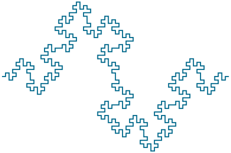
线性代数 B：内积

Tiao Lu
Peking University



November 18, 2019

正交

垂直与正交

在$\mathbb{R}^2$中，$u \perp v \Leftrightarrow \langle u, v \rangle = 0$

u和v垂直

垂直与正交

在 $\mathbb{R}^2$ 中，$\underbrace{u \perp v}_{u\text{和}v\text{垂直}} \Leftrightarrow \langle u, v \rangle = 0$

设 V 是数域 F 上的有限维向量空间。$u, v \in V$，称 u, v 是正交的 (orthogonal)，如果

$$\langle u, v \rangle = 0.$$

垂直与正交

在 $\mathbb{R}^2$ 中，$u \perp v \Leftrightarrow \langle u, v \rangle = 0$

u 和 v 垂直

设 V 是数域 F 上的有限维向量空间，$u, v \in V$，称 u, v 是正交的 (orthogonal)，如果

$$\langle u, v \rangle = 0.$$

正交是垂直的推广，由上面的定义显然可以得到

① 零向量和任何向量都是正交的.

垂直与正交

在 $\mathbb{R}^2$ 中， $\underbrace{u \perp v}_{u\text{和}v\text{垂直}} \Leftrightarrow \langle u, v\rangle = 0$

设 V 是数域 F 上的有限维向量空间。 $u, v \in V$，

称 u, v 是正交的 (orthogonal)，如果

$$\langle u, v\rangle = 0.$$

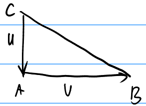
正交是垂直的推广，由上面的定义显然可以得到

① 零向量和任何向量都是正交的.

② 由内积的正定性知 任何非零向量都不可它本身正交。

勾股定理

$\mathbb{R}^2$



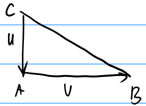
$u = \overrightarrow{CA}$, $v = \overrightarrow{AB}$

$u + v = \overrightarrow{CB}$

勾股定理： $u \perp v \Rightarrow \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

勾股定理

$\mathbb{R}^2$



$u = \overrightarrow{CA}$, $v = \overrightarrow{AB}$

$u + v = \overrightarrow{CB}$

勾股定理： $u \perp v \Rightarrow \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

推广.

6.3 勾股定理 (也称毕达哥拉斯定理 (Pythagorean Theorem)): 如果 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ 是 V 中的正交向量, 那么

6.4
$$\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2.$$

勾股定理的证明

证明：由课本的范数的定义知

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v \rangle$$

勾股定理的证明

课本的

证明：由范数的定义知

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v \rangle$$

$$= \langle u, u+v \rangle + \langle v, u+v \rangle$$

你可以证明 内积对第二个变量是满足 加性

和 共轭齐性

勾股定理的证明

证明：由课本的范数的定义知

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v \rangle$$

$$= \langle u, u+v \rangle + \langle v, u+v \rangle$$

你可以证明 内积对第一个变量是满足$\boxed{\text{加性}}$和$\boxed{\text{共轭齐性}}$

$$= \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle$$

勾股定理的证明

证明：由课本的范数的定义知

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle$$

$$= \langle u, u+v\rangle + \langle v, u+v\rangle$$

$\boxed{\text{你可以证明 内积对第二个变量是满足}\boxed{\text{加性}}\text{和}\boxed{\text{共轭齐性}}}$

$$= \langle u,u\rangle + \underbrace{\langle u,v\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle v,u\rangle}_{=0} + \langle v,v\rangle$$

$$= \|u\|^2 + \|v\|^2 \qquad \square$$

用到了 u 和 v 正交 $\Leftrightarrow \langle u,v\rangle = 0$ $\Leftrightarrow \langle v,u\rangle = 0$

勾股定理的证明

证明：由课本的范数的定义知

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle$$

$$= \langle u, u+v\rangle + \langle v, u+v\rangle$$

你可以证明 内积对第二个变量是满足 $\boxed{\text{加性}}$ 和 $\boxed{\text{共轭齐性}}$

$$= \langle u,u\rangle + \underbrace{\langle u,v\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle v,u\rangle}_{=0} + \langle v,v\rangle$$

$$= \|u\|^2 + \qquad\qquad \|v\|^2 \qquad \Box$$

用到了 u 和 v 正交 $\Leftrightarrow \langle u,v\rangle=0 \Leftrightarrow \langle v,u\rangle=0$

精细一点：$\|u+v\|^2 = \|u\|^2+\|v\|^2 + \langle u,v\rangle + \overline{\langle u,v\rangle}$

$= \|u\|^2+\|v\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\langle u,v\rangle$ 这可证明如果 V 是实向量空间 那么

u 和 v 正交 $\Leftrightarrow \|u+v\|^2 = \|u\|^2+\|v\|^2$.

Cauchy-Schwarz 不等式

6.6 柯西–施瓦茨不等式 (Cauchy-Schwarz Inequality): 若 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$, 则

最重要的不等式之一.

6.7
$$|\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle| \leqslant \|\boldsymbol{u}\| \|\boldsymbol{v}\|,$$

而且其中的等号成立当且仅当 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ 之一是另一个的标量倍.

Cauchy-Schwarz 不等式

6.6 柯西–施瓦茨不等式 (Cauchy-Schwarz Inequality): 若 $u, v \in V$，则

最重要的不等式之一.

$$|\langle u, v\rangle| \leqslant \|u\|\|v\|, \tag{6.7}$$

而且其中的$\boxed{\text{等号成立}}$当且仅当$\boxed{u, v \text{ 之一是另一个的标量倍.}}$

u和v线性相关 或

两向量共线.

Cauchy-Schwarz 不等式

6.6 **柯西–施瓦茨不等式** (**Cauchy-Schwarz Inequality**)：若 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$，则

最重要的不等式之一.

6.7
$$|\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle| \leqslant \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|,$$

而且其中的等号成立当且仅当 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ 之一是另一个的标量倍.

u和v线性相关 或

两个向量共线.

对应到 $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$

$b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$

⑤三维形式的柯西不等式：

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2.$$

$\mathbb{R}^n$

⑥一般形式的柯西不等式：

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2.$$

Cauch- Schwarz 不等式

6.6 柯西–施瓦茨不等式 (Cauchy-Schwarz Inequality)： 若 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$，则

最重要的不等式之一.

6.7
$$|\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle| \leqslant \|\boldsymbol{u}\| \|\boldsymbol{v}\|,$$

而且其中的等号成立当且仅当 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ 之一是另一个的标量倍.

u和v线性相关 或

两向量共线.

对应到 $a=(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$

$b=(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$

⑤三维形式的柯西不等式：

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2) \geq (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2.$$

⑥一般形式的柯西不等式：

$\mathbb{R}^n$

$$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2) \geq (a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2.$$

复向量空间 $\mathbb{C}^n$: $(|a_1|^2+|a_2|^2+\cdots+|a_n|^2)(|b_1|^2+\cdots+|b_n|^2) \geq |a_1\bar{b}_1+\cdots+a_n\bar{b}_n|^2$

Cauchy - Schwarz不等式的证明.

