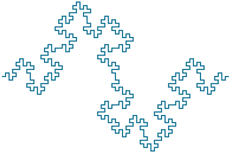
线性代数 B：多项式

Tiao Lu
Peking University



October 10, 2019

次数

第4章 多项式

Recall. 多项式的定义：对于函数 $p: F \to F$，如果存在 $a_0, a_1, \cdots, a_m \in F$ 使得对所有 $z \in F$ 都有

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_m z^m,$$

则称 p 为系数在 F 中的多项式.

第4章 多项式

Recall. 多项式的定义：对于函数 $p: F \to F$，如果存在 $a_0, a_1, \cdots, a_m \in F$ 使得对所有 $z \in F$ 都有

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_m z^m,$$

则称 p 为系数在 F 中的多项式.

多项式的次数：如果 p 可以写成上述形式，其中 $a_m \neq 0$，则称 p 的次数为 m。如果所有的系数 $a_0, \cdots, a_m$ 都等于 0，那么我们就说 p 的次数为 $-\infty$.

第4章 多项式

Recall. 多项式的定义：对于函数 $p: F \to F$，如果存在 $a_0, a_1, \cdots, a_m \in F$ 使得对所有 $z \in F$ 都有

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_m z^m,$$

则称 p 为系数在 F 中的多项式。

多项式的次数：如果 p 可以写成上述形式，其中 $a_m \neq 0$，则称 p 的次数为 m。如果所有的系数 $a_0, \cdots, a_m$ 都等于 0，那么我们就说 p 的次数为 $-\infty$。

疑问：会不会存在一个多项式 $p(z)$，存在 $a_0, a_1, \cdots, \underset{\neq 0}{a_m} \in F$，和 $b_0, b_1, \cdots, \underset{\neq 0}{b_n} \in F$，使得 $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m$ 和 $p(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_n z^n$，那么 $p(z)$ 的次数是 m 还是 n 呢？

$p(z)$ 次数是否是惟一的？

不妨设 $m>n$，

$$p(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_mz^m \qquad z\in F$$

$$p(z)=b_0+b_1z+\cdots+b_nz^n \qquad z\in F$$

二者相减

$$0=(a_0-b_0)+(a_1-b_1)z+\cdots+(a_n-b_n)z^n+a_{n+1}z^{n+1}+\cdots+a_mz^m \qquad z\in F$$

右边 $g(z)$ 是一个 m 次的多项式，由上式知 右边 $g(z)$ 有无穷多个根，由代数基本定理知，只能是

$$a_0-b_0=0,\ \cdots,\ a_n-b_n=0,\ a_{n+1}=0,\cdots,a_m=0$$

这样我们就证明了 $p(z)$ 的次数是惟一的。

但是这个证明中用到了代数基本定理，我们将学习这个。

多项式的根（root）

多项式的根：对于多项式 $p \in \mathcal{P}(F)$，如果数 $\lambda \in F$ 满足

$p(\lambda) = 0$，

则称 λ 为 p 的根（root）.

多项式的根(root)

多项式的根：对于多项式 $p\in\mathcal{P}(F)$，如果数 $\lambda\in F$ 满足

$p(\lambda)=0$.

则称 λ 为 p 的根(root).

例：$p(x)=x^2-1\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$，把 $1\in\mathbb{R}$ 代入 $p(1)=1^2-1=0$，

故 1 是 p 的一个根.

还可以验证 -1 是 p 的另一个根.

多项式的根（root）

多项式的根：对于多项式 $p \in \mathcal{P}(F)$，如果数 $\lambda \in F$ 满足

$$p(\lambda) = 0.$$

则称 λ 为 p 的根（root）.

例：$p(x) = x^2 - 1 \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$，把 $1 \in \mathbb{R}$ 代入 $p(1) = 1^2 - 1 = 0$.

故 1 是 p 的一个根.

还可以验证 -1 是 p 的另一个根.

例 $p(x) = x^2 + 1 \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ 因为没有实数 λ 使得 $p(\lambda) = 0$

故 $p(x) = x^2 + 1$ 在实数域 $\mathbb{R}$ 中没有根.

多项式的根 (root)

多项式的根：对于多项式 $p \in \mathcal{P}(F)$，如果数 $\lambda \in F$ 满足

$$p(\lambda) = 0.$$

则称 λ 为 p 的根 (root).

例：$p(x) = x^2 - 1 \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$，把 $1 \in \mathbb{R}$ 代入 $p(1) = 1^2 - 1 = 0$，

故 1 是 p 的一个根.

还可以验证 -1 是 p 的另一个根.

例 $p(x) = x^2 + 1 \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ 因为没有实数 λ 使得 $p(\lambda) = 0$

故 $p(x) = x^2 + 1$ 在实数域 $\mathbb{R}$ 中没有根.

例 $p(z) = z^2 + 1 \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$，$p(i) = i^2 + 1 = -1 + 1 = 0$. $p(-i) = (-i)^2 + 1 = 0$

故 $i, -i \in \mathbb{C}$ 是 $p(z) = z^2 + 1 \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ 的根.

$P(F)$ 多项式

Recall $P(F)$ 是域 F 上的向量空间，也就是说定义加法和数乘，而且满足一些性质.

$\mathcal{P}(F)$ 多项式

Recall $\mathcal{P}(F)$ 是域 F 上的向量空间，也就是说定义加法和数乘，而且满足一些性质。

乘法：$p(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$，$q(z)=\sum_{l=0}^{m} b_l z^l$。

定义 p 和 q 的乘积

$$(pq)(z)=\left(\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right)\left(\sum_{l=0}^{m} b_l z^l\right)$$

$P(F)$ 多项式

Recall $P(F)$ 是域 F 上的向量空间，也就是说定义加法和数乘，而且满足一些性质.

乘法： $p(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, $q(z)=\sum_{l=0}^{m} b_l z^l$.

定义 p 和 q 的乘积

$$(pq)(z)=\Big(\sum_{k=0}^{n}\underbrace{a_k}_{\in F} z^k\Big)\Big(\sum_{l=0}^{m}\underbrace{b_l}_{\in F} z^l\Big)$$

$$=\sum_{j=0}^{m+n}\underbrace{\Big(\sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k}\Big)}_{\in F} z^j \in P(F)$$

$P(F)$ 关于上面定义的乘法是封闭的.

