线性映射的逆

$\mathcal{L}(V,W)$ 是一个向量空间，$T \in \mathcal{L}(V,W)$ 自然有加法逆。

线性映射的逆

$\mathcal{L}(V,W)$ 是一个向量空间，$T\in\mathcal{L}(V,W)$ 自然有加法逆。

然而我们下面要研究的另外一种逆。

$T\in\mathcal{L}(V,W)$，$S\in\mathcal{L}(W,V)$.

那么 $TS\in\mathcal{L}(W,W)$ domain 和 codomain 相同，可简写成 $\mathcal{L}(W)$.

$ST\in\mathcal{L}(V,V)$.

如果 $TS=I(W,W)$，$ST=I(V,V)$ 称 S 是 T 的逆。

W 上的恒等映射　V 上的恒等映射

映射的逆和高中学习的函数的反函数.

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad\qquad g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^3 \qquad\qquad x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$$

大家可以验证 $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^{\frac{1}{3}}) = (x^{\frac{1}{3}})^3 = x$

$(g \circ f)(x) = x$

f 和 g 互为对方的反函数 $f = g^{-1}$, $g = f^{-1}$

映射的逆和高中学习的函数的反函数.

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad\qquad g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^3 \qquad\qquad x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$$

大家可以验证 $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^{\frac{1}{3}}) = (x^{\frac{1}{3}})^3 = x$

$$(g \circ f)(x) = x$$

f 和 g 互为对方的反函数 $f = g^{-1}$, $g = f^{-1}$

映射 $T: V \to W$ 和映射 $S: V \to W$ 如果满足

$$T \circ S = I \qquad S \circ W = I$$

则 T 和 S 互为对方的逆映射.

我们线性代数关心的是 $T \in \mathcal{L}(V,W)$, $S \in \mathcal{L}(W,V)$ 的情形.

$T \in \mathcal{L}(V,W)$ 的逆是唯一的.

正像有些数没有反逆数一样，不是所有的 $T \in \mathcal{L}(V,W)$ 都有逆，但如果有，则一定是唯一的。

$T \in \mathcal{L}(V,W)$ 的逆是惟一的.

正像有些数没有反逆数一样，不是所有的 $T \in \mathcal{L}(V,W)$ 都有逆，但如果有，则一定是惟一的。

命题：$T \in \mathcal{L}(V,W)$ 的逆如果存在则是惟一的。

证明：设 $S, \tilde{S} \in \mathcal{L}(W,V)$ 是 T 的逆.

即 $TS = I \in \mathcal{L}(W,W)$, $ST = I \in \mathcal{L}(V,V)$

$T\tilde{S} = I$ $\quad\quad$ $\tilde{S}T = I$

$\tilde{S} = \tilde{S}\underset{\in \mathcal{L}(W,W)}{I} = \tilde{S}TS$

$T \in \mathcal{L}(V,W)$ 的逆是唯一的.

正像有些数没有反函数一样，不是所有的 $T \in \mathcal{L}(V,W)$ 都有逆，但如果有，则一定是唯一的。

命题：$T \in \mathcal{L}(V,W)$ 的逆如果存在则是唯一的.

证明：设 $S, \tilde{S} \in \mathcal{L}(W,V)$ 是 T 的逆.

即 $TS = I \in \mathcal{L}(W,W)$, $ST = I \in \mathcal{L}(V,V)$

$T\tilde{S} = I$ $\qquad \tilde{S}T = I$

$\tilde{S} = \tilde{S} I$

$\in \mathcal{L}(W,W)$

$T\in\mathcal{L}(V,W)$ 的逆是唯一的.

正像有些数没有反函数一样，不是所有的 $T\in\mathcal{L}(V,W)$ 都有逆，但如果有，则一定是唯一的。

命题：$T\in\mathcal{L}(V,W)$ 的逆如果存在则是唯一的。

证明：设 $S,\tilde{S}\in\mathcal{L}(W,V)$ 是 T 的逆.

即 $\boxed{TS=I}\in\mathcal{L}(W,W)$, $ST=I\in\mathcal{L}(V,V)$

$T\tilde{S}=I$ $\qquad$ $\tilde{S}T=I$

$$\tilde{S}=\tilde{S}\underset{\in\mathcal{L}(W,W)}{I}=\tilde{S}(TS)$$

$T \in \mathcal{L}(V,W)$ 的逆是唯一的.

正像有些数没有反逆数一样，不是所有的 $T \in \mathcal{L}(V,W)$ 都有逆，但如果有，则一定是唯一的。

命题：$T \in \mathcal{L}(V,W)$ 的逆如果存在则是唯一的.

