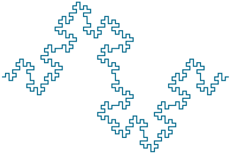
线性代数 B：上三角矩阵的应用，对角矩阵

Tiao Lu
Peking University



October 30, 2019

- 判断算子是否可逆
- 求算子的逆
- 求算子的特征值

上三角矩阵和算子可逆

例 $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$

$$\mathcal{M}(T) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

T可逆吗？ No，$Te_1 = 0$

上三角矩阵和算子可逆

例 $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$

$$\mathcal{M}(T) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

T 可逆吗？ No, $Te_1 = 0$

例 $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$

$$\mathcal{M}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

T 可逆吗？ No. $Te_1 = e_1$ $Te_2 = 3e_1$

这意味着 $T|_{\operatorname{span}(e_1, e_2)}$ 不是满射，因此也不是单射

5.16 命题： 假设 $T \in \mathcal{L}(V)$ 关于 V 的某个基有上三角矩阵，则 T 可逆当且仅当这个上三角矩阵对角线上的元素都不是 0.

1. 这里没说 V 是一个复向量空间。M(T) 是上三角阵是前提

2. 当且仅当，是说 T 可逆 ⟺ M(T) 对角线元素 没有0.

证明：先证 M(T) 对角线元素都不是 0. ⟹ T 可逆.

设 $(v_1,\dots,v_n)$ 是 V 的一个基，且 T 在该基下的矩阵是上三角矩阵

$$M(T) = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} \lambda_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \end{array}$$

$Tv_1 = \lambda_1 v_1$, $\lambda_1 \neq 0 \Rightarrow v_1 = \frac{1}{\lambda_1} Tv_1 \Rightarrow \operatorname{span}(v_1) \subset \operatorname{span}(Tv_1) \Rightarrow \operatorname{span}(v_1) = \operatorname{span}(Tv_1)$

$\lambda_2 \neq 0$ 且 $Tv_2 = \lambda_2 v_2 + a_{12} v_1 \Rightarrow v_2 = \frac{1}{\lambda_2} Tv_2 - \frac{a_{12}}{\lambda_2} v_1 \Rightarrow v_2 \in \operatorname{span}(Tv_2, v_1) \Rightarrow$

$\operatorname{span}(v_1, v_2) = \operatorname{span}(Tv_1, Tv_2)$, …… 如此继续 $\Rightarrow \operatorname{span}(v_1,\dots,v_n) = \operatorname{span}(Tv_1,\dots,Tv_n)$

这就证明了 T 是满射 (surjective)，从而 T 可逆

证明的关键一点　$\lambda_k \neq 0$，我们才能得出

$$v_k = \frac{1}{\lambda_k} T v_k - \boxed{\text{a linear combination of } (v_1, \cdots, v_{k-1})}$$

for $k = 1, 2, \cdots, n$.

这就证明了 T 是满射 (surjective)，从而 T 可逆

证明的关键一点　$\lambda_k \neq 0$，我们才能得出

$$v_k = \frac{1}{\lambda_k} T v_k - \boxed{\text{a linear combination of } (v_1, \cdots, v_{k-1})}$$

for $k = 1, 2, \cdots, n$.

再证明：T 可逆 $\Rightarrow$ 上三角矩阵 $M(T)$ 的所有对角线元素都非0.

$M(T; (v_1, \cdots, v_n))$ 是上三角矩阵 $\begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$

$T v_k = \lambda_k v_k + \underline{(v_1, \cdots, v_{k-1}) \text{的一个线性组合}}$，$k = 1, 2, \cdots, n$

如果某个 $\lambda_k = 0$，那么 $T|_{\text{span}(v_1, \cdots, v_k)}$ 实际上可由 $(v_1, \cdots, v_{k-1})$ 线性表出，

即 $\dim \text{Range } T|_{\text{span}(v_1, \cdots, v_k)} \leq k-1 < \dim \text{span}(v_1, \cdots, v_k)$

从而 $T|_{\mathrm{span}(v_1,\ldots,v_k)}$ 不是满射，也不是单射.

即存在 $u \in \mathrm{span}(v_1,\ldots,v_k)$，$u \neq 0$，③ 使得

$$T|_{\mathrm{span}(v_1,\ldots,v_k)} u = 0 \quad ①$$

当 $u \in \mathrm{span}(v_1,\ldots,v_k)$ 时，$Tu = T|_{\mathrm{span}(v_1,\ldots,v_k)} u$ ②

由①②，得 $Tu = 0$ ④

由③④知 T 不是单射，从而 T 不可逆.