倍式和因式

定义. 设 $p, q_i \in P(F)$, $i=1,2,\cdots,n$, 如果 $p = q_1 q_2 \cdots q_n$, 那么称 S 是 q_i 的倍式, 称 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 是 S 的因式.

倍式和因式

定义. 设 $p, g_i \in P(F), i=1,2,\cdots,n$，如果 $p = g_1 g_2 \cdots g_n$，那么称 S 是 g_i 的倍式，称 $g_1, g_2, \cdots, g_n$ 是 S 的因式.

Remark：和倍数，因数的定义类似

倍式和因式

定义. 设 $p, g_i \in P(F)$, $i=1,2,\cdots,n$, 如果 $p=g_1g_2\cdots g_n$, 那么称 S 是 g_i 的倍式, 称 $g_1, g_2, \cdots, g_n$ 是 S 的因式.

Remark: 和倍数、因数的定义类似

不可约多项式 (irreducible polynomial) 在多项式中的地位和整数中的素数一样. 如果 $p \in P(F)$ 不能分解成两个次数比 p 的次数低的两个多项式的乘积, 则称 p 是一个不可约多项式

例: x^2-2 在 $P(\mathbb{Q})$ 中是不可约多项式, 但在 $P(\mathbb{R})$ 中不是. 因为 $x^2-2 = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

命题4.1. 设 $p \in \mathcal{P}(F)$ 是 m 次多项式，$m \geq 1$. 设 $\lambda \in F$.
则 λ 是 p 的根当且仅当存在 $m-1$ 次的多项式
$q \in \mathcal{P}(F)$ 使得

$$p(z) = (z-\lambda)\, q(z), \quad \text{for all } z \in F.$$

命题4.1. 设 $p \in \mathcal{P}(F)$ 是 m 次多项式，$m \geq 1$. 设 $\lambda \in F$.
则 λ 是 p 的根当且仅当存在 $m-1$ 次的多项式
$q \in \mathcal{P}(F)$ 使得

$$p(z) = (z-\lambda)\, q(z), \quad \text{for all } z \in F.$$

举例子：考虑 $\mathcal{P}(\mathbb{C})$，$\underbrace{z^2+1}_{\text{2次复多项式}} = (z-\underset{\text{是}z^2+1\text{的根}}{i})(z+i)$ → $q(z)=z+i$ 是1次复多项式.

命题4.1. 设 $p \in \mathcal{P}(F)$ 是 m 次多项式, $m \geq 1$. 设 $\lambda \in F$. 则 λ 是 p 的根当且仅当存在 $m-1$ 次的多项式 $q \in \mathcal{P}(F)$ 使得

$$p(z) = (z-\lambda)\,q(z), \quad \text{for all } z \in F.$$

举例子: 考虑 $\mathcal{P}(\mathbb{C})$, $\underbrace{z^2+1}_{\text{2次复多项式}} = (z-\underbrace{i}_{\text{是}z^2+1\text{的根}})(z+i)$ → $q(z)=z+i$ 是1次复多项式.

证明: 如果 $p(z)=(z-\lambda)q(z)$. 那么 λ 是 p 的根是显然的

命题4.1. 设 $p \in \mathcal{P}(F)$ 是 m 次多项式, $m \geq 1$. 设 $\lambda \in F$.
则 λ 是 p 的根当且仅当存在 $m-1$ 次的多项式 $q \in \mathcal{P}(F)$ 使得

$$p(z) = (z-\lambda) q(z), \quad \text{for all } z \in F.$$

举例子: 考虑 $\mathcal{P}(\mathbb{C})$, $\underbrace{z^2+1}_{2\text{次复多项式}} = (z-i)(z+i)$ $\quad q(z) = z+i$ 是1次复多项式.

i 是 z^2+1 的根

证明: 如果 $p(z) = (z-\lambda) q(z)$, 那么 λ 是 p 的根是显然的
我们下面证明 如果 $\lambda \in F$ 是 $p \in \mathcal{P}(F)$ 的根, 那么存在 $q \in \mathcal{P}(F)$
使得 $p = (z-\lambda) q$

命题4.1. 设 $p\in\mathcal{P}(F)$ 是 m 次多项式，$m\geq 1$. 设 $\lambda\in F$.
则 λ 是 p 的根当且仅当存在 $m-1$ 次的多项式
$q\in\mathcal{P}(F)$ 使得

$$p(z)=(z-\lambda)q(z) \quad \text{for all } z\in F.$$

举例子：考虑 $\mathcal{P}(\mathbb{C})$，$\underbrace{z^2+1}_{\text{2次复多项式}}=\underbrace{(z-i)}_{\text{是}z^2+1\text{的根}}(z+i)$ → $q(z)=z+i$ 是1次复多项式.

证明：如果 $p(z)=(z-\lambda)q(z)$，那么 λ 是 p 的根是显然的
我们下面证明如果 $\lambda\in F$ 是 $p\in\mathcal{P}(F)$ 的根，那么存在 $q\in\mathcal{P}(F)$
使得 $p=(z-\lambda)q$. （注意 q 的次数 $=p$ 的次数 -1）$\deg q=\deg p-1$

$p \in \mathcal{P}(\mathbf{F})$ 且 $\deg p = m$. 那么存在 $a_0, \cdots, a_m \in \mathbf{F}$.

且 $a_m \neq 0$, 使得

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m \qquad (1)$$

$p \in \mathcal{P}(F)$ 且 $\deg p = m$. 那么存在 $a_0, \cdots, a_m \in F$.

且 $a_m \neq 0$, 使得

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m \quad ①$$

由题中条件 $\lambda \in F$ 是 p 的根 知 $p(\lambda) = 0$ 即

$$0 = a_0 + a_1 \lambda + \cdots + a_m \lambda^m \quad ②$$

$p \in \mathcal{P}(F)$ 且 $\deg p = m$. 那么存在 $a_0, \cdots, a_m \in F$.

且 $a_m \neq 0$, 使得

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m \quad ①$$

由题中条件 $\lambda \in F$ 是 p 的根 知 $p(\lambda) = 0$ 即

$$0 = a_0 + a_1 \lambda + \cdots + a_m \lambda^m \quad ②$$

① - ②. 得 $p(z) = a_1(z-\lambda) + \cdots + a_m(z^m - \lambda^m) \quad ③$

$z - \lambda$ 有因式 $z - \lambda$

$z^2 - \lambda^2 = (z-\lambda)(z+\lambda)$ 有因式 $z - \lambda$

$z^3 - \lambda^3 = (z-\lambda)(z^2 + \lambda z + \lambda^2)$ 有因式 $z - \lambda$

$\vdots$

$z^m - \lambda^m = (z-\lambda)(z^{m-1} + \lambda z^{m-2} + \lambda^2 z^{m-3} + \cdots + \lambda^{m-1})$

$p \in \mathcal{P}(F)$ 且 $\deg p = m$. 那么存在 $a_0, \cdots, a_m \in F$.

