7.4 正算子

Tiao Lu

Peking University

2017.11.27

§7.4 正 算 子

许多数学家也采用**半正定算子 (positive semidefinite operator)** 这个术语，意思与正算子相同.

对于算子 $T \in \mathcal{L}(V)$, 如果 T 是自伴的, 并且对所有 $\boldsymbol{v} \in V$ 都有

$$\langle T\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle \geqslant 0,$$

则称 T 为**正的 (positive)**. 注意到, 若 V 是复向量空间, 则 T 自伴的条件可以去掉 (由 7.3).

你应该验证, 正交投影都是正的. 至于其他例子, 看一下 7.11 的证明, 其中我们证明了: 若 $T \in \mathcal{L}(V)$ 是自伴的, 并且 $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ 使得 $\alpha^2 < 4\beta$, 则 $T^2 + \alpha T + \beta I$ 是正的.

算子 S 称为算子 T 的**平方根 (square root)**, 如果 $S^2 = T$. 例如, 若 $T \in \mathcal{L}(\mathbf{F}^3)$ 是由 $T(z_1, z_2, z_3) = (z_3, 0, 0)$ 定义的算子, $S \in \mathcal{L}(\mathbf{F}^3)$ 是由 $S(z_1, z_2, z_3) = (z_2, z_3, 0)$ 定义的算子, 则 S 是 T 的平方根.

下面的定理是关于正算子的主要结果. 注意到正算子的刻画与 $\mathbf{C}$ 中非负数的刻画是对应的. 具体地, 复数 z 非负当且仅当它有非负平方根, 这对应于下面的条件 (c). 此外, z 非负当且仅当它有实的平方根, 这对应于下面的条件 (d). 最后, z 非负当且仅当有复数 w 使得 $z = \bar{w}w$, 这对应于下面的条件 (e).

在某种意义上, 正算子相应于 $[0, \infty)$ 中的数, 因此在术语上更应该称之为非负的而不是正的. 然而, 算子理论学家始终称之为正算子, 因此我们将沿袭这个传统.

7.27 定理: 设 $T \in \mathcal{L}(V)$, 则下列等价:

(a) T 是正的;
(b) T 是自伴的, 且 T 的所有本征值都非负;
(c) T 有正平方根;
(d) T 有自伴的平方根;
(e) 有算子 $S \in \mathcal{L}(V)$ 使得 $T = S^*S$.

证明：我们将证明 (a)$\Rightarrow$ (b)$\Rightarrow$ (c)$\Rightarrow$ (d)$\Rightarrow$ (e)$\Rightarrow$ (a).

首先假设 (a) 成立, 因此 T 是正的. 显然 T 是自伴的 (根据正算子的定义). 为证 (b) 中的其他结果, 设 λ 是 T 的本征值, $\boldsymbol{v}$ 是 T 的相应于 λ 的非零本征向量, 则

$$
\begin{aligned}
0 &\leqslant \langle T\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle \\
&= \langle \lambda\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle \\
&= \lambda\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle,
\end{aligned}
$$

于是 λ 是非负数. 因此 (b) 成立.

现在假设 (b) 成立, 因此 T 是自伴的, 并且 T 的所有本征值都是非负的. 由谱定理 (7.9 和 7.13), V 有一个由 T 的本征向量组成的规范正交基 $(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$. 设相应的本征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, 则每个 λ_j 都是非负数. 定义 $S \in \mathcal{L}(V)$ 如下

$$S\boldsymbol{e}_j = \sqrt{\lambda_j}\boldsymbol{e}_j, \quad j = 1, \cdots, n,$$

那么你应该验证, S 是正算子. 进一步, 对每个 j 都有 $S^2\boldsymbol{e}_j = \lambda_j\boldsymbol{e}_j = T\boldsymbol{e}_j$, 由此可得 $S^2 = T$. 于是, S 是 T 的正平方根, 故 (c) 成立.

显然 (c) 蕴含 (d) (因为, 由定义知正算子都是自伴的).

现在假设 (d) 成立, 即有 V 上的自伴算子 S 使得 $T = S^2$. 那么 $T = S^*S$ (因为 $S^* = S$), 故 (e) 成立.

最后, 假设 (e) 成立. 设 $S \in \mathcal{L}(V)$ 使得 $T = S^*S$, 则 $T^* = (S^*S)^* = S^*(S^*)^* = S^*S = T$, 故 T 是自伴的. 为证 (a) 成立, 注意到对每个 $\boldsymbol{v} \in V$ 都有

$$\begin{aligned} \langle T\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle &= \langle S^*S\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \\ &= \langle S\boldsymbol{v}, S\boldsymbol{v} \rangle \\ &\geqslant 0. \end{aligned}$$

于是, T 是正的. ■

正算子可能有无穷多个平方根（但是其中只有一个是正的）. 例如, 若 $\dim V > 1$, 则 V 上的恒等算子就有无穷多个平方根.

每个非负数都有唯一一个非负平方根. 下一个命题表明正算子也具有类似的性质. 根据这个命题, 我们可以采用记号 $\sqrt{T}$来表示正算子 T 唯一的正平方根, 正如 $\sqrt{\lambda}$ 表示非负数 λ 唯一的非负平方根.

7.28 命题: V 上每个正算子都有唯一一个正平方根.

证明: 设 $T \in \mathcal{L}(V)$ 是正的, 并设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ 表示 T 的所有互不相同的本征值; 因为 T 是正的, 所以这些数都非负 (由 7.27). 因为 T 是自伴的, 所以由 7.14 可得

7.29 $$V = \operatorname{null}(T - \lambda_1 I) \oplus \cdots \oplus \operatorname{null}(T - \lambda_m I).$$

现在设 $S \in \mathcal{L}(V)$ 是 T 的正平方根, 并设 α 是 S 的本征值. 若 $\boldsymbol{v} \in \operatorname{null}(S - \alpha I)$, 则 $S\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{v}$, 从而

7.30 $$T\boldsymbol{v} = S^2\boldsymbol{v} = \alpha^2\boldsymbol{v},$$

故 $\boldsymbol{v} \in \operatorname{null}(T - \alpha^2 I)$. 于是 α^2 是 T 的本征值, 由此可知 α^2 必定等于某个 λ_j. 也就是说, 有某个 j 使得 $\alpha = \sqrt{\lambda_j}$. 进一步, 由 7.30 可得

7.31 $$\operatorname{null}(S - \sqrt{\lambda_j} I) \subset \operatorname{null}(T - \lambda_j I).$$

我们在上一段证明了, S 的本征值只能是 $\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_m}$. 因为 S 是自伴的, 所以由 7.14 可得

7.32 $$V = \operatorname{null}(S - \sqrt{\lambda_1} I) \oplus \cdots \oplus \operatorname{null}(S - \sqrt{\lambda_m} I).$$

现在, 由 7.29, 7.32 以及 7.31 可知, 对每个 j 都有

$$\operatorname{null}(S - \sqrt{\lambda_j} I) = \operatorname{null}(T - \lambda_j I).$$

也就是说, 在 $\operatorname{null}(T - \lambda_j I)$ 上, 算子 S 的作用相当于乘以 $\sqrt{\lambda_j}$. 于是, T 的正平方根 S 是由 T 唯一确定的. ■

两个问题

问题一

两个正算子的和还是正算子吗?

问题二

两个正算子的乘积还是正算子吗?

$\mathbb{R}^2$ 上的两个算子

$$\mathcal{M}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathcal{M}(S) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$