

V 和 W 同构 (*isomorphic*) 同构的

可逆的线性映射 $T \in L(V, W)$ 非常重要.

如果存在可逆的 $T \in L(V, W)$, 那么称 V 和 W 是同构的 (*isomorphic*).

同构的

V 和 W 同构 (isomorphic)

可逆的线性映射 $T \in L(V, W)$ 非常重要.

如果存在可逆的 $T \in L(V, W)$, 那么称 V 和 W 是同构的 (isomorphic).

例: $P_2(\mathbb{R}) = \{ a_0 + a_1x + a_2x^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}$

是次数小于或等于2的实系数实变量的多项式
集合, 也是实数域上的3维向量空间.

定义一个映射 $T: P_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 \mapsto (a_0, a_1, a_2)$$

可以验证 $T: P_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ 是一个可逆的线性映射.

$$T^{-1}: \mathbb{R}^3 \rightarrow P_2(\mathbb{R})$$

$$(a_0, a_1, a_2) \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$P_2(\mathbb{R})$ 和 \mathbb{R}^3 同构.

一个是多项式集合，一个是三元有序数组集合
两者看起来截然不同的集合都是三维向量空间，
它们是同构的.

同构的例子

$$P_2(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

表示 $\frac{d}{dx} : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 \mapsto a_1 + 2a_2x$$

$P_2(\mathbb{R})$ 和 \mathbb{R}^3 同构

$$T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 \mapsto (a_0, a_1, a_2)$$

$T \frac{d}{dx} T^{-1}$ 就成了 $L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ 中的一个线性映射。

也就是说 $\frac{d}{dx}$ 是作用在函数上的算子 经可逆线性映射
T 这样的变换 就变成了我们熟悉的 \mathbb{R}^3 上的线性映射

同构 . 维数

前面的例子已经看到两个线性空间同构，它们的维数相等。



同构、维数

前面的例子已经看到两个线性空间同构，它们的维数相等。

逆向思维。猜测两个维数相等的线性空间是同构的。

同构、维数

前面的例子已经看到两个线性空间同构，它们的维数相等。

逆向思维。猜测两个维数相等的线性空间是同构的。

同构 . 维数

前面的例子已经看到两个线性空间同构，它们的维数相等。

逆向思维。猜测两个维数相等的线性空间是同构的。

3.18 定理：两个有限维向量空间同构当且仅当它们的维数相等。

同构、维数

前面的例子已经看到两个线性空间同构，它们的维数相等。

逆向思维。猜测两个维数相等的线性空间是同构的。

3.18 定理：两个有限维向量空间同构当且仅当它们的维数相等。

证明：设 V 和 W 是域 F 上的有限维线性空间。

(e_1, \dots, e_n) 是 V 的一个基， (f_1, \dots, f_n) 是 W 的一个基。

定义映射 $T: V \rightarrow W$ 如下

$$Te_i = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

$\forall v \in V$, 存在 $a_i \in F$, $i = 1, 2, \dots, n$ 使得

$$v = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$$

$$Tv = a_1(Te_1) + \dots + a_n(Te_n) = a_1 f_1 + \dots + a_n f_n$$

易验证 $T \in L(V, W)$.

再验证 T 是可逆的, T^{-1} 为定义如下

$$T^{-1}: W \rightarrow V$$

$$\sum_{i=1}^n a_i f_i \mapsto \sum_{i=1}^n a_i e_i, i = 1, 2, \dots, n$$

这样, 我们就证明了 V 和 W 是同构的.

再证明如果 V 和 W 是同构的，那么 $\dim V = \dim W$.

(别忘了前提是 $\dim V < \infty, \dim W < \infty$).

V 和 W 是同构的，由同构的定义知
存在可逆的线性映射 $T \in \mathcal{L}(V, W)$.

前面还有一个定理说 $T \in \mathcal{L}(V, W)$ 是可逆的，
等价于 T 即单又满.

T 是单射 $\Rightarrow \text{Null } T = \{0\}$.

再证明如果 V 和 W 是同构的，那么 $\dim V = \dim W$.

(别忘了前提是 $\dim V < \infty, \dim W < \infty$).

V 和 W 是同构的，由同构的定义知
存在可逆的线性映射 $T \in \mathcal{L}(V, W)$.