且 $a_m \neq 0$, 使得

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m \quad ①$$

由题中条件 $\lambda \in F$ 是 p 的根 知 $p(\lambda) = 0$ 即

$$0 = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_m \lambda^m \quad ②$$

① − ② 得 $p(z) = a_1(z-\lambda) + \cdots + a_m(z^m - \lambda^m) \quad ③$

$= (z-\lambda)\, q(z)$

其中 $q(z) = a_1 + a_2(z+\lambda) + \cdots + a_m(z^{m-1} + \cdots + \lambda^{m-1})$

$\in \mathcal{P}(F)$ 且 $\deg q = m-1$.

证毕.

$z - \lambda$ 有因式 $z - \lambda$

$z^2 - \lambda^2 = (z-\lambda)(z+\lambda)$ 有因式 $z - \lambda$

$z^3 - \lambda^3 = (z-\lambda)(z^2 + \lambda z + \lambda^2)$ 有因式 $z - \lambda$

$\vdots$

$z^m - \lambda^m = (z-\lambda)(z^{m-1} + \lambda z^{m-2} + \lambda^2 z^{m-3} + \cdots + \lambda^{m-1})$

$p \in P(F)$ 的根的个数

例：$p=0$ 的次数是 $-\infty$，它的根的个数是无穷多个

$p \in \mathcal{P}(F)$ 的根的个数

例: $p=0$ 的次数是 $-\infty$, 它的根的个数是无穷多个

例 $p=1$ 的次数是 0, 它的根的个数是 0.

$p\in\mathcal{P}(F)$ 的根的个数

例：$p=0$ 的次数是 $-\infty$，它的根的个数是无穷多个

例 $p=1$ 的次数是 0，它的根的个数是 0.

例 $p(z)=z-1\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$ 的次数是 1，它的根的个数是 1

例 $p(z)=z^2+1\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$，$\deg p=2$，# of roots $=0$

$p \in \mathcal{P}(\mathbf{F})$ 的根的个数

例：$p = 0$ 的次数是 $-\infty$，它的根的个数是无穷多个。

例 $p = 1$ 的次数是 0，它的根的个数是 0。

例 $p(z) = z - 1 \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ 的次数是 1，它的根的个数是 1

例 $p(z) = z^2 + 1 \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$，$\deg p = 2$，# of roots $= 0$

例 $p(z) = z^2 + 1 \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$，$\deg p = 2$. # of roots $= 2$

4.3 推论. 设 $p \in \mathcal{P}(\mathbf{F})$ 是 m 次多项式，$m \geq 0$，那么 p 在 $\mathbf{F}$ 中最多有 m 个不同的根.

推论4.3的证明

证明：当 $m=0$ 时结论都是显然对；用数学归纳法，设 $(m-1)$ 次的多项式最多在 F 中有 $(m-1)$ 个不同的根。设 $\lambda\in F$ 是 m 次多项式 $p\in P(F)$ 的根，那么由命题4.1知存在一个 $(m-1)$ 次的多项式 $q\in P(F)$ 使得 $p(z)=(z-\lambda)q(z)$

推论4.3的证明

证明：$m=0$ 结论都是显然的。用数学归纳法，设 $(m-1)$ 次的多项式最多在 F 中有 $(m-1)$ 个不同的根。设 $\lambda\in F$ 是 m 次多项式 $p\in P(F)$ 的根，那么由命题4.1知存在一个 $(m-1)$ 次的多项式 $q\in P(F)$ 使得

$$p(z)=(z-\lambda)q(z)$$

由上式知 $p(z)=0 \Rightarrow z=\lambda$ 或 $q(z)=0$，这意味着 p 的根要么是 λ，要么是 q 的根。

由假设知 q 最多有 $(m-1)$ 个不同的根，从而 p 最多有 m 个不同的根。$\square$

恒等于0的多项式

4.4 推论：设 $a_0, \dots, a_m \in \mathbf{F}$。如果

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_m z^m = 0, \quad \text{for all } z \in \mathbf{F},$$

则 $a_0 = \dots = a_m = 0$.

恒等于0的多项式

4.4 推论：设 $a_0, \cdots, a_m \in \mathbf{F}$。如果

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_m z^m = 0, \quad \text{for all } z \in \mathbf{F}, \quad ①$$

则 $a_0 = \cdots = a_m = 0$.

证明：反证法．不然 $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m$ 是次数大于或等于0的多项式．由4.3推论知 p 的互不相同的根的个数是有限多个．而 $p(z) = 0$ for all $z \in \mathbf{F}$ 意味着 p 有无穷多个根．(回忆 $\mathbf{F}$ 是个数域，它包含有理数集，因此有无穷多个元素) 矛盾．故一定有 $a_0, \cdots, a_m$ 一定要全部为0.

恒等于0的多项式

4.4 推论：设 $a_0, \dots, a_m \in \mathbf{F}$。如果

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_m z^m = 0, \quad \text{for all } z \in \mathbf{F}, \quad ①$$

则 $a_0 = \cdots = a_m = 0$.

证明：反证法。不然 $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m$ 是次数大于或等于0的多项式，由4.3推论知 p 的互不相同的根的个数是有限多个。而 $p(z) = 0$ for all $z \in \mathbf{F}$ 意味着 p 有无穷多个根。（回忆 $\mathbf{F}$ 是一个数域，它包含有理数集，因此有无穷多个元素）矛盾。故一定有 $a_0, \dots, a_m$ 一定要全部为0.

恒等于0的多项式

4.4 推论：设 $a_0, \dots, a_m \in F$。如果

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_m z^m = 0, \quad \text{for all } z \in F, \quad ①$$

则 $a_0 = \cdots = a_m = 0$.

证明：反证法. 不然 $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m$ 是次数大于或等于0的多项式. 由 4.3 推论知 p 的互不相同的根的个数是有限多个. 而 $p(z) = 0$ for all $z \in F$ 意味着 p 有无穷多个根.（回忆下 F 是一个数域，它包含有理数集，因此有无穷多个元素）矛盾. 故一定有 $a_0, \dots, a_m$ 一定要全部为 0.

