射.

$\forall\ w,\tilde{w}\in W$, 由 S 的定义知

$Sw=v$, 其中 $Tv=w$

$S\tilde{w}=\tilde{v}$, 其中 $T\tilde{v}=\tilde{w}$

由这个 以及 T 是线性映射知 $Tv+T\tilde{v}=w+\tilde{w}$

$T(v+\tilde{v})=w+\tilde{w}$

由 S 的定义知 $S(w+\tilde{w})=v+\tilde{v}$ 得到 $S(w+\tilde{w})$

$=Sw+S\tilde{w}$

这就证明了 S 的加性.

再证明S满足齐性

$\forall a \in F,\ w \in W,$

根据S的定义知,

$v = Sw$. 其中 $Tv = w$,

再证明 S 满足齐性

$\forall a \in F,\ w \in W,$

根据 S 的定义知,

$v = Sw.$ 其中 $Tv = w,$

两边同乘以 a, 得 $a(Tv) = aw$

因为 T 是线性映射, 所以 $T(av) = aw$

根据 S 的定义知 $S(aw) = av$

再证明 S 满足齐性

$\forall a \in F,\ w \in W,$

根据 S 的定义知，

$\boxed{v = Sw}$ 其中 $\boxed{Tv = w}$，

两边同乘以 a，得 $a(Tv) = aw$

因为 T 是线性映射，所以 $T(av) = aw$

根据 S 的定义知 $\boxed{S(aw) = av}$ 得出 $S(aw) = a(Sw)$

这就证明了 S 具有齐性。

再证明 S 满足齐性

$\forall a \in F,\ w \in W,$

根据 S 的定义知，

$\boxed{v = Sw}$ 当中 $\boxed{Tv = w}$，

两边同乘以 a，得 $a(Tv) = aw$

因为 T 是线性映射，所以 $T(av) = aw$

根据 S 的定义知 $\boxed{S(aw) = av}$ 得出 $S(aw) = a(Sw)$

这就证明了 S 具有齐性。

至此，我们就证明了 $S \in \mathcal{L}(W, V)$，且 S 是 T 的逆，即 T 可逆。

回顾

$T \in \mathcal{L}(V, W)$ 可逆 $\Leftrightarrow$ T 即单又满.

而证明

T 可逆 $\Rightarrow$ T 即单又满.

回顾

$T \in \mathcal{L}(V, W)$ 可逆 $\Leftrightarrow$ T 即单又满.

而证明

T 可逆 $\Rightarrow$ T 即单又满. 这和一般的映射可逆 $\Rightarrow$ T 即单又满 没有区别, 是容易的

回顾

$T \in \mathcal{L}(V, W)$ 可逆 $\Longleftrightarrow$ T 既单又满.

而证明

T 可逆 $\Rightarrow$ T 既单又满. 这和一般的映射可逆 $\Rightarrow$ T 既单又满 没有区别, 是容易的

T 既单又满 $\Rightarrow$ T 可逆

回顾

$T \in \mathcal{L}(V,W)$ 可逆 $\Leftrightarrow$ T 即单又满.

而证明

T 可逆 $\Rightarrow$ T 即单又满. 这和一般的映射可逆 $\Rightarrow$ T 即单又满 没有区别, 是容易的

T 既单又满 $\Rightarrow$ T 可逆

也和一般映射的情况无区别.

回顾

$T \in \mathcal{L}(V,W)$ 可逆 $\Leftrightarrow$ T 即单又满.

而证明

T 可逆 $\Rightarrow$ T 即单又满. 这和一般的映射可逆 $\Rightarrow$ T 即单又满 没有区别, 是容易的

T 既单又满 $\Rightarrow$ T 可逆

也和一般映射的情况无区别

但是 T 是线性映射, 需要验证它的逆映射是线性映射.

V 和 W 同构 (isomorphic)

同构的

可逆的线性映射 $T \in \mathcal{L}(V,W)$ 非常重要。

如果存在可逆的 $T \in \mathcal{L}(V,W)$，那么称 V 和 W 是同构的 (isomorphic)。

V 和 W 同构 (isomorphic)

同构的

可逆的线性映射 $T \in \mathcal{L}(V,W)$ 非常重要，

如果存在可逆的 $T \in \mathcal{L}(V,W)$，那么称 V 和 W 是同构的 (isomorphic).

例: $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) = \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}$

是次数小于或等于 2 的实系数实变量的多项式集合，也是实数域上的 3 维向量空间.

定义一个映射 $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mapsto (a_0, a_1, a_2)$$

可以验证 $T: P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ 是一个可逆的线性映射.

$$T^{-1}: \mathbb{R}^3 \to P_2(\mathbb{R})$$

$$(a_0, a_1, a_2) \longmapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$P_2(\mathbb{R})$ 和 $\mathbb{R}^3$ 同构.

一个是多项式集合，一个是三元有序数组集合

两者起来截然不同的集合都是三维向量空间，

它俩是同构的.

同构的例子

$P_2(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$

求导 $\frac{d}{dx} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 \longmapsto a_1 + 2a_2x$$

$P_2(\mathbb{R})$ 和 $\mathbb{R}^3$ 同构

$$T : P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 \mapsto (a_0, a_1, a_2)$$

$T\frac{d}{dx}T^{-1}$ 就成 $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ 中的一个线性映射,
也就是说 $\frac{d}{dx}$ 是作用在函数上的算子 经可逆线性映射
T 这样的乘积 就变成了我们熟悉的 $\mathbb{R}^3$ 上的线性映射

同构、维数

前面的例子已经看到两个线性空间同构，它们的维数相等，

同构、维数

前面的例子已经看到两个线性空间同构，它们的维数相等，

逆向思维：猜测两个维数相等的线性空间是同构的：

同构、维数

前面的例子已经看到两个线性空间同构，它们的维数相等，

逆向思维：猜测两个维数相等的线性空间是同构的。

同构、维数

前面的例子已经看到两个线性空间同构，它们的维数相等，

逆向思维：猜测两个维数相等的线性空间是同构的：

3.18 定理：两个有限维向量空间同构当且仅当它们的维数相等.