这是在用反证法了. 即如果对角线元素中有一个是0，那么 T 不可逆.

从而证明了如果 T 可逆，那么上三角矩阵 $M(T)$ 的所有对角线元素都不是0.

上三角矩阵和特征值.

$M(T)$ 是一般的矩阵时，求特征值 is not easy.

但如果我们已经写出了 T 在某基下的矩阵，

且矩阵恰巧是一个上三角矩阵，那么

it is easy to write out all eigenvalues of this

operator.

5.18 命题： 设 $T \in \mathcal{L}(V)$ 关于 V 的某个基有上三角矩阵，则这个上三角矩阵对角线上的元素恰好是 T 的所有本征值.

定理5.18的证明

证明：设 $(v_1, \cdots, v_n)$ 是 V 的一个基，并且

$$\mathcal{M}(T, (v_1, \cdots, v_n)) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

如果 $\lambda \in F$ 是 T 的一个特征值，那么 $T - \lambda I$ 不是单射。

那么 $\mathcal{M}(T - \lambda I) = \begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda & & * \\ & \lambda_2 - \lambda & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n - \lambda \end{bmatrix}$ 的对角线元素中

必有一个是0，即存在 j，使得 $\lambda_j - \lambda = 0$。从而 T 的特征值一定出现在 $\mathcal{M}(T)$ 的对角线上。

定理5.18的证明

证明：设 $(v_1, \cdots, v_n)$ 是 V 的一个基，并且

$$\mathcal{M}(T, (v_1, \cdots, v_n)) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \quad \lambda_n \end{bmatrix}$$

如果 $\lambda \in F$ 是 T 的一个特征值，那么 $T - \lambda I$ 不是单射。

那么 $\mathcal{M}(T - \lambda I) = \begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda & & & * \\ & \lambda_2 - \lambda & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda_n - \lambda \end{bmatrix}$ 的对角线元素中

必有一个是0，即存在 j，使得 $\lambda_j - \lambda = 0$。从而 T 的特征值一定出现在 $\mathcal{M}(T)$ 的对角线上。另外 $\mathcal{M}(T - \lambda_j I)$ 的对角线有0，所以 $T - \lambda_j I$ 不是可逆的，从而 $T - \lambda_j I$ 不是单射，从而 λ_j 是 T 的特征值。 $\square$

对角矩阵

§5.4 对角矩阵

对角矩阵 (diagonal matrix) 是除对角线元素之外全是 0 的方阵. 如

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ 和 } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ 都是对角矩阵.

Remark: ① If A is a diagonal matrix, then A is an upper triangular matrix.

② 对角矩阵的 0 元素比上三角矩阵更多.

③ 对于 $T \in \mathcal{L}(V)$, 我们希望找到 V 的一个基, 使得 T 关于该基的矩阵是对角矩阵.

↳ 称为将 T 对角化.

矩阵是对角矩阵的算子有什么特点

设 V 是一个 n 维的 vector space，$T \in \mathcal{L}(V)$，$(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ 是 V 的一个基，且 T 关于此基的矩阵

$$\mathcal{M}(T, (v_1, v_2, \cdots, v_n)) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

那么由算子矩阵的定义知

$$T v_i = \lambda_i v_i \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

也就是说算子 T 有 n 个特征值(不一定互不相同)，且有 n 个特征向量 $v_1, \cdots, v_n$ 组成了 V 的一个基。

矩阵是对角矩阵的算子有什么特点

设 V 是一个 n 维的 vector space，$T \in \mathcal{L}(V)$，$(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ 是 V 的一个基，且 T 关于此基的矩阵

$$\mathcal{M}(T, (v_1, v_2, \cdots, v_n)) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

那么 由算子矩阵的定义知

$$Tv_i = \lambda_i v_i \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

也就是说 算子 T 有 n 个特征值（不一定互不相同），且有 n 个特征向量 $v_1, \cdots, v_n$ 组成了 V 的一个基。

反过来，如果 V 的一个基 $v_1, \cdots, v_n$ 是 T 的特征向量，那么易知 $\mathcal{M}(T, (v_1, \cdots, v_n))$ 是对角矩阵。

算子 $T \in \mathcal{L}(V)$ 关于某个基的矩阵是对角矩阵当且仅当 V 有一个由 T 的特征向量组成的基。

不是每个算子都可对角化

Recall：每个复向量空间的算子都可上三角化.