Remark：1. 我们证明 $(1, z, z^2, \dots, z^m)$ 线性无关时使用了上面的推论.

2. 这个推论还保证了多项式的次数是惟一的.

代数基本定理

§4.2 复系数多项式

数域 $F = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ in our book.

例 $x^2+1 \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ 无根

$x^2 \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ 两个根 0, 0

计重数

$x^2-4 \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ 有两个不同的根

§4.2 复系数多项式

数域 $F = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ in our book.

例 $x^2+1 \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ 无根

$x^2 \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ 两个根 0, 0

计重数

$x^2-4 \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ 有两个不同的根

$\mathcal{P}(\mathbb{R})$ 中的多项式的根的情况复杂. 而 $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ 中的多项式的根的情况则非常简单.

例 $x^2+1 \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$. $i, -i$ 2个根

$x^2 \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ 0, 0 2个根

$x^2-4 \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ 2, -2 2个根

§4.2 复系数多项式

数域 $F = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ in our book.

例 $x^2+1 \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ 无根

$x^2 \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ 两个根 $0, 0$

计重数

$x^2-4 \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ 有两个不同的根

$\mathcal{P}(\mathbb{R})$ 中的多项式的根的情况复杂. 而 $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ 中的多项式的根的情况则非常简单.

例 $x^2+1 \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$. $i, -i$ 2个根

$x^2 \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ $0, 0$ 2个根

$x^2-4 \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ $2, -2$ 2个根

定理: 设 $p \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ 是一个 m 次的多项式, $m > 0$. 那么 p 有且只有 m 个根(计重数).

代数基本定理

4.7 代数(学)基本定理 (Fundamental Theorem of Algebra)

每个不是常数的复系数多项式都有根.

另一种表述.

设 $p \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$, $\deg p > 0$, 那么存在 $\lambda \in \mathbb{C}$ 使得 $p(\lambda) = 0$.

证明暂时放一放, 学习了复变函数后你会知道一种优美的证明

由代数基本定理就可以得到下面的定理

> 定理: 设 $p \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ 是一个 m 次的多项式, $m > 0$. 那么 p 有且只有 m 个根 (计重数).

代数基本定理

4.7 代数(学)基本定理 (Fundamental Theorem of Algebra)

每个不是常数的复系数多项式都有根.

另一种表述.

设 $p \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$, $\deg p > 0$, 那么存在 $\lambda \in \mathbb{C}$ 使得 $p(\lambda) = 0$.

证明暂时放一放. 学习了复变函数后你会知道一种优美的证明

由代数基本定理就可以得到下面的定理.

> 定理: 设 $p \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ 是一个 m 次的多项式, $m > 0$. 那么 p 有且只有 m 个根(计重数).

证明思路: $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m$, $a_m \neq 0$

由代数基本定理知 $p(z)$ 有一个复根 λ_1

那么由命题4.1知 $p(z) = (z - \lambda_1) q(z)$

其中 $q(z)$ 是 $m-1$ 次多项式. 可以用数学归纳法.

$p \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ 的因式分解.

设 $p \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ 是一个 m 次的复系数多项式，由上页的定理知. p 有且只有 m 个根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{C}$

计重数

$q(z) = (z-\lambda_1)(z-\lambda_2)\cdots(z-\lambda_m)$ 也是一个 m 次的复系数多项式

p 和 q 有什么关系呢?

$p\in\mathcal{P}(\mathbb{C})$的因式分解.

设 $p\in\mathcal{P}(\mathbb{C})$ 是一个 m 次的复系数多项式，由上页的定理知 p 有且只有 m 个根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\in\mathbb{C}$

计重数

$q(z)=(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)\cdots(z-\lambda_m)$ 也是一个 m 次的复系数多项式

p 和 q 有什么关系呢？ you may guess: 存在一个常数 $c\in\mathbb{C}$, $c\neq 0$.

使得 $p=cq=\underbrace{c(z-\lambda_1)}_{①}\underbrace{(z-\lambda_2)}_{②}\cdots\underbrace{(z-\lambda_m)}_{ⓜ}$

这就得到 p 的一个分解，而且是 m 个不可约因式的乘积

下面的推论还声明这个分解是唯一的（除因式的次序之外）

复系数多项式的因式分解

4.8 推论：设 $p \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ 是一个 m 次的多项式，$m \geq 1$。那么 p 可以唯一地分解（除因式次序之外）成如下形式

$$p(z) = c(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)\cdots(z-\lambda_m)$$

其中 $c, \lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{C}$。

例子：

$$z^2+1 = \underline{(z+i)(z-i)}$$

$$z^2+1 = \underline{(z-i)(z+i)}$$

仅仅因式次序不同，仍看成同一个分解

为什么总是举二次多项式的例子？3次，4次多项式的分解公式已经很复杂，大于等于5次的多项式没有一般的分解公式。求根往往要借助数值方法

首一多项式

$$p(z) = 3 + 5z + 6z^2 + 7z^3$$

$$q(z) = \frac{3}{7} + \frac{5}{7}z + \frac{6}{7}z^2 + z^3$$

p 和 q 是线性相关的，它们具有相同的根. 最高次项的次数都是 3

首一多项式

$$p(x) = 3 + 5x + 6x^2 + 7x^3$$

$$q(x) = \frac{3}{7} + \frac{5}{7}x + \frac{6}{7}x^2 + x^3$$

p 和 q 是线性相关的，它们具有相同的根．最高次项的次数都是 3

首项是指次数最高的项，不是上面按升幂排列的第一项．

q(x) 的首项系数是 1，因此称为

首一多项式

$$p(z) = 3 + 5z + 6z^2 + 7z^3$$

$$q(z) = \frac{3}{7} + \frac{5}{7}z + \frac{6}{7}z^2 + z^3$$

p 和 q 是线性相关的，它们具有相同的根. 最高次项的次数都是 3

首项是指次数最高的项，不是上面按升幂排列的第一项.

q(z) 的首项系数是 1，因此称为首 1 多项式.

下面我们举例和讨论的时候往往使用首 1 多项式.

