§3.3 线性映射的矩阵

回想上一节学习的线性方程组和构造的相应的相应的映射

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$e_1 = (1, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n$

映射 $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $\qquad$ $\mathbb{R}^n$ 的标准基 $e_1, \cdots, e_n$

$(x_1, \cdots, x_n) \mapsto (\sum_{i=1}^{n} a_{1i}x_i, \cdots, \sum_{i=1}^{m} a_{mi}x_i)$ $\mathbb{R}^m$ 的标准基 $f_1, \cdots, f_m$

映射 T 可由 a_{ij} 共 mn 个数来表示.

$f_1 = (1, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^m$

矩阵（线性方程组的矩阵）

线性方程组的系数 a_{ij} $i=1,\cdots,m,\ j=1,\cdots,n$

可以排成下面的长方形阵列

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

这就是一个矩阵（matrix）

矩阵（线性映射的矩阵）

$$T: F^n \longrightarrow F^m$$

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \longmapsto (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n, \cdots, a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

矩阵（线性映射的矩阵）

$$T: F^n \longrightarrow F^m$$

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \longmapsto (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n, \ \underbrace{\cdots}_{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n}, \ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$Te_1 = T(1, 0, \cdots, 0) = (a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{m1})$$

矩阵（线性映射的矩阵）

$$T: F^n \longrightarrow F^m$$

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \longmapsto (\underbrace{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n, \cdots}_{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n}, a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$Te_1 = T(1, 0, \cdots, 0) = (a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{m1})$$

矩阵（线性映射的矩阵）

$$T: F^n \longrightarrow F^m$$

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \longmapsto (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n, \cdots, a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n)$$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n$

$$\begin{array}{cccc} e_1 & & & \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$Te_1 = T(1, 0, \cdots, 0) = (a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{m1})$$

矩阵（线性映射的矩阵）

$$T: F^n \longrightarrow F^m$$

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \longmapsto \left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n, \underbrace{\cdots}_{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n}, a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \right)$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1 & \phantom{a_{12}} & & \phantom{a_{1n}} \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$Te_1 = T(1, 0, \cdots, 0) = (a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{m1}) = a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + \cdots + a_{m1}f_m$$

矩阵（线性映射的矩阵）

$$T: F^n \longrightarrow F^m$$

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \longmapsto (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n, \cdots, a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n$$

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} e_1 & & & \end{array} \\
\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}
\end{array}$$

$$Te_1 = T(1, 0, \cdots, 0) = (a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{m1}) = a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + \cdots + a_{m1}f_m$$

矩阵（线性映射的矩阵）

$$T: F^n \longrightarrow F^m$$

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \longmapsto (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n, \underbrace{\cdots}_{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n}, a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n)$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} e_1 & & & \end{array} \\ \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$Te_1 = T(1, 0, \cdots, 0) = (a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{m1}) = a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + \cdots + a_{m1}f_m$$

这意味着矩阵的第1列是映射T作用在 $\underset{\text{domain}}{F^n}$ 的第1个基 e_1 上得到 Te_1 用 $\underset{\text{codomain}}{F^m}$ 的基 $(f_1, \cdots, f_m)$ 展开的系数.

矩阵（线性映射的矩阵）

$$T: F^n \longrightarrow F^m$$

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \longmapsto (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n, \cdots, a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n)$$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n$

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & & \end{array} \\
\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}
\end{array}$$

$$Te_1 = T(1, 0, \cdots, 0) = (a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{m1}) = a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + \cdots + a_{m1}f_m$$

you check $Te_2 = T(0, 1, \cdots, 0) = (a_{12}, a_{22}, \cdots, a_{m2}) = a_{12}f_1 + a_{22}f_2 + \cdots + a_{m2}f_m$

矩阵（线性映射的矩阵）

$$T: F^n \longrightarrow F^m$$

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \longmapsto (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n, \ \cdots, \ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & & e_n \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$Te_1 = T(1, 0, \cdots, 0) = (a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{m1}) = a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + \cdots + a_{m1}f_m$$

you check $Te_2 = T(0, 1, \cdots, 0) = (a_{12}, a_{22}, \cdots, a_{m2}) = a_{12}f_1 + a_{22}f_2 + \cdots + a_{m2}f_m$

最后　第n列是Te_n在codomain的基$(f_1, \cdots, f_n)$下的展开系数.