证明：设 $S, \tilde{S} \in \mathcal{L}(W,V)$ 是 T 的逆.

即 $\boxed{TS = I} \in \mathcal{L}(W,W)$, $ST = I \in \mathcal{L}(V,V)$

$T\tilde{S} = I$ $\quad \tilde{S}T = I$

$$\tilde{S} = \underbrace{\tilde{S}I}_{\in \mathcal{L}(W,W)} = (\tilde{S}T)S$$

映射乘积的结合律

$T \in \mathcal{L}(V,W)$ 的逆是惟一的.

正像有些数没有反些数一样, 不是所有的 $T \in \mathcal{L}(V,W)$ 都有逆, 但如果有, 则一定是惟一的。

命题: $T \in \mathcal{L}(V,W)$ 的逆如果存在则是惟一的.

证明: 设 $S, \tilde{S} \in \mathcal{L}(W,V)$ 是 T 的逆.

即 $\boxed{TS = I} \in \mathcal{L}(W,W)$, $ST = I \in \mathcal{L}(V,V)$

$T\tilde{S} = I$ $\quad$ $\tilde{S}T = I$

$$\tilde{S} = \tilde{S}\underset{\in \mathcal{L}(W,W)}{I} = (\tilde{S}T)S = IS$$

映射乘积的结合律

$T \in \mathcal{L}(V,W)$ 的逆是惟一的.

正像有些数没有反些数一样，不是所有的 $T \in \mathcal{L}(V,W)$ 都有逆，但如果有，则一定是惟一的。

命题：$T \in \mathcal{L}(V,W)$ 的逆如果存在则是惟一的.

证明：设 $S, \tilde{S} \in \mathcal{L}(W,V)$ 是 T 的逆.

即 $\boxed{TS = I} \in \mathcal{L}(W,W)$, $ST = I \in \mathcal{L}(V,V)$

$T\tilde{S} = I$　　$\tilde{S}T = I$

$\tilde{S} = \tilde{S}\underset{\in \mathcal{L}(W,W)}{I} = (\tilde{S}T)S = IS = S$　证毕.

$Iv = v \quad \forall v \in V$

映射乘积的结合律

$T \in \mathcal{L}(V, W)$ 的逆是唯一的.

命题: $T \in \mathcal{L}(V, W)$ 的逆如果存在则是唯一的。

由于 T 的逆是唯一的, we say the inverse of T

$T \in \mathcal{L}(V,W)$ 的逆是唯一的.

命题: $T \in \mathcal{L}(V,W)$ 的逆如果存在则是唯一的。

由于 T 的逆是唯一的, we say $\boxed{\text{the}}$ inverse of T.

记作 T^{-1}.

再次提醒 $T \in \mathcal{L}(V,W)$, $T^{-1} \in \mathcal{L}(W,V)$.

$$TT^{-1} = I \in \mathcal{L}(W,W)$$

$$T^{-1}T = I \in \mathcal{L}(V,V)$$

不是每个 $T \in \mathcal{L}(V,W)$ 都是可逆的

例：零映射 $0 \in \mathcal{L}(V,W)$ 定义如下

$$\underbrace{0}_{\text{零映射}} v = \underbrace{0}_{W\text{中的零元素}} \quad \forall v \in V$$

显然 $\forall S \in \mathcal{L}(W,V)$.

可以验证 $0S = 0$

不是每个 $T \in \mathcal{L}(V,W)$ 都是可逆的

例：零映射 $0 \in \mathcal{L}(V,W)$ 定义如下

$$0v = 0 \quad \forall v \in V$$

零映射　W中的零元素

显然 $\forall S \in \mathcal{L}(W,V)$.

可以验证 $0S = 0$.

$0 \in \mathcal{L}(V,W)$

不是每个 $T\in\mathcal{L}(V,W)$ 都是可逆的

例：零映射 $0\in\mathcal{L}(V,W)$ 定义如下

$$\underbrace{0}_{\text{零映射}}v=\underbrace{0}_{W\text{中的零元素}}\qquad\forall v\in V$$

显然 $\forall S\in\mathcal{L}(W,V)$

可以验证 $0S=0$，

$0\in\mathcal{L}(V,W)$ $\qquad$ $0\in\mathcal{L}(V,V)$

因此 $0\in\mathcal{L}(V,W)$ 是不可逆的。 就是没有逆的。

什么样的 $T \in \mathcal{L}(V,W)$ 是可逆的？

这和函数具有反函数的特征一样：f 是单射和满射。

3.17 命题：一个线性映射是可逆的当且仅当它是既是单的又是满的。

证明：$T \in \mathcal{L}(V,W)$ 是可逆的 $\Rightarrow$ T 既单又满.

