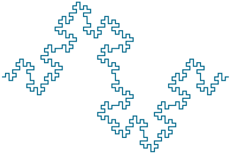
线性代数 B：特征值和特征向量，上三角矩阵

Tiao Lu
Peking University



October 29, 2019

命题：设 V is a finite dimensional vector space, and $T, S \in \mathcal{L}(V)$. 如果 TS 不是单射, 那么 T 和 S 中至少有一个不是单射.

证明: 反证法. 不妨 T 和 S 都是单射.

if $\dim V < \infty$, $T \in \mathcal{L}(V)$ then 单 $\Leftrightarrow$ 满 $\Leftrightarrow$ 可逆

那么 T 和 S 都是可逆的, $T^{-1}, S^{-1} \in \mathcal{L}(V)$

$$(TS)(S^{-1}T^{-1}) = T(SS^{-1})T^{-1} = TIT^{-1} = TT^{-1} = I$$

$$(S^{-1}T^{-1})(TS) = \underbrace{S^{-1}(T^{-1}T)S}_{\text{结合律}} = S^{-1}IS = S^{-1}S = I$$

这就验证了 TS 是可逆的. 从而 TS 是单射.

这与 TS 不是单射矛盾. 故 T, S 中至少有一个不是单射

有限维复线性空间上的线性算子一定有特征值

V, Field $\mathbb{C}$, $n = \dim V < \infty$, $T \in \mathcal{L}(V)$

如果 $a_0 I + a_1 T + \cdots + a_m T^m$ $a_m \neq 0$, 不是单射.

$$a_0 I + a_1 T + \cdots + a_m T^m = c(T - \lambda_1 I)\cdots(T - \lambda_m I)$$

必有 $T - \lambda_i I$ 不单射. 则可证出 T 有特征值

有限维复线性空间上的线性算子一定有特征值

V, Field $\mathbb{C}$, $n=\dim V<\infty$, $T\in\mathcal{L}(V)$

如果 $a_0I+a_1T+\cdots+a_mT^m$ $a_m\neq 0$, 不是单射.

$$a_0I+a_1T+\cdots+a_mT^m=c(T-\lambda_1I)\cdots(T-\lambda_mI)$$

必有 $T-\lambda_iI$ 不单射. 则可证出 T 有特征值

所有的问题就归结到证明存在 $a_0,\ldots,a_m$ 使得

$$a_0I+\cdots+a_mT^m$$

不是单射. $(I, T, \ldots, T^m)$ 是 $\mathcal{L}(V)$ 中的一个向量组,

$\mathcal{L}(V)$ 是有限维的, $\dim\mathcal{L}(V)=\dim V\cdot\dim V=n^2$.

$m+1$

只要 $(I, T, \cdots, T^{m})$ 的长度大于 n^2，则 $(I, \cdots, T^{m})$ 是线性相关的，故存在 $a_0, \cdots, a_{n^2}$ 不全为 0，

使得 $$a_0 I + \cdots + a_{n^2} T^{n^2} = 0$$

自然不是单射.

而 $a_0 I + \cdots + a_{n^2} T^{n^2}$ 的次数一定会大于 0，

（否则，$a_1 = a_2 = \cdots = a_{n^2} = 0$，$a_0 I = 0 \Rightarrow a_0 = 0$，这与 $a_0, \cdots, a_{n^2}$ 不全为 0 矛盾）。

课本上有另一种证明存在 $a_0, \cdots, a_n$ 不全为 0，使得

$$a_0 I + a_1 T + \cdots + a_n T^n \text{ 不是单射}$$

命题：设 $\dim V = n$，$T \in \mathcal{L}(V)$. 那么存在 $a_i \in F$，$i = 0, 1, \cdots, n$ 且 $a_1, \cdots, a_n$ 不全为 0，使得

$$a_0 I + a_1 T + \cdots + a_n T^n$$

不是单射.

证明：取 $v \in V \neq 0$. $(v, Tv, \cdots, T^n v)$ 是 V 中的一个向量组，且其长度为 $n+1$，是大于 $\dim V$.

故 $(v, Tv, \cdots, T^n v)$ 线性相关，

所以存在不全为 0 的数 $a_i \in F$，$i = 0, 1, \cdots, n$

使得 $a_0 v + a_1 T v + \cdots + a_n T^n v = 0$ 即 $\left(\sum_{i=0}^{n} a_i T^i\right) v = 0$

Recall $v \neq 0$. 这就证明了 $a_0 + \cdots + a_n T^n$ 不是单射.

命题：设 $\dim V = n$，$T \in \mathcal{L}(V)$. 那么存在 $a_i \in F$，$i=0,1,\cdots,n$ $\boxed{\text{且 } a_1,\cdots,a_n \text{ 不全为} 0}$，使得

$$a_0 I + a_1 T + \cdots + a_n T^n$$

不是单射.

证明：取 $v \in V \neq 0$. $(v, Tv, \cdots, T^n v)$ 是 V 中的一个向量组，且其长度为 $n+1$，是大于 $\dim V$.

故 $(v, Tv, \cdots, T^n v)$ 线性相关，

所以存在不全为 0 的数 $a_i \in F$，$i=0,1,\cdots,n$

使得 $\boxed{a_0 v + a_1 T v + \cdots + a_n T^n v = 0}$ 即 $(\sum_{i=0}^{n} a_i T^i) v = 0$

Recall $v \neq 0$. 这就证明了 $a_0 + \cdots + a_n T^n$ 不是单射.

因为 $v \neq 0$
故 $a_1,\cdots,a_n$
不能全为0
确 与

命题：设 $\dim V = n$，$T \in \mathcal{L}(V)$. 那么存在 $a_i \in F$，$i = 0, 1, \dots, n$ 且 $a_1, \dots, a_n$ 不全为 0，使得

$$a_0 I + a_1 T + \cdots + a_n T^n$$

不是单射.

