线性代数第六次习题课

李弢

2019 年 12 月 12 日

目录

1 线性泛函与伴随

1. 取定向量 $v \in V$, 把 $T \in \mathcal{L}(V, \mathbf{F})$ 定义成 $Tu = \langle u, v \rangle$. 求 $T^*a, \forall a \in \mathbf{F}$.

解：$\langle u, T^*a \rangle_V = \langle Tu, a \rangle_{\mathbf{F}} = \overline{a}\langle u, v \rangle_V = \langle u, av \rangle_V$. 因此 $T^*a = av$.

2. 设 n 为整数，把 $T \in \mathcal{L}(\mathbf{F}^n)$ 定义为 $T(z_1, z_2, \cdots, z_n) = (0, z_1, \cdots, z_{n-1})$, 求 $T^*(z_1, z_2, \cdots, z_n)$.

解：

$$\langle T(z_1, z_2, \cdots, z_n), (w_1, w_2, \cdots, w_n) \rangle = \langle (z_1, z_2, \cdots, z_n), T^*(w_1, w_2, \cdots, w_n) \rangle$$

由 T 的定义可知

$$\langle T(z_1, z_2, \cdots, z_n), (w_1, w_2, \cdots, w_n) \rangle = w_2 z_1 + w_3 z_2 + \cdots + w_n z_{n-1},$$

因此 $T^*(w_1, w_2, \cdots, w_n) = (w_2, w_3, \cdots, w_n, 0)$.

Remark: 对于 $\mathbf{F}^n$，可以定义很多不同的内积，但一般默认情况下我们就认为是标准内积，也就是对应坐标相乘再相加的形式。

3. 设 $T \in \mathcal{L}(V)$ 且 $\lambda \in \mathbf{F}$, 证明 λ 是 T 的特征值当且仅当 $\overline{\lambda}$ 是 T^* 的特征值。

解：λ 是 T 的特征值，即 $\operatorname{null}(T-\lambda I) \neq \{0\}$. 此外，注意到 $T^* - \overline{\lambda} I$ 就是 $T - \lambda I$ 的伴随算子，由 Fredholm 选择定理，$\operatorname{range}(T^* - \overline{\lambda} I) = \operatorname{null}(T - \lambda I)$, 因此 $\dim \operatorname{range}(T^* - \overline{\lambda} I) = \dim V - \dim \operatorname{null}(T - \lambda I) < \dim V$, 那么 $\dim \operatorname{null}(T^* - \overline{\lambda} I) = \dim V - \dim \operatorname{range}(T^* - \overline{\lambda} I) > 0$, 这就说明了 $\operatorname{null}(T^* - \overline{\lambda} I) \neq \{0\}$, 即 $\overline{\lambda}$ 是 T^* 的特征值。另一方面，由于 $T^{**} = T, \overline{\overline{\lambda}} = \lambda$, 可知结论也成立。

4. 设 $T \in \mathcal{L}(V)$, 并且 U 是 V 的子空间，证明 U 在 T 下是不变的当且仅当 $U^\perp$ 在 T^* 下是不变的。

解：若 U 在 T 下不变，则对任意的 $u \in U, w \in W$, 有 $Tu \in U$，所以 $\langle Tu, w\rangle = 0$, 这又推出 $\langle u, T^* w\rangle = 0$, 即说明 $T^* w \in U^\perp$. 所以 $U^\perp$ 是 T^* 的不变子空间。另一方面，$(U^\perp)^\perp = U, T^{**} = T$, 故若 $U^\perp$ 在 T^* 下不变也可以推出 U 在 T 下不变。

5. 设 $T \in \mathcal{L}(V, W)$, 证明：

- (a). T 是单的当且仅当 T^* 是满的；
- (b). T 是满的当且仅当 T^* 是单的。

解：由于 $T^{**} = T$, 我们只需证明 T 是单的 $\Rightarrow T^*$ 是满的，T 是满的 $\Rightarrow T^*$ 是单的。

- (a). 设 T 是单的，即 $\operatorname{null} T = \{0\}$. 由 Fredholm 选择定理可知 $\operatorname{range} T^* = (\operatorname{null} T)^\perp = V$, 故 T^* 是满的。
- (b). 设 T 是满的，即 $\operatorname{range} T = W$. 由 Fredholm 选择定理可知 $\operatorname{null} T^* = (\operatorname{range} T)^\perp = \{0\}$, 故 T^* 是单的。