前面还有一个定理说 $T \in \mathcal{L}(V, W)$ 是可逆的，
等价于 T 即单又满.

T 是单射 $\Rightarrow \text{Null } T = \{0\}$. T 是满射 $\Rightarrow \text{Range } T = W$

再证明如果 V 和 W 是同构的，那么 $\dim V = \dim W$.

(别忘了前提是 $\dim V < \infty, \dim W < \infty$).

V 和 W 是同构的，由同构的定义知
存在可逆的线性映射 $T \in \mathcal{L}(V, W)$.

前面还有一个定理说 $T \in \mathcal{L}(V, W)$ 是可逆的，
等价于 T 即单又满.

T 是单射 $\Rightarrow \text{Null } T = \{0\}$. T 是满射 $\Rightarrow \text{Range } T = W$

再回顾前面学习的一个定理：设 $\dim V < \infty$, $T \in \mathcal{L}(V, W)$, 那么

$$\dim V = \dim \text{Null } T + \dim \text{Range } T$$

再证明如果 V 和 W 是同构的，那么 $\dim V = \dim W$.

(别忘了前提是 $\dim V < \infty, \dim W < \infty$).

V 和 W 是同构的，由同构的定义知
存在可逆的线性映射 $T \in \mathcal{L}(V, W)$.

前面还有一个定理说 $T \in \mathcal{L}(V, W)$ 是可逆的，
等价于 T 即单又满.

T 是单射 $\Rightarrow \text{Null } T = \{0\}$. ^① T 是满射 $\Rightarrow \text{Range } T = W$ ^②

再回顾前面学习的一个定理：设 $\dim V < \infty$, $T \in \mathcal{L}(V, W)$, 那么

$$\dim V = \dim \text{Null } T + \dim \text{Range } T$$
 ^③

① ② ③ $\Rightarrow \dim V = \dim W$. 记毕.

两个线性空间同构的例子

由前一个定理知：任意一个数域 F 上的 n 维线性空间 V 都和 F^n 是同构的。

例： $P_n(F)$ 和 F^{n+1} 同构。

例。 $F^{2 \times 2}$ 和 F^4 是同构的

两个线性空间同构的例子

由前一个定理知：任意一个数域 F 上的 n 维线性空间 V 都和 F^n 是同构的。

例： $P_n(F)$ 和 F^{n+1} 同构。

例。 $F^{2 \times 2}$ 和 F^4 是同构的

You only need to check $\dim F^{2 \times 2} = 4$.

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ 是 $F^{2 \times 2}$ 的一个基。

两个线性空间同构的例子

由前一个定理知：任意一个数域 F 上的 n 维线性空间 V 都和 F^n 是同构的。

例： $P_n(F)$ 和 F^{n+1} 同构。

例。 $F^{2 \times 2}$ 和 F^4 是同构的

You only need to check $\dim F^{2 \times 2} = 4$.

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ 是 $F^{2 \times 2}$ 的一个基。

注意： V 和 W 同构是指存在一个可

逆的线性映射 $T \in L(V, W)$.

(v_1, v_2, \dots, v_n) 是 V 中的线性无关组，

那么 (Tv_1, \dots, Tv_n) 也是 W 中的线性无关组

可以说线性无关性在映射前后保持不变。

两个线性空间同构的例子

由前一个定理知：任意一个数域 F 上的 n 维线性空间 V 都和 F^n 是同构的。

例： $P_n(F)$ 和 F^{n+1} 同构。

例。 $F^{2 \times 2}$ 和 F^4 是同构的

You only need to check $\dim F^{2 \times 2} = 4$.

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ 是 $F^{2 \times 2}$ 的一个基。

注意： V 和 W 同构是指存在一个可

逆的线性映射 $T \in L(V, W)$.

(v_1, v_2, \dots, v_n) 是 V 中的线性无关组，

那么 (Tv_1, \dots, Tv_n) 也是 W 中的线性无关组

可以说线性无关性在两个同构空间中保持不变。

两个线性空间同构的例子

由前一个定理知：任意一个数域 F 上的 n 维线性空间 V 都和 F^n 是同构的。

例： $P_n(F)$ 和 F^{n+1} 同构。

例。 $F^{2 \times 2}$ 和 F^4 是同构的

You only need to check $\dim F^{2 \times 2} = 4$.