线性映射的矩阵

我们刚才讨论的是从线性方程组导出的映射，

$$T: F^n \to F^m$$

我们在选定了 domain 和 codomain 的基之后，就把映射用一个矩阵来表示了。这个矩阵称为线性映射的矩阵（precisely，还要把 domain 和 codomain 用的基点出来）。

线性映射的矩阵

我们刚才讨论的是从线性方程组导出的映射，

$T: F^n \to F^m$

我们在选定了 domain 和 codomain 的基之后，就把映射用一个矩阵来表示了。这个矩阵称为线性映射的矩阵（precisely，还要把 domain 和 codomain 用的基点出来）。

把线性映射用一个矩阵表示的方法可以推广到一般的 $T \in \mathcal{L}(V, W)$，其中 V 和 W 是 F 上的向量空间

$T\in\mathcal{L}(V,W)$ 的矩阵

设 $(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ 是 V 的一个基，$(f_1,\cdots,f_m)$ 是 W 的一个基，$T\in\mathcal{L}(V,W)$. 那么存在 $a_{ij}\in F$

$i=1,\cdots,m$, $j=1,\cdots,n$ 使得

$$
\begin{aligned}
Te_1 &= a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + \cdots + a_{m1}f_m \\
Te_2 &= a_{12}f_1 + a_{22}f_2 + \cdots + a_{m2}f_m \\
&\vdots \\
Te_n &= a_{1n}f_1 + a_{2n}f_n + \cdots + a_{mn}f_m
\end{aligned}
$$

称 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ 是线性映射 T 关于基 $(e_1,\cdots,e_n)$ 和基 $(f_1,\cdots,f_n)$ 的矩阵，记为 $\mathcal{M}(T,(e_1,\cdots,e_n),(f_1,\cdots,f_n))$

如果所使用的基是自明的，可以省略后写成 $\mathcal{M}(T)$

这里$(e_1,e_2,\cdots,e_n)$不是$\mathbb{R}^n$的标准基，只是用了相同的记号
它是V的一个基，而V可能是任意的向量空间，如$P_{n-1}(F)$

$T\in\mathcal{L}(V,W)$的矩阵

设$(e_1,e_2,\cdots,e_n)$是V的一个基，$(f_1,\cdots,f_m)$是W的一个基，$T\in\mathcal{L}(V,W)$. 那么存在$a_{ij}\in F$，$i=1,\cdots,m$，$j=1,\cdots,n$ 使得

$$Te_1 = a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + \cdots + a_{m1}f_m$$

$$Te_2 = a_{12}f_1 + a_{22}f_2 + \cdots + a_{m2}f_m$$

$$\vdots$$

$$Te_n = a_{1n}f_1 + a_{2n}f_n + \cdots + a_{mn}f_m$$

称
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$
是线性映射T关于基$(e_1,\cdots,e_n)$和基$(f_1,\cdots,f_n)$的矩阵，记为$\mathcal{M}(T,(e_1,\cdots,e_n),(f_1,\cdots,f_n))$

如果所使用的基是自明的，可以省略后写成$\mathcal{M}(T)$

线性映射的矩阵举例

例. $T \in \mathcal{L}(F^2, F^3)$ 定义如下

$$T(x,y) = (x+3y,\ 2x+5y,\ 7x-9y)$$

F^2 和 F^3 的基分别取 $e_1=(1,0),\ e_2=(0,1)$ 标准基

和 $f_1=(1,0,0),\ f_2=(0,1,0),\ f_3=(0,0,1)$

$$M(T;(e_1,e_2),(f_1,f_2,f_3)) =$$

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cc} e_1 & \quad e_2 \end{array} \\
\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & \quad \\ 2 & \quad \\ 7 & \quad \end{bmatrix}
\end{array}$$

线性映射的矩阵举例

例. $T \in \mathcal{L}(F^2, F^3)$ 定义如下

$$T(x,y) = (x+3y,\ 2x+5y,\ 7x-9y)$$

F^2 和 F^3 的基分别取 $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ → 标准基

和 $f_1 = (1,0,0)$, $f_2 = (0,1,0)$, $f_3 = (0,0,1)$

$$\mathcal{M}(T; (e_1, e_2), (f_1, f_2, f_3)) =$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} e_1 & \quad e_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{array} & \begin{bmatrix} \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 7 \end{array}} & \quad \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\boxed{Te_1 = T(1,0) = (1,2,7) = \boxed{1} f_1 + \boxed{2} f_2 + \boxed{7} f_3}$$