证明：如果 u, v 是线性相关的，不妨设 $u = t v$，其中 $t \in F$

那么 $|\langle u, v\rangle| = |\langle t v, v\rangle| = |t\langle v, v\rangle| = |t|\, \|v\|^2$ ①

$\|u\|\,\|v\| = |t|\, \|v\|^2$ ②

显然 $|\langle u, v\rangle| = \|u\|\,\|v\|$.

Cauchy - Schwarz不等式的证明.

证明:　如果 u, v 是线性相关的，不妨设 $u = tv$. 其中 $t \in F$

那么 $|\langle u, v\rangle| = |\langle tv, v\rangle| = |t\langle v, v\rangle| = |t|\,\|v\|^2$ ①

$\|u\|\,\|v\| = |t|\,\|v\|^2$ ②

显然 $|\langle u, v\rangle| = \|u\|\,\|v\|$.

下面只要证明. u 和 v 线性无关时,

$\langle u, v\rangle > \|u\|\,\|v\|$.

Cauchy-Schwarz不等式的证明.

证明: 如果 u, v 是线性相关的，不妨设 $u = t v$, 其中 $t \in F$

那么 $|\langle u, v\rangle| = |\langle t v, v\rangle| = |t\langle v, v\rangle| = |t| \, \|v\|^2$ ①

$\|u\| \, \|v\| = |t| \, \|v\|^2$ ②

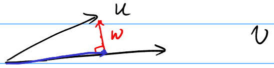
显然 $|\langle u, v\rangle| = \|u\| \, \|v\|$.

下面只要证明. u和v线性无关时,

$\langle u, v\rangle > \|u\| \, \|v\|$.

因为 u和v是线性无关的，故 $v \neq 0$ (当然 $u \neq 0, t \neq 0$).

我们把 u 分解成两部分.



下页谈如何分解.

正交分解.

$$\boxed{u = tv + w \quad \text{subject to } w \perp v.}$$

正交分解：把一个向量分解成相互正交的两个向量之和称为正交分解.

正交分解

$$\boxed{\begin{array}{l} u = tv + w \\ \text{subject to } w \perp v. \end{array}}$$

正交分解：把一个向量分解成相互正交的两个向量之和称为正交分解.

如何求出 t 和 w？也就说如何求 u 的一个正交分解（一个分量在 $\mathrm{span}(v)$ 中，另一个分量与 v 垂直）

正交分解

$$\boxed{\begin{aligned} u &= tv + w \quad ① \\ &\text{subject to } w \perp v. \end{aligned}}$$

正交分解：把一个向量分解成相互正交的两个向量之和称为正交分解。

如何求出 t 和 w？也就是如何求 u 的一个正交分解（一个分量在 $\mathrm{span}(v)$ 中，另一个分量与 v 垂直）

①式两边同时与 v 作内积。

$$\langle u, v \rangle = \langle tv + w, v \rangle$$

利用 $w \perp v$，得 $\langle u, v \rangle = t \langle v, v \rangle$.

正交分解

$$u = tv + w \quad ①$$

subject to $w \perp v$.

正交分解：把一个向量分解成相互正交的两个向量之和称为正交分解.

如何求出 t 和 w？也就是说如何求 u 的一个正交分解（一个分量在 $\mathrm{span}(v)$ 中，另一个分量与 v 垂直）

①式两边同时与 v 作内积.

$$\langle u, v\rangle = \langle tv+w, v\rangle$$

利用 $w \perp v$，得 $\langle u,v\rangle = t\langle v,v\rangle$，这样就得出 $t = \dfrac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle}$

正交分解

$$\boxed{u = tv + w \quad ① \quad \text{subject to } w \perp v.}$$

正交分解：把一个向量分解成相互正交的两个向量之和称为正交分解.

如何求出 t 和 w? 也就说如何求 u 的一个正交分解（一个分量在 $\mathrm{span}(v)$ 中，另一个分量与 v 垂直）

① 式两边同时与 v 作内积.

$$\langle u, v\rangle = \langle tv + w, v\rangle$$

利用 $w \perp v$，得 $\langle u, v\rangle = t\langle v, v\rangle$，这样就得出 $t = \dfrac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle}$ ②

把 ② 代入 ①，得 $w = u - tv = u - \dfrac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v$. ③

我们继续证明. 当 u 和 v 线性无关时 $|\langle u,v\rangle| \le \|u\|\|v\|$

此时 u 有一个正交分解 $u = tv + w$, where $w \perp v$.

$$t = \frac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle}$$

$$|\langle u,v\rangle| = |\langle tv+w, v\rangle|$$

$$= |t\langle v,v\rangle|$$

$$= |t|\,\|v\|^2 \quad ①$$

要证 $|\langle u,v\rangle| < \|u\|\,\|v\|$ ②

由①②知 只要证明 $|t|\,\|v\| < \|u\|$ ③

而由勾股定理知 $\|u\|^2 = \|tv\|^2 + \|w\|^2 > |t|^2\|v\|^2$ 已知

可推出 ③式成立。

我们继续证明. 当 u 和 v 线性无关时 $|\langle u,v\rangle| \le \|u\|\|v\|$

此时 u 有一个正交分解 $u = tv + w$, where $w \perp v$.

课本上给出的另外一种证明思路:

讲课时略过.

$$t = \frac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle}$$

$$\|u\|^2 = \langle tv+w, tv+w\rangle = t\bar{t}\langle v,v\rangle + \langle w,w\rangle + t\underbrace{\langle v,w\rangle}_{=0} + \bar{t}\underbrace{\langle w,v\rangle}_{=0}$$

$$= |t|^2\|v\|^2 + \underbrace{\|w\|^2}_{>0}$$

$$> \frac{|\langle u,v\rangle|^2}{|\langle v,v\rangle|^2}\|v\|^2$$

我们继续证明: 当 u 和 v 线性无关时 $|\langle u,v\rangle| \le \|u\|\,\|v\|$

此时 u 有一个正交分解 $u = tv + w$, where $w \perp v$.

$$t = \frac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle}$$

$$\|u\|^2 = \langle tv+w,\ tv+w\rangle = t\bar{t}\langle v,v\rangle + \langle w,w\rangle + t\underbrace{\langle v,w\rangle}_{=0} + \bar{t}\underbrace{\langle w,v\rangle}_{=0}$$

$$= |t|^2\|v\|^2 + \underbrace{\|w\|^2}_{>0}$$

$$> \frac{|\langle u,v\rangle|^2}{\|v\|^4}\|v\|^2$$

我们继续证明. 当 u 和 v 线性无关时 $|\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\,\|v\|$

此时 u 有一个正交分解 $u = tv + w$, where $w \perp v$.

$$t = \frac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle}$$

$$\|u\|^2 = \langle tv+w,\ tv+w\rangle = t\bar{t}\langle v,v\rangle + \langle w,w\rangle + t\underbrace{\langle v,w\rangle}_{=0} + \bar{t}\underbrace{\langle w,v\rangle}_{=0}$$

$$= |t|^2\|v\|^2 + \underbrace{\|w\|^2}_{>0}$$

$$> \frac{|\langle u,v\rangle|^2}{\|v\|^2}$$

于是得证 $|\langle u,v\rangle|^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2$. $\square$

三角不等式和平行四边形等式

三角不等式.