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ 是 $F^{2 \times 2}$ 的一个基。

注意： V 和 W 同构是指存在一个可

逆的线性映射 $T \in L(V, W)$.

(v_1, v_2, \dots, v_n) 是 V 中的线性无关组，

那么 (Tv_1, \dots, Tv_n) 也是 W 中的线性无关组

可以说线性无关性在两个同构空间中保持不变。

但这个例子 $F^{2 \times 2}$ 矩阵有乘法运算，这并不是线性空间定义中所运筹。

关于这种运
算，同构啥
也没说

$\dim V = n$, $\dim W = m$

$L(V, W)$ 和 $F^{m \times n}$

以前本已探讨过结论

$L(V, W)$ 是 mn 维的, $F^{m \times n}$ 也是 mn 维的
二者是同构的.

吗? 后面会先假设

设不知 $L(V, W)$ 是
 $m \times n$ 的就记作 m
 $L(V, W)$ 和 $F^{m \times n}$
同构

但两个线性空间 在 $V=W$ 时, 还要定义

乘法. 我们希望找到一种同构映射,

$\tilde{T} \in L(L(V, W), F^{m \times n})$

在 $V=W$ 时. $s, t \in L(V, V)$ 时

$$\tilde{T}(st) = \tilde{T}(s)\tilde{T}(t)$$

$$\dim V = n, \dim W = m$$

$L(V, W)$ 和 $F^{m \times n}$

$L(V, W)$ 是 $m \times n$ 矩阵, $F^{m \times n}$ 也是 $m \times n$ 矩阵
二者是同构的.

但两个线性空间在 $V=W$ 时, 还可以这样

乘法. 我们希望找到一种同构映射,

$$\tilde{T} \in L(L(V, V), F^{m \times n})$$

在 $V=W$ 时, $s, t \in L(V, V)$ 时

$$\tilde{T}(st) = \tilde{T}(s)\tilde{T}(t)$$

我们说这个映射 还保持乘法

也就是说 s 和 t 的乘积的像 = s 和 t 像的乘积.

$$\dim V = n, \dim W = m$$

$\mathcal{L}(V, W)$ 和 $F^{m \times n}$

$\mathcal{L}(V, W)$ 是 $m \times n$ 矩阵, $F^{m \times n}$ 也是 $m \times n$ 矩阵
二者是同构的.

但两个线性空间在 $V=W$ 时, 还可以这样

乘法. 我们希望找到一种同构映射,

$$\tilde{T} \in \mathcal{L}(F(V, V), F^{m \times n})$$

在 $V=W$ 时, $s, t \in \mathcal{L}(V, V)$ 时

$$\tilde{T}(st) = \tilde{T}(s)\tilde{T}(t)$$

我们说这个映射 \tilde{T} 还保持乘法

也就是说 s 和 t 的乘积的像 = s 和 t 像的乘积.

我们希望将 $T \in \mathcal{L}(V, W)$ 和矩阵映到一个矩阵 $M(T: (v_1, \dots, v_n), (w_1, \dots, w_m))$ 来综合起来一个可逆的映射.

$$L(v, w) \rightarrow F^{m \times n}$$

命題 3.19: $\mathcal{J}_2^m(v_1, v_2, \dots, v_n)$ 是 V no-一个基.

(w_1, w_2, \dots, w_m) 是 W no-一个基.

則 M 是 $L(v, w)$ 到 $F^{m \times n}$ 的一个可逆

映射

$$L(v, w) \rightarrow F^{m \times n}$$

命题 3.19: $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 是 V 之一基,

$\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ 是 W 之一基.

那么 M 是 $L(v, w)$ 到 $F^{m \times n}$ 的一个可逆

线性映射.

证明: M 是一个线性映射, 我们在前面

已经证明了. 现在只需要证明 M 是可逆的

$$L(v, w) \rightarrow F^{m \times n}$$

命题 3.19: $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 是 V 之一基,

$\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ 是 W 之一基.

那么 M 是 $L(v, w)$ 到 $F^{m \times n}$ 的一个可逆

线性映射.

证明: M 是一个线性映射, 我们在前面

已经证明了. 现在只需要证明 M 是可逆的

由前面一个定理知 M 是可逆的 $\Leftrightarrow M$ 即单又满

先证明 M 是单射, 即若 $T \in L(v, w)$,

则 $M(T) = 0$. 那么 $T = 0$.