证明：取 $v \in V \neq 0$. $(v, Tv, \dots, T^n v)$ 是 V 中的一个向量组，且其长度为 $n+1$，是大于 $\dim V$.

故 $(v, Tv, \dots, T^n v)$ 线性相关，

所以存在不全为 0 的数 $a_i \in F$，$i = 0, 1, \dots, n$

使得 $a_0 v + a_1 T v + \cdots + a_n T^n v = 0$ 即 $\left(\sum_{i=0}^{n} a_i T^i\right) v = 0$

Recall $v \neq 0$. 这就证明了 $a_0 + \cdots + a_n T^n$ 不是单射.

因为 $v \neq 0$ 故 $a_1, \dots, a_n$ 不能全为 0 不然与 矛盾

有限维复向量空间上的每个线性算子都有特征值

5.10 定理：有限维复向量空间上的每个线性算子都有特征值

证明：由上页命题知 存在 $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ 使得

$$p(T) = a_0 I + \cdots + a_n T^n \quad ①$$

非单射，且 $p(T)$ 的次数是大于 0 的。（注意 $p(T)$ 的次数可能小于 n）因为 $a_1, \dots, a_n$ 不全为 0

由代数基本定理知 存在 $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ $(m \le n)$，$c \in \mathbb{C}$ 使得

$$p(T) = c(T - \lambda_1 I) \cdots (T - \lambda_m I) \quad ②$$

由 ① ② 知，必有某个 $T - \lambda_i I$ 非单射，则 λ_i 是 T 的一个特征值。 证毕.

复习线性映射的矩阵

- $T \in \mathcal{L}(V)W$, $\mathcal{M}(T,(v_1,\cdots,v_n),(w_1,\cdots,w_m))$

复习线性映射的矩阵

- $T \in \mathcal{L}(V)W$， $\mathcal{M}\left(T,(v_1,\cdots,v_n),(w_1,\cdots,w_m)\right)$
- 算子 $T \in \mathcal{L}(V)V\ \mathcal{M}\left(T,(v_1,\cdots,v_n)\right)$

复习线性映射的矩阵

- $T \in \mathcal{L}(V)W$， $\mathcal{M}(T,(v_1,\cdots,v_n),(w_1,\cdots,w_m))$
- 算子 $T \in \mathcal{L}(V)V$ $\mathcal{M}(T,(v_1,\cdots,v_n))$
- The domain and codomain of an operator is a same vector space, so the same basis are used to write out its matrix by default.

复习线性映射的矩阵

- $T \in \mathcal{L}(V)W$，$\mathcal{M}(T, (v_1, \cdots, v_n), (w_1, \cdots, w_m))$
- 算子 $T \in \mathcal{L}(V)V$ $\mathcal{M}(T, (v_1, \cdots, v_n))$
- The domain and codomain of an operator is a same vector space, so the same basis are used to write out its matrix by default.
- 算子 $T \in \mathcal{L}(F^n)$, $\mathcal{M}(T)$

复习线性映射的矩阵

- $T \in \mathcal{L}(V)W$， $\mathcal{M}(T,(v_1,\cdots,v_n),(w_1,\cdots,w_m))$
- 算子 $T \in \mathcal{L}(V)V$ $\mathcal{M}(T,(v_1,\cdots,v_n))$
- The domain and codomain of an operator is a same vector space, so the same basis are used to write out its matrix by default.
- 算子 $T \in \mathcal{L}(F^n)$, $\mathcal{M}(T)$
- The standard basis $(e_1,\cdots,e_n)$ for F^n is used to write out the matrix of an operator on F^n.

映射的矩阵举例

$T \in \mathcal{L}(\mathbf{F}^4)$ 定义成

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3x_1 + 4x_4,\ 5x_1 + 6x_2,\ 7x_3 + 8x_4,\ 9x_1)$$

$$\mathcal{M}(T) = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1 & & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 4 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$Te_1 = T(1,0,0,0) = (3,5,0,9) = 3e_1 + 5e_2 + 0e_3 + 9e_4$$

映射的矩阵举例

$T \in \mathcal{L}(\mathbf{F}^4)$ 定义成

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3x_1 + 4x_4,\ 5x_1 + 6x_2,\ 7x_3 + 8x_4,\ 9x_1)$$

$$\mathcal{M}(T) = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1 & & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 4 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$Te_1 = T(1,0,0,0) = (3, 5, 0, 9) = 3e_1 + 5e_2 + 0e_3 + 9e_4$$

映射 T 是不是可逆映射？特征值有吗？若有，是什么，对应的特征向量是什么？ Not easy to answer

映射的矩阵举例 II

$T \in F^4$ 定义成

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1,\ x_1+x_2,\ x_1+x_2+x_3,\ x_1-x_2+x_3-x_4)$$

$$\mathcal{M}(T) = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

T 可逆吗? easy to see. Yes.

$\forall (y_1, y_2, y_3, y_4) \in F^4$,

$$\begin{aligned} 2x_1 &= y_1 \\ x_1 + x_2 &= y_2 \\ x_1 + x_3 + x_3 &= y_3 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= y_4 \end{aligned}$$

易解得 $x_1 = \frac{1}{2}y_1$, $x_2 = y_2 - \frac{1}{2}y_1$, $\cdots$ 稍后 you will see 2, 1 是 T 的特征值

映射的矩阵举例 II

$T \in F^4$ 定义成

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1,\ x_1+x_2,\ x_1+x_2+x_3,\ x_1-x_2+x_3-x_4)$$

$$\mathcal{M}(T) = \begin{array}{c|cccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \hline e_1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ e_2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ e_3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ e_4 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}$$

这个映射的矩阵更简单，因为有很多 0

T 可逆吗？ easy to see. Yes.