同构、维数

前面的例子已经看到两个线性空间同构，它们的维数相等。

逆向思维：猜测两个维数相等的线性空间是同构的。

3.18 定理：两个有限维向量空间同构当且仅当它们的维数相等。

证明：设 V 和 W 是域 F 上的有限维线性空间，

$(e_1, \cdots, e_n)$ 是 V 的一个基，$(f_1, \cdots, f_n)$ 是 W 的一个基。

定义映射 $T: V \to W$ 如下

$Te_i = f_i \quad i = 1, 2, \cdots, n$.

$\forall v \in V$，存在 $a_i \in F$，$i=1,2,\dots,n$ 使得

$$v = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$$

$$Tv = a_1(Te_1) + \dots + a_n(Te_n) = a_1 f_1 + \dots + a_n f_n$$

易验证 $T \in \mathcal{L}(V,W)$.

再验证 T 是可逆的，T^{-1} 的定义如下

$$T^{-1}: W \to V$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i f_i \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \quad i=1,2,\dots,n$$

这样，我们就证明了 V 和 W 是同构的.

再证明 如果 V 和 W 是同构的，那么 $\dim V = \dim W$.

(别忘了前提是 $\dim V < \infty$，$\dim W < \infty$)

V 和 W 是同构的，由同构的定义知

存在可逆的线性映射 $T \in \mathcal{L}(V, W)$.

前面还有一个定理说 $T \in \mathcal{L}(V, W)$ 是可逆的，

等价于 T 即单又满。

T 是单射 $\Rightarrow$ $\operatorname{Null} T = \{0\}$.

再证明如果 V 和 W 是同构的，那么 $\dim V = \dim W$.

(别忘了前提是 $\dim V < \infty$, $\dim W < \infty$)

V 和 W 是同构的，由同构的定义知

存在可逆的线性映射 $T \in \mathcal{L}(V, W)$.

前面还有一个定理说 $T \in \mathcal{L}(V, W)$ 是可逆的，等价于 T 即单又满。

T 是单射 $\Rightarrow$ $\operatorname{Null} T = \{0\}$. T 是满射 $\Rightarrow$ $\operatorname{Range} T = W$

再证明 如果 V 和 W 是同构的，那么 $\dim V = \dim W$.

（别忘了前提是 $\dim V < \infty$, $\dim W < \infty$）

V 和 W 是同构的，由同构的定义知

存在可逆的线性映射 $T \in \mathcal{L}(V, W)$.

前面还有一个定理说 $T \in \mathcal{L}(V, W)$ 是可逆的，

等价于 T 即单又满。

T 是单射 $\Rightarrow$ $\text{Null } T = \{0\}$. T 是满射 $\Rightarrow$ $\text{Range } T = W$

再回顾前面学习的一个定理：设 $\dim V < \infty$, $T \in \mathcal{L}(V, W)$, 那么

$\dim V = \dim \text{Null } T + \dim \text{Range } T$

再证明 如果 V 和 W 是同构的，那么 $\dim V = \dim W$.

（别忘了前提是 $\dim V < \infty$，$\dim W < \infty$）

V 和 W 是同构的，由同构的定义知

存在可逆的线性映射 $T \in \mathcal{L}(V, W)$.

前面还有一个定理说 $T \in \mathcal{L}(V, W)$ 是可逆的，

等价于 T 即单又满。

T 是单射 $\Rightarrow$ $\mathrm{Null}\ T = \{0\}$. ① T 是满射 $\Rightarrow$ $\mathrm{Range}\ T = W$ ②

再回顾前面学习的一个定理：设 $\dim V < \infty$，$T \in \mathcal{L}(V, W)$，那么

$\dim V = \dim \mathrm{Null}\ T + \dim \mathrm{Range}\ T$ ③

①②③ $\Rightarrow \dim V = \dim W$. 证毕.

两个线性空间同构的例子

由前一个定理知：任意一个数域F上的n维线性空间V都和F^n是同构的。

例：$P_n(F)$和F^{n+1}同构.

例. $F^{2\times 2}$和F^4是同构的

两个线性空间同构的例子

由前一个定理知：任意一个数域F上的n维线性空间V都和F^n是同构的。

例：$P_n(F)$ 和 F^{n+1} 同构.

例. $F^{2\times 2}$ 和 F^4 是同构的

You only need to check $\dim F^{2\times 2}=4$.

$E_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$, $E_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$, $E_{21}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$, $E_{22}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$

$(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})$ 是 $F^{2\times 2}$ 的一个基.

两个线性空间同构的例子

由前一个定理知：任意一个数域F上的n维线性空间V都和 F^n 是同构的。

例：$\mathcal{P}_n(F)$ 和 F^{n+1} 同构.

例. $F^{2\times 2}$ 和 F^4 是同构的

You only need to check $\dim F^{2\times 2}=4$.

$E_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$, $E_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$, $E_{21}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$, $E_{22}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$

$(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})$ 是 $F^{2\times 2}$ 的一个基.

注意： V 和 W 同构是指：存在一个可逆的线性映射 $T\in\mathcal{L}(V,W)$.

$(v_1,v_2,\dots,v_n)$ 是V中的线性无关组，

那么 $(Tv_1,\dots,Tv_n)$ 也是W中的线性无关组

可以说线性无关性在映射前后保持不变.