$\forall\ v, u \in V$，且 $Tv = Tu$.

T 可逆，即有 $T^{-1} \in \mathcal{L}(W,V)$，使得

$$T^{-1}T = I \in \mathcal{L}(V,V)$$

什么样的 $T \in \mathcal{L}(V,W)$ 是可逆的?

这和函数具有反函数的特征一样: f是单射和满射.

3.17 命题: 一个线性映射是可逆的当且仅当它是既是单的又是满的.

证明: $T \in \mathcal{L}(V,W)$ 是可逆的 $\Rightarrow$ T 既单又满.

$\forall\ v, u \in V$, 且 $\boxed{Tv = Tu.}$

T 可逆, 即有 $T^{-1} \in \mathcal{L}(W,V)$, 使得

$$T^{-1}T = I \in \mathcal{L}(V,V)$$

两边同时左乘 T^{-1}, 得 $T^{-1}Tv = T^{-1}Tu$

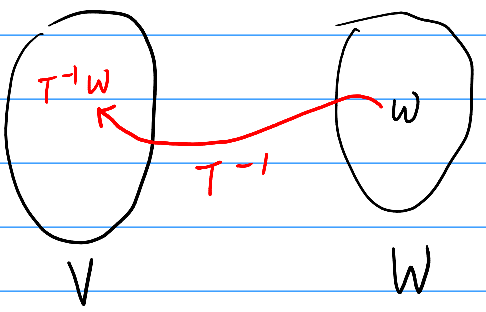
I 是 V 上的恒等映射

$Iv = Iu$

从而 $v = u$. 这就证明了 T 是单射.

继续证 T 是满射.

$\forall\ w \in W$,



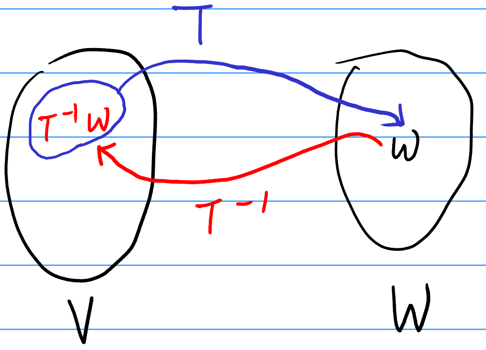
$Iv = Iu$ ← I 是 V 上的恒等映射

从而 $v = u$. 这就证明了 T 是单射.

继续证 T 是满射.

$\forall\, w \in W$,

Recall that $TT^{-1} = I$



是 V 上的恒等映射

$Iv = Iu$

从而 $v = u$. 这就证明了 T 是单射.

继续证 T 是满射.

Recall that $TT^{-1} = I$

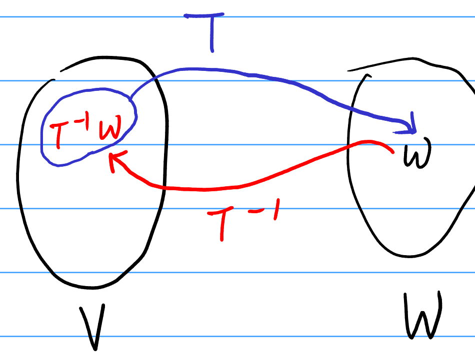
$\forall\ w \in W$,

由于 T 可逆, $T^{-1} \in \mathcal{L}(W, V)$

$T^{-1}w \in V$

而且 $T(T^{-1}w) = (TT^{-1})w$

$= Iw = w$



$I v = I u$ ↗ 是 V 上的恒等映射

从而 $v = u$. 这就证明了 T 是单射.

继续证 T 是满射.