不是每个算子都可对角化

Recall：每个<u>复</u>向量空间的算子都可上三角化.

Question：每个<u>实</u>向量空间的算子都可上三角化. True or false

Answer： False. 例如逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 的算子 $T\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ 不能对角化.

不能上三角化的算子自然不能对角化，因此我们问.

Question：每个<u>复</u>向量空间的算子都可对角化. True or false

Answer： false. 例如：$T\in\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$, $M(T)=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$

也就是说 $Te_1=0$, $Te_2=e_1$

$M(T)$ 是一个上三角矩阵，所以 T 的特征值是 $0,0$，如果 T 可对角化，那么 $M(T,(v_1,v_2))=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

这和 $\dim \operatorname{range} T=1$ 矛盾

一类可对角化的算子

Recall：设 $\dim V = n$.

$T \in \mathcal{L}(V)$ 可对角化 $\Leftrightarrow$ T 有 n 个线性无关的特征向量

$(v_1, \dots, v_n)$ 线性无关，且 v_i 是 T 的非零特征向量.

Recall. $T \in \mathcal{L}(V)$ 的两个不同的特征值所对应的非零特征向量是线无关的。

定理 5.6（见 lecture LA9.pdf Page 37）设 $T \in \mathcal{L}(V)$，$\lambda_1, \dots, \lambda_m$ 是 T 的互不相同的特征值，$v_1, \dots, v_m$ 是相应的非零特征向量，则 $(v_1, \dots, v_m)$ 线性无关.

一类可对角化的算子

$(v_1, \ldots, v_n)$ 线性无关，且 v_i 是 T 的非零特征向量.

Recall：设 $\dim V = n$.

① $T \in \mathcal{L}(V)$ 可对角化 $\Leftrightarrow$ T 有 n 个线性无关的特征向量

Recall：$T \in \mathcal{L}(V)$ 的两个不同的特征值所对应的非零特征向量是线无关的。

② 定理 5.6（见 lecture LA9.pdf Page 37）设 $T \in \mathcal{L}(V)$，$\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ 是 T 的互不相同的特征值，$v_1, \ldots, v_m$ 是相应的非零特征向量，则 $(v_1, \ldots, v_m)$ 线性无关。

$\dim V = n$，$T \in \mathcal{L}(V)$，如果 T 有 n 个互不相同的特征值，那么由 ② 知 T 有 n 个线性无关的向量，然后由 ① 知 T 可对角化。这就是

命题 5.20 **5.20 命题：** 若 $T \in \mathcal{L}(V)$ 有 $\dim V$ 个互不相同的本征值，则 T 关于 V 的某个基有对角矩阵.

T 可对角化 但 T 没有 n 个互不相同的 eigenvalues 的例子

例：恒等映射 $I \in \mathcal{L}(V)$. 其中 V 是 n 维向量空间.

设 $(v_1, \dots, v_n)$ 是 V 的一个 basis.

$T v_i = v_i \quad i = 1, 2, \dots, n.$

$$\mathcal{M}(T) = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$ 是一个对角矩阵.

1 是 T 的特征值, $v_1, \dots, v_n$ 是 T 的特征向量.

$V_1 = \mathrm{span}(v_1, \dots, v_n)$ 是 T 的属于 1 的特征子空间.

V_1 的维数 $\dim V_1 = n$.

可对角化的 T 的例子.

例: $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$, $Te_1 = e_1$ $Te_2 = e_2$.

$Te_3 = 2e_3$. $Te_4 = 7e_4$

$$\mathcal{M}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

eigenvalues of T are $1, 1, 2, 3$.

$$\boxed{\begin{aligned} V_1 &= \operatorname{span}(e_1, e_2), & \dim V_1 &= 2 \\ V_2 &= \operatorname{span}(e_3) & \dim V_2 &= 1 \\ V_7 &= \operatorname{span}(e_4) & \dim V_7 &= 1 \end{aligned}}$$

特征子空间的维数之和是 $2+1+1=4$ 和 $\mathbb{R}^4$ 的 dimension 相等.

算子T关于某个基有对角阵的等价条件

5.21 命题: 设 $T \in \mathcal{L}(V)$, 并设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ 是 T 的所有互不相同的本征值, 则下列等价:

(a) T 关于 V 的某个基有对角矩阵;

(b) V 有一个由 T 的本征向量组成的基;

(c) V 有在 T 下不变的 1 维子空间 $U_1, \cdots, U_n$, 使得

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n;$$

(d) $V = \operatorname{null}(T - \lambda_1 I) \oplus \cdots \oplus \operatorname{null}(T - \lambda_m I)$;

(e) $\dim V = \dim \operatorname{null}(T - \lambda_1 I) + \cdots + \dim \operatorname{null}(T - \lambda_m I)$.