由 $M(T, (v_1, \dots, v_n), (w_1, \dots, w_m))$ 为零矩阵.

$$T v_j = \sum_{i=1}^m [M(T)]_{ij} w_i$$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & \cdots \end{bmatrix}$$

$$L(v, w) \rightarrow F^{m \times n}$$

命题 3.19: $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 是 V 之一基,

$\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ 是 W 之一基.

那么 M 是 $L(v, w)$ 到 $F^{m \times n}$ 的一个可逆

线性映射.

证明: M 是一个线性映射, 我们在前面

已经证明了. 现在只需要证明 M 是可逆的

由前面一个定理知 M 是可逆的 $\Leftrightarrow M$ 即单又满

先证明 M 是单的, 即是说 $T \in L(v, w)$,

如果 $M(T) = 0$, 那么 $T = 0$.

由 $M(T, (v_1, \dots, v_n), (w_1, \dots, w_m))$ 为零矩阵.

$$T v_j = \sum_{i=1}^m [M(T)]_{ij} w_i = 0$$

$$\forall v \in V, \text{ 设 } v = \sum_{j=1}^n a_j v_j$$

$$T v = \sum_{j=1}^n a_j (T v_j)$$

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots \\ w_1 & w_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ w_m \end{bmatrix}$$

$$L(V, W) \rightarrow F^{m \times n}$$

命题 3.19: $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 是 V 之一基,

$\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ 是 W 之一基.

那么 M 是 $L(V, W)$ 到 $F^{m \times n}$ 的一个可逆

线性映射.

证明: M 是一个线性映射, 我们在前面

已经证明了. 现在只需要证明 M 是可逆的

由前面一个定理知 M 是可逆的 $\Leftrightarrow M$ 即单又满

先证明 M 是单射, 即若 $T \in L(V, W)$,

如果 $M(T) = 0$, 那么 $T = 0$.

由 $M(T, (v_1, \dots, v_n), (w_1, \dots, w_m))$ 定义之.

$$T v_j = \sum_{i=1}^m [M(T)]_{ij} w_i$$

$\forall v \in V$, 那 $v = \sum_{j=1}^n a_j v_j$

$T v = \sum_{j=1}^n a_j (T v_j) \stackrel{\text{由上式}}{=} 0$ 也就是说 $T = 0$. M 是单射得证

用证明 M 是满射.

证明. $\forall A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in F^{m \times n}$

则必存在一个线性定一个映射

$$T: V \rightarrow W$$

使得 $Tv_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i$

且 $\forall v \in V, v = \sum_{j=1}^n c_j v_j$

$$Tv := \sum_{j=1}^n c_j (Tw_j)$$

易验证 $T \in L(V, W)$, 且 $M(T) = A$.

这证明了 M 是满射.

这样我们就证得 M 是 $L(V, W)$ 和 $F^{m \times n}$

之间的一个逆(单)的映射.

$L(V, W)$ 和 $F^{m \times n}$ 有维度

$$F^{n \times m} = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} : a_{ij} \in F, i=1, \dots, n, j=1, \dots, m \right\}$$

一个基是 (E_{11}, \dots, E_{mn}) , 维度是 mn

设 V 和 W 是 F 上的线性空间, $\dim V = n$, $\dim W = m$.

那么 $L(V, W)$ 和 $F^{m \times n}$ 同构, 而且同构的空间具有相同的维度. 故有下面的命题

3.20 命题: 如果 V 和 W 都是有限维的, 那么 $L(V, W)$ 也是有限维的. 并且 $\dim L(V, W) = (\dim V)(\dim W)$.

线性映射和算子 (operator)

$L(V, W)$. 是从 V 到 W 的所有线性映射组成的集合 (是域上的向量空间)

线性映射和算子 (operator)

$L(V, W)$. 表示从 V 到 \underline{W} 的所有线性映射组成的集合 (是域上的向量空间)

$T \in L(V, W)$ 指的是 T 是一个从 V 到 W 的线性映射。

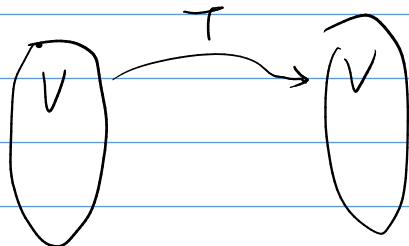
当 $V = W$ 时, 即 domain 和 codomain 是同一个向量空间时, 即 $T \in L(V, V)$ 时, T 称为一个算子 (operator).