线性映射的矩阵举例

例. $T \in \mathcal{L}(F^2, F^3)$ 定义如下

$$T(x, y) = (x+3y,\ 2x+5y,\ 7x-9y)$$

F^2 和 F^3 的基分别取 $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ 标准基

和 $f_1 = (1, 0, 0)$, $f_2 = (0, 1, 0)$, $f_3 = (0, 0, 1)$

$$\mathcal{M}(T; (e_1, e_2), (f_1, f_2, f_3)) =$$

$$\begin{array}{c|cc} & e_1 & e_2 \\ \hline f_1 & & \\ f_2 & & \\ f_3 & & \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{T e_1 = T(1, 0) = (1, 2, 7) = \boxed{1} f_1 + \boxed{2} f_2 + \boxed{7} f_3}$$

$$T e_2 = T(0, 1) = (3, 5, 9) = 3 f_1 + 5 f_2 + 9 f_3$$

线性映射的矩阵举例

设 T 是 $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ 到 $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ 的求导算子.

取 $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ 的基为 $e_1 = 1,\ e_2 = x,\ e_3 = x^2$

这里 domain 和 codomain 取同一个基

表示 $\mathbb{R}$ 中的数 0

$$Te_1 = \frac{d}{dx} 1 = 0 = 0e_1 + 0e_2 + 0e_3$$

表示 $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ 中的 0 函数

$$\begin{array}{cc} & e_1 \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & & \\ 0 & & \\ 0 & & \end{bmatrix} \end{array}$$

线性映射的矩阵举例

设 T 是 $P_2(\mathbb{R})$ 到 $P_2(\mathbb{R})$ 的求导算子.

取 $P_2(\mathbb{R})$ 的基为 $e_1 = 1$, $e_2 = x$, $e_3 = x^2$

这里 domain 和 codomain 取同一个基

表示 $\mathbb{R}$ 中的数 0

$$Te_1 = \frac{d}{dx} 1 = 0 = 0e_1 + 0e_2 + 0e_3$$

表示 $P_2(\mathbb{R})$ 中的 0 多项式

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \end{bmatrix} \end{array}$$

$$Te_2 = \frac{d}{dx} x = 1 = 1e_1 + 0e_2 + 0e_3$$

线性映射的矩阵举例

设 T 是 $P_2(\mathbb{R})$ 到 $P_2(\mathbb{R})$ 的求导算子.

取 $P_2(\mathbb{R})$ 的基为 $e_1 = 1,\ e_2 = x,\ e_3 = x^2$

这里 domain 和 codomain 取同一个基

表示 $\mathbb{R}$ 中的数 0

$$Te_1 = \frac{d}{dx}1 = 0 = 0e_1 + 0e_2 + 0e_3$$

表示 $P_2(\mathbb{R})$ 中的 0 函数

domain in basis

$$\begin{array}{c|ccc} & e_1 & e_2 & e_3 \\ \hline e_1 & 0 & 1 & 0 \\ e_2 & 0 & 0 & 2 \\ e_3 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$Te_2 = \frac{d}{dx}x = 1 = 1e_1 + 0e_2 + 0e_3$$

$$Te_3 = \frac{d}{dx}x^2 = 2x = 0e_1 + 2e_2 + 0e_3$$

codomain in basis

线性映射的矩阵举例

设 T 是 $P_2(\mathbb{R})$ 到 $P_2(\mathbb{R})$ 的求导算子.

取 $P_2(\mathbb{R})$ 的基为 $e_1 = 1,\ e_2 = x,\ e_3 = x^2$

这里 domain 和 codomain 取同一个基

表示 $\mathbb{R}$ 中的数 0

$$Te_1 = \frac{d}{dx}1 = 0 = 0e_1 + 0e_2 + 0e_3$$

表示 $P_2(\mathbb{R})$ 中的 0 函数

$$Te_2 = \frac{d}{dx}x = 1 = 1e_1 + 0e_2 + 0e_3$$

$$Te_3 = \frac{d}{dx}x^2 = 2x = 0e_1 + 2e_2 + 0e_3$$

domain 的 basis

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

codomain 的 basis

$$\mathcal{M}(T;(e_1,e_2,e_3),(e_1,e_2,e_3)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

线性映射和的矩阵

下面我们总假设 $(v_1, \dots, v_n)$ 是 V 的一个基，

$(f_1, \dots, f_m)$ 是 W 的一个基。

$\mathcal{L}(V,W)$ 中的映射的矩阵总是关于

基 $(e_1, \dots, e_n)$ 和基 $(f_1, \dots, f_n)$ 的。

$S \in \mathcal{L}(V,W)$，$\mathcal{M}(S) = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$

$T \in \mathcal{L}(V,W)$，$\mathcal{M}(T) = [b_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$.