两个线性空间同构的例子

由前一个定理知：任意一个数域 F 上的 n 维线性空间 V 都和 F^n 是同构的。

例：$\mathcal{P}_n(F)$ 和 F^{n+1} 同构。

例. $F^{2\times 2}$ 和 F^4 是同构的

You only need to check $\dim F^{2\times 2}=4$.

$E_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$, $E_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$, $E_{21}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$, $E_{22}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$

$(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})$ 是 $F^{2\times 2}$ 的一个基.

注意：V 和 W 同构是指：存在一个可逆的线性映射 $T\in\mathcal{L}(V,W)$.

$(v_1,v_2,\dots,v_n)$ 是 V 中的线性无关组，
那么 $(Tv_1,\dots,Tv_n)$ 也是 W 中的线性无关组

可以说线性无关性在两个同构空间中保持不变.

两个线性空间同构的例子

由前一个定理知：任意一个数域 F 上的 n 维线性空间 V 都和 F^n 是同构的。

例：$\mathcal{P}_n(F)$ 和 F^{n+1} 同构.

例. $F^{2\times2}$ 和 F^4 是同构的

You only need to check $\dim F^{2\times2}=4$.

$E_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$, $E_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$, $E_{21}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$, $E_{22}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$

$(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})$ 是 $F^{2\times2}$ 的一个基.

注意：V 和 W 同构是指：存在一个可逆的线性映射 $T\in\mathcal{L}(V,W)$.

关于这种运算，同构啥也没说

$(v_1,v_2,\dots,v_n)$ 是 V 中的线性无关组，

那么 $(Tv_1,\dots,Tv_n)$ 也是 W 中的线性无关组

可以说线性无关性在两个同构空间中保持不变.

但这例中 $F^{2\times2}$ 矩阵有乘法运算.这个不是线性空间定义中的运算.

$\dim V = n$, $\dim W = m$

$\mathcal{L}(V, W)$ 和 $F^{m\times n}$

$\boxed{\mathcal{L}(V,W) \text{ 是 } mn \text{ 维的,}}$ $F^{m\times n}$ 也是 mn 维的

二者是同构的.

以前有证明过这个结论吗? 后面会先假设不知 $\mathcal{L}(V,W)$ 是 mn 维的就证明 $\mathcal{L}(V,W)$ 和 $F^{m\times n}$ 同构

但两个线性空间在 $V=W$ 时, 还可以定义乘法. 我们希望找到一种同构映射

$$\tilde{T} \in \mathcal{L}\left(\mathcal{L}(V,W), F^{m\times n}\right)$$

在 $V=W$ 时. $S, T \in \mathcal{L}(V,V)$ 时

$$\tilde{T}(ST) = \tilde{T}(S)\tilde{T}(T)$$

$\dim V = n$, $\dim W = m$

$\mathcal{L}(V, W)$ 和 $F^{m\times n}$

$\mathcal{L}(V,W)$ 是 mn 维的，$F^{m\times n}$ 也是 mn 维的

二者是同构的。

但 两个线性空间 在 $V=W$ 时，还可以定义

乘法。我们希望找到一种同构映射

$$\tilde{T} \in \mathcal{L}\left(\mathcal{L}(V,W), F^{m\times n}\right)$$

在 $V=W$ 时。 $S, T \in \mathcal{L}(V,V)$ 时

$$\tilde{T}(ST) = \tilde{T}(S)\tilde{T}(T)$$

我们说这个映射 $\tilde{T}$ 还保持乘法

也就是 S 和 T 的乘积的像 = S 和 T 像的乘积

$\dim V = n$, $\dim W = m$

$\mathcal{L}(V, W)$ 和 $F^{m\times n}$

$\mathcal{L}(V,W)$ 是 mn 维的，$F^{m\times n}$ 也是 mn 维的

二者是同构的.

但两个线性空间在 $V=W$ 时，还可以定义

乘法. 我们希望找到一种同构映射

$$\tilde{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(V,W), F^{m\times n})$$

在 $\underline{V=W}$ 时. $S, T \in \mathcal{L}(V,V)$ 时

$$\tilde{T}(ST) = \tilde{T}(S)\tilde{T}(T)$$

我们说这个映射 $\tilde{T}$ 还保持乘法

也就是 S 和 T 的乘积的像 = S 和 T 像的乘积

我们将映射 $T \in \mathcal{L}(V,W)$ 的矩阵映到一个

矩阵 $M(T: (v_1, \cdots, v_n), (w_1, \cdots, w_m))$ 就给定了一个可逆线性映射.

$$\mathcal{L}(\overset{n}{V},\overset{m}{W}) \to F^{m\times n}$$

命题 3.19：设 $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ 是 V 的一个基，$(w_1, w_2, \cdots, w_m)$ 是 W 的一个基。

那么 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{L}(V,W)$ 到 $F^{m\times n}$ 的一个可逆线性映射。

$$\overset{n\ \ m}{\mathcal{L}(V,W)} \to F^{m\times n}$$

命题3.19：设 $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ 是 V 的一个基，$(w_1, w_2, \cdots, w_m)$ 是 W 的一个基.
那么 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{L}(V,W)$ 到 $F^{m\times n}$ 的一个可逆线性映射.