6.9 三角不等式 (Triangle Inequality)： 若 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$，则

6.10
$$\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\| \leqslant \|\boldsymbol{u}\|+\|\boldsymbol{v}\|,$$

而且其中的等号成立当且仅当 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ 之一是另一个的非负标量倍.

、三角不等式.

6.9 三角不等式 (Triangle Inequality)： 若 $u, v \in V$，则

$$\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|, \tag{6.10}$$

而且其中的等号成立当且仅当 u, v 之一是另一个的非负标量倍.

证明：如果 u, v 中有一个是零向量，显然有

$$\|u+v\| = \|u\| + \|v\|.$$

不妨设 $v \neq 0$，如果 $u = tv$，其中 $t \in F$，那么

$$\|u+v\| = \|tv+v\| = |t+1|\,\|v\| \quad ①$$

$$\|u\|+\|v\| = \|tv\| + \|v\| = (|t|+1)\,\|v\| \quad ②$$

三角不等式.

6.9 三角不等式 (Triangle Inequality)： 若 $u, v \in V$，则

6.10
$$\|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\|,$$

而且其中的等号成立当且仅当 u, v 之一是另一个的非负标量倍.

证明：如果 u, v 中有一个是零向量，显然有

$$\|u+v\| = \|u\| + \|v\|.$$

不妨设 $v \neq 0$，如果 $u = tv$，其中 $t \in \mathbb{F}$，那么

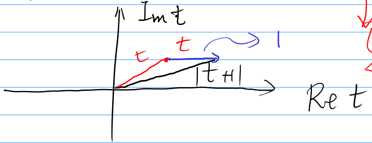
$$\|u+v\| = \|tv+v\| = |t+1|\,\|v\| \quad ①$$

$$\|u\|+\|v\| = \|tv\| + \|v\| = (|t|+1)\|v\| \quad ②$$

由①②易知，当 $t \geq 0$ 时，$|t+1| = (|t|+1)$，此时 $\|u+v\| = \|u\| + \|v\|$.

当 $t<0$ 或者 t 是虚部不为零的复数，都有

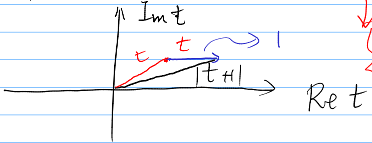
$$|t+1| < |t|+1$$



复平面上的三角不等式

当 $t<0$ 或者 t 是虚部不为零的复数，都有

$$|t+1| < |t|+1$$



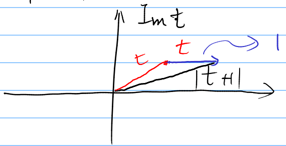
复平面上的三角不等式

下面再说 u 和 v 不线性相关时，有

$$\|u+v\| < \|u\| + \|v\|$$

当 $t<0$ 或者 t 是虚部不为零的复数，都有

$$|t+1| < |t|+1$$



复平面上的三角不等式

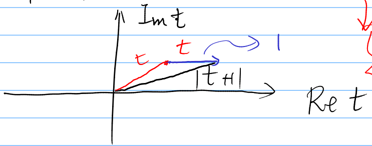
下面再证 u 和 v 不线性相关时，有

$$\|u+v\| < \|u\| + \|v\| \quad ③$$

③式等价于 $\|u+v\|^2 < (\|u\| + \|v\|)^2$ ④

当 $t<0$ 或者 t 是虚部不为零的复数，都有

$$|t+1| < |t|+1$$



复平面上的三角不等式

下面再证 u 和 v 不线性相关时，有

$$\|u+v\| < \|u\| + \|v\| \qquad ③$$

③式等价于 $\|u+v\|^2 < \underbrace{(\|u\| + \|v\|)^2}_{\|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2}$ ④

利用范数的定义（我们讲的范数是由内积诱导出来的）

得④式等价于 $(u+v, u+v) < \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2$ ⑤

原式等价于

$$\|u\|^2 + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \|v\|^2$$

$$< \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2$$

6.

因式分解

$$\|u\|^2 + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \|v\|^2$$

$$< \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 \quad ⑥.$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}\langle u,v\rangle \le \|u\|\|v\| \quad ⑤$$

表示 $\langle u,v\rangle$ 的实部.

把 u 分解成 $\mathrm{span}(v)$ 中向量和一个与 $\mathrm{span}(v)$ 垂直的向量之和, $u = tv + w$, where $t = \frac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle}$; $w \perp v$.

$$\mathrm{Re}\langle u,v\rangle = \mathrm{Re}\langle tv+w, v\rangle = \mathrm{Re}\, t\langle v,v\rangle \quad ⑧$$

⑤式等价于

$$\|u\|^2 + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \|v\|^2$$
$$< \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 \quad ⑥.$$

$$\Longleftrightarrow \quad \underbrace{\mathrm{Re}\langle u,v\rangle}_{\text{表示}\langle u,v\rangle\text{的实部.}} \le \|u\|\|v\| \quad ⑦$$

把 u 分解成 span(v) 中向量和一个与 span(v) 垂直的向量之和，$u = tv + w$, where $t = \frac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle}$; $w \perp v$.

$$\mathrm{Re}\langle u,v\rangle = \mathrm{Re}\langle tv+w, v\rangle = \mathrm{Re}\ t\langle v,v\rangle \quad ⑧$$

而⑦式的右端 $\|u\|\|v\| = \|tv+w\|\ \|v\| \overset{\text{勾股}}{=} \sqrt{|t|^2\|v\|^2+\|w\|^2}\ \|v\|$

$$\ge |t|\ \|v\|^2 \ge \mathrm{Re}\,t\ \|v\|^2$$

⑤式等价于

$$\|u\|^2 + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \|v\|^2 < \|u\|^2 + 2\|u\|\,\|v\| + \|v\|^2 \quad ⑥.$$

$$\Longleftrightarrow \quad \mathrm{Re}\langle u,v\rangle \le \|u\|\,\|v\| \quad ⑤$$

表示 $\langle u,v\rangle$ 的实部.

把 u 分解成 $\mathrm{span}(v)$ 中向量和一个与 $\mathrm{span}(v)$ 垂直的向量之和, $u = tv + w$, where $t = \frac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle}$; $w \perp v$.

$$\mathrm{Re}\langle u,v\rangle = \mathrm{Re}\langle tv+w, v\rangle = \mathrm{Re}\, t\langle v,v\rangle \quad ⑧$$

而⑤式的右端 $\|u\|\,\|v\| = \|tv+w\|\,\|v\| \overset{勾股}{=} \sqrt{|t|^2\|v\|^2+\|w\|^2}\,\|v\|$

$$\ge |t|\,\|v\|^2 \ge \mathrm{Re}\, t\,\|v\|^2 \quad ⑨$$

①式等价于

$$\|u\|^2 + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \|v\|^2 \le \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 \quad ⑥$$

$$\iff \quad \mathrm{Re}\langle u,v\rangle \le \|u\|\,\|v\| \quad ⑦$$

表示 $\langle u,v\rangle$ 的实部.