和映射 $S+T$ 的矩阵是什么？

和映射的矩阵

回顾映射矩阵的定义.

$$M(S) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$Se_1 = a_{11} f_1 + \cdots + a_{m1} f_m$$

和映射的矩阵

回顾映射矩阵的定义

$$m(S) = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{matrix}} & \begin{matrix} \cdots \\ \ddots \\ \cdots \end{matrix} & \begin{matrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{matrix} \end{bmatrix}$$

$$Se_1 = \underline{a_{11}} f_1 + \cdots + \underline{a_{m1}} f_m$$

第一列是 Se_1 在基 $(f_1, \cdots, f_m)$ 下的展开系数.

和映射的矩阵

回顾映射矩阵的定义

$$M(S) = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{matrix}} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$Se_1 = \underline{a_{11}} f_1 + \cdots + \underline{a_{m1}} f_m$$

第一列是 Se_1 在基 $(f_1, \cdots, f_m)$ 下的展开系数

$$M(T) = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

第一列是 Te_1 在基 $(f_1, \cdots, f_m)$ 下的展开系数

和映射 $(S+T)$ 的矩阵的第1列由 $(S+T)e_1$ 在 $(f_1, \cdots, f_m)$ 下的展开系数给出

$$(S+T)e_1 \underset{\text{由和映射的定义}}{=\!=} Se_1 + Te_1 = (a_{11} f_1 + \cdots + a_{m1} f_m) + (b_{11} f_1 + \cdots + b_{m1} f_m)$$

$$\underset{\substack{\text{由W中的交换律} \\ \text{结合律, 分配律}}}{=\!=} (a_{11} + b_{11}) f_1 + \cdots (a_{m1} + b_{m1}) f_m$$

故 $M(S+T)$ 的第一列是 $\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} \\ a_{21}+b_{21} \\ \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} \end{bmatrix}$

和映射的矩阵

$$\mathcal{M}(S+T) = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} \\ a_{21}+b_{21} \\ \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} \end{bmatrix}$$

和映射的矩阵

$$
\mathcal{M}(S+T) = \left[\begin{array}{cc}
a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\
a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \\
\vdots & \vdots \\
a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2}
\end{array}\right.
$$

和映射的矩阵

$$M(S+T) = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

这就是 $M(S)$ 和 $M(T)$ 对应的元素相加所得的新矩阵

和映射的矩阵

$$M(S+T) = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

这就是 $M(S)$ 和 $M(T)$ 对应的元素相加所得的新矩阵

因此，我们定义矩阵的加法：两个大小一样的矩阵的和是把相应的元素相加得到的新矩阵.

和映射的矩阵 $M(S+T)=M(S)+M(T)$

$$M(S+T)=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

这就是 $M(S)$ 和 $M(T)$ 对应的元素相加所得的新矩阵

因此，我们定义矩阵的加法：两个大小一样的矩阵的和是把相应的元素相加得到的新矩阵

综上，我们得到. $\boxed{\text{和映射的矩阵等于映射矩阵的和}}$

映射与数乘的矩阵

$T \in \mathcal{L}(V,W)$, $\mathcal{M}(T) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

$\forall k \in F$ $\quad kT \in \mathcal{L}(V,W)$. $\quad \mathcal{M}(kT) = ?$

映射的数乘的矩阵

$$T \in \mathcal{L}(V,W), \quad \mathcal{M}(T) = \begin{array}{c} \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1 & & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

$\forall k \in F \quad kT \in \mathcal{L}(V,W). \quad \mathcal{M}(kT) = ?$

$\mathcal{M}(kT)$的第一列由$(kT)e_1$在W的基$(f_1,\dots,f_m)$下的展开系数给出.

$$(kT)e_1 = k(Te_1) = k\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1} f_i\right)$$

由映射的矩阵的定义给出

由映射的数乘定义给出

$$= (ka_{11})f_1 + \dots + (ka_{m1})f_m.$$

映射的数乘的矩阵.

$M(kT)$ 的第一列是 $\begin{bmatrix} ka_{11} \\ ka_{21} \\ \vdots \\ ka_{m1} \end{bmatrix}$

映射的数乘的矩阵

$$M(kT) = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

和 $M(T) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ 比较

$M(kT)$ 是把 $M(T)$ 的每个元素都乘以数 k

矩阵 $A = [a_{ij}]$ 和数 $k \in F$ 相乘定义为 $kA = [ka_{ij}]$.