$\forall (y_1, y_2, y_3, y_4) \in F^4$,

$$\begin{aligned} 2x_1 &= y_1 \\ x_1 + x_2 &= y_2 \\ x_1 + x_3 + x_3 &= y_3 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= y_4 \end{aligned}$$

易解得 $x_1 = \frac{1}{2}y_1$, $x_2 = y_2 - \frac{1}{2}y_1$, ……

稍后 you will see 2, 1 是 T 的特征值

映射的矩阵举例 II

$T \in F^4$ 定义成

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1,\ x_1+x_2,\ x_1+x_2+x_3,\ x_1-x_2+x_3-x_4)$$

$$\mathcal{M}(T) = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

这个映射的矩阵更简单，因为有很多 0

对角线元素. diagonal elements

T 可逆吗？ easy to see. Yes.

$\forall (y_1, y_2, y_3, y_4) \in F^4$,

$$\begin{aligned} 2x_1 &= y_1 \\ x_1 + x_2 &= y_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= y_3 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= y_4 \end{aligned}$$

易解得 $x_1 = \frac{1}{2}y_1$, $x_2 = y_2 - \frac{1}{2}y_1$, ……

稍后 you will see 2, 1 是 T 的特征值

映射的矩阵举例 II

$T \in F^4$ 定义成

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1,\ x_1+x_2,\ x_1+x_2+x_3,\ x_1-x_2+x_3-x_4)$$

$$M(T) = \begin{array}{c|cccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \hline e_1 & & & & \\ e_2 & & & & \\ e_3 & & & & \\ e_4 & & & & \end{array} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

→ 对角线以上的元素全是 0，so 这是一个下三角矩阵

这个映射的矩阵更简单，因为有很多 0

→ 对角线元素. diagonal elements

T 可逆吗？ easy to see. Yes.

$\forall (y_1, y_2, y_3, y_4) \in F^4$，

$$\begin{aligned} 2x_1 &= y_1 \\ x_1 + x_2 &= y_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= y_3 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= y_4 \end{aligned}$$

易解得 $x_1 = \frac{1}{2}y_1$, $x_2 = y_2 - \frac{1}{2}y_1$, ---

稍后 you will see 2, 1 是 T 的特征值

$\mathcal{L}(V)$ 的矩阵

线性代数的一个中心目标就是要证明：给定一个算子 $T \in \mathcal{L}(V)$，可以找到 V 的一个基，使得 T 关于此基的矩阵比较简单。

$\mathcal{L}(V)$ 的矩阵

线性代数的一个中心目标就是要证明：给定一个算子 $T\in\mathcal{L}(V)$，可以找到 V 的一个基，使得 T 关于此基的矩阵"比较简单"。→ 这是含糊的说法，具体一点就是让 $\mathcal{M}(T)$ 有很多 0.

L(V) 的矩阵

线性代数的一个中心目标就是要证明:

给  可以找到 V 的一个基，使得

T ... 比较简单". 这是含糊的说法，具体一点就是让 M(T) 有很多 0.

这被戏称为"打洞".

曾肯成先生曾有一句戏言："龙生龙，凤生凤，华罗庚的学生会打洞。"即指矩阵对角化，使非对角元素均为零。华罗庚的那些会打洞的学生在以后的工作中做出了很多好的工作，这与他们的打洞的本事是很有关系的。

特征值、特征向量 $\xrightarrow{\text{用来}}$ 打洞

设 $T \in \mathcal{L}(V)$，$\underbrace{}_{}$ $\dim V = n$，v_1 是 T 的属于特征值 λ_1 的一个非零 eigenvector.

那么可以把 v_1 扩充成 V 的一个基

$$(v_1, v_2, \cdots, v_n)$$

T 关于此基的矩阵的第一列由 Tv_1 在基 $(v_1, \cdots v_n)$ 下的展开系数（坐标）所确定

特征值、特征向量 $\xrightarrow{\text{用来}}$ 打洞

$\dim V = n$

设 $T \in \mathcal{L}(V)$，v_1 是 T 的属于特征值 λ_1 的一个非零 eigenvector.

那么可以把 v_1 扩充成 V 的一个基

$$(v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

T 关于此基的矩阵的第一列由 Tv_1 在基 $(v_1, \ldots, v_n)$ 下的展开系数（坐标）确定，

$$Tv_1 = \lambda v_1$$

特征值、特征向量 $\xrightarrow{\text{用来}}$ 打洞

设 $T \in \mathcal{L}(V)$，$\underbrace{}_{\dim V = n}$ v_1 是 T 的属于特征值 λ_1 的一个非零 eigenvector.

那么可以把 v_1 扩充成 V 的一个基

$$(v_1, v_2, \cdots, v_n)$$

T 关于此基的矩阵的第一列由 Tv_1 在基 $(v_1, \cdots, v_n)$ 下的展开系数（坐标）所确定，

$$Tv_1 = \lambda v_1$$

故 $M(T)$ 的第一列是 $\begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ 有 $(n-1)$ 个零. bingo. 好多洞

Now. You see why eigenvalues are so important.

上三角矩阵

我们考虑的是方阵，即 # of rows = # of columns

方阵的对角线是由左上角到右下角的直线上的元素组成的。

一个矩阵称为上三角矩阵，如果位于对角线下方的元素全为0。上三角矩阵具有如下典型形式

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

上三角矩阵

我们考虑的是方阵，即 # of rows = # of columns

方阵的对角线是由左上角到右下角的直线上的元素组成的

一个矩阵称为上三角矩阵，如果位于对角线下方的元素全为0。上三角矩阵具有如下典型形式

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

所有元素个数 n^2

$$\left.\begin{array}{l}\text{对角线下方的}\\ \text{所有的元素都0}\end{array}\right\} \rightarrow 1+2+\cdots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2} \text{ 个零元素}$$