证明：$\mathcal{M}$ 是一个线性映射，我们在前面已经证明了。现在只需要证明 $\mathcal{M}$ 是可逆的

$$\underset{n}{\mathcal{L}}(V, \underset{m}{W}) \to F^{m\times n}$$

命题3.19：设 $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ 是 V 的一个基，$(w_1, w_2, \cdots, w_m)$ 是 W 的一个基。则 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{L}(V,W)$ 到 $F^{m\times n}$ 的一个可逆线性映射。

证明：$\mathcal{M}$ 是一个线性映射，我们在前面已经证明了。现在只需要证明 $\mathcal{M}$ 是可逆的。由前面一个定理知 $\mathcal{M}$ 是可逆的 $\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}$ 即单又满。

先证明 $\mathcal{M}$ 是单射，即要证 $\forall T \in \mathcal{L}(V,W)$，如果 $\mathcal{M}(T) = 0$，那么 $T = 0$。

由 $\mathcal{M}(T, (v_1, \cdots, v_n), (w_1, \cdots w_m))$ 的定义知，

$$Tv_j = \sum_{i=1}^{m} [\mathcal{M}(T)]_{ij} w_i \qquad \begin{array}{c|ccc} & v_1 & v_j & \cdots \\ \hline w_1 & & 0 & \\ w_2 & & 0 & \\ \vdots & & \vdots & \\ w_m & & 0 & \end{array}$$

$$\underset{n\quad m}{\mathcal{L}(V,W)} \to F^{m\times n}$$

命题3.19：设$(v_1,v_2,\dots,v_n)$是V的一个基，
$(w_1,w_2,\dots,w_m)$是W的一个基.
那么$\mathcal{M}$是$\mathcal{L}(V,W)$到$F^{m\times n}$的一个可逆
线性映射.

证明：$\mathcal{M}$是一个线性映射，我们在前面
已经证明了。现在只需要证明$\mathcal{M}$是可逆的
由前面一个定理知$\mathcal{M}$是可逆的$\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}$即单又满
先证明$\mathcal{M}$是单射，即要证$\forall T\in\mathcal{L}(V,W)$，
如果$\mathcal{M}(T)=0$，那么$T=0$.
由$\mathcal{M}(T,(v_1,\dots,v_n),(w_1,\dots,w_m))$的定义知，

$$Tv_j=\sum_{i=1}^{m}[\mathcal{M}(T)]_{ij}w_i = 0 \quad j=1,\dots,n$$

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{ccc} v_1 & v_j & \cdots \end{array} \\
\begin{array}{c} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{array} & \begin{bmatrix} & 0 & \\ & 0 & \\ & \vdots & \\ & 0 & \end{bmatrix}
\end{array}$$

$\forall v\in V$，那$v=\sum_{j=1}^{n}a_jv_j$

$Tv=\sum_{j=1}^{n}a_j(Tv_j)$

$$\underset{n}{\mathcal{L}}(V,W) \to F^{m\times n}$$

命题3.19：设 $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ 是 V 的一个基，$(w_1, w_2, \cdots, w_m)$ 是 W 的一个基。则 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{L}(V,W)$ 到 $F^{m\times n}$ 的一个可逆线性映射.

证明：$\mathcal{M}$ 是一个线性映射，我们在前面已经证明了。现在只需要证明 $\mathcal{M}$ 是可逆的。由前面一个定理知 $\mathcal{M}$ 是可逆的 $\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}$ 即单又满

先证明 $\mathcal{M}$ 是单射，即要证 $\forall T \in \mathcal{L}(V,W)$，如果 $\mathcal{M}(T) = 0$，那么 $T = 0$.

由 $\mathcal{M}(T, (v_1, \cdots, v_n), (w_1, \cdots, w_m))$ 的定义知，

$$Tv_j = \sum_{i=1}^{m} [\mathcal{M}(T)]_{ij} w_i = 0 \quad j=1,\cdots,n$$

$$\begin{array}{c} \\ w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_j & \cdots \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} & 0 & \\ & 0 & \\ & \vdots & \\ & 0 & \end{array}\right] \end{array}$$

$\forall v \in V$，那 $v = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j$

$Tv = \sum_{j=1}^{n} a_j (Tv_j) = 0$ 这就证明 $T=0$，$\mathcal{M}$ 是单射得证了

再证明 $\mathcal{M}$ 是满射.

证明. $\forall A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in F^{m\times n}$

那么我们可以定一个映射

$$T: V \to W.$$

使得 $Tv_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$

且 $\forall v \in V$, $v = \sum_{j=1}^{n} c_j v_j$

$$Tv := \sum_{j=1}^{n} c_j (Tv_j)$$

易验证 $T \in \mathcal{L}(V, W)$, 且 $\mathcal{M}(T) = A$.

这证明了 $\mathcal{M}$ 是满射.

这样我们就证明 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{L}(V,W)$ 和 $F^{m\times n}$ 之间的一个可逆线性映射.

$\mathcal{L}(V,W)$ 和 $F^{m\times n}$ 的维数

$$F^{n\times m} = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} : a_{ij} \in F,\ i=1,\cdots,n,\ j=1,\cdots,m \right\}$$

的一个基是 $(E_{11}, \cdots, E_{mn})$，维数是 mn

设 V 和 W 是 F 上的线性空间，$\dim V = n$，$\dim W = m$.

那么 $\mathcal{L}(V,W)$ 和 $F^{m\times n}$ 同构，而且同构的空间具有相同的维数，故有下面的命题

3.20 命题：如果 V 和 W 都是有限维的，那么 $\mathcal{L}(V,W)$ 也是有限维的，并且 $\dim \mathcal{L}(V,W) = (\dim V)(\dim W)$.

线性映射和算子(operator)

$\mathcal{L}(V,W)$. 是从 V 到 W 的所有线性映射组成的集合(是域 $\mathbb{F}$ 上的向量空间)

线性映射和算子(operator)

$\mathcal{L}(V,W)$ 是从 V (domain) 到 W (codomain) 的所有线性映射组成的集合(是域 F 上的向量空间)

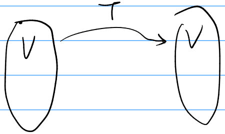
$T\in\mathcal{L}(V,W)$ 指的是 T 是一个从 V 到 W 的线性映射.