实矩阵

§5.5 实向量空间的不变子空间

5.24 定理：Assume V is a 实、非零向量空间，and $T \in \mathcal{L}(V)$. 那么 T 一定有一个1维 or 2维的不变子空间.

例：$T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. $\mathcal{M}(T) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $Te_1 = e_2$, $Te_2 = -e_1$

没有一维不变子空间，但有一个2维不变子空间.

例 $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ $\mathcal{M}(T) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

没有 one-dimension invariant 子空间

有两个 2D invariant subspaces.

定理 5.24 的证明

证明：设 $\dim V = n$，$n > 0$．任取 $u \in V$，$u \neq 0$．

那么 $(u, Tu, \cdots, T^n u)$ 是 V 中的一个线性相关组．

从而存在不全为 0 的实数 $a_0, \cdots, a_n$ 使得

$$a_0 u + a_1 Tu + \cdots + a_n T^n u = 0 \quad ①$$

设 $m = \max\limits_i \{ a_i : a_i \neq 0 \}$，则 $m \geq 1$（不然只有 $a_0 \neq 0$，而 $u \neq 0$，与 $a_0 u = 0$ 矛盾）

①式系写成 $p(T)u = 0$，其 $p(T) = a_0 I + \cdots + a_m T^m$

由实系数的多项式分解定理知 $\exists\ \lambda_1, \cdots, \lambda_s \in \mathbb{R}$ 和 $(\alpha_1, \beta_1), \cdots, (\alpha_t, \beta_t) \in \mathbb{R}^2$，且 $\alpha_j^2 < 4\beta_j$，$j = 1, \cdots, t$，使得

$$p(T)u = (T - \lambda_1 I) \cdots (T - \lambda_s I)(T^2 + \alpha_1 T + \beta_1 I) \cdots (T^2 + \alpha_t T + \beta_t)u = 0 \quad ②$$

② 式知 $p(T)=(T-\lambda_1 I)\cdots(T-\lambda_s I)(T^2+\alpha_1 T+\beta_1 I)\cdots(T^2+\alpha_t T+\beta_t I)$ 不是单射,

从而必存在一个因式不是单射。

如果 $T-\lambda_i I$ 不是单射,则存在 $v\in V$,使得 $Tv=\lambda_i v$

故 $\mathrm{span}(v)$ 是 T 的一个一维不变子空间

如果 $T^2+\alpha_i T+\beta_i I$ 不是单射,那么有 $v\in V$,使得

$(T^2+\alpha_i T+\beta_i I)v=0$

即 $T^2 v=-\alpha_i Tv-\beta_i v$. 2维

易验证 $\mathrm{span}(v, Tv)$ 是 T 的一个不变子空间。这就完成了证明.

nonzero

例：设 V is a vector space, and $T \in \mathcal{L}(V)$.

已知 $v \neq 0$, $Tv \neq 0$, and $T^2 v = 0$.

证明 (v, Tv) 是 V 中的一个线性无关组。

证明：$T^2 v = 0$. it implies that $T^2 v = 0v + 0Tv$

(v, Tv) 是 T 的一个不变子空间.

因此我们只要证明 $\mathrm{span}(v, Tv)$ 是 2 维的即可

令 $S = T|_{\mathrm{span}(v, Tv)}$

易于验证 $\mathrm{Null}\, S \supset \mathrm{span}(Tv)$, so $\dim \mathrm{Null}\, S \geq 1$

$\mathrm{Range}\, S = \mathrm{span}(Tv)$, so $\dim \mathrm{Range}\, S = 1$

这样就知 $\dim \operatorname{span}(v, Tv) = \dim \operatorname{Null} S + \dim \operatorname{Range} S$

$\geq 1+1 = 2$

故 $\operatorname{span}(v, Tv) = 2$

所以 (v, Tv) 是线性无关的.

例：设 V is a nonzero vector space, and $T \in \mathcal{L}(V)$.