Remark: 我们已经知道在一组规范正交基下，T 与 T^* 的矩阵互为共轭转置。在矩阵的意义下，T 是满的等价于 $\mathcal{M}(T)$ 列满秩，T 是单的等价于 $\mathcal{M}(T)$ 行满秩，我们又知道 $\mathcal{M}(T^*) = \mathcal{M}(T)^*$, 因此显然 $\mathcal{M}(T)$ 列满秩（T

满）等价于 $\mathcal{M}(T^*)$ 行满秩（T^* 单），$\mathcal{M}(T)$ 行满秩（T 单）等价于 $\mathcal{M}(T^*)$ 列满秩（T^* 满）。

6. 证明对每个 $T \in \mathcal{L}(V, W)$ 都有

$$\dim \operatorname{null} T^* = \dim \operatorname{null} T + \dim W - \dim V.$$

并且 $\dim \operatorname{range} T = \dim \operatorname{range} T^*$.

解：

$$\begin{aligned}\dim \operatorname{null} T^* &= \dim W - \dim \operatorname{range} T^* \\ &= \dim W - \dim (\operatorname{null} T)^{\perp} \\ &= \dim W - (\dim V - \dim \operatorname{null} T) \\ &= \dim \operatorname{null} T + \dim W - \dim V.\end{aligned}$$

又由于 $\dim \operatorname{range} T = \dim V - \dim \operatorname{null} T, \dim \operatorname{range} T^* = \dim W - \dim \operatorname{null} T^*$, 易知 $\dim \operatorname{range} T = \dim \operatorname{range} T^*$.

Remark: 在规范正交基下，$\mathcal{M}(T^*) = \mathcal{M}(T)^*$, 而 $\dim \operatorname{range} T$ 就是 $\mathcal{M}(T)$ 的列秩，$\dim \operatorname{range} T^*$ 就是 $\mathcal{M}(T^*)$ 的列秩，实际上就是 $\mathcal{M}(T)$ 的行秩。这个结果实际上就等价于一个矩阵的列秩等于行秩。

7. 设 A 为 $m \times n$ 的实矩阵。证明 A 的所有列（在 $\mathbb{R}^m$ 中）张成的子空间的维数等于 A 的所有行（在 $\mathbb{R}^n$ 中）张成的子空间的维数。

解：考虑一个线性映射 $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, T(x) = Ax$. 考虑 $\mathbb{R}^m$ 和 $\mathbb{R}^n$ 的标准基，在这组基下 $\mathcal{M}(T^*) = A^{\mathrm{T}}$. 那么 A 的所有列（在 $\mathbb{R}^m$ 中）张成的子空间的维数等于 $\dim \operatorname{range} T$，$A$ 的所有行（在 $\mathbb{R}^n$ 中）张成的子空间的维数等于 $\dim \operatorname{range} T^*$. 由上题可知 $\dim \operatorname{range} T = \dim \operatorname{range} T^*$, 故证得。

2 自伴算子与正规算子

1. 按照下面的定义，$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ 是内积空间，

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x) q(x) \,\mathrm{d}\, x.$$

定义 $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}))$ 使得 $T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_1 x$.

- (a). 证明 T 不是自伴的。

- (b). T 关于 $(1, x, x^2)$ 的矩阵是

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0. \end{pmatrix}$$

虽然 T 不是自伴的，但是这个矩阵却和它的共轭转置相等。解释为什么这并不矛盾。

解：

- (a). 假设 T 是自伴的，那么 $\langle Tp, q\rangle = \langle p, Tq\rangle$ 对任何 $p, q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ 均成立。取 $p(x) = x^2, q(x) = x$, 那么

$$\langle Tp, q\rangle = \langle 0, x\rangle = 0.$$

$$\langle p, Tq\rangle = \langle x^2, x\rangle = \int_0^1 x^3 \mathrm{d}\, x = \frac{1}{4} \neq 0.$$

因此，T 不可能是自伴的。

- (b). 之前我们是说在一组规范正交基下，伴随算子的矩阵等于原算子矩阵的共轭转置，因而自伴算子的矩阵等于它的共轭转置。但这题里考虑的基 $(1, x, x^2)$ 在这个内积的定义下不是规范正交基，故虽然这个矩阵是对称的，也无法说明算子是自伴的。

2.