映射的数乘的矩阵

设 $T \in \mathcal{L}(V,W)$，$k \in F$，

那么 $\mathcal{M}(kT) = k\mathcal{M}(T)$.

映射的数乘的矩阵

设 $T \in \mathcal{L}(V, W)$，$k \in F$，

那么 $M(kT) = kM(T)$.

当然，这里有前提，$M(T)$ 和 $M(kT)$ 都是关于 V 和 W 的同一组基下的矩阵。

回顾 $M(S+T) = M(S) + M(T)$.

我们已经定义了矩阵（m 行 n 列的矩阵，或 $m \times n$ 矩阵）的加法和数乘。所有的 $m \times n$ 矩阵构成一个线性空间.

所有的 $m\times n$ 矩阵

课本上用的记号是 $\mathrm{Mat}(m,n,F)$

令 $F^{m\times n} = \{[a_{ij}] : a_{ij}\in F,\ i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n\}$ 表示所有的 $m\times n$ 矩阵. 加法和数乘如前面所定义, 那么 $F^{m\times n}$ 是数域 F 上的一个向量空间.

You can verify that

1. 零元素是零矩阵 $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

$\vdots$

$F^{m\times n}$ 的基和维数.

E_{ij} 表示只有 (i,j)元为1, 其余元素都是0的矩阵.

第i行第j列的元素

我们可以证明 $(E_{11}, E_{12}, \cdots, E_{1n}, E_{21}, \cdots, E_{mn})$ 是 $F^{m\times n}$ 的一个基.

$\forall \quad A = [a_{ij}] \in F^{m\times n}$,

$$A = \sum_{i,j} a_{ij} E_{ij}.$$

$$\dim F^{m\times n} = mn$$

$\mathbb{R}^{3\times 4}$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的向量空间

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$T_{11} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$, $\mathcal{M}(T_{11}) = E_{11}$

那 $T_{11}e_1 = e_1$, $T_{11}e_2 = 0$, $T_{11}e_3 = 0$, $T_{11}e_4 = 0$

$\mathbb{R}^{3\times 4}$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的向量空间

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$T_{11} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$, $\mathcal{M}(T_{11}) = E_{11}$

那 $T_{11} e_1 = e_1$, $T_{11} e_2 = 0$, $T_{11} e_3 = 0$, $T_{11} e_4 = 0$

E_{ij} $\mathcal{M}(T_{ij}) = E_{ij}$. 那么 $\begin{cases} T_{ij} e_j = e_i \\ T_{ij} e_k = 0, & k \neq j \end{cases}$

线性映射乘积的矩阵

设 $S \in \mathcal{L}(\overset{n}{U}, \overset{m}{V})$, $T \in \mathcal{L}(\overset{m}{V}, \overset{l}{W})$。

设 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 是 U 的一个基，$(f_1, \cdots, f_m)$ 是 V 的一个基.

$(g_1, \cdots, g_l)$ 是 W 的一个基.

两个映射的矩阵

$$\mathcal{M}(S) \in F^{m \times n}, \quad \mathcal{M}(T) \in F^{l \times m}.$$

那么 $TS \in \mathcal{L}(\overset{n}{U}, \overset{l}{W})$ 的矩阵是什么？

$$\begin{array}{ccccc} & U & \xrightarrow{S} & V & \xrightarrow{T} & W \\ \text{维数} & n & & m & & l \end{array}$$

线性映射乘积的矩阵

设 $S \in \mathcal{L}(\overset{n}{U}, \overset{m}{V})$，$T \in \mathcal{L}(\overset{m}{V}, \overset{l}{W})$。

设 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 是 U 的一个基，$(f_1, \cdots, f_m)$ 是 V 的一个基.

$(g_1, \cdots, g_l)$ 是 W 的一个基.

两个映射的矩阵

$M(S) \in F^{m\times n}$，$M(T) \in F^{l\times m}$.

那么 $TS \in \mathcal{L}(\overset{n}{U}, \overset{l}{W})$ 的矩阵是什么？

$$\begin{array}{lccccc} & U & \xrightarrow{S} & V & \xrightarrow{T} & W \\ \text{维数} & n & & m & & l \end{array}$$

至少我们知道

$M(TS) \in F^{l\times n}$

线性映射乘积的矩阵

$TS \in \mathcal{L}(U, W)$.