当n很大时，矩阵有接近一半的零

什么样的算子的矩阵是上三角矩阵

回答这个问题之前，先研究具有这样矩阵算子具有什么样的性质。

例子：

$$\mathcal{M}(T) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$T e_1 = a_{11} e_1$$

$$T e_2 = a_{12} e_1 + a_{22} e_2$$

$$T e_3 = a_{13} e_1 + a_{23} e_2 + a_{33} e_3$$

什么样的算子的矩阵是上三角矩阵

回答这个问题之前，先研究具有这样矩阵算子具有什么样的性质。

例：

$$M(T) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \end{array}$$

$T e_1 \in \operatorname{span}\{e_1\}$

$T e_2 \in \operatorname{span}\{e_1, e_2\}$

$T e_3 \in \operatorname{span}\{e_1, e_2, e_3\}$

$$T e_1 = a_{11} e_1$$

$$T e_2 = a_{12} e_1 + a_{22} e_2$$

$$T e_3 = a_{13} e_1 + a_{23} e_2 + a_{33} e_3$$

$\operatorname{span}\{e_1\}$ 是一维不变子空间

$\operatorname{span}\{e_1, e_2\}$ 是 2D 不变子空间

$\operatorname{span}\{e_1, e_2, e_3\}$ 是 3D 不变子空间

算子在什么样的基下具有上三角矩阵

上面的例子启发我们（逆向思维）：

假如算子 $T \in \mathcal{L}(V)$ 在一个基 $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ 下具有下面的性质：

$$T v_k \in \operatorname{span}(v_1, \cdots, v_k), \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

那么 $\mathcal{M}(T, (v_1, \cdots, v_k))$ 是上三角矩阵.

算子在什么样的基下具有上三角矩阵

上面的例子启发我们（逆向思维）：

如果算子 $T \in \mathcal{L}(V)$ 在一个基 $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ 下具有下面的性质：

$$T v_k \in \operatorname{span}(v_1, \cdots, v_k), \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

那么 $M(T, (v_1, \cdots, v_k))$ 是上三角矩阵。

证明：$T v_1 \in \operatorname{span}(v_1)$，意味着 $\exists\, a_{11} \in F$, s.t. $T v_1 = a_{11} v_1$

这说明 $M(T)$ 的第一列是 $\begin{bmatrix} a_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$.

算子在什么样的基下具有上三角矩阵

上面的例子启发我们（逆向思维）：

如果算子 $T \in \mathcal{L}(V)$ 在一个基 $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ 下具有下面的性质：

$$T v_k \in \operatorname{span}(v_1, \cdots, v_k), \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

那么 $\mathcal{M}(T, (v_1, \cdots, v_k))$ 是上三角矩阵.

证明：$Tv_1 \in \operatorname{span}(v_1)$，意味着 $\exists\, a_{11} \in \mathbb{F}$, s.t. $Tv_1 = a_{11} v_1$

这说明 $\mathcal{M}(T)$ 的第一列是 $\begin{bmatrix} a_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$. $Tv_2 \in \operatorname{span}(v_1, v_2)$

意味着存在 $a_{12}, a_{22} \in \mathbb{F}$，使得 $Tv_2 = a_{12} v_1 + a_{22} v_2$

接上页

从而 $M(T)$ 的第二列是 $\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

$Tv_k \in \operatorname{span}(v_1, \dots, v_k) \Rightarrow \exists\, a_{1k}, \dots, a_{kk} \in F$ 使得

$$Tv_k = a_{1k} v_1 + \dots + a_{kk} v_k$$

从而能写出第 k 列 $\begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{kk} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

$$M(T) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$ 是个上三角矩阵

上三角矩阵和不变子空间的关系

前面的例子、猜想和讨论可以形成下面一个正式的命题.

5.12 命题: 设 $T \in \mathcal{L}(V)$, 并且 $(v_1, \dots, v_n)$ 是 V 的一个基, 则下列等价:

(a) T 关于基 $(v_1, \dots, v_n)$ 的矩阵是上三角的;

(b) $Tv_k \in \operatorname{span}(v_1, \dots, v_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$;

(c) $\operatorname{span}(v_1, \dots, v_k)$ 在 T 下是不变的, $k = 1, \dots, n$.

证明: 仅仅使用算子的矩阵的定义. 张成的定义. 线性表出, 不变子空间…

略过证明.

问题:

是不是对每个算子,我们都能找到一个基,使得它的矩阵是上三角矩阵?

问题：
是不是对每个算子，我们都能找到一个基，使得它的矩阵是上三角矩阵？

答：如果 V 是一个复向量空间（当然我们仅仅考虑有限维的非零向量空间），那么 the answer is YES.

5.13 定理：设 V is a complex vector space, and $\dim V = n$. 设 $T \in \mathcal{L}(V)$，那么 T 关于 V 的某个基具有上三角矩阵.

也就说随便找一个基，T 关于这个基的矩阵很可能不是一个上三角矩阵，但这个定理说，存在一个基，使得 T 的矩阵是上三角的。证明之前，我先举个例子看看

T 可上三角化的例子.

设 $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C})$. $\mathcal{M}(T) = \begin{array}{cc} & e_1 \\ e_2 & \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix} \end{array}$ 1×1 的上三角矩阵

下面是上三角化的例子.

设 $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C})$. $\quad \mathcal{M}(T) = \begin{array}{c|c} & e_1 \\ \hline e_1 & \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix} \end{array}$ 1×1 的上三角矩阵

设 $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$. $\quad \mathcal{M}(T) = \begin{array}{c|c} & e_1 \quad e_2 \\ \hline \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \end{array}$ 2×2 的矩阵.