把 u 分解成 $\mathrm{span}(v)$ 中向量和一个与 $\mathrm{span}(v)$ 垂直的向量之和, $u = tv + w$, where $t = \frac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle}$; $w \perp v$.

$$\mathrm{Re}\langle u,v\rangle = \mathrm{Re}\langle tv+w, v\rangle = \mathrm{Re}\, t\langle v,v\rangle \quad ⑧$$

而⑦式的右端 $\boxed{\|u\|\,\|v\|} = \|tv+w\|\,\|v\| \overset{\text{勾股}}{=} \sqrt{|t|^2\|v\|^2 + \|w\|^2}\,\|v\|$

$$\ge |t|\,\|v\|^2 \ge \boxed{\mathrm{Re}\, t\, \|v\|^2} \quad ⑨$$

把⑧和⑨放在一起就得证 $\mathrm{Re}\langle u,v\rangle \le \|u\|\,\|v\|$.

再加上前面对 u 和 v 线性相关时的讨论, 就证明了三角不等式 ①.

三角不等式和 Cauchy-Schwarz 不等式

在两个不等式的证明中我们都用到了

向量的正交分解，用在证明

Cauchy-Schwarz 不等式 $|\langle u, v\rangle| \le \|u\|\,\|v\|$. ①

三角不等式 $\operatorname{Re}\langle u, v\rangle \le \|u\|\,\|v\|$ ②

三角不等式和 Cauchy-Schwarz 不等式

在两个不等式的证明中我们都用到了向量的正交分解，用在证明

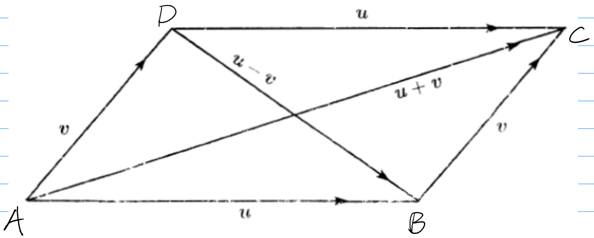
Cauchy-Schwarz 不等式 $|\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\,\|v\|$ ①

三角不等式 $\mathrm{Re}\langle u,v\rangle \leq \|u\|\,\|v\|$ ②

实际上由①可以轻松地利用 $\mathrm{Re}\langle u,v\rangle < |\langle u,v\rangle|$ ③

来推出②。即 ①和③ $\Rightarrow$ ②。

平行四边形等式



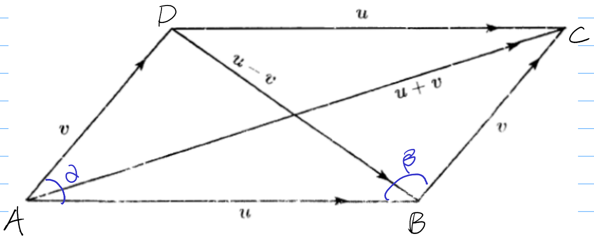
$u = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$v = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

$u+v = \overrightarrow{AC}$

$u-v = \overrightarrow{DB}$

平行四边形等式



$u = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$v = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

$u+v = \overrightarrow{AC}$

$u-v = \overrightarrow{DB}$

u, v 是平行四边形的边.

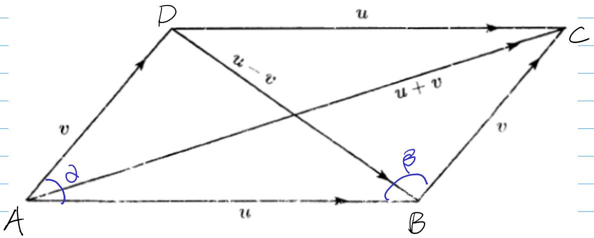
$u+v$. $u-v$ 是平行四边形的对角线.

$\angle\alpha + \angle\beta = \pi$, 由余弦定理可得

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 + 2|AB||BC|\cos\angle\beta$$

$$|BD|^2 = |AB|^2 + |AD|^2 + 2|AB||AD|\cos\angle\alpha$$

平行四边形等式



$u = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$v = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

$u+v = \overrightarrow{AC}$

$u-v = \overrightarrow{DB}$

u, v 是平行四边形两边.

$u+v$, $u-v$ 是平行四边形两对角线.

$\angle\alpha + \angle\beta = \pi$, 由余弦定理可得

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 + 2|AB||BC|\cos\angle\beta \qquad \cos\angle\beta + \cos\angle\alpha = 0$$

$$|BD|^2 = |AB|^2 + |AD|^2 + 2|AB||AD|\cos\angle\alpha$$

相加, 可得 $|AC|^2 + |BD|^2 = 2|AB|^2 + 2|AD|^2 \longrightarrow$ 平行四边形等式

平行四边形等式推广到内积空间

定理 6.14 平行四边形等式（Parallelogram equality）：若 $u, v \in V$，

那么 $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$.

平行四边形等式推广到内积空间

定理 6.14 平行四边形等式 (Parallelogram equality)：若 $u, v \in V$，

那么 $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$.

证明：$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v \rangle = \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle$

平行四边形等式推广到内积空间

定理 6.14 平行四边形等式 (Parallelogram equality)：若 $u, v \in V$，

那么 $$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 .$$

证明：$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \underbrace{\langle u,u\rangle}_{\|u\|^2} + \underbrace{\langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle}_{2\mathrm{Re}\langle u,v\rangle} + \underbrace{\langle v,v\rangle}_{\|v\|^2}$$

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle u,v\rangle \quad ①$$

同样有 $$\|u-v\|^2 = \|u\| + \|-v\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle u,-v\rangle$$

平行四边形等式推广到内积空间

定理 6.14 平行四边形等式 (Parallelogram equality)：若 $u, v \in V$，

那么 $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$.

证明：$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \underbrace{\langle u,u\rangle}_{\|u\|^2} + \underbrace{\langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle}_{2\mathrm{Re}\langle u,v\rangle} + \underbrace{\langle v,v\rangle}_{\|v\|^2}$

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle u,v\rangle \quad ①$$

同样的 $\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \underbrace{\|-v\|^2}_{\|v\|^2} + 2\mathrm{Re}\langle u,-v\rangle$

$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle u,v\rangle \quad ②$$

①+②，就得到 $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$. ∎

矩阵的秩 (rank)

期中考试最后一个题目实际上在证明：矩阵和的 row rank $\leq$ 矩阵的 row rank 的和

秩 (rank)

设 $(v_1, v_2, \cdots, v_m)$ 是向量空间 V 的一个向量组，定义 $(v_1, \cdots, v_m)$ 的秩 (rank) 为 $\dim \operatorname{span}(v_1, v_2, \cdots, v_m)$.

例：如果 $(v_1, v_2, \cdots, v_m)$ 是线性无关的 (linearly independent)，那么 $\operatorname{rank}(v_1, \cdots, v_m) = m$.