定义: 设 V 是域 F 上的向量空间, $T \in L(V, V)$

称为 V 上的一个线性算子。 $L(V, V)$ 通常称为 $L(V)$ 表示 V 上所有线性算子组成的集合。

$\mathcal{L}(V)$: V 上的所有线性算子组成的集合

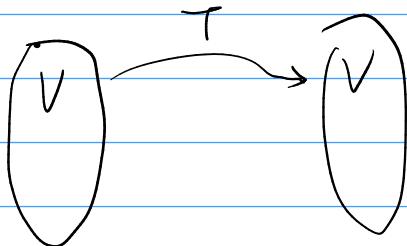
$$T \in \mathcal{L}(V)$$



乘积 T, T^2, T^3, \dots, T^n 却是 well-defined

$\mathcal{L}(V)$: V 上的所有线性算子组成的集合

$T \in \mathcal{L}(V)$

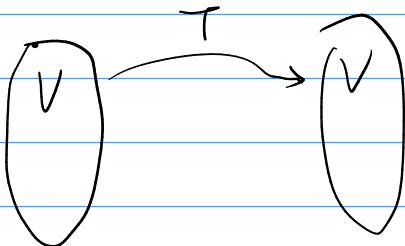


乘积 T, T^2, T^3, \dots, T^n 却是 well-defined

定义 $T^0 = I$ 是 V 上的恒等算子

$\mathcal{L}(V)$: V 上的所有线性算子组成的集合

$$T \in \mathcal{L}(V)$$



乘积 T, T^2, T^3, \dots, T^n 却是 well-defined

定义 $T^0 = I$ 是 V 上的恒等算子

Recall: $\textcircled{1}$ T 是可逆的 $\Leftrightarrow T$ 单又满.

$\textcircled{2}$ 当 $\dim V < \infty$ 时. $\dim V = \dim \text{Null } T + \dim \text{Range } T$

$\textcircled{3}$ 当 $\dim V < \infty$ 时, T 是满射 ($\Rightarrow \dim \text{Range } T = \dim V$)
codomain

研究有限维向量空间上的线性算子 $T \in L(V)$

Recall: ① T 是可逆的 $\Leftrightarrow T$ 即单又满.

② 当 $\dim V < \infty$ 时. $\dim V = \dim \text{Null } T + \dim \text{Range } T$

③ 当 $\dim V < \infty$ 时, T 是满射 $\Leftrightarrow \dim \text{Range } T = \dim V$

\downarrow
codomain

如果我们想让 $T \in L(V)$ 是可逆的, 而且我们证明了 T 是单射, 那么由 ②③ 就知道 T 是满射

研究有限维向量空间上的线性算子 $T \in L(V)$

Recall: ① T 是可逆的 $\Leftrightarrow T$ 即单又满.

② 当 $\dim V < \infty$ 时. $\dim V = \dim \text{Null } T + \dim \text{Range } T$

③ 当 $\dim V < \infty$ 时, T 是满射 $\Leftrightarrow \dim \text{Range } T = \dim V$

如果我们想让 $T \in L(V)$ 是可逆的, 而且我们证
明了 T 是单射, 那么由 ②③ 就已推知 T 是满射

过程如下:

由②

T 是单射 $\Leftrightarrow \text{Null } T = \{\mathbf{0}\} \Rightarrow \dim \text{Null } T = 0 \Rightarrow \dim V = \dim \text{Range } T$
由③
 $\Rightarrow T$ 是满射

当 $\dim V < \infty$ 时, V 上的算子的单射和满射等价。

定理 3.21 设 V 是有限维的向量空间, $T \in \mathcal{L}(V)$.

那么下列等价:

- a) T 是可逆的 (invertible);
- b) T 是单的 (injective);
- c) T 是满的 (surjective).

证明: a) \Rightarrow b) 由前面的 T 是可逆的等价于
 T 即单又满的证.

b) \Rightarrow c) 由上一题的证可得 $\supset \text{domain}$

c) \Rightarrow a) T 是 surjective 可得 $\text{Range } T = V$.