韦达定理

$p(x)=a_0+a_1x+x^2\in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ 的两个根是 λ_1 和 λ_2，

由前面学习的复系数多项式的分解定理知

$$p(x)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$$

韦达定理

$p(x) = a_0 + a_1 x + x^2 \in P(\mathbb{C})$ ① 的两个根是 λ_1 和 λ_2，

由前面学习的复系数多项式的分解定理知

$$p(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2) \quad ②$$

由①②，得 $a_0 + a_1 x + x^2 = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$ for all $x \in \mathbb{C}$

$a_0 + a_1 x + x^2 = x^2 - (\lambda_1+\lambda_2)x + \lambda_1\lambda_2$ for all $x \in \mathbb{C}$

由代数基本定理知 $\boxed{\begin{aligned} \lambda_1\lambda_2 &= a_0 \\ \lambda_1+\lambda_2 &= -a_1 \end{aligned}}$ 韦达定理（初中学习的）

n 次多项式 $a_0 + a_1 x + \cdots + x^n$ 的 n 个根 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{C}$,

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n = (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_n)$$

类似地可以导出 $(-1)^n \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = a_0$ $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n = -a_{n-1}$.

韦达定理

$p(x) = a_0 + a_1 x + x^2 \in P(\mathbb{C})$ ① 而两个根是 λ_1 和 λ_2，

由前面学习的复系数多项式的分解定理知

$$p(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2) \quad ②$$

由 ① ②，得 $a_0 + a_1 x + x^2 = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$ for all $x \in \mathbb{C}$

$$a_0 + a_1 x + x^2 = x^2 - (\lambda_1+\lambda_2)x + \lambda_1\lambda_2 \quad \text{for all } x \in \mathbb{C}$$

determinant 由代数基本定理知

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_1\lambda_2 &= a_0 \\ \lambda_1+\lambda_2 &= -a_1 \end{aligned}}$$

韦达定理（初中学习的）

① 与行列式相关

② 与迹 (trace) 相关.

n 次多项式 $a_0 + a_1 x + \cdots + x^n$ 的 n 个根 $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$,

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n = (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_n)$$

类似地可以导出 $(-1)^n \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = a_0$ ①　$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n = -a_{n-1}$. ②

最简单 最重要

复数

$\mathbb{C} = \{a+bi : a, b \in \mathbb{R}\}$，其中 $i=\sqrt{-1}$ 是虚数单位

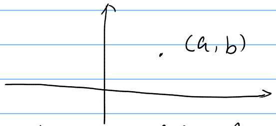
$\mathbb{C}$ 是最大的数域，也可以看成 $\mathbb{R}$ 上的一个二维的向量空间 或复数域 $\mathbb{C}$ 上的一维向量空间.

复数

$\mathbb{C}=\{a+bi : a, b\in\mathbb{R}\}$，其中 $i=\sqrt{-1}$ 是虚数单位

$\mathbb{C}$ 是最大的数域，也可以看成 $\mathbb{R}$ 上的一个二维的向量空间 或复数域 $\mathbb{C}$ 上的一维向量空间.

和 $\mathbb{R}^2$ 可以建立一个一一对应



$\longrightarrow$ 对应 $a+bi$

$z=a+bi$ 的共轭是 $\bar{z}=a-bi$

复数的四则运算.

复数的实部

$z = a+bi$ 的实部 $\mathrm{Re}(z) = a$ 是 $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$ 的一个线性映射，其中 $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{R}$ 都看成实数 $\mathbb{R}$ 上的向量空间

验证：　设 $z_1 = a+bi$，$z_2 = c+di$

$$\mathrm{Re}(z_1+z_2) = \mathrm{Re}\big((a+c)+(b+d)i\big) = a+c$$

$$= \mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2)$$

加性 ✓

取复数实部是一个线性映射.

$z = a+bi$ 的实部 $Re(z) = a$ 是 $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$ 的一个线性映射，其中 $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{R}$ 都看成实数 $\mathbb{R}$ 上的向量空间

验证：设 $z_1 = a+bi$，$z_2 = c+di$

$$Re(z_1+z_2) = Re((a+c)+(b+d)i) = a+c$$

$$= Re(z_1) + Re(z_2)$$

加性 ✓

$\forall k \in \mathbb{R}$，$z = a+bi \in \mathbb{C}$，

$$Re(kz) = Re(ka+kbi) = ka = k\,Re(z)$$

齐性 ✓

$Re: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ 是一个线性映射，故 $Re(z)$ 可以省略括号写成 $Re\,z$

复数的虚部

$$\mathrm{Im}: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$$
$$a+bi \mapsto b$$

是一个线性映射.

$$\mathrm{Im}(z_1+z_2) = \mathrm{Im}\, z_1 + \mathrm{Im}\, z_2 \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$
$$\mathrm{Im}(kz) = k\, \mathrm{Im}\, z, \quad \forall k \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{C}$$

复数的虚部

$$\mathrm{Im}: \mathbb{C} \to \mathbb{R} \quad \text{是一个线性映射.}$$
$$a+bi \mapsto b$$

$$\mathrm{Im}(z_1+z_2) = \mathrm{Im}\, z_1 + \mathrm{Im}\, z_2 \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$
$$\mathrm{Im}(kz) = k\,\mathrm{Im}\, z, \quad \forall k \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{C}$$

复数的共轭

取共轭: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$,　这里 $\mathbb{C}$ 看成实数域 $\mathbb{R}$ 上的二维向量空间

$$a+bi \mapsto a-bi$$

这和 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 的关于 x 轴的反射变换相当.

易验证. 取共轭也是一个线性映射.　$\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2}$
$\overline{kz} = k\overline{z}, \forall k \in \mathbb{R}$.

共轭

$z_1 = a+bi$, $z_2 = c+di$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{(a+bi)(c+di)} = \overline{(ac-bd)+(ad+bc)i}$$

$$= ac-bd-(ad+bc)i$$

$$\bar{z}_1\bar{z}_2 = \overline{(a+bi)}\;\overline{(c+di)} = (a-bi)(c-di) = (ac-bd)-(ad+bc)i$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

乘积的共轭 = 共轭的乘积.

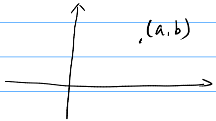
共轭的共轭 $\bar{\bar{z}} = z$ for all $z \in \mathbb{C}$

恒等映射

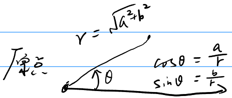
记 $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ 表示共轭. 上式意味着 $\boxed{T^2 = I}$

复数的极坐标表示

$z = a + bi$ 是直角坐标表示.



直角坐标



极坐标

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$z = re^{i\theta}$, $r = \sqrt{a^2+b^2}$, θ 由 $\begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{r} \\ \sin\theta = \frac{b}{r} \end{cases}$ 来确定.