复向量空间的算子一定有一个特征值 λ, 即存在一个非零的向量 $v \neq 0$, 使得

$$Tv = \lambda v.$$

把 v 扩充成 $\mathbb{C}^2$ 的一个基 (v, u)

$$Tu \in \mathbb{C}^2 = \operatorname{span}(v, u).$$

那么 $\mathcal{M}(T; (v, u))$ 的矩阵是上三角的 $\quad \begin{array}{c|c} & v \quad u \\ \hline \begin{matrix} v \\ u \end{matrix} & \begin{bmatrix} \lambda & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix} \end{array}$

$$Tu = b_{12} v + b_{22} u.$$

三维复向量空间上的算子如何上三角化

设 $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$，由复向量空间上的算子一定有一个特征值知，$\exists\ \lambda_1 \in \mathbb{C}$，$0 \neq v_1 \in \mathbb{C}^3$，使得

$$T v_1 = \lambda_1 v_1$$

把 v_1 扩充成 $\mathbb{C}^3$ 的一个基 (v_1, v_2, v_3)

那么 $\mathcal{M}(T) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix}$

下面如何办？

三维复向量空间上的算子如何上三角化

设 $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$. 由复向量空间上的算子一定有一个特征值知. $\exists\ \lambda_1 \in \mathbb{C}$, $0 \neq v_1 \in \mathbb{C}^3$, 使得

$$T v_1 = \lambda_1 v_1$$

把 v_1 扩充成 $\mathbb{C}^3$ 的一个基 (v_1, v_2, v_3)

那么 $M(T) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix}$ 下面如何办？

如果 $\operatorname{span}(v_2, v_3)$ 是 T 的 invariant subspace,

那么 $M(T) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix}$, 这样的话, $T|_{\operatorname{span}(v_2, v_3)}$ 就可以上三角化.

是上三角的.

指的是找一个基,使得算子的矩阵

三维复向量空间上的算子如何上三角化

设 $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$，由复向量空间上的算子一定有一个特征值知，$\exists\ \lambda_1 \in \mathbb{C}$，$0 \neq v_1 \in \mathbb{C}^3$，使得

$$T v_1 = \lambda_1 v_1$$

把 v_1 扩充成 $\mathbb{C}^3$ 的一个基 (v_1, v_2, v_3)

那么 $\mathcal{M}(T) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix}$ → 下面如何办？

如果 $\mathrm{span}(v_2, v_3)$ 是 T 的 invariant subspace，

往往假设是不成立的.

那么 $\mathcal{M}(T) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix}$，这样的话，$T|_{\mathrm{span}(v_2, v_3)}$ 就可以上三角化.

是上三角的.

指的是找一个基，使得算子的矩阵

三维复向量空间上的算子如何上三角化

上一页的做法虽然失败了，但寻找了的一个低维的不变子空间，把三维复向量空间上的算子转化成低维不变子空间上算子的想法却是值得坚持的，只是换一个别的方法来找T的一个不变子空间。

$$T v_1 = \lambda v_1 \quad , \text{考虑} \quad T - \lambda I \, .$$

$\dim \operatorname{Null}(T-\lambda I) \geq 1$ ，　$\operatorname{Range}(T-\lambda I) \leq 3-1 = 2$

$\operatorname{Range}(T-\lambda I)$ 是 $(T-\lambda I)$ 的不变子空间 (we learned this)，

即　$(T-\lambda I)x \in \operatorname{Range}(T-\lambda I)$ for all $x \in \operatorname{Range}(T-\lambda I)$

它是不是T的不变子空间呢？

命题：如果 U 是 $T-\lambda I$ 的不变子空间，那么 U 是 T 的不变子空间

证明：$\forall x \in U$, ① 因为 U 是 $T-\lambda I$ 的不变子空间，

所以 $(T-\lambda I)x \in U$ ②

因为 U 是一个子空间 且 $Tx = \underbrace{(T-\lambda I)x}_{\in U \text{ 由②}} + \underbrace{\lambda x}_{\in U \text{ 由①}}$

所以 $Tx \in U$.

命题：如果 U 是 $T-\lambda I$ 的不变子空间，那么 U 是 T 的不变子空间

证明：$\boxed{\forall x \in U,}$ ① 因为 U 是 $T-\lambda I$ 的不变子空间，

所以 $(T-\lambda I)x \in U$ ②

因为 U 是一个子空间 且 $Tx = \underbrace{(T-\lambda I)x}_{\in U \text{ 由②}} + \underbrace{\lambda x}_{\in U \text{ 由①}}$

所以 $\boxed{Tx \in U.}$

这就证明了 U 是 T 的一个不变子空间

三维复向量空间的算子的上三角化

$T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$，知 $v_1 \neq 0$，且 $Tv_1 = \lambda v_1$

$\operatorname{Range}(T-\lambda I)$ 是 T 的一个不变子空间。

且 $\dim \operatorname{Range}(T-\lambda I) = \dim \mathbb{C}^3 - \dim \operatorname{Null}(T-\lambda I) \leq 2$.

那么 $T|_{\operatorname{Range}(T-\lambda I)}$ 是一个 k 维的复向量空间

$k = 0, 1, 2$,

上的线性算子。

我们可以找到 $\operatorname{Range}(T-\lambda I)$ 的一个基 $(u_1, \dots, u_k)$,

$$\mathcal{M}(T|_{\operatorname{Range}(T-\lambda I)}, (u_1, \dots, u_k)) = \underset{k=0}{\begin{bmatrix} \end{bmatrix}}, \quad \underset{k=1}{\begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix}}, \quad \underset{k=2}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}}$$

$\operatorname{Null} T = \operatorname{span}(v_1, \dots, v_{3-k})$

猜想：$\boxed{u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_{3-k} \text{ 是 } \mathbb{C}^3 \text{ 的一个基}}$，true or false ?