$\dim V < \infty$, $\dim V = \dim \text{Null } T + \dim \text{Range } T$

当 $\dim V < \infty$ 时, V 上的算子的单射和满射等价。

定理 3.21 设 V 是有限维的向量空间, $T \in \mathcal{L}(V)$.

那么下列等价:

- a) T 是可逆的 (invertible);
- b) T 是单的 (injective);
- c) T 是满的 (surjective).

证明: a) \Rightarrow b) 由前面的 T 是可逆的等价于
 T 即单又满的证.

b) \Rightarrow c) 由上一题的证可得

c) \Rightarrow a) T 是 surjective 可得 $\text{Range } T = V^{\text{①}}$

$\nexists \dim V < \infty$, $\dim V = \dim \text{Null } T + \dim \text{Range } T$ ②

由①② 知 $\dim \text{Null } T = 0$, 从而 $\text{Null } T = \{0\}$. 这就证

明了 T 是单的 (surjective).

当 $\dim V < \infty$ 时, V 上的算子的单射和满射等价。

定理 3.21 设 V 是有限维的向量空间, $T \in \mathcal{L}(V)$.

那么下列等价:

- a) T 是可逆的 (invertible);
- b) T 是单的 (injective);
- c) T 是满的 (surjective).

证明: a) \Rightarrow b) 由前面学习的 T 是可逆的等价于

T 即单又满的记

b) \Rightarrow c) 由上一页学习的可逆

\rightarrow domain

c) \Rightarrow a) T 是 surjective 可得 $\text{Range } T = V^{\oplus}$.

$\nexists \dim V < \infty$, $\dim V = \dim \text{Null } T + \dim \text{Range } T$ ②

由①② 知 $\dim \text{Null } T = 0$, 从而 $\text{Null } T = \{0\}$. 这就证

明了 T 是单的 (surjective), 再利用这个来证明 T 是可逆的. ①

設 $T \in \mathcal{L}(V)$, 則 T is injective $\Leftrightarrow T$ is surjective $\Leftrightarrow T$ is invertible

设 $T \in L(V)$, then T is injective $\Leftrightarrow T$ is surjective $\Leftrightarrow T$ is invertible

注意：有一个前提条件 $\dim V < \infty$.

当 $\dim V = \infty$ 时, T 是单的并不意味着 T 是满的

设 $T \in L(V)$, then T is injective $\Leftrightarrow T$ is surjective $\Leftrightarrow T$ is invertible

注意：有一个前提条件 $\dim V < \infty$.

当 $\dim V = \infty$ 时, T 是单的并不意味着 T 是满的

F^∞ 上的右移算子定义如下

$$T: F^\infty \longrightarrow F^\infty$$

$$(a_1, a_2, a_3, \dots) \mapsto (0, a_1, a_2, a_3, \dots)$$

设 $T \in L(V)$, then T is injective $\Leftrightarrow T$ is surjective $\Leftrightarrow T$ is invertible

注意：有一个前提条件 $\dim V < \infty$.

当 $\dim V = \infty$ 时, T 是单射并不意味着 T 是满射

F^∞ 上的右移算子定义如下

$$T: F^\infty \longrightarrow F^\infty$$

$$(a_1, a_2, a_3, \dots) \mapsto (0, a_1, a_2, a_3, \dots)$$

验证 T 是单射, 设 $v = (v_1, v_2, v_3, \dots) \in F^\infty$.

$$Tv = 0. \text{ 那么由 } T \text{ 的定义知 } (0, v_1, v_2, v_3, \dots) = 0$$

即每一个元素都为 0. $v_i = 0, i = 1, 2, 3, \dots$ 但 $v \neq 0$

这就证明了 T 是单射.

设 $T \in L(V)$, then T is injective $\Leftrightarrow T$ is surjective $\Leftrightarrow T$ is invertible

注意：有一个前提条件 $\dim V < \infty$.