已知 $T^n v \neq 0$, $T^{n+1} v = 0$. (上次期中考试题)

证明 $(v, Tv, \dots, T^n v)$ 是 V 的一个线性无关组。

思路：$T^{n+1}v=0$，则 $\text{span}(v, Tv, \cdots, T^n v)$ 是 T 的一个不变子空间

令 $S = T|_{\text{span}(v, \cdots, T^n v)}$

$\text{Null}\, S \supset \text{Span}(T^n v) \Rightarrow \dim \text{Null}\, S \geq 1$

$\text{Range}\, S = \text{span}(Tv, T^2 v, \cdots, T^n v)$

反证法，不妨设 $v, \cdots, T^n v$ 线性相关，那么 $\dim \text{span}(v, \cdots, T^n v) < n+1$

由 $\dim \text{Range}\, S \leq \dim \text{span}(v, \cdots, T^n v) - \dim \text{Null}\, S$

知 $\dim \text{Range}\, S < n$

即 $(Tv, T^2 v, \cdots, T^n v)$ 是线性相关的，

类似地可导出 $(T^2 v, \cdots, T^n v)$ 线性相关，…… $(T^n v)$ 线性相关。

这与 $T^n v \neq 0$ 矛盾。

5.26 定理：在奇数维实向量空间上，每个算子都有本征值.

证明：设 V is a real vector space, $\dim V = 2n+1$, $n = 0, 1, 2, \cdots$.

$T \in \mathcal{L}(V)$. 要证一定存在一个 $\lambda \in \mathbb{R}$ 和一个非零 $u \in V$,

使得 $\quad Tu = \lambda u$.

实向量空间上的线性算子一定存在一个一维或 2 维的不变子空间

如果 T 有一个 one dimensional invariant subspace, 那么定理 5.26 得证.

如果 T 有一个二维的不变子空间，W。

举个例子看看 $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$

$$M(T) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

$\mathrm{span}(e_1, e_2)$ 是 T 的一个$\overbrace{\text{不变子空间}}^{2\text{维}}$

但 $\mathrm{span}(e_3)$ 不是 T 的一个一维不变子空间。

$$Te_3 = 2e_1 + 3e_2 + 4e_3$$

$$(T - 4I)e_3 = 2e_1 + 3e_2 \in \mathrm{span}(e_1, e_2)$$

如果 T 有一个二维的不变子空间，W.

举个例子看看 $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$

$$\mathcal{M}(T) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

$\mathrm{span}(e_1, e_2)$ 是 T 的一个 2维 不变子空间

但 $\mathrm{span}(e_3)$ 不是 T 的一个一维不变子空间.

$$Te_3 = 2e_1 + 3e_2 + 4e_3$$

$$(T-4I)e_3 = 2e_1 + 3e_2 \in \mathrm{span}(e_1, e_2)$$

可推出 $\mathrm{span}(e_1, e_2)$ 是 $(T-4I)$ 的 2维不变子空间.

$\text{Range}(T-4I) \subset \text{span}(e_1, e_2)$. 这就可以推出

$$\dim \text{Null}(T-4I) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \text{Range}(4-I) \geq 1$$

从而 $T-4I$ 不是单射，即 $\exists$ 非零 $u \in \mathbb{R}^3$ 使得

$$(T-4I)u = 0.$$

即 T 有一个实特征值.

例子.

$T \in \mathcal{L}(\underset{\sim}{\mathbb{R}^5})$ $\quad \mathcal{M}(T) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 7 & 12 \\ 1 & 0 & 3 & 8 & 13 \\ 0 & 0 & 4 & 9 & 14 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 15 \\ 0 & 0 & 6 & 11 & 16 \end{bmatrix}$

$\downarrow$

V

$U = \mathrm{span}(e_1, e_2)$ 是 T 的一个 2D invariant subspace.

$W = \mathrm{span}(e_3, e_4, e_5)$ 不是 T 的一个不变子空间.

$$V = U \oplus W$$

引入一个线性映射 $P_{W,U} : V \longrightarrow W$

$$\underset{\in U}{v = u} + \underset{\in W}{w} \longmapsto w$$

$$\mathcal{M}\left(P_{W,U},(e_1,e_2,e_3,e_4,e_5)\right)=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$P_{W,U}$ 的矩阵是对角阵 特征值只有0和1.

