线性代数期中考试参考题

李弢

Q1. (线性空间)

(a) 给定集合 $\mathbb{R}_{++} = \{x > 0 | x \in \mathbb{R}\}$ 及其上面的加法运算与数乘运算：

$$x + y = xy \quad , \quad \lambda x = x^{\lambda}.$$

问 $\mathbb{R}_{++}$ 在上述加法与数乘的意义下是否构成一线性空间？若不是，请说明理由；若是，请验证，并求出维数，并进一步给出它到 $\mathbb{R}^{\dim \mathbb{R}_{++}}$ 的一个可逆线性映射。

(b) 任给一线性空间 V，我们把 $\mathcal{L}(V;\mathbb{F})$ 称为 V 的对偶空间，可记作 V^*. 设 V 是有限维的，$\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 是一组基，定义 $v_i^* \in V^*$，

$$v_i^* : V \to \mathbb{F}, v_i^*(v_j) = \delta_{ij}, \quad \forall i, j = 1, 2, \cdots, n,$$

其中 δ_{ij} 当且仅当 $i = j$ 时为 1，否则为 0. 求证 $\{v_1^*, v_2^*, \cdots, v_n^*\}$ 是 V^* 的一组基。

(c) 对于 V 的对偶空间 V^*，我们还可以考虑它的对偶空间 V^{**}. 证明，V 是 V^{**} 子空间。特别地，当 V 为有限维空间时，$V = V^{**}$.

Solution.

(a) 根据定义可以验证这是一个线性空间，其加法单位元为 1，维数为 1。对数映射 $\log : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}$ 是一可逆线性映射:

$$\log(\lambda x + \mu y) = \log(x^{\lambda} y^{\mu}) = \lambda \log(x) + \mu \log(y).$$

其逆为 $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{++}$.

(b) 首先注意到若 $v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j$，那么

$$v_i^*(v) = v_i^*(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_i^*(v_j) = \lambda_i.$$

我们先说明 $\{v_1^*, v_2^*, \cdots, v_n^*\}$ 是 V^* 的张成组。任意 $l \in V^*, v \in V$，有

$$l(v) = l(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i l(v_i) = \sum_{i=1}^{n} l(v_i) v_i^*(v),$$

这就说明了任意 $l \in V^*$ 都可以由 $\{v_1^*, v_2^*, \cdots, v_n^*\}$ 线性表示。

再来说明 $\{v_1^*, v_2^*, \cdots, v_n^*\}$ 是线性无关的。设存在 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 使得 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i^* = 0$，那么作用在 $v_j, j = 1, 2, \cdots, n$ 上可知 $\lambda_j = 0$，进而说明了它们线性无关。

因此 $\{v_1^*, v_2^*, \cdots, v_n^*\}$ 是 V^* 的一组基。特别地，若 V 是有限维线性空间，V^* 也是有限维线性空间，且维数与 V 相等。

(c) 任取 $v \in V$，可以将其视为 V^* 上的线性函数：$v(l) = l(v)$. 这样定义的函数确实是线性的：

$$v(\lambda l_1 + \mu l_2) = (\lambda l_1 + \mu l_2)(v) = \lambda l_1(v) + \mu l_2(v) = \lambda v(l_1) + \mu v(l_2).$$

这就说明了 V 是 V^{**} 的子空间。若 V 是有限维的，那么由 (b) 可知，$\dim V^* = \dim V$，再一次利用 (b) 可知 $\dim V^{**} = \dim V^* = \dim V$，由此可知 $V^{**} = V$.

Q2. (维数公式)

(a) 设 V 是有限维线性空间，U_1, U_2 是 V 的子空间，那么有怎样的维数公式（不用证明）？

(b) 设 V, W 是有限维线性空间，$T \in \mathcal{L}(V; W)$ 是从 V 到 W 的线性映射，记 T 的像与核分别为 $\operatorname{range} T$ 与 $\operatorname{null} T$，那么有怎样的维数公式（不用证明）？

(c) 给定两个线性空间 U_1, U_2，我们定义它们的笛卡尔积 $U_1 \times U_2 = \{(u_1, u_2), u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$，定义加法运算和数乘运算为

$$(u_1, u_2) + (u_1', u_2') = (u_1 + u_1', u_2 + u_2') \quad , \quad \lambda(u_1, u_2) = (\lambda u_1, \lambda u_2).$$

请验证 $U_1 \times U_2$ 是一个线性空间。若 U_1, U_2 均是有限维，再求 $U_1 \times U_2$ 的维数。

(d) 设 V 是有限维线性空间，U_1, U_2 是 V 的子空间，考虑 $T : U_1 \times U_2 \to V, T((u_1, u_2)) = u_1 + u_2$. 证明 $T \in \mathcal{L}(U_1 \times U_2; V)$，并利用该 T 和 (b) 对 (a) 中的结果给出证明。

(e) 考虑一个齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = & 0 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = & 0 \end{cases}$$

记该线性方程组的系数矩阵为 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, [A]_{ij} = a_{ij}$，$A$ 的第 j 列为 $A_j, j = 1, 2, \cdots, n$，解空间为 U，则 $\dim U$ 与系数矩阵 A 有何关系？

Solution.