- (a). 证明：若 V 是实内积空间，则 V 上的自伴算子之集是 $\mathcal{L}(V)$ 的子空间。
- (b). 证明：若 V 是复内积空间，则 V 上的自伴算子之集不是 $\mathcal{L}(V)$ 的子空间。

解：

- (a). 任取两个实内积空间上的自伴算子 T, S, 我们来说明 $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda T + \mu S$ 仍是自伴算子。

$$\langle (\lambda T+\mu S)u, v\rangle = \lambda\langle Tu, v\rangle+\mu\langle Su, v\rangle = \langle u, \lambda T^* v\rangle+\langle u, \mu S^* v\rangle = \langle u, (\lambda T+\mu S)v\rangle.$$

因此实内积空间 V 上的自伴算子之集是 $\mathcal{L}(V)$ 的子空间。

- (b). 设 T 是复内积空间 V 上的一个自伴算子，我们来说明 λT 有可能不是自伴的。

$$\langle \lambda Tu, v\rangle = \lambda\langle T, u\rangle = \lambda\langle u, Tv\rangle = \langle u, \overline{\lambda}Tv\rangle.$$

这说明 $(\lambda T)^* = \overline{\lambda}T$, 当 $\Im\lambda \neq 0$ 且 $T \neq 0$ 时 $(\lambda T)^* \neq \lambda T$, 这就说明了复内积空间 V 上的自伴算子之集不是 $\mathcal{L}(V)$ 的子空间。

3. 设 $P \in \mathcal{L}(V)$ 使得 $P^2 = P$. 证明 P 是正交投影当且仅当 P 是自伴的。

解：由 $P^2 = P$ 可知存在 $U \oplus W = V, P = P_{U,W}$.

- ($\Rightarrow$:) P 是正交投影，即是说存在 V 的子空间 U，$P = P_{U,U^\perp}$. 对任意 $v_1, v_2 \in V$, 我们将他们分解为

$$v_1 = u_1 + w_1, v_2 = u_2 + w_2, u_1 \in U, u_2 \in U, w_1 \in U^\perp, w_2 \in U^\perp.$$

那么

$$\langle Pv_1, v_2\rangle = \langle u_1, u_2 + w_2\rangle = \langle u_1, u_2\rangle = \langle u_1 + w_1, u_2\rangle = \langle v_1, Pv_2\rangle.$$

这就说明了 P 是自伴的。

- ($\Leftarrow$:) 由 Fredholm 选择定理可知，$\operatorname{range} P^* = (\operatorname{null} P)^\perp$. 而 P 又是自伴的，所以 $\operatorname{range} P = \operatorname{range} P^* = (\operatorname{null} P)^\perp$. 再结合 $P^2 = P$, 由上一章一道课后题的结论可知，P 是正交投影。

Remark: 在无限维空间中，有时候很难说清把一个空间分为两个子空间或者正交子空间的直和。相反，$P^2 = P$ 就是投影算子的一般定义，$P^2 = P$ 且 P 自伴就是正交投影算子的一般定义。

4. 证明：若 $\dim V \geq 2$, 则 V 上的正规算子之集不是 $\mathcal{L}(V)$ 的子空间。

解：设 V 是一个维数大于等于 2 的线性空间，取一组规范正交基 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$. 定义 $S, T \in \mathcal{L}(V)$:

$$S(a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n) = a_2e_1 - a_1e_2,$$

$$T(a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n) = a_2e_1 + a_1e_2.$$

我们先验证 S 和 T 都是正规算子，先来求 S^*:

$\langle a_1e_1+\cdots+a_ne_n, S^*(b_1e_1+\cdots+b_ne_n)\rangle = \langle a_2e_1-a_1e_2, b_1e_1+\cdots+b_ne_n\rangle = a_2b_1-a_1b_2.$

因此 $S^*(b_1e_1+\cdots+b_ne_n) = -b_2e_1+b_1e_2$, 那么

$$SS^*(a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n) = S(-a_2e_1+a_1e_2) = a_1e_1+a_2e_2.$$

$$S^*S(a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n) = S^*(a_2e_1-a_1e_2) = a_1e_1+a_2e_2 = SS^*.$$

这说明 S 是正规算子。类似地可以验证 T 也是正规算子。而 $(S+T)(a_1e_1+\cdots+a_ne_n) = 2a_2e_1$, $(S+T)^*(a_1e_1+\cdots+a_ne_n) = 2a_1e_2$, 因此

$$(S+T)(S+T)^*(a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n) = 4a_1e_1,$$

$$(S+T)^*(S+T)(a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n) = 4a_2e_2,$$

这说明 $S+T$ 不是正规算子。

5. 证明: 若 $T\in\mathcal{L}(V)$ 是正规的，则 $\operatorname{range}T = \operatorname{range}T^*$.