U 的 basis $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$
W 的 basis $(g_1, g_2, \cdots, g_e)$

$M(TS)$ 的第一列是 $(TS)e_1$ 用 $(g_1, \cdots, g_e)$ 展开的系数

$$\underbrace{(TS)e_1 = T(Se_1)}_{\text{用映射乘积而定义}}$$

线性映射乘积的矩阵

$TS \in \mathcal{L}(U, W)$.

U 的 basis $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$

W 的 basis $(g_1, g_2, \cdots, g_e)$

$M(TS)$ 的第一列是 $(TS)e_1$ 用 $(g_1, \cdots, g_e)$ 展开的系数

$(TS)e_1 = T(Se_1)$

用映射乘积而定义

讨论一下

记 $M(S) = [a_{ij}]$

$M(T) = [b_{ij}]$

线性映射乘积的矩阵

$TS \in \mathcal{L}(U, W)$.

U 的 basis $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$

W 的 basis $(g_1, g_2, \cdots, g_e)$

$M(TS)$ 的第一列是 $(TS)e_1$ 用 $(g_1, \cdots, g_e)$ 展开的系数

$$(TS)e_1 = T(Se_1) = T\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1} f_i\right)$$

用映射乘积而定义

用 $M(S)$ 而定义

补充一下

记 $M(S) = [a_{ij}]$

$M(T) = [b_{ij}]$

线性映射乘积的矩阵

$TS \in \mathcal{L}(U, W)$.

U 的 basis $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$

W 的 basis $(g_1, g_2, \cdots, g_e)$

$M(TS)$ 的第一列是 $(TS)e_1$ 用 $(g_1, \cdots, g_e)$ 展开的系数

$$(TS)e_1 \underset{\text{用映射乘积而定义}}{=} T(Se_1) \underset{\text{用}M(S)\text{而定义}}{=} T\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1} f_i\right)$$

补充一下

记 $M(S) = [a_{ij}]$

$M(T) = [b_{ij}]$

$$\underset{\text{用}T\text{是线性映射}}{=} \sum_{i=1}^{m} a_{i1} (Tf_i)$$

线性映射乘积的矩阵

$TS \in \mathcal{L}(U, W)$.

U 的 basis $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$

W 的 basis $(g_1, g_2, \cdots, g_\ell)$

$M(TS)$ 的第一列是 $(TS)e_1$ 用 $(g_1, \cdots, g_\ell)$ 展开的系数

$(TS)e_1 = T(Se_1) = T(\sum_{i=1}^{m} a_{i1} f_i)$ 补充一下

用映射乘积而定义　　用 $M(S)$ 而定义

记 $M(S) = [a_{ij}]$

$M(T) = [b_{ij}]$

$= \sum_{i=1}^{m} a_{i1}(Tf_i) = \sum_{i=1}^{m} a_{i1}(b_{1i}g_1 + \cdots + b_{\ell i}g_\ell)$

用 T 是线性映射

用 $M(T)$ 而定义 $Tf_i = b_{1i}g_1 + \cdots + b_{\ell i}g_\ell$

继续计算 TS 的矩阵的第一列

$$(TS)e_1 = \sum_{i=1}^{m} a_{i1}(b_{1i} g_1 + \cdots + b_{li} g_l)$$

$$= \boxed{\sum_{i=1}^{m} a_{i1} b_{1i}} g_1 + \cdots + \sum_{i=1}^{m} a_{i1} b_{li} g_l$$

$$a_{11} b_{11} + a_{21} b_{12} + \cdots + a_{m1} b_{1m}$$

继续计算 TS 的矩阵的第一列

$$(TS)e_1 = \sum_{i=1}^{m} a_{i1}(b_{1i}g_1 + \cdots + b_{\ell i}g_\ell)$$

$$= \boxed{\sum_{i=1}^{m} a_{i1}b_{1i}}\, g_1 + \cdots + \sum_{i=1}^{m} a_{i1}b_{\ell i}g_\ell$$

$$a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} + \cdots + a_{m1}b_{1m}$$

$M(TS)$ 的第一列是

$$a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} + \cdots + a_{m1}b_{1m}$$