秩 (rank)

设 $(v_1, v_2, \cdots, v_m)$ 是向量空间 V 的一个向量组，定义 $(v_1, \cdots, v_m)$ 的秩 (rank) 为 $\dim \operatorname{span}(v_1, v_2, \cdots, v_m)$.

例：如果 $(v_1, v_2, \cdots, v_m)$ 是线性无关的 (linearly independent)，那么 $\operatorname{rank}(v_1, \cdots, v_m) = m$.

线性映射的秩 (rank of a linear transformation) 定义

秩 (rank)

设 $(v_1, v_2, \cdots, v_m)$ 是向量空间 V 的一个向量组，定义 $(v_1, \cdots, v_m)$ 的秩 (rank) 为 $\dim \operatorname{span}(v_1, v_2, \cdots, v_m)$.

例：如果 $(v_1, v_2, \cdots, v_m)$ 是线性无关的 (linearly independent)，那么 $\operatorname{rank}(v_1, \cdots, v_m) = m$.

线性映射的秩 (rank of a linear transformation) 定义

or map

设 V, W are two vector spaces, $T \in \mathcal{L}(V, W)$. The rank of linear transformation T is defined as the dimension of its range space. 记作 $\operatorname{rank} T$.

秩 (rank)

设 $(v_1, v_2, \cdots, v_m)$ 是向量空间 V 的一个向量组，定义 $(v_1, \cdots, v_m)$ 的秩 (rank) 为 $\dim \operatorname{span}(v_1, v_2, \cdots, v_m)$.

例：如果 $(v_1, v_2, \cdots, v_m)$ 是线性无关的 (linearly independent), 那么 $\operatorname{rank}(v_1, \cdots, v_m) = m$.

线性映射的秩 (rank of a linear transformation) 定义
or map

设 V, W are two vector spaces, $T \in \mathcal{L}(V, W)$. The rank of linear transformation T is defined as the dimension of its range space. 记作 $\operatorname{rank} T$.

也就说 $\boxed{\operatorname{rank} T := \dim \operatorname{Range} T}$.

矩阵的秩

$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix} \in F^{m\times n}$ 的 column rank (列秩) 定义成

的列向量 $\left(\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1}\end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn}\end{bmatrix}\right) \subset F^m$ 张成的子空间

的维数

$$\text{列秩}\,A := \dim \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1}\end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn}\end{bmatrix}\right)$$

矩阵的秩.

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in F^{m\times n}$ 的 column rank (列秩) 定义成

A 的列向量 $\left(\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \right) \subset F^m$ 张成的子空间

的维数

称作 A 的列空间 (column space of A)

$$\text{列秩 } A := \dim \operatorname{span} \left(\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \right)$$

稍后我们会定义 A 的行秩 (row rank) 是 A 的 row space 的维数.

矩阵的秩.

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in F^{m\times n}$ 的 column rank (列秩) 定义成

A 的列向量 $\left(\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \right) \subset F^m$ 张成的子空间

称作 A 的列空间 (column space of A)

的维数

$$\text{列秩}\, A := \dim \operatorname{span} \left(\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \right)$$

稍后我们会定义 A 的行秩 (row rank) 是 A 的 row space 的维数.

还会证明 A 的列秩 = A 的行秩

最后: 把 A 的列秩和行秩 (既然二者相等) 称为 A 的秩.

线性映射的秩 和 矩阵的秩

设 $\dim V = n$, $\dim W = m$,

线性映射 $\mathcal{L}(V,W)$ 和 $F^{m\times n}$ 是同构的

同构映射 $\mathcal{L}(V,W) \longrightarrow F^{m\times n}$

$$T \longmapsto \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{array} \\ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{aligned} Tv_1 &= a_{11}u_1 + \cdots + a_{m1}u_m \\ &\vdots \\ Tv_n &= a_{1n}u_1 + \cdots + a_{mn}u_n \end{aligned}$$

从 rank 的定义 就可以看出

$$\boxed{\operatorname{rank} T = \operatorname{rank} \mathcal{M}(T; (v_1,\dots,v_n),(u_1,\dots,u_m))}$$

问同学们要解释吗?

线性映射的秩 和 矩阵的秩

设 $\dim V = n$, $\dim W = m$,

线性映射 $\mathcal{L}(V, W)$ 和 $F^{m\times n}$ 是同构的

同构映射 $\mathcal{L}(V,W) \longrightarrow F^{m\times n}$

$$T \longmapsto \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array} \qquad \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \right)$$

从 rank 的定义 就可以看出

$$\boxed{\operatorname{rank} T = \operatorname{rank} \mathcal{M}(T; (v_1, \cdots, v_n), (u_1, \cdots, u_m))}$$

$$Tv_1 = a_{11}u_1 + \cdots + a_{m1}u_m$$
$$\vdots$$
$$Tv_n = a_{1n}u_1 + \cdots + a_{mn}u_n$$

问同学们 要 解释吗? $\operatorname{Range} T = \operatorname{span}(Tv_1, \cdots, Tv_n)$, $\mathcal{M}(T)$的列空间是

线性映射的秩和矩阵的秩

设 $\dim V = n$，$\dim W = m$，

线性映射 $\mathcal{L}(V, W)$ 和 $F^{m\times n}$ 是同构的

同构映射 $\mathcal{L}(V, W) \longrightarrow F^{m\times n}$

$$T \longmapsto \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{array} \\ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array} \quad \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}\right)$$

从 rank 的定义就可以看出

$$Tv_1 = a_{11}u_1 + \cdots + a_{m1}u_m$$
$$\vdots$$
$$Tv_n = a_{1n}u_1 + \cdots + a_{mn}u_n$$

$$\boxed{\operatorname{rank} T = \operatorname{rank} \mathcal{M}(T; (v_1, \cdots, v_n), (u_1, \cdots, u_m))}$$

问同学们要解释吗？ $\boxed{\operatorname{Range} T} = \operatorname{span}(Tv_1, \cdots, Tv_n)$，$\boxed{\mathcal{M}(T) \text{ 的列空间是}}$

同构

证明 Range T 和 $\mathcal{M}(T)$ 的列空间同构

命题：设 V, W 是有限维的向量空间，$\dim V = n$，$\dim W = m$。$T \in \mathcal{L}(V)$，$(v_1, \dots, v_n)$ 是 V 的一个 basis，$(w_1, \dots, w_m)$ 是 W 的一个 basis。$\mathcal{M}(T)$ 是 T 关于 $(v_1, \dots, v_n)$ 和 $(w_1, \dots, w_m)$ 的矩阵。

那么 Range T 和 $\mathcal{M}(T)$ 的列空间同构。

证明 Range T 和 M(T) 的列空间同构

命题：设 V, W 是有限维的向量空间，$\dim V = n$，$\dim W = m$。$T \in \mathcal{L}(V)$，$(v_1, \cdots, v_n)$ 是 V 的一个 basis，$(w_1, \cdots, w_m)$ 是 W 的一个 basis。$M(T)$ 是 T 关于 $(v_1, \cdots, v_n)$ 和 $(w_1, \cdots, w_m)$ 的矩阵。

那么 Range T 和 $M(T)$ 的列空间同构。

证明：

$$\text{设 } M(T) = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} v_1 & \cdots & v_n \end{array} \\ \begin{array}{c} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\text{Range } T = \operatorname{span}(Tv_1, \cdots, Tv_n)$$

证明 Range T 和 M(T) 的列空间同构

命题：设 V, W 是有限维的向量空间，$\dim V = n$, $\dim W = m$. $T \in \mathcal{L}(V)$. $(v_1, \ldots, v_n)$ 是 V 的一个 basis, $(w_1, \ldots, w_m)$ 是 W 的一个 basis. $M(T)$ 是 T 关于 $(v_1, \ldots, v_n)$ 和 $(w_1, \ldots, w_m)$ 的矩阵。

那么 Range T 和 $M(T)$ 的列空间同构.