$\boxed{\forall\ w \in W,}$

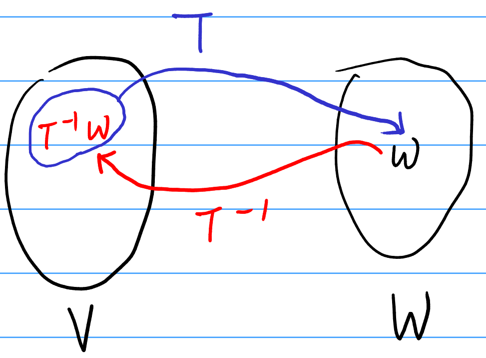
由于 T 可逆, $T^{-1} \in \mathcal{L}(W, V)$

$\boxed{\text{能找到}\quad T^{-1}w \in V}$

使得 而且 $\boxed{T(T^{-1}w)} = (TT^{-1})w$

$= Iw = w$

Recall that $TT^{-1} = I$



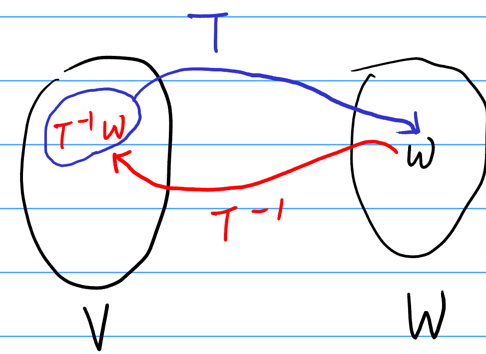
I 是 V 上的恒等映射

$Iv = Iu$

从而 $v = u$. 这就证明了 T 是单射.

继续证 T 是满射.

Recall that $TT^{-1} = I$



$\boxed{\forall\ w \in W,}$

由于 T 可逆, $T^{-1} \in \mathcal{L}(W, V)$

$\boxed{\text{能找到}\quad T^{-1}w \in V}$

使得

而且 $\boxed{T(T^{-1}w)} = (TT^{-1})w$

$= Iw = w$

这就证明了 T 是满射. 至此, 我们就由 T 可逆证出了 T 既单且满.

再证明 T 既单且满 $\Rightarrow$ T 是可逆的.

因为 $T \in \mathcal{L}(V, W)$ 是满射，所以 $\forall\, w \in W$，

都存在 $v \in V$，使得

$$Tv = w$$

因为 T 是单射，使得 $Tv = w$ 的 v 还是唯一的。

再证明 T 既单且满 $\Rightarrow$ T 是可逆的.

因为 $T \in \mathcal{L}(V, W)$ 是满射, 所以 $\forall w \in W$, 都存在 $v \in V$, 使得

$$Tv = w,$$

再证明 T 既单且满 $\Rightarrow$ T 是可逆的.

因为 $T \in \mathcal{L}(V, W)$ 是满射，所以 $\forall w \in W$，都存在 $v \in V$，使得

$$Tv = w$$

因为 T 是单射，使得 $Tv = w$ 的 v 还是唯一的。也就是说 $\forall w \in W$，存在唯一的 $v \in V$，与 w 对应.

这就得到了从 W 到 V 的一个映射，记为 S

$$Sw = v$$ 其中 v 就是满足 $Tv = w$ 的那个唯一的 v.

验证 $ST=I$, $TS=I$ 这由 S 的定义易验证.

验证 $ST=I$，$TS=I$ 这由 S 的定义易验证.

还要验证 S 是线性映射.

$\forall\ w, \tilde{w} \in W$，由 S 的定义知

$Sw = v$，其中 $Tv = w$

$S\tilde{w} = \tilde{v}$，其中 $T\tilde{v} = \tilde{w}$

验证 $ST=I$，$TS=I$ 这由 S 的定义易验证.

还要验证 S 是线性映射.

$\forall\ w, \tilde{w} \in W$，由 S 的定义知

$Sw = v$，其中 $Tv = w$

$S\tilde{w} = \tilde{v}$，其中 $T\tilde{v} = \tilde{w}$

由这个 以及 T 是线性映射知 $Tv + T\tilde{v} = w + \tilde{w}$

验证 $ST = I$，$TS = I$ 这由 S 的定义易验证.

还要验证 S 是线性映射.

$\forall\ w, \tilde{w} \in W$，由 S 的定义知

$Sw = v$，其中 $\boxed{Tv = w}$

$S\tilde{w} = \tilde{v}$，其中 $\boxed{T\tilde{v} = \tilde{w}}$

由这个 以及 T 是线性映射知 $Tv + T\tilde{v} = w + \tilde{w}$

$T(v + \tilde{v}) = w + \tilde{w}$

验证 $ST=I$，$TS=I$ 这由 S 的定义易验证.

只要验证 S 是线性映射.

$\forall\ w, \tilde{w} \in W$，由 S 的定义知

$Sw = v$，其中 $Tv = w$
$S\tilde{w} = \tilde{v}$，其中 $T\tilde{v} = \tilde{w}$

由这个以及 T 是线性映射知 $Tv + T\tilde{v} = w + \tilde{w}$

$T(v+\tilde{v}) = w+\tilde{w}$

由 S 的定义知 $S(w+\tilde{w}) = v+\tilde{v}$

验证 $ST=I$，$TS=I$ 这由 S 的定义易验证.