继续计算 TS 的矩阵的第一列

$$(TS)e_1 = \sum_{i=1}^{m} a_{i1}(b_{1i}g_1 + \cdots + b_{li}g_l)$$

$$= \boxed{\sum_{i=1}^{m} a_{i1}b_{1i}}\, g_1 + \cdots + \sum_{i=1}^{m} a_{i1}b_{li}g_l$$

$$a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} + \cdots + a_{m1}b_{1m}$$

g_2 的系数

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i1}b_{2i}g_2$$

$M(TS)$ 的第一列是

$$a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} + \cdots + a_{m1}b_{1m}$$

$$a_{11}b_{21} + a_{21}b_{22} + \cdots + a_{m1}b_{2m}$$

继续计算 TS 的矩阵的第一列

$$(TS)e_1 = \sum_{i=1}^{m} a_{i1}(b_{1i}g_1 + \cdots + b_{li}g_l)$$

$$= \boxed{\sum_{i=1}^{m} a_{i1}b_{1i}}\, g_1 + \cdots + \sum_{i=1}^{m} a_{i1}b_{li}\, g_l$$

$$a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} + \cdots + a_{m1}b_{1m}$$

g_2 的系数

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i1}b_{2i}\, g_2$$

$M(TS)$ 的第一列是

$$a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} + \cdots + a_{m1}b_{1m}$$

$$a_{11}b_{21} + a_{21}b_{22} + \cdots + a_{m1}b_{2m}$$

$$\vdots$$

$$a_{11}b_{l1} + a_{21}b_{l2} + \cdots + a_{m1}b_{lm}$$

继续计算 TS 的矩阵

$M(S) = [a_{ij}]$

$$(TS)e_j = T(Se_j) = T\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i\right)$$

$j = 1, 2, \cdots, n$

继续计算 TS 的矩阵

$M(S) = [a_{ij}]$

U 的 basis (e_i)

V 的 basis (f_i)

W 的 basis (g_i)

$$(TS)e_j = T(Se_j) = T\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} T(f_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \sum_{k=1}^{\ell} b_{ki} g_k$$

Recall $M(T) = [b_{ij}]$

继续计算 TS 的矩阵

$M(S) = [a_{ij}]$

U 的 basis (e_i)

V 的 basis (f_i)

W 的 basis (g_i)

$$(TS)e_j = T(Se_j) = T\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} T(f_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \sum_{k=1}^{\ell} b_{ki} g_k$$

Recall $M(T) = [b_{ij}]$

$$= \sum_{k=1}^{\ell} \left(\sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_{ij}\right) g_k$$

继续计算 TS 的矩阵

$M(S) = [a_{ij}]$

$$(TS)e_j = T(Se_j) = T\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i\right)$$

U 的 basis (e_i)

V 的 basis (f_i)

W 的 basis (g_i)

$$= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} T(f_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \sum_{k=1}^{\ell} b_{ki} g_k$$

Recall $M(T) = [b_{ij}]$

$$= \sum_{k=1}^{\ell} \left(\sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_{ij} \right) g_k$$

$$M(TS) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & 第 j 列 & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} + \cdots + a_{m1}b_{1m} & \cdots & \sum_{i=1}^{m} b_{1i}a_{ij} & \cdots & \sum_{i=1}^{m} b_{1i}a_{in} \\ a_{11}b_{21} + a_{21}b_{22} + \cdots + a_{m1}b_{2m} & \cdots & \sum_{i=1}^{m} b_{2i}a_{ij} & \cdots & \sum_{i=1}^{m} b_{2i}a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{11}b_{\ell 1} + a_{21}b_{\ell 2} + \cdots + a_{m1}b_{\ell m} & & \sum_{i=1}^{m} b_{\ell i}a_{ij} & \cdots & \sum_{i=1}^{m} b_{\ell i}a_{in} \end{bmatrix} \end{array}$$

定义矩阵的乘法

$M(S) \in F^{m\times n}$, $M(T) \in F^{l\times m}$

$M(TS)$ 的元素是由 $M(S)$ 和 $M(T)$ 的元素运算得来，

我们想要得到 $\boxed{M(TS) = M(T)M(S)}$

也就是 映射乘积的矩阵 = 映射矩阵的乘积.

我们要定义合适的矩阵乘法.