特征子空间 $V_0=U$, $V_1=W$

定义 $P_{U,W}: V \to U$ $\qquad \mathcal{M}(P_{U,W})=\begin{bmatrix}1&&&&\\&1&&0&\\&&0&&\\&0&&0&\\&&&&0\end{bmatrix}$

$v=u+w \longmapsto u$

$u\in U$, $w\in W$

验证 $P_{U,W}+P_{W,U}=I$

$U = \mathrm{span}(e_1, e_2)$ 是 T 的一个二维不变子空间

$W = \mathrm{span}(e_3, e_4, e_5)$

$V = U \oplus W$,

$P_{W,U}\, T|_W \in \mathcal{L}(W)$ 这个易搞混

$P_{W,U}\, T|_W$ 是三维实向量空间上的一个 linear operator

设 $\exists$ 非零 $w \in W$. 使 $P_{W,U}\, T|_W\, w = \lambda w$

因为 $w\in W$，可以 $P_{W,U}Tw = P_{W,U}T|_W w$

$$Tw = ITw = (P_{W,U}+P_{U,W})Tw$$

$$= \lambda w + \underbrace{P_{U,W}Tw}_{\in U}$$

这说明 $(T-\lambda I)w \in U$.

再注意到 U 是 T 的一个不变子空间，

那么也是 $(T-\lambda I)$ 的不变子空间.

So $U\oplus \operatorname{span}(w)$ 是 $T-\lambda I$ 的一个不变子空间.

这是直和，因为 $0\neq w \in W$. 而 $V=U\oplus W$.

$$(T-\lambda I)|_{U\oplus \operatorname{span}(w)} \in \mathcal{L}(U\oplus \operatorname{span}(w)),$$

但 $\operatorname{Range}(T-\lambda I) = U$，故

$(T-\lambda I)|_{U \oplus \operatorname{Range}(w)}$ 不是单射，

所以 $\exists\, 0 \neq v \in U \oplus \operatorname{span}(w)$，使得

$$(T-\lambda I)v = 0$$

所以 $\operatorname{span}(v)$ 是 T 的一个一维不变子空间.

作业

12. 设 $T \in \mathcal{L}(V)$, 并且 V 中每个向量都是 T 的本征向量. 证明 T 是恒等算子的标量倍.

提示：是不是从前面的某个定理立刻得出，
该算子对应的矩阵是对角矩阵，
对角元是不是都相同呢？如果有两个不同，是不是
立刻可以找一个向量，使得这个向量不是该算子的
特征向量？

13. 设 $T \in \mathcal{L}(V)$, 并且 V 的每个 $\dim V - 1$ 维子空间在 T 下都是不变的. 证明 T 是恒等算子的标量倍.

提示：我们前面是不是学习过一个定理，

两个不变子空间的交还是不变子空间？

利用这个定理，加上条件，我们可以证明

T具有n个不变的子空间(假设n=dim V)，从而具有n

个线性无关的特征向量$v_1, \cdots, v_n$,分别对应着特征值

$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$.

下面的任务是我们如何证明$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n$

如果$\lambda_1 \neq \lambda_2$,

那么我们知道$v_1 + v_2$不是T的特征向量.

大家可以验证一下$\mathrm{span}(v_1 + v_2, v_3, \cdots, v_n)$是一个$n-1$维的

子空间，但是它不是T的不变子空间。

14. 设 $S,T\in\mathcal{L}(V)$, 并且 S 是可逆的. 证明: 若 $p\in\mathcal{P}(\mathbf{F})$ 是多项式, 则

$$p(STS^{-1})=Sp(T)S^{-1}.$$

15. 设 $\mathbf{F}=\mathbf{C}$, $T\in\mathcal{L}(V)$, $p\in\mathcal{P}(\mathbf{C})$, $a\in\mathbf{C}$. 证明 a 是 $p(T)$ 的本征值当且仅当对于 T 的某个本征值 λ 有 $a=p(\lambda)$.

16. 证明前一个习题的结果对于 $\mathbf{R}$ 不成立.

17. 设 V 是复向量空间, 并设 $T\in\mathcal{L}(V)$. 证明: 对每个 $j=1,\cdots,\dim V$, T 都有一个 j 维的不变子空间.

18. 给出一个可逆算子, 使得该算子关于某个基的矩阵的对角线上只有 0.

19. 给出一个不可逆算子, 使得该算子关于某个基的矩阵的对角线上的数都非零.

17题提示：

对于复向量空间，我们有一个定理是说， 我们可以找到一组基，

$(v_1,\cdots,v_n)$

使得T的矩阵是上三角矩阵，

$$Mat(T)=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

检查一下，看看$span(v_1), span(v_1,v_2),\cdots$

是不是题目要求的$1,2,\cdots$维不变子空间。