→ $z = 0$ 时, $r = 0$, θ 可以为任意值.

→ 如果规定 $0 \leq \theta < 2\pi$, 时 $a+bi = re^{i\theta}$ 除原点外的极坐标表示是唯一的.

$$z = re^{i\theta}$$

$$z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

允许 r 取负值，$-5e^{i\theta} := 5e^{i(\theta+\pi)}$

因为 $e^{i(\theta+\pi)} = \cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi) = -\cos\theta - i\sin\theta = -e^{i\theta}$

复数的运算.

$z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \qquad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$

验证: $z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

$$z = re^{i\theta}$$

$$z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

允许 r 取负值，$-5e^{i\theta} := 5e^{i(\theta+\pi)}$

因为 $e^{i(\theta+\pi)} = \cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi) = -\cos\theta - i\sin\theta = -e^{i\theta}$

复数的运算.

$z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \qquad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$

验证：$z_1 z_2 = \underbrace{(r_1 e^{i\theta_1})(r_2 e^{i\theta_2})}_{} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

$$= (r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1))(r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2))$$

$$= r_1 r_2 \left((\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)\right)$$

$$= r_1 r_2 \left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

复数的绝对值

$z = a+bi \qquad |z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$|\ | : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ 这是一个非线性映射

$a+bi \mapsto \sqrt{a^2+b^2}$

$|z_1+z_2| \neq |z_1|+|z_2|$ ，但我们有 $\underbrace{|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|}_{\text{三角不等式}}$

$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

By the way $|e^{i\theta}| = 1$. $|r e^{i\theta}| = |r|$. 这样可轻松

验证. $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ $\quad |z_1 z_2| = |r_1 r_2| = |r_1||r_2| = |z_1||z_2|$

设 $r>0$,

复数

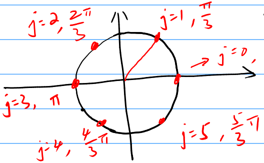
$$z^2 = re^{i\theta} \Rightarrow z = r^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}},\ r^{\frac{1}{2}} e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)}$$

验证 $$\left(r^{\frac{1}{2}} e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)}\right)^2 = r e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)2} = r e^{i(\theta+2\pi)} = re^{i\theta}$$

在计算乘积、幂、开方中

复数的极坐标表示形式有很多好处

例: $$z^n = 1,\quad z = e^{i\frac{j2\pi}{n}},\quad j = 0, 1, \cdots, n-1$$



$n=6$

z^6-1 的 6 个根

实系数多项式

$p \in P(\mathbb{R})$ $\quad p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$

其中 $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$,

当然，可以把 $p \in P(\mathbb{R})$ 看成一个复系数多项式

即 $p \in P(\mathbb{C})$，只是所有的系数都是特殊的

复数（虚部为0的复数）

不妨设 $a_n = 1$，即 p 是一个首一多项式，由代数基本定

理知 存在 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{C}$，使得

$$p(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_n)$$

实系数多项式

$p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ $\quad p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$

其中 $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$,

当然。可以把 $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ 看成一个复系数多项式

即 $p \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$，只是所有的系数都是特殊的复数（虚部为0的复数）

不妨设 $a_n = 1$，即 p 是一个首一多项式，由代数基本定理知 存在 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$，使得

$$p(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_n)$$

这不是在 $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ 中对 p 做的因式分解，但这是我们工作的出发点。

虚部不为0的
实系数多项式的复根一定是成对出现的

引理：设 $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$，那么如果 $\lambda \in \mathbb{C}$ 是 p 的一个根，
那么 $\bar{\lambda}$ 也是 p 的一个根.

证明：$\deg p = -\infty$ 或 1 的情形是平凡的.

不妨设 $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$，$a_n \neq 0$.

由 $\lambda \in \mathbb{C}$ 是 p 的根，得

$$a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_n\lambda^n = 0$$

两边同时取共轭，可得 $a_0 + a_1\bar{\lambda} + \cdots + a_n(\bar{\lambda})^n = 0$

即 $p(\bar{\lambda}) = 0$，因此 $\bar{\lambda}$ 也是 p 的一个根. □

虚部不为0的

实系数多项式的复根一定是成对出现的

引理：设 $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$，那么如果 $\lambda \in \mathbb{C}$ 是 p 的一个根，

那么 $\bar{\lambda}$ 也是 p 的一个根.

证明：　$\deg p = -\infty$ 或 1 的情形是平凡的.

不妨设 $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$，$a_n \neq 0$.

由 $\lambda \in \mathbb{C}$ 是 p 的根，得

$$a_0 + a_1 \lambda + \cdots + a_n \lambda^n = 0$$

两边同时取共轭，可得 $a_0 + a_1 \bar{\lambda} + \cdots + a_n (\bar{\lambda})^n = 0$

即 $p(\bar{\lambda}) = 0$，因此 $\bar{\lambda}$ 也是 p 的一个根. $\square$

成对出现

如果 $\lambda \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$，那么 $\bar{\lambda} = \lambda$. 上面定理并未给出太多信息

但如果 $\lambda = c + di$，$d \neq 0$ 是 p 的根，那么 $\bar{\lambda} = c - di$ 也是 p 的另一个根.

$\mathcal{P}(\mathbb{R})$ 的不可约多项式

假设已知
$$p(x) = x^2 + a_1 x + a_0 = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2), \quad a_1, a_0 \in \mathbb{R}$$

$\lambda_1 \in \mathbb{C}$，且 $\mathrm{Im}\,\lambda_1 \neq 0$.

那么由上面的定理知，$\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$.

$\mathcal{P}(\mathbb{R})$ 的不可约多项式

假设已知

$$p(x) = x^2 + a_1 x + a_0 = \underline{(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)}, \quad a_1, a_0 \in \mathbb{R}$$

$\lambda_1 \in \mathbb{C}$，且 $\mathrm{Im}\,\lambda_1 \neq 0$.

那么由上面的定理知，$\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$.

也就是说 $x^2 + a_1 x + a_0 = (x-\lambda_1)(x-\bar{\lambda}_1)$

$$= x^2 - \underbrace{(\lambda_1+\bar{\lambda}_1)}_{\in\mathbb{R}} x + \underbrace{\lambda_1\bar{\lambda}_1}_{\in\mathbb{R}}$$

是一个 $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ 中的不可约多项式.