当 $V=W$ 时,即 domain 和 codomain 是同一个向量空间时,即 $T\in\mathcal{L}(V,V)$ 时,T 称为一个算子(operator).

定义: 设 V 是域 F 上的向量空间,$T\in\mathcal{L}(V,V)$ 称为 V 上的一个线性算子。$\mathcal{L}(V,V)$ 简记为 $\mathcal{L}(V)$ 表示 V 上所有的线性算子组成的集合.

$\mathcal{L}(V)$：V 上的所有线性算子组成的集合

$T \in \mathcal{L}(V)$



乘积：$T, T^2, T^3, \cdots, T^n$ 都是 well-defined

$\mathcal{L}(V)$：V 上的所有线性算子组成的集合

$T \in \mathcal{L}(V)$

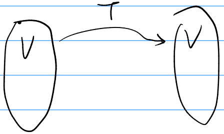
$$V \xrightarrow{T} V$$

乘积：$T, T^2, T^3, \dots, T^n$ 都是 well-defined

定义 $T^0 = I$ 是 V 上的恒等算子

$\mathcal{L}(V)$: V上的所有线性算子组成的集合

$T \in \mathcal{L}(V)$



乘积: $T, T^2, T^3, \cdots, T^n$ 都是 well-defined

定义 $T^0 = I$ 是 V 上的恒等算子

Recall: ① T 是可逆的 $\Longleftrightarrow$ T 即单又满.

② 当 $\dim V < \infty$ 时. $\dim V = \dim \operatorname{Null} T + \dim \operatorname{Range} T$

③ 当 $\dim V < \infty$ 时, T 是满射 $\Longleftrightarrow$ $\dim \operatorname{Range} T = \dim V$

codomain

研究有限维向量空间上的线性算子 $T\in\mathcal{L}(V)$

Recall: ① T 是可逆的 $\Leftrightarrow$ T 即单又满.

② 当 $\dim V<\infty$ 时. $\dim V=\dim \mathrm{Null}\,T+\dim \mathrm{Range}\,T$

③ 当 $\dim V<\infty$ 时, T 是满射 $\Leftrightarrow$ $\dim \mathrm{Range}\,T=\dim V$

codomain

如果我们想证 $T\in\mathcal{L}(V)$ 是可逆的, 而且我们证明了 T 是单射, 那么由 ②③ 就推出 T 是满射

研究有限维向量空间上的线性算子 $T \in \mathcal{L}(V)$

Recall: ① T 是可逆的 $\Leftrightarrow$ T 即单又满.

② 当 $\dim V < \infty$ 时. $\dim V = \dim \operatorname{Null} T + \dim \operatorname{Range} T$

③ 当 $\dim V < \infty$ 时, T 是满射 $\Leftrightarrow$ $\dim \operatorname{Range} T = \dim V$

codomain

如果我们想证 $T \in \mathcal{L}(V)$ 是可逆的, 而且我们证明了 T 是单射, 那么由 ② ③ 就推出 T 是满射

过程如下.

T 是单射 $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Null} T = \{0\}$ $\Rightarrow$ $\dim \operatorname{Null} T = 0$ $\xRightarrow{由②}$ $\dim V = \dim \operatorname{Range} T$

$\xRightarrow{由③}$ T 是满射

当 $\dim V<\infty$ 时，V 上的算子的单射和满射等价。

定理 3.21　设 V 是有限维的向量空间，$T\in\mathcal{L}(V)$

那么下列等价：

a) T 是可逆的 (invertible)；

b) T 是单的 (injective)；

c) T 是满的 (surjective).

证明：　a) ⇒ b) 由前面说到的 T 是可逆的等价于 T 即单又满可证.

b) ⇒ c) 由上一页的讨论可得

c) ⇒ a)　T 是 surjective 可得 $\text{Range}\,T = V$.　↗ domain

当 $\dim V<\infty$ 时，$\dim V = \dim \text{Null}\,T + \dim \text{Rang}\,T$

当 $\dim V<\infty$ 时，V 上的单射和满射等价。

定理 3.21 设 V 是有限维的向量空间，$T\in\mathcal{L}(V)$

那么下列等价：

a) T 是可逆的 (invertible);

b) T 是单的 (injective);

c) T 是满的 (surjective).

证明： a) => b) 由前面学习的 T 是可逆的等价于 T 即单又满可证.

b) => c) 由上一页的讨论可得

c) => a) T 是 surjective 可得 $\text{Range}\,T = V$ ① ↷ domain

当 $\dim V<\infty$ 时，$\dim V = \dim \text{Null}\,T + \dim \text{Range}\,T$ ②

由①② 知 $\dim \text{Null}\,T = 0$，从而 $\text{Null}\,T=\{0\}$. 这就证明了 T 是单的 (surjective).

当 $\dim V<\infty$ 时，V 上的算子的单射和满射等价。

定理 3.21　设 V 是有限维的向量空间，$T\in\mathcal{L}(V)$

那么下列等价：

a) T 是可逆的 (invertible)；

b) T 是单的 (injective)；

c) T 是满的 (surjective).