举例：上面的猜想是 false

$$M(T) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix} \qquad T e_1 = e_1$$

$$M(T-I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} (T-I)e_1 &= 0 \\ (T-I)e_2 &= e_1 \\ (T-I)e_3 &= e_1+e_2-e_3 \end{aligned}$$

$$\mathrm{Range}\,(T-I) = \mathrm{span}\,(e_1,\ e_1+e_2-e_3) \qquad \dim \mathrm{Range}\,(T-I) = 2$$

$T|_{\mathrm{Range}(T-I)}$ 的一个特征值和特征向量求出来．

$$T e_3 = e_1+e_2 \qquad T e_2 = e_1+e_2 \quad \Rightarrow \quad T(e_2-e_3) = 0$$

知 e_2-e_3 是 T 的一个特征向量．且 $\underbrace{(e_2-e_3) \in \mathrm{span}\,(e_1,\ e_1+e_2-e_3)}_{= -e_1 + (e_1+e_2-e_3)}$

$(e_2-e_3,\ e_1)$ 是 $\mathrm{Range}\,(T-I)$ 的一个基．

$$M\left(T|_{\mathrm{Range}(T-I)},\ ((e_2-e_3),\ e_1)\right) = \begin{array}{c|cc} & e_2-e_3 & e_1 \\ \hline e_2-e_3 & 0 & 0 \\ e_1 & 0 & 1 \end{array}$$

接上页

$$\mathcal{M}(T-I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Null}(T-I) = \text{span}(e_1)$$

显然 $\dim \mathbb{C}^3 = \dim \text{Null}(T-I) + \dim \text{Range}(T-I)$

$3 = 1 + 2$

但是 $\text{Null}(T-I) \cap \text{Range}(T-I) = \text{span}(e_1)$

因此 $\text{Null}(T-I)$ 的基 和 $\text{Range}(T-I)$ 的基 合在一起

并非 $\mathbb{C}^3$ 的一个基.

上页面例子，如何上三角化

$$Range(T-I) = span(e_2-e_3, e_1)$$

我们可以将 (e_2-e_3, e_1) 扩充成 $\mathbb{C}^3$ 的一个基，

例如 (e_2-e_3, e_1, e_2)

选择有很大自由度，和 $Null(T-\lambda I)$ 无关

由

$$M\left(T|_{Range(T-\lambda I)}, ((e_2-e_3), e_1)\right) = \begin{array}{c|cc} & e_2-e_3 & e_1 \\ \hline e_2-e_3 & 0 & 0 \\ e_1 & 0 & 1 \end{array}$$ 可逆

$$M\left(T, ((e_2-e_3), e_1, e_2)\right) = \begin{array}{c|ccc} & e_2-e_3 & e_1 & e_2 \\ \hline e_2-e_3 & 0 & 0 & * \\ e_1 & 0 & 1 & * \\ e_2 & 0 & 0 & * \end{array}$$ 是一个上三角矩阵， why?

上页的例子，如何上三角化

$$\mathrm{Range}(T-I) = \mathrm{span}(e_2-e_3,\ e_1)$$

我们可以将 (e_2-e_3, e_1) 扩充成 $\mathbb{C}^3$ 的一个基，

例如 $(e_2-e_3,\ e_1,\ \underset{\sim}{e_2})$

选择有很大自由度，和 $\mathrm{Null}(T-\lambda I)$ 无关

由

$$\mathcal{M}\left(T|_{\mathrm{Range}(T-\lambda I)}, ((e_2-e_3), e_1)\right) = \begin{array}{c|cc} & e_2-e_3 & e_1 \\ \hline e_2-e_3 & 0 & 0 \\ e_1 & 0 & 1 \end{array}$$ 可得

$$\mathcal{M}\left(T, ((e_2-e_3), e_1, e_2)\right) = \begin{array}{c|ccc} & e_2-e_3 & e_1 & e_2 \\ \hline e_2-e_3 & 0 & 0 & c_1 \\ e_1 & 0 & 1 & c_1 \\ e_2 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$ 是一个上三角矩阵.

$$Te_2 = \underbrace{(T-I)e_2}_{\in \mathrm{Range}(T-I)} + Ie_2$$

$$= c_1(e_2-e_3) + c_2 e_1 + e_2$$

上页的例子，如何上三角化

$$Range(T-I) = span(e_2-e_3, e_1)$$

我们可以将 (e_2-e_3, e_1) 扩充成 $\mathbb{C}^3$ 的一个基,

例如 (e_2-e_3, e_1, e_2)

选择有很大自由度. 和 $Null(T-\lambda I)$ 无关

由

$$M\left(T|_{Range(T-\lambda I)}, ((e_2-e_3), e_1)\right) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} e_2-e_3 & e_1 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_2-e_3 \\ e_1 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

可得

$$M\left(T, ((e_2-e_3), e_1, e_2)\right) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} e_2-e_3 & e_1 & e_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_2-e_3 \\ e_1 \\ e_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & c_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

是一个上三角矩阵.

$$Te_2 = \underbrace{(T-I)e_2}_{\in Range(T-I)} + Ie_2$$

$$= c_1(e_2-e_3) + c_2 e_1 + 1 e_2$$

定理 5.13 的证明

定理 5.13：设 V 是一个复向量空间，$T\in\mathcal{L}(V)$，那么存在 V 的某个基，使得 T 关于此基是上三角矩阵。

证明：用数学归纳法证明：对 V 的维数 $\dim V$ 用归纳法。

当 $\dim V=1$ 时，T 关于任何一个基的矩阵都是上三角的。

假设 $\dim V<n$ 时，对任给的 $T\in\mathcal{L}(V)$ 存在 V 的一个基使得 T 关于该基的矩阵是上三角的。

考虑 $\dim V=n$ 的情形，根据复向量空间上的线性算子一定有一个特征值，即存在 $\lambda\in\mathbb{C}$，使得 $V_\lambda=\{v: Tv=\lambda v\}$ 是 V 的一个特征子空间，且 $\dim V_\lambda>0$。

定理 5.13 的证明 II

$\operatorname{Range}(T-\lambda I)$ 是 T 的一个不变子空间，且

$$\dim \operatorname{Range}(T-\lambda I) = \dim V - \underbrace{\dim \operatorname{Null}(T-\lambda I)}_{=\dim \operatorname{Null} V_\lambda} < \dim V$$

$T|_{\operatorname{Range}(\lambda I - T)}$ 是一个维数 $< n$ 的复向量空间 $\operatorname{Range}(\lambda I - T)$ 的算子.