(a) $\dim U_1 + U_2 = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim U_1 \cap U_2$.

(b) $\dim V = \dim \operatorname{range} T + \dim \operatorname{null} T$.

(c) 逐一验证线性空间的性质即可。取 U_1 一组基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_{\dim U_1}\}$,$U_2$ 一组基 $\{f_1, f_2, \cdots, f_{\dim U_2}\}$，那么说明

$$\{(e_1, 0), (e_2, 0), \cdots, (e_{\dim U_1}, 0)\} \cup \{(0, f_1), (0, f_2), \cdots, (0, f_{\dim U_2})\}$$

是 $U_1 \times U_2$ 的一组基即可知，

$$\dim U_1 \times U_2 = \dim U_1 + \dim U_2.$$

(d) 容易验证 T 是线性映射，下面考虑其像与核:

$$\operatorname{range} T = \{u_1 + u_2 | u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\} = U_1 + U_2,$$

$$\operatorname{null} T = \{u_1 + u_2 = 0 | u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}.$$

实际上，$\operatorname{null} T = \{(u, -u) | u \in U_1 \cap U_2\}$. 这是因为任意 $(u_1, u_2) \in \operatorname{null} T$，都有 $-u_1 \in U_2$，从而 $u_1 \in U_2$，因此可以写成 $(u_1, -u_1)$，其中 $u_1 \in U_1 \cap U_2$. 另一方面，对于任意 $u \in U_1 \cap U_2$，$T((u, -u)) = 0$. 由 (b) 可知，

$$\dim U_1 + \dim U_2 = \dim (U_1 \times U_2) = \dim \operatorname{range} T + \dim \operatorname{null} T = \dim U_1 + \dim U_2 + \dim U_1 \cap U_2.$$

(e) 考虑线性映射 $T : \mathbb{F}^n \to \mathbf{F}^m, T(x) = Ax$，那么

$$\operatorname{null} T = U \quad , \quad \operatorname{range} T = \operatorname{span}\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}.$$

由 (b) 可知，

$$\dim U = \dim \operatorname{null} T = m - \dim \operatorname{span}\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}.$$

Q3 (投影算子) 设 V 是有限维线性空间，$P \in \mathcal{L}(V)$，如果 P 满足 $P^2 = P$，那么我们称其为投影算子。

(a) 设 $V = U \oplus W$，证明 $P_{U,W}$ 是投影算子。

(b) 证明：若 $P \in \mathcal{L}(V)$ 是一投影算子，λ 是 P 的特征值，则 $\lambda = 0$ 或 1.

(c) 证明：若 $P \in \mathcal{L}(V)$ 是一投影算子，则 P 可对角化。

(d) 证明 V 上所有的投影算子都可以写成 (a) 中的形式。

Solution

(a) $P_{U,W}^2 = P_{U,W}$ 课上已经证明过。

(b) 设 λ 为 P 的特征值，v 是对应的（非零）特征向量，那么 $Pv = \lambda v$. 由于 P 是投影算子，两边同时用 P 作用，得到 $Pv = P^2 v = \lambda Pv$，即 $(1-\lambda)Pv = 0$. 由某道作业题，可知 $1-\lambda = 0$ 或 $Pv = 0$. 如果 $1-\lambda = 0$，就是 $\lambda = 1$; 如果 $Pv = 0$，由于 v 是对应于 λ 的特征向量，可知 $\lambda = 0$.

(c) 由于 P 是投影算子，$P(P-I) = 0$，也就是说 $\operatorname{range}(P-I) \subset \operatorname{null} P$. 由维数公式，

$$\dim V = \dim \operatorname{range}(P-I) + \dim \operatorname{null}(P-I) \leq \dim \operatorname{null} P + \dim \operatorname{null}(P-I).$$

若 P 只有 0 特征值或 1 特征值，由上式可以看出 $\operatorname{null} P = V$ 或 $\operatorname{null}(P-I) = V$，$P$ 显然可以对角化。否则，由于 0 和 1 都是 P 的特征值，$\operatorname{null} P \oplus \operatorname{null}(P-I)$ 是 V 的子空间，故

$$\dim \operatorname{null} P + \dim \operatorname{null}(P-I) \leq \dim V.$$

结合上两式可知

$$\dim \operatorname{null} P + \dim \operatorname{null}(P-I) = \dim V.$$

这就说明了 P 可以对角化。

(d) 由 (c) 中的结论，$V = \operatorname{null}(P-I) \oplus \operatorname{null} P$. 对于任意 $v \in V, v = v_1 + v_2, v_1 \in \operatorname{null}(P-I), v_2 \in \operatorname{null} P$，那么 $P(v) = P(v_1) + P(v_2) = v_1$. 这就说明了 $P = P_{\operatorname{null}(P-I), \operatorname{null} P}$.