证明：　a) $\Rightarrow$ b) 由前面学习的 T 是可逆的等价于

T 即单又满可证

b) $\Rightarrow$ c) 由上一页的讨论可得

c) $\Rightarrow$ a)　T 是 surjective 可得 $\mathrm{Range}\,T = V$ ① ↗ codomain

当 $\dim V<\infty$ 时，$\dim V = \dim \mathrm{Null}\,T + \dim \mathrm{Range}\,T$ ②

由①② 知 $\dim \mathrm{Null}\,T = 0$，从而 $\mathrm{Null}\,T=\{0\}$. 这就证

明了 T 是单的 (surjeaive)，再利用这个就证明了 T 是可逆的. □

设 $T \in \mathcal{L}(V)$, then T is injective $\Leftrightarrow$ T is surjective $\Leftrightarrow$ T is invertible

设 $T \in \mathcal{L}(V)$, then T is injective $\Leftrightarrow$ T is surjective $\Leftrightarrow$ T is invertible

注意：有一个前提条件 $\dim V < \infty$.

当 $\dim V = \infty$ 时，T 是单的并不意味着 T 是满的

设 $T\in\mathcal{L}(V)$, then T is injective $\Leftrightarrow$ T is surjective $\Leftrightarrow$ T is invertible

注意：有一个前提条件 $\dim V<\infty$.

当 $\dim V=\infty$ 时，T 是单的并不意味着 T 是满的

F^∞ 上的右移算子定义如下

$$T: F^\infty \longrightarrow F^\infty$$

$$(a_1,a_2,a_3,\cdots)\longmapsto(0,a_1,a_2,a_3,\cdots)$$

设 $T\in\mathcal{L}(V)$, then T is injective $\Leftrightarrow$ T is surjective $\Leftrightarrow$ T is invertible

注意：有一个前提条件 $\dim V<\infty$.

当 $\dim V=\infty$ 时，T 是单的并不意味着 T 是满的

F^∞ 上的右移算子定义如下

$$T: F^\infty \longrightarrow F^\infty$$

$$(a_1,a_2,a_3,\cdots)\longmapsto(0,a_1,a_2,a_3,\cdots)$$

验证 T 是单射，设 $v=(v_1,v_2,v_3,\cdots)\in F^\infty$.

$Tv=0$. 那么由 T 的定义知 $(0,v_1,v_2,v_3,\cdots)=0$

即每一个元素都为 0. $v_i=0$, $i=1,2,3,\cdots$ 即 $v=0$

这就证明了 T 是单射.

设 $T \in \mathcal{L}(V)$, then T is injective $\Leftrightarrow$ T is surjective $\Leftrightarrow$ T is invertible

注意：有一个前提条件 $\dim V < \infty$.

当 $\dim V = \infty$ 时，T 是单的 并不意味着 T 是满的

F^∞ 上的右移算子定义如下

$$T: F^\infty \longrightarrow F^\infty$$

$$(a_1, a_2, a_3, \cdots) \longmapsto (0, a_1, a_2, a_3, \cdots)$$

验证 T 是单射，设 $v = (v_1, v_2, v_3, \cdots) \in F^\infty$.

$Tv = 0$. 那么 由 T 的定义知 $(0, v_1, v_2, v_3, \cdots) = 0$

即每一个元素都为 0. $v_i = 0$, $i = 1, 2, 3, \cdots$ 即 $v = 0$

这就证明了 T 是单射. $(1, 0, 0, \cdots) \notin \operatorname{Range} T$. 故 T 不是满射.

当 $\dim V=\infty$ 时，$\mathcal{L}(V)$ 中满射但非单射的算子

$\mathbf{F}^\infty$ 上的左移算子定义如下

$$S: \mathbf{F}^\infty \longrightarrow \mathbf{F}^\infty$$

$$(a_1, a_2, a_3, \cdots) \longmapsto (a_2, a_3, \cdots)$$

验证 S 是满射

codomain

$\forall\ v=(a_1,a_2,a_3,\cdots) \in \mathbf{F}^\infty$，取 $u=(0,a_1,a_2,\cdots)$

由 S 的定义知 $Su=(a_1,a_2,a_3,\cdots)=v$

即 $v \in \operatorname{Range} S$ 故 $\mathbf{F}^\infty \subset \operatorname{Range} S$.

显然 $\operatorname{Range} S \subset \mathbf{F}^\infty$. 这就证明了 $\operatorname{Range} S=\mathbf{F}^\infty$

所以 S 是满射

当 $\dim V=\infty$ 时，$\mathcal{L}(V)$ 中满射但非单射的算子

$\mathbf{F}^\infty$ 上的左移算子定义如下

$$S:\mathbf{F}^\infty \longrightarrow \mathbf{F}^\infty$$

$$(a_1,a_2,a_3,\cdots)\longmapsto(a_2,a_3,\cdots)$$

验证 S 是满射

codomain

$\forall\ v=(a_1,a_2,a_3,\cdots)\in\mathbf{F}^\infty$，取 $u=(0,a_1,a_2,\cdots)$

由 S 的定义知 $Su=(a_1,a_2,a_3,\cdots)=v$

即 $v\in\operatorname{Range}S$ 故 $\mathbf{F}^\infty\subset\operatorname{Range}S$.

显然 $\operatorname{Range}S\subset\mathbf{F}^\infty$. 这就证明了 $\operatorname{Range}S=\mathbf{F}^\infty$

所以 S 是满射

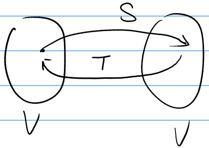
domain　　codomain中的零

再验证 S 不是单射，取 $u=(1,0,0,\cdots)\in\mathbf{F}^\infty$，由 S 的定义得 $Su=(0,0,\cdots)=0$

这就验证了 S 不是单射.

例题：请证明.

设 $\dim V < \infty$, $T, S \in \mathcal{L}(V)$ 如果 $TS = I$, 那么 $ST = I$



$ST = I$

① 先证 $\text{Range}(T) \supset \text{Range}(TS)$

证明：$\forall\, y \in \text{Range}(TS)$ 那么存在 $x \in V$.