由假设（在维数小于或等于 $n-1$ 维的复向量空间上的线性算子都可以上三角化）知，$\operatorname{Range}(T-\lambda I)$ 存在一个基，使得 T 在该基下的矩阵是上三角矩阵. 不妨设 $(u_1, \dots, u_k)$ 是这个基.

把 $(u_1, \dots, u_k)$ 扩充成 V 的一个基 $(u_1, \dots, u_k, \underbrace{v_1, \dots, v_{n-k}}_{\text{和 } \operatorname{Null}(T-\lambda I) \text{ 无关}})$

那么易知 $Tu_j \in \operatorname{span}(u_1, \dots, u_{j-1})$ $\quad j = 1, \dots, k$

$Tv_j \in \operatorname{span}(u_1, \dots, u_k, v_j)$ $\quad j = 1, \dots, n-k$

这是利用了 $Tv_j = \underbrace{(T - \lambda I)v_j}_{\in \operatorname{span}(u_1, \dots, u_k)} + \lambda v_j$

由命题 5.12 知，$M(T, (u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_{n-k}))$ 是上三角矩阵。

由数学归纳法的原理知，我们就完成了 $\mathbb{C}$ 上有限维的复向量空间上的线性算子都是可上三角化的。(也就是存在一个基，使得 T 关于此基的矩阵是上三角矩阵)

算子的矩阵是上三角矩阵时的好处

- 判断算子是否可逆
- 求算子的逆
- 求算子的特征值

上三角矩阵和算子可逆

例 $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$

$$\mathcal{M}(T) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

T可逆吗？ No， $Te_1 = 0$

上三角矩阵和算子可逆

例 $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$

$$\mathcal{M}(T) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

T 可逆吗？ No, $Te_1 = 0$

例 $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$

$$\mathcal{M}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

T 可逆吗？ No. $Te_1 = e_1$ $Te_2 = 3e_1$

这意味着 $T|_{\operatorname{span}(e_1, e_2)}$ 不是满射，因此也不是单射

5.16 命题：假设 $T \in \mathcal{L}(V)$ 关于 V 的某个基有上三角矩阵，则 T 可逆当且仅当这个上三角矩阵对角线上的元素都不是 0.

1. 这里没说 V 是一个复向量空间。$\mathcal{M}(T)$ 是上三角阵是前提

2. 当且仅当，是说 T 可逆 $\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}(T)$ 对角线元素没有 0.

证明：先证 $\mathcal{M}(T)$ 对角线元素都不是 0 $\Rightarrow$ T 可逆.

设 $(v_1, \dots, v_n)$ 是 V 的一个基，且 T 在该基下的矩阵是上三角矩阵

$$\mathcal{M}(T) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} \lambda_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \end{array}$$

$Tv_1 = \lambda_1 v_1$, $\lambda_1 \neq 0 \Rightarrow v_1 = \frac{1}{\lambda_1} T v_1 \Rightarrow \text{span}(v_1) \subset \text{span}(Tv_1) \Rightarrow \text{span}(v_1) = \text{span}(Tv_1)$

$\lambda_2 \neq 0$ 且 $Tv_2 = \lambda_2 v_2 + a_{12} v_1 \Rightarrow v_2 = \frac{1}{\lambda_2} T v_2 - \frac{a_{12}}{\lambda_2} v_1 \Rightarrow v_2 \in \text{span}(Tv_2, v_1) \Rightarrow$

$\text{span}(v_1, v_2) = \text{span}(Tv_1, Tv_2)$，…… 如此继续 $\Rightarrow \text{span}(v_1, \dots, v_n) = \text{span}(Tv_1, \dots, Tv_n)$

这就证明了 T 是满射(surjective)，从而 T 可逆

证明的关键一点　$\lambda_k \neq 0$，我们才能得出

$$v_k = \frac{1}{\lambda_k} T v_k - \boxed{\text{a linear combination of } (v_1, \cdots, v_{k-1})}$$

for $k = 1, 2, \cdots, n$.

这就证明了 T 是满射 (surjective)，从而 T 可逆

证明的关键一点　　$\lambda_k \neq 0$，我们才能得出

$$v_k = \frac{1}{\lambda_k} T v_k - \boxed{\text{a linear combination of } (v_1, \cdots, v_{k-1})}$$

for $k = 1, 2, \cdots, n$.

再证明：　T 可逆 $\Rightarrow$ 上三角矩阵 $M(T)$ 的所有对角线元素都非 0.

$M(T; (v_1, \cdots, v_n))$ 是上三角矩阵 $\begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$

$T v_k = \lambda_k v_k + (v_1, \cdots, v_{k-1})$ 的一个线性组合，$k = 1, 2, \cdots, n$

如果某个 $\lambda_k = 0$，那么 $T|_{\operatorname{span}(v_1, \cdots, v_k)}$ 实际上可由 $(v_1, \cdots, v_{k-1})$ 线性表出，

即 $\dim \operatorname{Range} T|_{\operatorname{span}(v_1, \cdots, v_k)} \leq k-1 < \dim \operatorname{span}(v_1, \cdots, v_k)$

从而 $T|_{\text{span}(v_1,\dots,v_k)}$ 不是满射，也不是单射.

即存在 $u\in \text{span}(v_1,\dots,v_k)$，$u\neq 0$，③ 使得

$$T|_{\text{span}(v_1,\dots,v_k)}\, u = 0 \quad ①$$

当 $u\in\text{span}(v_1,\dots,v_k)$ 时，$Tu = T|_{\text{span}(v_1,\dots,v_k)}\, u$ ②

由①②，得 $Tu=0$ ④

由③④知 T 不是单射，从而 T 不可逆.