当 $\dim V = \infty$ 时, T 是单射并不意味着 T 是满射

F^∞ 上的右移算子定义如下

$$T: F^\infty \longrightarrow F^\infty$$

$$(a_1, a_2, a_3, \dots) \mapsto (0, a_1, a_2, a_3, \dots)$$

验证 T 是单射, 设 $v = (v_1, v_2, v_3, \dots) \in F^\infty$.

$$Tv = 0. \text{ 那么由 } T \text{ 的定义知 } (0, v_1, v_2, v_3, \dots) = 0$$

即每一个元素都为 0. $v_i = 0, i = 1, 2, 3, \dots$ 但 $v \neq 0$

这就证明了 T 是单射. $(1, 0, 0, \dots) \notin \text{Range } T$. 故 T 不是满射.

当 $\dim V = \infty$ 时, $L(V)$ 中满射但非单射的算子

F^∞ 上的左移算子定义如下.

$$S: F^\infty \longrightarrow F^\infty$$

$$(a_1, a_2, a_3, \dots) \mapsto (a_2, a_3, \dots)$$

验证 S 是满射.

$\forall v = (a_1, a_2, a_3, \dots) \in F^\infty$, 取 $u = (0, a_1, a_2, \dots)$

$$\text{由 } S \text{ 定义之} \Rightarrow Su = (a_1, a_2, a_3, \dots) = v$$

即 $v \in \text{Range } S$ 故 $F^\infty \subset \text{Range } S$.

显然 $\text{Range } S \subset F^\infty$. 这就证明 $\text{Range } S = F^\infty$.

所以 S 是满射.

当 $\dim V = \infty$ 时, $L(V)$ 中满射但非单射的算子

F^∞ 上的左移算子定义如下.

$$S: F^\infty \longrightarrow F^\infty$$

$$(a_1, a_2, a_3, \dots) \mapsto (a_2, a_3, \dots)$$

验证 S 是满射. \downarrow domain

$\forall v = (a_1, a_2, a_3, \dots) \in F^\infty$, 取 $u = (0, a_1, a_2, \dots)$

由 S 定义之 $Su = (a_1, a_2, a_3, \dots) = v$

即 $v \in \text{Range } S$ 故 $F^\infty \subset \text{Range } S$.

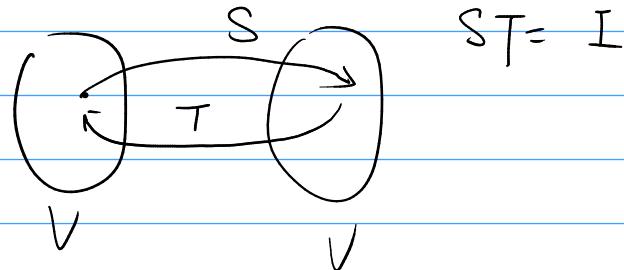
显然 $\text{Range } S \subset F^\infty$. 这就证明了 $\text{Range } S = F^\infty$

所以 S 是满射

再验证 S 不是单射. 取 $u = (1, 0, 0, \dots) \in F^\infty$. 由 S 定义得 $Su = (0, 0, \dots) = 0$
这就验证了 S 不是单射.

例题：请证明.

设 $\dim V < \infty$, $T, S \in \mathcal{L}(V)$ 如若 $TS = I$, 那么 $ST = I$



① 先证 $\text{Range}(T) \supset \text{Range}(TS)$

证明: $\forall y \in \text{Range}(TS)$ 则 $\exists x \in V$.

使得 $(TS)x = y$.

由线性映射的性质: $\exists s \in \mathcal{L}(V)$ 使 $T(sx) = y$.

Recall $S \in \mathcal{L}(V)$, so $Sx \in V$. 也就是说 存在

$s \in \mathcal{L}(V)$ 有 $T(sx) = y$, 这就证明了 $y \in \text{Range } T$

② $TS = I \Rightarrow \text{Range}(TS) = \text{Range } I = V$.

由①已证 $\text{Range}(T) \supset \text{Range}(TS)$ 于是 $\text{Range } T \supset V$

且 $\text{Range } T \subset V$. 从而 $\text{Range } T = V$. T 是满射.

$\dim V < \infty$

T 是滿射

$\} \Rightarrow T$ 是可逆的

$$TS = I$$

兩邊同時左乘以 T^{-1} , 得

$$T^{-1}TS = T^{-1}$$

即 $S = T^{-1}$

T^{-1} 是 $1:1$ -no., 故 $\underline{ST = T^{-1}T = I}$

$\boxed{S = T^{-1}}$

這就證明了 $ST = I$.