使得 $(TS)x = y$.

由线性映射乘积的定义知 $T(Sx) = y$.

Recall $S \in \mathcal{L}(V)$, so $Sx \in V$. 也就说存在

$Sx \in V$, 有 $T(Sx) = y$, 这就证明了 $y \in \text{Range}\, T$

② $TS = I \Rightarrow \text{Range}(TS) = \text{Range}\, I = V$.

在①中证了 $\text{Range}(T) \supset \text{Range}(TS)$ 得 $\text{Range}\, T \supset V$

显然 $\text{Range}\, T \subset V$, 从而 $\text{Range}\, T = V$, T是满射.

$$\left.\begin{array}{l}\dim V < \infty \\ T\text{ 是满射}\end{array}\right\} \Rightarrow T\text{ 是可逆的}$$

$$TS = I$$

两边同时左乘以 T^{-1}，得

$$T^{-1}TS = T^{-1}$$

即 $S = T^{-1}$

T^{-1} 是唯一的，故 $\underbrace{S T = T^{-1}}_{S=T^{-1}} T = I$

这就证明了 $ST = I$。

作业

14. 设 W 是有限维的，并且 $T \in \mathcal{L}(V,W)$. 证明：T 是单的当且仅当有 $S \in \mathcal{L}(W,V)$ 使得 ST 是 V 上的恒等映射.

15. 设 V 是有限维的，并且 $T \in \mathcal{L}(V,W)$. 证明：T 是满的当且仅当有 $S \in \mathcal{L}(W,V)$ 使得 TS 是 W 上的恒等映射.

16. 设 U 和 V 都是有限维向量空间，并且 $S \in \mathcal{L}(V,W)$，$T \in \mathcal{L}(U,V)$. 证明

$$\dim \operatorname{null} ST \leqslant \dim \operatorname{null} S + \dim \operatorname{null} T.$$

17. 证明矩阵加法和乘法的分配性质成立. 也就是说，设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ 都是矩阵，并且 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$ 有意义. 证明：$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$ 有意义，并且 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$.

18. 证明矩阵乘法是结合的. 也就是说, 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 都是矩阵, 并且 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$ 有意义. 证明: $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$ 有意义, 并且 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$.

19. 设 $T \in \mathcal{L}(\mathbf{F}^n, \mathbf{F}^m)$, 并且

$$\mathcal{M}(T) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix},$$

其中使用了标准基. 证明: 对于每个 $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{F}^n$ 都有

$$\begin{aligned} T(x_1, \cdots, x_n) = &(a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n, \cdots, \\ &a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n). \end{aligned}$$

作业

20. 设 $(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n)$ 是 V 的基. 证明如下定义的函数 $T: V \to \mathrm{Mat}(n, 1, \mathbf{F})$,

$$T\boldsymbol{v} = \mathcal{M}(\boldsymbol{v}),$$

是 V 到 $\mathrm{Mat}(n, 1, \mathbf{F})$ 上的可逆线性映射, 其中 $\mathcal{M}(\boldsymbol{v})$ 是 $\boldsymbol{v} \in V$ 关于基 $(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n)$ 的矩阵.

20提示：$\mathrm{Mat}(n,1,F)$是元素在F 中取值的$n\times1$矩阵.
这个题目看起来很像命题3.19的一个推论，但是又不完全一样。

3.19 命题： 设 $(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n)$ 是 V 的基, $(\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_m)$ 是 W 的基, 那么 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{L}(V, W)$ 和 $\mathrm{Mat}(m, n, \mathbf{F})$ 之间的可逆线性映射.

我们还是按照可逆映射的充分必要条件来证明：

需要证明T既是单射又射满射。

任给$x \in V, x = x_1 v_1 + \cdots + x_2 v_2$,

$$Tx = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$Tx = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$显然只有零解，因此$T$是单射。

任给$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(n, 1, F)$,

我们有$T(y_1 v_1 + \cdots + y_n v_n) = y$.因此$T$是满射。

这样我们就可以证明T是可逆的。

21. 证明：从 $\mathrm{Mat}(n,1,\mathbf{F})$ 到 $\mathrm{Mat}(m,1,\mathbf{F})$ 的每个线性映射都是乘以某个矩阵. 换句话说，证明：如果 $T\in\mathcal{L}(\mathrm{Mat}(n,1,\mathbf{F}),\mathrm{Mat}(m,1,\mathbf{F}))$，那么有 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 使得对每个 $\boldsymbol{B}\in\mathrm{Mat}(n,1,\mathbf{F})$ 都有 $T\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$.

21提示：可以考虑命题3.14和3.19。

$Mat(n,1,F)$是n维向量空间V,

取$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,e_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$为它的一个基，

任给$B=\begin{pmatrix}b_1\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}\in Mat(n,1,F)$,$B$关于该基的矩阵是$\mathcal{M}(B)=B$.

对$Mat(m,1,F)$是m维的向量空间W取类似的基.

- 上一页提到的两个命题

3.14 命题： 设 $T \in \mathcal{L}(V, W)$, $(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n)$ 是 V 的基, $(\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_m)$ 是 W 的基, 那么对每个 $\boldsymbol{v} \in V$ 都有

$$\mathcal{M}(T\boldsymbol{v}) = \mathcal{M}(T)\mathcal{M}(\boldsymbol{v}).$$

3.19 命题： 设 $(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n)$ 是 V 的基, $(\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_m)$ 是 W 的基, 那么 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{L}(V, W)$ 和 $\mathrm{Mat}(m, n, \mathbf{F})$ 之间的可逆线性映射.