证明：设
$$M(T) = \begin{array}{c} \\ w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & \cdots & v_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\operatorname{Range} T = \operatorname{span}(Tv_1, \ldots, Tv_n) = \operatorname{span}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1} w_i, \ldots, \sum_{i=1}^{m} a_{in} w_i\right)$$

是 $W = \operatorname{span}(w_1, \ldots, w_m)$ 的一个子空间

证明 Range T 和 $\mathcal{M}(T)$ 的列空间同构

命题：设 V, W 是有限维的向量空间，$\dim V = n$，$\dim W = m$. $T \in \mathcal{L}(V)$，$(v_1, \dots, v_n)$ 是 V 的一个 basis，$(w_1, \dots, w_m)$ 是 W 的一个 basis. $\mathcal{M}(T)$ 是 T 关于 $(v_1, \dots, v_n)$ 和 $(w_1, \dots, w_m)$ 的矩阵。

那么 Range T 和 $\mathcal{M}(T)$ 的列空间同构.

证明：设
$$\mathcal{M}(T) = \begin{array}{c} \\ w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & \cdots & v_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\operatorname{Range} T = \operatorname{span}(Tv_1, \dots, Tv_n) = \operatorname{span}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1} w_i, \dots, \sum_{i=1}^{m} a_{in} w_i\right)$$

是 $W = \operatorname{span}(w_1, \dots, w_m)$ 的一个子空间

$$\mathcal{M}(T) = \operatorname{span}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1} e_i, \dots, \sum_{i=1}^{m} a_{in} e_i\right)$$ 其中 $(e_1, \dots, e_m)$ 是 F^m 的标准基

下页继续

接上页

因为 W 和 F^m 的维数都是 m，所以二者同构.

$S \in \mathcal{L}(W, F^m)$ defined by

$$S: W \to F^m$$

$$\sum_{i=1}^{m} c_i w_i \mapsto \sum_{i=1}^{m} c_i e_i$$

是 W 和 F^m 之间的一个同构映射 (可逆线性映射)

把 S 限制到 Range T 上.

$S|_{\text{Range}\,T}$: Range $T \longrightarrow \mathcal{M}(T)$ 的列空间

$$c_1 \sum_{i=1}^{m} a_{i1} w_i + \cdots + c_n \sum_{i=1}^{m} a_{in} w_i \mapsto c_1 \sum_{i=1}^{m} a_{i1} e_i + \cdots + c_n \sum_{i=1}^{m} a_{in} e_i$$

接上页

因为 W 和 F^m 的维数都是 m，所以二者同构.

$$S \in \mathcal{L}(W, F^m) \text{ defined by}$$

$$S: W \to F^m$$

$$\sum_{i=1}^{m} c_i w_i \mapsto \sum_{i=1}^{m} c_i e_i$$

是 W 和 F^m 之间的一个同构映射 (线性映射) 可逆

把 S 限制到 Range T 上.

$$S|_{\text{Range}\,T} : \text{Range}\,T \longrightarrow \mathcal{M}(T) \text{ 的列空间}$$

$$c_1 \sum_{i=1}^{m} a_{i,1} w_i + \cdots + c_n \sum_{i=1}^{m} a_{in} w_i \mapsto c_1 \sum_{i=1}^{m} a_{i,1} e_i + \cdots + c_n \sum_{i=1}^{m} a_{in} e_i$$

S 的逆 $S^{-1}: F^m \to W$ 限制到 $\mathcal{M}(T)$ 的列空间上 记作 $S^{-1}|_{\text{列空间}}$, you can

$$\sum_{i=1}^{m} c_i e_i \mapsto \sum_{i=1}^{m} c_i w_i$$

prove that $S|_{\text{Range}\,T}$ 和 $S^{-1}|_{\text{列空间}}$ 互逆.

证明 $S|_{\text{Range}\,T}$ 和 $S^{-1}|_{\text{到空间}}$ 互逆

易知 $S^{-1}|_{\text{到空间}}$ 的 Range 是 Range T

$$\text{Range}\left(S^{-1}|_{\text{到空间}}\right) = \text{span}\left(S^{-1}\cdot\sum_{i=1}^{m} a_{i1}e_i, \ldots, S^{-1}\sum_{i=1}^{m} a_{in}e_i\right)$$
$$= \text{span}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}w_i, \ldots, \sum_{i=1}^{m} a_{in}w_i\right)$$
$$= \text{Range}\,T$$

So, 可以把 $S^{-1}|_{\text{到空间}}$ 的 codomain 看成是 Range T.

$$S^{-1}|_{\text{到空间}} : \text{span}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}e_i, \ldots, \sum_{i=1}^{m} a_{in}e_i\right) \mapsto \text{Range}\,T$$
$$c_1\sum_{i=1}^{m} a_{i1}e_i + \cdots + c_n\sum_{i=1}^{m} a_{in}e_i \mapsto c_1\sum_{i=1}^{m} a_{i1}w_i + \cdots + c_n\sum_{i=1}^{m} a_{in}w_i$$

证明 $S|_{\text{Range}\,T}$ 和 $S^{-1}|_{\text{列空间}}$ 互逆

易知 $S^{-1}|_{\text{列空间}}$ 的 Range 是 Range T

$$\begin{aligned}\text{Range}\left(S^{-1}|_{\text{列空间}}\right) &= \text{span}\left(S^{-1}\cdot\sum_{i=1}^{m} a_{i1}e_i, \dots, S^{-1}\sum_{i=1}^{m} a_{in}e_i\right)\\ &= \text{span}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}w_i, \dots, \sum_{i=1}^{m} a_{in}w_i\right)\\ &= \text{Range}\,T\end{aligned}$$

可以把 $S^{-1}|_{\text{列空间}}$ 的 codomain 看成是 Range T.