解：我们先说明 $\operatorname{null}T = \operatorname{null}T^*$. 由于 T 是正规算子，$\|Tv\|^2 = \langle Tv, Tv\rangle = \langle v, T^*Tv\rangle = \langle v, TT^*v\rangle = \langle T^*v, T^*v\rangle = \|T^*v\|^2$. 因此，若 $v\in\operatorname{null}T$, $\|T^*v\| = \|Tv\| = 0$, 由范数的定性可知 $T^*v = 0$, 即 $v\in\operatorname{null}T^*$. 由于 $T^{**} = T$, 反之亦然，故 $\operatorname{null}T = \operatorname{null}T^*$. 而由 Fredholm 选择定理，$\operatorname{range}T = (\operatorname{null}T^*)^\perp, \operatorname{range}T^* = (\operatorname{null}T)^\perp$, 由正交补空间的唯一性可知 $\operatorname{range}T = \operatorname{range}T^*$.

6. 若 $T\in\mathcal{L}(V)$ 是正规的，则对每个正整数 k 都有

$$\operatorname{null}T^k = \operatorname{null}T, \operatorname{range}T^k = \operatorname{range}T.$$

解：我们先证明 $\operatorname{null}T^k = \operatorname{null}T$. 首先 $\operatorname{null}T\subset\operatorname{null}T^k$ 是显然的，故只需证明 $\forall v\in\operatorname{null}T^k$ 可推出 $v\in\operatorname{null}T$. 由于 T 是正规算子，$\|Tu\| = \|T^*u\|$ 对任意 $u\in V$ 成立。特别地，取 $u = T^{k-1}v$ 可知，$\|T^*T^{k-1}v\| = \|T^k\| = 0$, 即 $*T^{k-1}v = 0$. 考虑 $0 = \langle T^*T^{k-1}v, T^{k-2}v\rangle = \|T^{k-1}v\|^2$, 这又推出 $T^{k-1}v = 0$. 依次递推可知 $Tv = 0$, 故证得 $\operatorname{null}T^k = \operatorname{null}T$.

另一方面，$\operatorname{range}T^k\subset\operatorname{range}T$ 是显然的，而 $\dim\operatorname{range}T^k = \dim V - \dim\operatorname{null}T^k = \dim V - \dim\operatorname{null}T = \dim\operatorname{range}T$, 所以 $\operatorname{range}T^k = \operatorname{range}T$.

7. 证明没有自伴算子 $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ 使得

$$T(1,2,3) = (0,0,0), T(2,5,7) = (2,5,7).$$

解：假设存在这样的自伴算子，那么

$$\langle T(1,2,3), (2,5,7)\rangle = \langle (1,2,3), T(2,5,7)\rangle.$$

左侧等于 0, 右侧等于 $\langle (1,2,3), (2,5,7)\rangle \neq 0$, 显然不可能成立，故不存在这样的自伴算子。

3 谱定理及其应用

1. 证明：在复内积空间上，一个正规算子是自伴的当且仅当它的所有特征值都是实的。

解：如果一个正规算子是自伴算子，那么它所有的特征值显然都是实的，因为自伴算子特征值都是实的。反之，设 T 是复内积空间上的一个正规算子，它的特征值都是实的。由谱定理，可以找到一组规范正交基使得 $\mathcal{M}(T)$ 是对角阵，对角元素是它的特征值。在规范正交基下，$\mathcal{M}(T^*) = \mathcal{M}(T)^* = \mathcal{M}(T)$, 这就说明了 T 是自伴的。

2. 设 V 是复内积空间，$T \in \mathcal{L}(V)$ 是正规算子使得 $T^9 = T^8$. 证明 T 是自伴的，并且 $T^2 = T$.

解：由谱定理，复内积空间 V 上的正规算子 T 可以对角化，即可以找到一组规范正交基，使得 $\mathcal{M}(T)$ 是对角矩阵，设其对角元素分别为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$。那么在这组基下，$\mathcal{M}(T^9) = \mathcal{M}(T)^9, \mathcal{M}(T^8) = \mathcal{M}(T)^8$, 所以 $\lambda_i^9 = \lambda_i^8$, 这说明 $\lambda_i = 0$ 或 $\lambda_i = 1$. 显然这些特征值都是实的，由上一题可知 T 是自伴的，且 $\lambda_i^2 = \lambda_i$ 对所有 $i = 1, 2, \cdots, n$ 都成立，故 $T^2 = T$.

3. 设 V 是复内积空间，证明 V 上的每个正规算子都有平方根。（算子 $S \in \mathcal{L}(V)$ 称为 $T \in \mathcal{L}(V)$ 的平方根如果 $S^2 = T$.）

解：设 $T \in \mathcal{L}(V)$ 是一个自伴算子，由谱定理，可以找到 V 的一组规范正交基，T 在这组基下的矩阵是一个对角阵，设其对角元为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$。定义 S，它在这组基下的矩阵为对角阵且对角元为 $\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n}$, 那么显然有 $S^2 = T$.

