$T \in \mathcal{L}(V, W)$, $v \in V$, $Tv = ?$

设 $\dim V = n$, $(e_1, \cdots, e_n)$ 是 V 的一个基

$\dim W = m$ $(f_1, \cdots, f_m)$ 是 W 的一个基

$T \in \mathcal{L}(V, W)$ 的矩阵

$$\mathcal{M}(T) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$T \in \mathcal{L}(V, W)$, $v \in V$, $Tv = ?$

设 $\dim V = n$, $(e_1, \dots, e_n)$ 是 V 的一个基

$\dim W = m$ $(f_1, \dots, f_m)$ 是 W 的一个基

$T \in \mathcal{L}(V, W)$ 的矩阵

$$\mathcal{M}(T) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

设 $v \in V$, 那么 $v = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n$, $(c_1, \cdots, c_n) \in F^n$.

$T\in\mathcal{L}(V,W)$, $v\in V$, $Tv=?$

设 $\dim V = n$, $(e_1,\dots,e_n)$ 是 V 的一个基

$\dim W = m$ $(f_1,\dots,f_m)$ 是 W 的一个基

$T\in\mathcal{L}(V,W)$ 的矩阵

$$\mathcal{M}(T) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{c} v_j \\ \text{第}j\text{列} \end{array} \\ f_k & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{kj} & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

设 $v\in V$, 那么 $v = c_1v_1+\dots+c_nv_n$, $(c_1,\dots,c_n)\in F^n$.

$$Tv = T(c_1v_1+\dots+c_nv_n) = \sum_{j=1}^{n} (Tv_j) = \sum_{j=1}^{n} c_j\left(\sum_{k=1}^{m} a_{kj} f_k\right)$$

$T\in\mathcal{L}(V,W)$, $v\in V$, $Tv = ?$

设 $\dim V = n$, $(e_1,\dots,e_n)$ 是 V 的一个基

$\dim W = m$ $(f_1,\dots,f_m)$ 是 W 的一个基

$T\in\mathcal{L}(V,W)$ 的矩阵

$$\mathcal{M}(T) = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} \phantom{a_{11}} & \phantom{a_{12}} & & \overset{v_j}{\text{第}j\text{列}} & & \phantom{a_{1n}} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ \\ f_k \\ \\ \end{matrix} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{kj} & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

设 $v\in V$, 那么 $v = c_1v_1+\dots+c_nv_n$, $(c_1,\dots,c_n)\in F^n$.

$$Tv = T(c_1v_1+\dots+c_nv_n) = \sum_{j=1}^{n}(Tv_j) = \sum_{j=1}^{n} c_j\Big(\sum_{k=1}^{m} a_{kj} f_k\Big)$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}c_j\Big) f_k$$

交换求和次序

$$T \in \mathcal{L}(V, W),\quad v \in V,\quad Tv = ?$$

$$\mathcal{M}(T) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

对于向量 $v = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n$，我们也引入一个 $n \times 1$ 的矩阵 $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$

由 $Tv = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{kj} c_j f_k$

对 Tv 类似引入一个矩阵 $\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix}$ 易知 $\mathcal{M}(Tv) = \mathcal{M}(T)\mathcal{M}(v)$

这样的列数为 1 的矩阵，我们称为向量（列向量）

$F^{m\times n}$ 矩阵. F^n 向量 ($n\times 1$ 矩阵)

$$\mathcal{L}(V,W) \longleftrightarrow F^{m\times n}$$

$$V \longleftrightarrow F^n$$

① 两种不同的写出矩阵的方式. $Te_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i$

$$T \in \mathcal{L}(V,W) \longleftrightarrow \big(\mathcal{M}(T)\big)_{ij} =$$ Te_j 的第 i 个坐标.

② $v \in V \longleftrightarrow \mathcal{M}(v) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$

$v = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i$

两种完全不同方式得到矩阵, 大家一定注意.

线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

线性映射 $T \in \mathcal{L}(\mathbf{F}^n, \mathbf{F}^m)$ $b = (b_1, \cdots, b_m) \in \mathbf{F}^m$.

$x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{F}^n$

线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

线性映射 $T \in \mathcal{L}(F^n, F^m)$ $b = (b_1, \cdots, b_m) \in F^m$.

$x = (x_1, \cdots, x_n) \in F^n$

对应

$$Tx = b$$

矩阵 $A = \mathcal{M}(T) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ $\mathcal{M}(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\mathcal{M}(b) = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

线性映射 $T \in \mathcal{L}(F^n, F^m)$ $b = (b_1, \cdots, b_m) \in F^m$.

$x = (x_1, \cdots, x_n) \in F^n$

对应

$$Tx = b$$

矩阵 $A = \mathcal{M}(T) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ $\vec{x}$: $\mathcal{M}(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\vec{b}$: $\mathcal{M}(b) = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

对应

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

左右两边都是两个列向量（或 $m\times1$ 矩阵），
它们相等是指每一个元素都相等。

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

左右两边都是两个列向量（或 $m\times1$ 矩阵），

它们相等是指每一个元素都相等。

$$\text{左边} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \quad + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

左右两边都是两个列向量（或 m×1 矩阵），它们相等是指每一个元素都相等。

$$\text{左边} = \begin{bmatrix} \boxed{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

与线性方程组对照一下。