① $S^{-1}|_{\text{列空间}}: \text{span}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}e_i, \dots, \sum_{i=1}^{m} a_{in}e_i\right) \mapsto \text{Range}\,T$

$$c_1\sum_{i=1}^{m} a_{i1}e_i + \dots + c_n\sum_{i=1}^{m} a_{in}e_i \mapsto c_1\sum_{i=1}^{m} a_{i1}w_i + \dots + c_n\sum_{i=1}^{m} a_{in}w_i$$

② $S|_{\text{Range}\,T}: \text{Range}\,T \longrightarrow M(T)$的列空间

$$c_1\sum_{i=1}^{m} a_{i1}e_i + \dots + c_n\sum_{i=1}^{m} a_{in}e_m \mapsto c_1\sum_{i=1}^{m} a_{i1}e_i + \dots + c_n\sum_{i=1}^{m} a_{in}e_m$$

由①②定义就可以得出

$S^{-1}|_{\text{列空间}}\,S|_{\text{Range}\,T} = I$, $S|_{\text{Range}\,T}\,S^{-1}|_{\text{列空间}} = I$

应用　矩阵的秩和线性映射的秩的关系

例：设 $A \in F^{m\times n}$，$B \in F^{n\times p}$，那么

$$\operatorname{rank}(AB) \le \operatorname{rank} A$$

且 $\operatorname{rank}(AB) \le \operatorname{rank} B$.

应用　矩阵的秩和线性映射的秩的关系

例：设 $A \in F^{m\times n}$，$B \in F^{n\times p}$，那么

$$\operatorname{rank}(AB) \le \operatorname{rank} A$$

且 $\operatorname{rank}(AB) \le \operatorname{rank} B$.

证明：设 $A = [a_{ij}]$，$B = [b_{ij}]$

定义 $T_A \in \mathcal{L}(F^n, F^m)$.

$$T_A e_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_i$$

Sorry for the abuse of notations. $\to$ F^n 中的基向量

应用　矩阵的秩和线性映射的秩的关系

例：设 $A \in F^{m\times n}$，$B \in F^{n\times p}$，那么

$$\operatorname{rank}(AB) \le \operatorname{rank} A$$

且 $\operatorname{rank}(AB) \le \operatorname{rank} B$.

证明：设 $A = [a_{ij}]$，$B = [b_{ij}]$

定义 $T_A \in \mathcal{L}(F^n, F^m)$.

$$T_A e_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_i$$

F^m 中的基向量

sorry for the abuse of notations. F^n 中的基向量

应用 矩阵的秩和线性映射的秩的关系

例：设 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$，$B \in \mathbb{F}^{n\times p}$，那么

$$\operatorname{rank}(AB) \le \operatorname{rank} A$$

且 $\operatorname{rank}(AB) \le \operatorname{rank} B$.

证明：设 $A = [a_{ij}]$，$B = [b_{ij}]$

$$\text{定义 } T_A \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m).$$

$$T_A e_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_i$$

$\mathbb{F}^m$ 中的基向量

Sorry for the abuse of notations. $\mathbb{F}^n$ 中的基向量

向量空间上不同
但用了相同
的符号

易知 $\mathcal{M}(T_A) = A$.

接上页

B 是 T_B 的矩阵，AB 是 $T_A T_B$ 的矩阵

$$\operatorname{rank}(AB) = \dim \operatorname{Range}(T_A T_B)$$

$$T_A T_B : \quad F^p \xrightarrow{T_B} F^n \xrightarrow{T_A} F^m$$

先证明 $\operatorname{rank}(AB) \le \operatorname{rank}(A)$

我们只要证明 $\dim \operatorname{Range}(T_A T_B) \le \dim \operatorname{Range} T_A$

因为 $\operatorname{Range} T_B$ 是 F^n 的子空间，且 $\operatorname{Range}(T_A T_B)$

$= \operatorname{Range} T_A|_{\operatorname{Range} T_B}$，所以 $\operatorname{Range}(T_A T_B)$ 是

$\operatorname{Range} T_A$ 的子空间，所以 $\dim \operatorname{Range}(T_A T_B) \le \dim \operatorname{Range} T_A$

即 $\operatorname{rank}(AB) \le \operatorname{rank} A$.

接上页

B 是 T_B 的矩阵，AB 是 $T_A T_B$ 的矩阵

$\mathrm{rank}(AB) = \dim \mathrm{Range}(T_A T_B)$

$T_A T_B: \quad F^p \xrightarrow{T_B} F^n \xrightarrow{T_A} F^m$

先证明 $\mathrm{rank}(AB) \leq \mathrm{rank}(A)$

我们只要证明 $\dim \mathrm{Range}(T_A T_B) \leq \dim \mathrm{Range}\, T_A$

因为 $\mathrm{Range}\, T_B$ 是 F^n 的子空间，且 $\mathrm{Range}(T_A T_B)$ $= \mathrm{Range}\, T_A|_{\mathrm{Range}\, T_B}$，所以 $\mathrm{Range}(T_A T_B)$ 是 $\mathrm{Range}\, T_A$ 的子空间，所以 $\dim \mathrm{Range}(T_A T_B) \leq \dim \mathrm{Range}\, T_A$

即 $\mathrm{rank}(AB) \leq \mathrm{rank}\, A$.

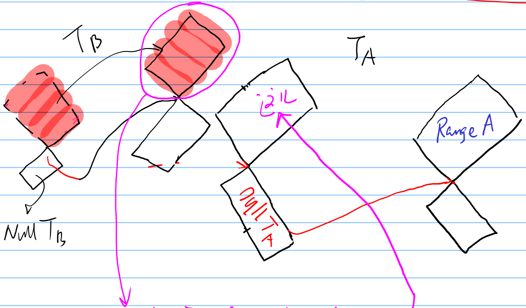
需要解释吗？

$(T_A T_B)u$

$= T_A(\underbrace{T_B u}_{\in \mathrm{Range}\, T_B})$

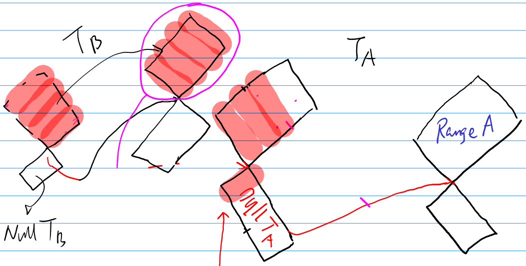
$$\dim \operatorname{Range}(T_A T_B) \le \dim \operatorname{Range} T_A$$ 如图示.

$$\dim \operatorname{Range}(T_A T_B) \le \dim \operatorname{Range} T_B$$



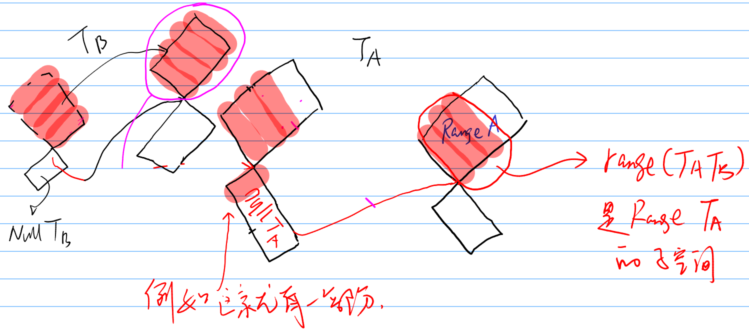
这些不一定全部都在

$\dim \mathrm{Range}(T_A T_B) \le \dim \mathrm{Range}\, T_A$ 的圖示.



例如這就有一部份.