Remark: 由于考虑的是复内积空间，我们可以将特征值开方，得到复数也没有关系。如果是实内积空间显然不能这么做。实际上这个结论在实内积空间上的版本更为常用：实内积空间上的任何正自伴算子一定存在平方根。

4. 给出实内积空间 V, 算子 $T \in \mathcal{L}(V)$ 以及满足 $\alpha^2 < 4\beta$ 的实数 α, β 使得 $T^2 + \alpha T + \beta I$ 不可逆。

解：令 $V = \mathbb{R}^2, T(x,y) = (-y,x), \alpha = 0, \beta = 1$. 那么 $T^2 = -T, T^2 + \alpha T + \beta I = 0$ 显然不可逆。

5. 证明或举反例：V 上每个自伴算子都有立方根。（算子 $S \in \mathcal{L}(V)$ 称为 $T \in \mathcal{L}(V)$ 的立方根，如果 $S^3 = T$.）

解: 设 $T \in \mathcal{L}(V)$ 是一个自伴算子，由谱定理，可以找到 V 的一组规范正交基，T 在这组基下的矩阵是一个对角阵，设其对角元为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$。定义 T，它在这组基下的矩阵为对角阵且对角元为 $\lambda_1^{\frac{1}{3}}, \cdots, \lambda_n^{\frac{1}{3}}$, 那么显然有 $S^3 = T$.

Remark: 显然这题的结论是可以推广的，任何奇次方根都存在。对于偶次方根，则还需要算子是正的。

6. 设 $T \in \mathcal{L}(V)$ 是自伴的，$\lambda \in \mathbf{F}, \varepsilon > 0$. 证明，若有 $v \in V$ 使得 $\|v\| = 1$, 并且 $\|Tv - \lambda v\| < \varepsilon$, 则有 T 的特征值 λ' 使得 $|\lambda - \lambda'| < \varepsilon$.

解：由谱定理，T 可以在某组规范正交基 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 下写成对角阵，对角元即为特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, Te_j = \lambda_j e_j$. 利用反证法，假设 $|\lambda_j - \lambda| \geq \varepsilon$. 设 $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, 则 $Tv - \lambda v = \sum_{i=1}^n x_i T e_i - \lambda \sum_{i=1}^n x_i e_i$,

$$\|Tv - \lambda v\|^2 = \|\sum_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda) x_i e_i\|^2 = \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda)^2 x_i^2 \geq \varepsilon^2 \|v\|^2 = \varepsilon^2.$$

这与题目的条件矛盾。所以 T 一定有某个特征值 λ' 使得 $|\lambda - \lambda'| < \varepsilon$.

4 正算子

1. 证明 V 上两个正算子的和是正的。

解：设 S, T 是 V 上的两个正算子，那么 $\langle (S+T)v, v\rangle = \langle Sv, v\rangle + \langle Tv, v\rangle \geq 0, \forall v \in V$, 并且 $S + T$ 也是自伴的，故 $S + T$ 也是正算子。

2. 证明：若 $T \in \mathcal{L}(V)$ 是正的，则对于每个正整数 k,T^k 都是正的。

解：我们可以对 k 分奇数和偶数的情况进行讨论。如果 k 是偶数，那么 $k=2m, \langle T^k v, v\rangle = \langle T^{2m} v, v\rangle = \langle T^m v, T^m v\rangle \geq 0$. 如果 k 是奇数，那么 $k=2m+1$, $\langle T^k v, v\rangle = \langle T^{2m+1} v, v\rangle = \langle T(T^m v), T^m v\rangle \geq 0$. 因此对每个正整数 k, T^k 都是正的。

3. 设 T 是 V 上的正算子。证明 T 可逆当且仅当对每个 $v \in V - \{0\}$ 都有 $\langle Tv, v\rangle > 0$.

解：设 T 可逆。由于 T 是正算子，存在 $S \in \mathcal{L}(V)$ 使得 $T = S^*S$. 对于任意 $v \in V - \{0\}$, $Sv \neq 0$, 否则 $Tv = S * Sv = 0$, 这与 T 是正算子矛盾。那么，$\langle Tv, v\rangle = \langle S^*Sv, v\rangle = \langle Sv, Sv\rangle \geq 0$.

反之，若 $\langle Tv, v\rangle > 0, \forall v \in V - \{0\}$, 那么 $\operatorname{null} T = \{0\}$, 显然说明 T 可逆。