这是在用反证法了，即如果对角线元素中有一个是0，那么 T 不可逆.

从而证明了如果 T 可逆，那么上三角矩阵 $M(T)$ 的所有对角线元素都不是0.

上三角矩阵和特征值.

M(T) 是一般的矩阵时, 求特征值 is not easy.

但如果我们已经写出了 T 在某基下的矩阵. 且矩阵恰巧是一个上三角矩阵. 那么 it is easy to write out all eigenvalues of this operator.

5.18 命题: 设 $T \in \mathcal{L}(V)$ 关于 V 的某个基有上三角矩阵, 则这个上三角矩阵对角线上的元素恰好是 T 的所有本征值.

定理5.18的证明

证明：设 $(v_1, \cdots, v_n)$ 是 V 的一个基，并且

$$\mathcal{M}(T, (v_1, \cdots, v_n)) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

如果 $\lambda \in F$ 是 T 的一个特征值，那么 $T - \lambda I$ 不是单射。

那么 $\mathcal{M}(T - \lambda I) = \begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda & & * \\ & \lambda_2 - \lambda & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n - \lambda \end{bmatrix}$ 的对角线元素中

必有一个是0，即存在 j，使得 $\lambda_j - \lambda = 0$。从而 T 的特征值一定出现在 $\mathcal{M}(T)$ 的对角线上。

定理5.18的证明

证明：设 $(v_1, \dots, v_n)$ 是 V 的一个基，并且

$$\mathcal{M}(T, (v_1, \dots, v_n)) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

如果 $\lambda \in F$ 是 T 的一个特征值，那么 $T-\lambda I$ 不是单射。

那么 $\mathcal{M}(T-\lambda I) = \begin{bmatrix} \lambda_1-\lambda & & * \\ & \lambda_2-\lambda & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n-\lambda \end{bmatrix}$ 的对角线元素中

必有一个是0，即存在 j，使得 $\lambda_j-\lambda=0$。从而 T 的特征值一定出现在 $\mathcal{M}(T)$ 的对角线上。另外 $\mathcal{M}(T-\lambda_j I)$ 的对角线有0，所以 $T-\lambda_j I$ 不是可逆的，从而 $T-\lambda_j I$ 不是单射，从而 λ_j 是 T 的特征值。 $\square$

作业

8. 求如下定义的后向移位算子 $T \in \mathcal{L}(\mathbf{F}^\infty)$ 的所有本征值和本征向量,

$$T(z_1, z_2, z_3, \cdots) = (z_2, z_3, \cdots).$$

题目8提示：这个题目中的F^∞是无穷维的向量空间。

设$\lambda \in F$是一个特征值，$v = (v_1, v_2, \cdots) \in F^\infty$是对应的特征向量，

则$Tv = \lambda v$,和使用T的定义得到的$T(v_1, v_2, \cdots) = (v_2, v_3, \cdots)$对照，得到

$\lambda v_1 = v_2, \lambda v_2 = v_3, \cdots$

如果$\lambda = 0$,那么可以取$v_1 = 1, v_i = 0, i = 2, 3, \cdots$

如果$\lambda \neq 0$,是不是可以得到v_1一定不等于0，那么可以取$v_1 = 1$,

$v_2 = \lambda, v_3 = \lambda^2, \cdots, \ldots$

大家验证验证是不是$\lambda \in F$都是T的特征值，相应的特征向量也可以写出来。

9. 设 $T \in \mathcal{L}(V)$, 并设 $\dim \operatorname{range} T = k$. 证明 T 最多有 $k+1$ 个互不相同的本征值.

题目9提示：复习一下定理5.6 ， 你可以尝试使用反证法。
如果T有m个互不相同的特征值，$m \geq k+2$.
那么非零特征值有m-1个，对应的特征向量$v_1, v_2, \cdots, v_{m-1}$.
根据定理5.6, 这些特征向量是线性无关的，因此
dim span $\left(v_1, v_2, \cdots, v_{m-1}\right) = m-1 \geq k+1$
显然span $\left(v_1, v_2, \cdots, v_{m-1}\right) \subset range(T)$
因此dim span $(v_1, \cdots, v_{m-1}) \leq dim\ range(T)$,
这样是不是就可以导出矛盾了?

5.6 定理: 设 $T \in \mathcal{L}(V)$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ 是 T 的互不相同的本征值, $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m$ 是相应的非零本征向量, 则 $(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m)$ 线性无关.

10. 设 $T \in \mathcal{L}(V)$ 可逆, 并设 $\lambda \in \mathbf{F}\backslash\{0\}$. 证明 λ 是 T 的本征值当且仅当 $\frac{1}{\lambda}$ 是 T^{-1} 的本征值.

11. 设 $S, T \in \mathcal{L}(V)$. 证明 ST 和 TS 有相同的本征值.

题目11提示： 我们这个题目假设V 是n维的向量空间, 其中n 是正整数。

设λ是(TS)的特征值，即存在$v \neq 0$, 使得 $(TS)v = \lambda v$, 那么

$S(TS)v = S\lambda v$

也就是$(ST)(Sv) = \lambda Sv$,

是不是可以推出λ也是(ST)的特征值呢？

这个推导还是有点毛病，问题出在$Sv = 0$ 怎么办？

如果$Sv = 0$,那么一定有$\lambda = 0$(为什么？)

如果 Null $T \neq \{0\}$,那么取$u \in$ Null T, 是不是可以验证$STu = 0u$？

如果 Null $T = \{0\}$,那就意味着T是单射， 由前面我们学习的定理321

我们知道T是满射。那么对于$Sv = 0$ 的v,存在$u \in V$,使得$Tu = v$,

（如何保证$u \neq 0$?）

可以验证$STu = Sv = 0$,那么u 就是ST 的零特征值的特征向量。