还要验证 S 是线性映射.

$\forall\ w, \tilde{w} \in W$，由 S 的定义知

$Sw = v$，其中 $Tv = w$

$S\tilde{w} = \tilde{v}$，其中 $T\tilde{v} = \tilde{w}$

由这个以及 T 是线性映射知 $Tv + T\tilde{v} = w + \tilde{w}$

$T(v+\tilde{v}) = w + \tilde{w}$

由 S 的定义知 $S(w+\tilde{w}) = v + \tilde{v}$

验证 $ST=I$，$TS=I$ 这由 S 的定义易验证.

还要验证 S 是线性映射.

$\forall\ w, \tilde{w} \in W$，由 S 的定义知

$Sw = v$，其中 $Tv = w$

$S\tilde{w} = \tilde{v}$，其中 $T\tilde{v} = \tilde{w}$

由这个 以及 T 是线性映射知 $Tv + T\tilde{v} = w + \tilde{w}$

$T(v+\tilde{v}) = w + \tilde{w}$

由 S 的定义知 $S(w+\tilde{w}) = v + \tilde{v}$ 得到 $S(w+\tilde{w}) = Sw + S\tilde{w}$

这就证明了 S 的加性.

再证明 S 满足齐性

$\forall a \in F, w \in W,$

根据 S 的定义知，

$v = Sw$ 其中 $Tv = w$，

再证明 S 满足齐性

$\forall a \in F,\ w \in W,$

根据 S 的定义知，

$v = Sw$. 其中 $Tv = w$,

两边同乘以 a，得 $a(Tv) = aw$

因为 T 是线性映射，所以 $T(av) = aw$

根据 S 的定义知 $S(aw) = av$

再证明 S 满足齐性

$\forall a \in F,\ w \in W,$

根据 S 的定义知,

$\boxed{v = Sw}$ 其中 $\boxed{Tv = w}$,

两边同乘以 a, 得 $a(Tv) = aw$

因为 T 是线性映射, 所以 $T(av) = aw$

根据 S 的定义知 $\boxed{S(aw) = av}$ 得出 $S(aw) = a(Sw)$

这就证明了 S 是齐性。

再证明 S 满足齐性

$\forall a \in F,\ w \in W$,

根据 S 的定义知,

$\boxed{v = Sw}$ 其中 $Tv = w$,

两边同乘以 a, 得 $a(Tv) = aw$

因为 T 是线性映射, 所以 $T(av) = aw$

根据 S 的定义知 $\boxed{S(aw) = av}$ 得出 $S(aw) = a(Sw)$

这就证明了 S 是有齐性。

至此, 我们就证明了 $S \in \mathcal{L}(W, V)$, 且 S 是 T 的逆, 即 T 可逆.

回顾

$T \in \mathcal{L}(V, W)$ 可逆 $\Leftrightarrow$ T 即单又满.

而证明

T 可逆 $\Rightarrow$ T 即单又满.

回顾

$T \in \mathcal{L}(V, W)$ 可逆 $\Leftrightarrow$ T 即单又满.

而证明

> T 可逆 $\Rightarrow$ T 即单又满. 这和一般的
> 映射可逆 $\Rightarrow$ T 即单又满 没有区别, 是容易的

回顾

$T \in \mathcal{L}(V, W)$ 可逆 $\Leftrightarrow$ T 即单又满。

而证明

T 可逆 $\Rightarrow$ T 即单又满。这和一般的映射可逆 $\Rightarrow$ T 即单又满没有区别，是容易的

T 既单又满 $\Rightarrow$ T 可逆

回顾

$T \in \mathcal{L}(V,W)$ 可逆 $\Leftrightarrow$ T 即单又满.

的证明

T 可逆 $\Rightarrow$ T 即单又满. 这和一般的映射可逆 $\Rightarrow$ T 即单又满 没有区别, 是容易的

T 既单又满 $\Rightarrow$ T 可逆

也和一般映射的情况无区别.

回顾

$T \in \mathcal{L}(V, W)$ 可逆 $\Leftrightarrow$ T 即单又满.

的证明

T 可逆 $\Rightarrow$ T 即单又满. 这和一般的映射可逆 $\Rightarrow$ T 即单又满 没有区别, 是容易的

T 既单又满 $\Rightarrow$ T 可逆
也和一般映射的情况无区别.

但是 T 是线性映射, 需要验证它的逆映射是线性映射.