$\mathcal{P}(\mathbb{R})$ 中有无 $x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$，$a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ 这样的不可约多项式呢？ $x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ 这样的呢？

$\mathcal{P}(\mathbb{R})$中的不可约多项式.

$$p(x) = x^3 + a_2 x^2 + \cdots + a_0 \xlongequal{\mathcal{P}(\mathbb{C})\text{中的分解}} (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)$$

如果 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$，那显然 p 是可约的

如果 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 中有一个实数，不妨设 $\lambda_1 \in \mathbb{R}$，

λ_2 和 λ_3 的虚部不为零，那么 $\lambda_3 = \overline{\lambda_2}$

$$(x-\lambda_2)(x-\lambda_3) = (x-\lambda_2)(x-\overline{\lambda_2}) = x^2 - (\lambda_2 + \overline{\lambda_2})x + \lambda_2\overline{\lambda_2}$$

$P(\mathbb{R})$中的不可约多项式.

$$p(x) = x^3 + a_2x^2 + \cdots + a_0 \xlongequal{P(\mathbb{C})\text{中的分解}} (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)$$

如果 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, 那显然 p 是可约的

如果 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 中有一个实数, 不妨设 $\lambda_1 \in \mathbb{R}$,

λ_2 和 λ_3 的虚部不为零. 那么 $\lambda_3 = \overline{\lambda_2}$

$$(x-\lambda_2)(x-\lambda_3) = (x-\lambda_2)(x-\overline{\lambda_2}) = x^2 - \underbrace{(\lambda_2+\overline{\lambda_2})}_{2\operatorname{Re}\lambda \in \mathbb{R}}x + \underbrace{\lambda_2\overline{\lambda_2}}_{|\lambda|^2 \in \mathbb{R}}$$

故 $x^2 - (\lambda_2+\overline{\lambda_2})x + \lambda_2\overline{\lambda_2} \in P(\mathbb{R})$

即 $p(x) = x^3 + a_2x^2 + \cdots + a_0 = (x-\lambda_1)(x^2 - (\lambda_2+\overline{\lambda_2})x + \lambda_2\overline{\lambda_2})$

不是 $P(\mathbb{R})$中的不可约多项式.

$P(\mathbb{R})$中的不可约多项式.

$p(x) = x^3 + a_2x^2 + \cdots + a_0$ $\underset{\text{}}{\overset{P(\mathbb{C})\text{中的分解}}{=\!=\!=\!=}}$ $(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)$

case 1 如果 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, 那显然 p 是可约的

case 2 如果 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 中只有一个实数, 不妨设 $\lambda_1 \in \mathbb{R}$,

λ_2 和 λ_3 的虚部不为零. 那么 $\lambda_3 = \bar{\lambda}_2$

$(x-\lambda_2)(x-\lambda_3) = (x-\lambda_2)(x-\bar{\lambda}_2) = x^2 - \underbrace{(\lambda_2+\bar{\lambda}_2)}_{\in\mathbb{R}}x + \underbrace{\lambda_2\bar{\lambda}_2}_{\in\mathbb{R}}$

故 $x^2 - (\lambda_2+\bar{\lambda}_2)x + \lambda_2\bar{\lambda}_2 \in P(\mathbb{R})$

即 $p(x) = x^3 + a_2x^2 + \cdots + a_0 = (x-\lambda_1)(x^2-(\lambda_2+\bar{\lambda}_2)x+\lambda_2\bar{\lambda}_2)$

不是 $P(\mathbb{R})$中的不可约多项式.

Case 3: 如果 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 都是虚部不为0的复数，那么不妨设 $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$，$\lambda_3$ 只能等于 λ_1 或 $\bar{\lambda}_1$，又不妨设

$$\lambda_3 = \lambda_1$$

$$p(x) = x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = (x-\lambda_1)(x-\bar{\lambda}_1)(x-\lambda_1)$$

$$= \left(x^2 - (\lambda_1 + \bar{\lambda}_1)x + \lambda_1\bar{\lambda}_1\right)(x-\lambda_1)$$

$$= \left(x^2 \underbrace{- (2\,\mathrm{Re}\,\lambda_1)}_{\in \mathbb{R}} x + \underbrace{|\lambda_1|^2}_{\in \mathbb{R}}\right)(x-\lambda_1)$$

虚部不为0的

case 3：如果 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 都是复数，那么不妨设
$\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$，$\lambda_3$ 只能等于 λ_1 或 $\bar{\lambda}_1$，又不妨设

$$\lambda_3 = \lambda_1$$

$$p(x) = x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = (x-\lambda_1)(x-\bar{\lambda}_1)(x-\lambda_1)$$

$$= \left(x^2 - (\lambda_1+\bar{\lambda}_1)x + \lambda_1\bar{\lambda}_1\right)(x-\lambda_1)$$

$$= \boxed{\left(x^2 - \underbrace{(2\,\mathrm{Re}\,\lambda_1)}_{\in\mathbb{R}}x + \underbrace{|\lambda_1|^2}_{\in\mathbb{R}}\right)(x-\lambda_1)}$$

常数项 $= -\lambda_1|\lambda_1|^2$，它的虚部不为零，因此
case 3 是不可能发生的。也就是说不会出现 λ_1 是二重根，而 $\bar{\lambda}_1$ 是单根的情形。

这样，我们就证明了三次实系数多项式在 $P(\mathbb{R})$ 中是不可约的.

Case 3 的另一种证法

例：设 $p(x)=x^3+a_2x^2+\cdots+a_0\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$

而且 $\lambda\in\mathbb{C}$ 是 p 的一个虚部不为零的根.

那么 $x^2-(2\operatorname{Re}\lambda)x+|\lambda|^2$ 是 $p(x)$ 在 $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ 中的一个因式.

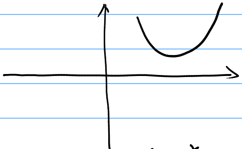
证明：由代数基本定理知，存在 $\lambda,\bar{\lambda},\xi\in\mathbb{C}$ 三个复数，使得

$$x^3+a_2x^2+\cdots+a_0=\underbrace{(x-\lambda)(x-\bar{\lambda})}_{(x^2-(2\operatorname{Re}\lambda)x+|\lambda|^2)}(x-\xi)$$

只要证明 $\xi\in\mathbb{R}$ 就足够了.

$$x-\xi=\frac{x^3+a_2x^2+a_1x+a_0}{x^2-(2\mathrm{Re}\lambda)x+|\lambda|^2}$$

上面的式子对所有的 $x\in\mathbb{R}$ 都成立.（因为 $x^2-2\mathrm{Re}\lambda x+|\lambda|^2>0$ for all $x\in\mathbb{R}$）



开口向上的抛物线

Recall that $\lambda\in\mathbb{C}$ 且 $\mathrm{Im}\lambda\neq 0$.