22. 设 V 是有限维的, 并且 $S,T \in \mathcal{L}(V)$. 证明 ST 可逆当且仅当 S 和 T 都可逆.

21提示：　可以参考定理3.21

ST可逆 $\Rightarrow$ Null $ST=\{0\}$

想办法证明　Null $T \subset$ Null ST

这样就能证明 T 是单射，从而由定理3.21知道T可逆。

3.21 定理: 设 V 是有限维的. 如果 $T \in \mathcal{L}(V)$, 那么下列等价:

(a) T 是可逆的;

(b) T 是单的;

(c) T 是满的.

21提示：　可以参考定理3. 21

ST可逆$\Rightarrow$ Range $ST=V$

想办法证明　Range $ST \subset$ Range S

这样就能证明 Range $S=V$,从而S 是满射，从而由定理3. 21知道S可逆。

21提示：　上面证明$\Rightarrow$方向

下面证明$\Leftarrow$方向

设S,T都是可逆的，想办法证明$STx=y$对任给的$y\in V$都有解，

这说明ST是满射，从而ST可逆。

23. 设 V 是有限维的, 并且 $S, T \in \mathcal{L}(V)$. 证明 $ST = I$ 当且仅当 $TS = I$.

23提示： 可以用22题的结果。

$ST = I$说明ST是可逆的，那么应用21题目的结果，

S和T都是可逆的。

$ST = I \Rightarrow STx = x, \forall x \in V$

$\Rightarrow T(STx) = Tx, \forall x \in V$

用线性映射的结合律，

$\Rightarrow (TS)(Tx) = Tx, \forall x \in V$

因为T是可逆的，因此对任给的$y \in V$,存在$x \in V$，使得 $Tx = y$

因此可以得出

$(TS)y = y, \forall y \in V$

从而证明了$TS = I$.

利用T和S地位的对称性，就证明了 $ST = I \Rightarrow TS = I$.

想想看：本来验证一个一般的算子的逆是一个麻烦的事情，到了有限维的向量空间上的算子，有了这个定理，是不是变得简单了些。

24. 设 V 是有限维的, 并且 $T \in \mathcal{L}(V)$. 证明 T 是恒等映射的标量倍当且仅当对每个 $S \in \mathcal{L}(V)$ 都有 $ST = TS$.

24提示： 题目要证明存在$a \in F$，使得$T = aI \Leftrightarrow TS = TS, \forall S \in \mathbf{V}$

$\Rightarrow$ 这个方向是显然的，因为$TSx = aISx = aSx = S(ax) = S(aIx) = STx, \forall x \in V$

显然成立。

设V是n维向量空间， $\mathbf{M}\ (T) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$

我们可以证明$TS = ST, \forall S \in V$等价于（当然，我们也可以说特别的，我们取S是$\mathbf{L}(V)$的基）

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} E_{i,j} = E_{i,j} \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}, \forall i, j = 1, \cdots, n.$$

其中$E_{i,j}$是$\mathbf{L}(V)$的的基的矩阵

$E_{i,j}$是除了矩阵的第i行第j列的元素是1之外别的元素都是0的矩阵。

24提示继续，

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & a_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,2} & 0 \\ 0 & 0 & a_{4,2} & 0 \end{pmatrix}$$

仔细观察我计算的对不对，同时看看

$E_{2,3}$左乘一个矩阵的效果是什么？ 是不是把这个矩阵的第2列放到了第3列，其他全是0.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$E_{3,2}$右乘一个矩阵的效果是什么？ 是不是把这个矩阵的第3行放到了第2行，其他全是0.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & a_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,2} & 0 \\ 0 & 0 & a_{4,2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

从这我们可以得出什么？$a_{2,2} = a_{3,3}$，而且. . .

$E_{i,j}, i, j$取遍所有的$1, 2, \cdots, n$就可以得到要证明的结果。

25. **证明：如果 V 是有限维的，并且 $\dim V > 1$，那么 V 上不可逆算子之集不是 $\mathcal{L}(V)$ 的子空间.**

25提示：

复习线性子空间的定义。

1. 齐性， 2. 加性。

考虑$F^2, T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$和$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

都是不可逆的算子，但是它们的和还是不可逆算子吗？

26. 设 n 是正整数, 并且 $a_{i,j} \in \mathbf{F}$, $i, j = 1, \cdots, n$. 证明下面的 (a) 和 (b) 等价.

(a) 齐次线性方程组

$$\sum_{k=1}^{n} a_{1,k} x_k = 0$$
$$\vdots$$
$$\sum_{k=1}^{n} a_{n,k} x_k = 0.$$

只有平凡解 $x_1 = \cdots = x_n = 0$.

(b) 对于每组 $c_1, \cdots, c_n \in \mathbf{F}$, 方程组

$$\sum_{k=1}^{n} a_{1,k} x_k = c_1$$
$$\vdots$$
$$\sum_{k=1}^{n} a_{n,k} x_k = c_n.$$

都有解.

注意, 此处方程的个数与变量的个数相同.

26提示：应用定理3.21

引入线性映射 $T: F^n \to F^n$，标准基 $e_1 = (1,0,\cdots,0),\cdots,e_n(0,0,\cdots,1)$

$x = x_1e_1 + \cdots x_ne_n \in F^n$，$Tx = b_1e_1 + \cdots + b_ne_n$

$$b_1 = \sum_{k=1,\cdots,n} a_{1,k}x_k,\cdots,b_n = \sum_{k=1}^{n} a_{n,k}x_k.$$

(a)等价于 T 是单射，(b)等价于 T 是满射

3.21 定理：设 V 是有限维的. 如果 $T \in \mathcal{L}(V)$, 那么下列等价:

(a) T 是可逆的;

(b) T 是单的;

(c) T 是满的.