$M(TS)$ 的 (k,j) 元 $= \sum_{i=1}^{m} b_{ki}a_{ij}$

矩阵乘法的定义

定义 $A=[a_{ij}]\in F^{m\times n}$，$B=[b_{ij}]\in F^{l\times m}$

定义 BA 的乘积是一个 $l\times n$ 的矩阵

设 $BA=[c_{ij}]$ $i=1,2,\cdots,l$, $j=1,\cdots,n$

则 $c_{ij}=\sum_{k=1}^{m} b_{ik}a_{kj}$

矩阵乘法的定义

定义 $A=[a_{ij}]\in F^{m\times n}$，$B=[b_{ij}]\in F^{l\times m}$

定义 BA 的乘积是一个 $l\times n$ 的矩阵

设 $BA=[c_{ij}]$ $i=1,2,\cdots,l$, $j=1,\cdots,n$

则 $c_{ij}=\sum_{k=1}^{m} b_{ik}a_{kj}$

由矩阵乘积的定义和前面对线性映射乘积的矩阵的推导知 $\boxed{M(TS)=M(T)M(S)}$

矩阵乘积举例

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\4 & 5\\7 & 8\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 2},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 2 & 4\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 3}$$

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 2\\4 & 5\\7 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

矩阵乘积举例

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \in R^{3\times 2}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \in R^{2\times 3}$$

$$AB = \begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2} \\ 4 \quad 5 \\ 7 \quad 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 2 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 4 \end{matrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times 1 + 2\times 0 & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

矩阵乘积举例

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\\ 7 & 8\end{bmatrix}\in \mathbb{R}^{3\times 2},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 4\end{bmatrix}\in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\\ 7 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

矩阵乘积举例

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

矩阵乘积举例

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \in R^{3\times 2}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \in R^{2\times 3}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 10 & 24 \\ 7 & 16 & 39 \end{bmatrix}$$

矩阵乘积举例

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\4&5\\7&8\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 2},\quad B=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&4\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 3}$$

$$AB=\begin{bmatrix}1&2\\4&5\\7&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&4&9\\4&10&24\\7&16&39\end{bmatrix}$$

A 是映射 $T\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3)$ 的矩阵

B 是 $S\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$ 的矩阵

AB 是 $TS\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$ 的矩阵.

矩阵和线性映射

当 V 和 W 是数域 F 上的向量空间，并且选定了 V 的基 $(e_1, \ldots, e_n)$ 和 W 上的一个基 $(f_1, \ldots, f_m)$，

那么，任给 $T \in \mathcal{L}(V, W)$，按照把 Te_i 在基 $(f_1, \ldots, f_m)$ 下的展开系数作为第 i 列的方法就构造了一个唯一的矩阵，即 $M(T)$。

矩阵和线性映射

设 V 和 W 是数域 F 上的向量空间，并且选定了 V 的基 $(e_1,\dots,e_n)$ 和 W 上的一个基 $(f_1,\dots f_m)$，

那么，任给 $T\in\mathcal{L}(V,W)$，按照把 Te_i 在基 $(f_1,\dots,f_m)$ 下的展开系数作为第 i 列方法就构造了一个唯一的矩阵，即 $M(T)$。

反过任给一个矩阵 $A=[a_{ij}]\in F^{m\times n}$，用 $Te_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}f_i$ 也唯一地构造了一个 $T\in\mathcal{L}(V,W)$.

矩阵和线性映射

设 V 和 W 是数域 F 上的向量空间 并且选定了 V 的基 $(e_1,\cdots,e_n)$ 和 W 上的一个基 $(f_1,\cdots f_m)$.

$T\in\mathcal{L}(V,W)$ 和 $F^{n\times m}$ 建立了一个一一对应

先不展开

那么 任给 $T\in\mathcal{L}(V,W)$. 按照把 Te_i 在基 $(f_1,\cdots,f_m)$ 下的展开系数作为第 i 列方法 就构造了一个唯一的矩阵. 即 $M(T)$.

反过任给一个矩阵 $A=[a_{ij}]\in F^{m\times n}$, 用 $Te_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}f_i$ 也唯一地构造了一个 $T\in\mathcal{L}(V,W)$.

线性映射的矩阵知识点回顾

$\rightarrow$ $S \in \mathcal{L}(V,W)$, $T \in \mathcal{L}(V,W)$,

$\Rightarrow$ $S+T \in \mathcal{L}(V,W)$ 且 $\mathcal{M}(S+T) = \mathcal{M}(S) + \mathcal{M}(T)$

$\rightarrow$ $\forall\ k \in F$, $\mathcal{M}(kT) = k\mathcal{M}(T)$

$\rightarrow$ $\forall\ S \in \mathcal{L}(U,V)$, $T \in \mathcal{L}(V,W)$

$\mathcal{M}(TS) = \mathcal{M}(T)\mathcal{M}(S)$