任意取 $x\in\mathbb{R}$，右边的虚部 $=0$，因此左边的虚部 $=0$

就推出 $\mathrm{Im}\,\xi=0$.

这个例子启发我们 $p\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$ 的复根是成对出现的，

$\lambda,\bar{\lambda}$ 如果是重根，那么它们的重数也相等

$P(\mathbb{R})$ 的不可约多项式

$P(\mathbb{R})$ 中的不可约多项式一定是形如

$x-\lambda$ 或 $x^2+\alpha x+\beta$ 其中 $\alpha^2-4\beta<0$

$P(\mathbb{R})$ 的不可约多项式

$P(\mathbb{R})$ 中的不可约多项式一定是形如

$x-\lambda$ 或 $x^2+\alpha x+\beta$ 其中 $\alpha^2-4\beta<0$

判别式(discrimination)

判别式(discrimination) <0 是保证 $x^2+\alpha x+\beta$ 无实根

$P(\mathbb{R})$ 的不可约多项式

$P(\mathbb{R})$ 中的不可约多项式一定是形如

$x-\lambda$ 或 $x^2+\alpha x+\beta$ 其中 $\alpha^2-4\beta<0$

判别式(discrimination)

判别式(discrimination) <0 是保证 $x^2+\alpha x+\beta$ 无实根

$p(x)=x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0\in P(\mathbb{R})$ 一定不是 $P(\mathbb{R})$ 中的不可约多项式. 你也可以用代数基本定理来证明.

实系数多项式的分解定理

4.14 定理：如果 $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ 是非常数多项式，则 p 可以惟一地（除因式的次序之外）分解成如下形式

$$p(x) = c(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_m)(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)\cdots(x^2+\alpha_M x+\beta_M)$$

其中 $c, \lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{R}$，$(\alpha_1, \beta_1), \cdots, (\alpha_2, \beta_M) \in \mathbb{R}^2$，并且对每个 j 都有 $\alpha_j^2 < 4\beta_j$.

Remark: 上面的 m 和 M 都可能是 0. $\deg p = m + 2M$.

详细证明就先跳过了

证明思路. 把 $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ 在复系数多项式中分解

$$p = c(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_m)(x-\lambda_{m+1})\cdots(x-\lambda_{m+n})$$

虚部不为零的复根是成对出现的. 会得到形如 $(x^2+\alpha x+\beta)$ 其中 $\alpha^2-4\beta<0$ 的 $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ 中的不可约因式. 就得到

作业

1. 设 m 和 n 都是正整数, 并且 $m \leqslant n$. 证明存在一个多项式 $p \in \mathcal{P}_n(\mathbf{F})$, 其恰有 m 个不同的根.

2. 设 $z_1, \cdots, z_{m+1}$ 是 $\mathbf{F}$ 中的不同元素, 并且 $w_1, \cdots, w_{m+1} \in \mathbf{F}$. 证明：存在唯一一个多项式 $p \in \mathcal{P}_m(\mathbf{F})$, 使得对 $j = 1, \cdots, m+1$ 都有

$$p(z_j) = w_j.$$

2提示：这个题目还是比较困难的， 是计算数学的数值分析课程中的多项式插值需要学习的一个定理，证明的时候使用的是范德蒙矩阵的行列式以及线性方程的解的理论， 证明的过程是一个构造性的证明。

2的提示，我们用下面的命题

由 3.17 可知, 若一个线性映射既单又满, 则其可逆. 对于向量空间到其自身的线性映射, 你可能想知道, 仅由单性或满性之一是否可以推出可逆性. 从我们考虑过的某些例子可以看出, 对于无限维向量空间, 任何一个条件都不能单独推出可逆性. x^2 乘算子 (从 $\mathcal{P}(\mathbf{R})$ 到其自身) 是单的但不是满的. 后向移位算子 (从 $\mathbf{F}^\infty$ 到其自身) 是满的但不是单的. 从这些例子来看, 下一个定理是很不平凡的 —— 它表明, 对于从有限维向量空间到其自身的线性映射, 单性和满性中的任何一个都能推出另一个.

3.21 定理: 设 V 是有限维的. 如果 $T \in \mathcal{L}(V)$, 那么下列等价:

(a) T 是可逆的;
(b) T 是单的;
(c) T 是满的.

我们定义一个线性映射: $T: \mathrm{P}_m(F) \to F^{m+1}$, 对于 $p \in \mathrm{P}_m(F)$, $Tp = (p(z_1), \cdots, p(z_{m+1}))$.
题目2要证明的结论等价于要证明 T 即使单射又是满射。

$z_1, z_2, \cdots, z_{m+1}$ 是 F 中的 $(m+1)$ 个不同的数。我们定义一个映射

$$T: \underbrace{P_m(F)}_{(m+1)\text{维线性空间}} \to F^{m+1}$$

$\forall\ p(z) \in P_m(F)$,

$$Tp = (p(z_1), \cdots, p(z_{m+1}))$$

先证明 T 是一个线性映射.

$\forall\ p(z), q(z) \in P_m(z)$

$$T(p+q) = ((p+q)(z_1), \cdots, (p+q)(z_{m+1}))$$

$$= (p(z_1)+q(z_1), \cdots, p(z_{m+1})+q(z_{m+1}))$$

$$= \cdots = Tp + Tq.$$

同样可证 $T(ap) = aTp$, $\forall a \in F$.

再证明 T 是单射.(证明见下一页).

由定理3.21知 T 是可逆的。当然 T^{-1} 也是单射. 这就证明了插值问题的存在唯一性. 即 $\forall (w_1, \cdots, w_{m+1}) \in F^{m}$, 存在唯一的 $P_m(F)$ 中的元素 $T^{-1}(w_1, \cdots, w_{m+1}) \in P_m(F)$ 满足插值条件.

T 是单射的证明使用我们这一节学过的定理

4.3 推论： 设 $p \in \mathcal{P}(\mathbf{F})$ 是 m 次多项式, $m \geqslant 0$, 则 p 在 $\mathbf{F}$ 中最多有 m 个互不相同的根.

作业

5. 证明奇数次的实系数多项式都有实根.