$\dim \mathrm{Range}(T_A T_B) \le \dim \mathrm{Range}\, T_A$ 的图示.



图中显示的 Range $(T_A T_B)$ 是三根，比 Range (T_B) 的四根少，想表达 $\mathrm{Rank}(AB) \le \mathrm{Rank}(B)$；

Range $(T_A T_B)$ 没有填满 Range T_A，想表达 $\mathrm{rank}(AB) \le \mathrm{rank}\, A$.

例题

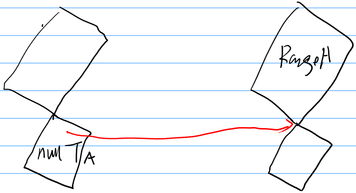
请证明：

设 $A \in F^{s\times n}$，$B \in F^{n\times m}$，如果 $AB = 0$

是 $F^{s\times m}$ 中的零矩阵

那么 $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B \le n$.

证明：A 和 B 都看成它们对应的线性映射 T_A 和 T_B



例题

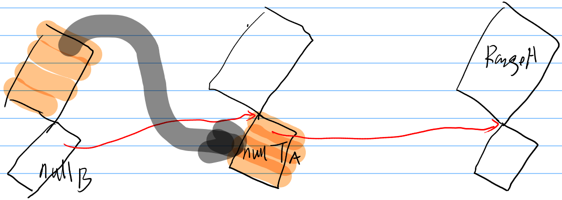
请证明：

设 $A \in F^{s\times n}$，$B \in F^{n\times m}$，如果 $AB = 0$

是 $F^{s\times B}$ 中的零矩阵

那么 $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B \le n$.

证明：$AB = 0$ 表明 Range B 是 Null A 的子空间



例题

请证明：设 $A \in F^{s\times n}$，$B \in F^{n\times m}$，如果 $AB = 0$

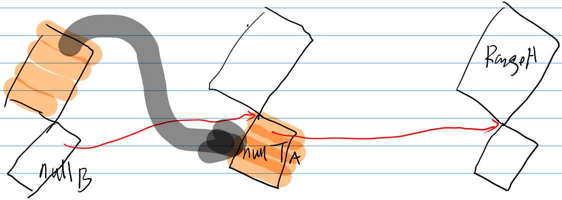
是 $F^{s\times B}$ 中的零矩阵

那么 $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B \le n$.

证明：$AB = 0$ 表明 $\operatorname{Range} B$ 是 $\operatorname{Null} A$ 的子空间

Rank-Nullity theorem: $n = \dim \operatorname{Null} A + \dim \operatorname{Range} A$

F^n.



例题 （见丘维声《简明线性代数》127页）

请证明：

设 $A \in F^{s\times n}$，$B \in F^{n\times m}$，如果 $AB = 0$

是 $F^{s\times B}$ 中的零矩阵

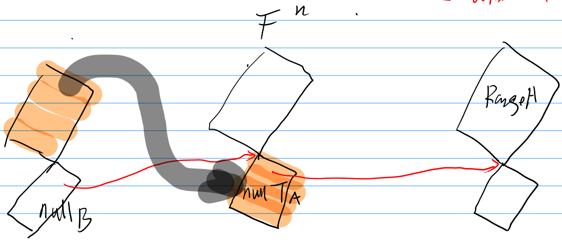
那么 $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B \le n$.

证明：$AB = 0$ 表明 $\boxed{\text{Range } B \text{ 是 Null } A \text{ 的子空间}}$

Rank-Nullity theorem: $n = \dim \text{Null } A + \dim \text{Range } A$

$\dim \text{Null } A \geq \dim \text{Range } B$

从而得证



$n \geq \dim \text{Range } B + \dim \text{Range } A$

即 $n \geq \operatorname{rank} B + \operatorname{rank} A$.

作业

1. 证明：如果 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 都是 $\mathbf{R}^2$ 中的非零向量，那么

$$\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle = \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|\cos\theta,$$

其中 θ 是 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 之间的夹角 (把 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 都看作始于原点的箭头). 提示：画出 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的夹角；然后利用余弦定律.

提示：$x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2)$是$\mathbb{R}^2$的两个点，它们的内积定义成

$\langle x,y\rangle=\|x\|\ \|y\|\cos\theta,$

其中θ是ox和oy之间的夹角。然后，我们证明了$\langle x,y\rangle=x_1y_1+x_2y_2$。

现在我们定义$\langle x,y\rangle=x_1y_1+x_2y_2$，然后证明

$\langle x,y\rangle=\|x\|\ \|y\|\cos\theta.$

大家想一想是不是正交分解$x=ay+z$,其中z与y垂直，

按照课本6.5式附件的描述，我们很容易得到

$$a=\frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}$$

而通过我们在平面几何的知识，我们知道ay是x在y方向的投影，

$a\|y\|=\|x\|\cos\theta$

红色和蓝色两个式子联立，就可以计算出$\langle x,y\rangle=\|x\|\ \|y\|\cos\theta.$

2. 设 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$. 证明 $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$ 当且仅当

$$\|\boldsymbol{u}\| \leqslant \|\boldsymbol{u} + a\boldsymbol{v}\|, \quad a \in \mathbf{F}.$$

提示： 题目稍微有点毛病，

$a \in F$前面少了一个″for all″．

$\| u\|^2 \leq \| u + av\|^2, \forall a \in F$都成立，

利用范数和内积的关系, 得到

$\langle u, u \rangle \leq \langle u + av, u + av \rangle, \forall a \in F$

注意这里的F理解成复数域。

3. 证明对所有实数 $a_1, \cdots, a_n$ 和 $b_1, \cdots, b_n$ 都有

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right)^2 \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} j {a_j}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{{b_j}^2}{j}\right).$$

提示： 应用Cauchy-Schwarz不等式即可，

$\langle x, y\rangle \leq \| x\| \ \| y\|$,

$x = (x_1, \cdots, x_n)$,其中$x_j = \sqrt{j} a_j$

$y = (y_1, \cdots, y_n)$,其中$y_j = \dfrac{1}{\sqrt{j}} b_j$

4. 设 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ 使得

$$\|\boldsymbol{u}\| = 3, \quad \|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\| = 4, \quad \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\| = 6.$$

求 $\|\boldsymbol{v}\|$.

5. 证明或反驳：存在 $\mathbf{R}^2$ 上的内积, 使得相应的范数定义如下

$$\|(x_1, x_2)\| = |x_1| + |x_2|, \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2.$$

题目5提示： 我们证明内积的平行四边形等式是对
所有不同定义的内积都是成立的，
你可以检查一下，如果存在这样满足题目条件的内积
是否和平行四边形等式向矛盾。

6. 证明：若 V 是实内积空间，则

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \frac{\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 - \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|^2}{4}, \quad \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V.$$

7. 证明：若 V 是复内积空间，则对任意 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ 都有

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \frac{\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 - \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|^2 + \|\boldsymbol{u}+i\boldsymbol{v}\|^2 i - \|\boldsymbol{u}-i\boldsymbol{v}\|^2 i}{4}.$$

这两个题目告诉我们内积空间的内积可以由范数来表示，
当然，这个范数是由内积导出的范数。