§3.1 线性映射的定义与例子

从 V 到 W 的线性映射 (linear map) 是指具有下列性质的映射 $T: V \to W$.

§3.1 线性映射的定义与例子

从 V 到 W 的**线性映射**(linear map)是指具有下列性质的映射 $T: V \to W$.

加性(additivity)

对所有 $u, v \in V$ 都有 $T(u+v) = Tu + Tv$;

Tu 就是 $T(u)$

Tv 就是 $T(v)$

§3.1 线性映射的定义与例子

从 V 到 W 的线性映射 (linear map) 是指具有下列性质的映射 $T: V \to W$.

加性 (additivity)

对所有 $u, v \in V$ 都有 $T(u+v) = Tu + Tv$;

Tu 就是 $T(u)$

Tv 就是 $T(v)$

加性 加法和映射 T 可交换次序

§3.1 线性映射的定义与例子

从 V 到 W 的线性映射 (linear map) 是指具有下列性质的映射 $T: V \to W$.

加性 (additivity)

对所有 $u, v \in V$ 都有 $T(u+v) = Tu + Tv$;

Tu 就是 $T(u)$

Tv 就是 $T(v)$

加性 加法和映射 T 可交换次序

齐性 (homogeneity)

对所有 $a \in F$, $v \in V$ 都有 $T(av) = a(Tv)$

§3.1 线性映射的定义与例子

从 V 到 W 的线性映射(linear map)是指具有下列性质的映射 $T: V \to W$.

加性(additivity)

对所有 $u, v \in V$ 都有 $T(u+v) = Tu + Tv$;

Tu 就是 $T(u)$

Tv 就是 $T(v)$

加性 加法和映射T可交换次序

齐性(homogeneity)

对所有 $a \in F$, $v \in V$ 都有 $T(av) = a(Tv)$

齐性 数乘和映射T可交换

§3.1 线性映射的定义与例子

从 V 到 W 的线性映射 (linear map) 是指具有下列性质的映射 $T: V \to W$.

加性 (additivity)

对所有 $u, v \in V$ 都有 $T(u+v) = Tu + Tv$;

Tu 就是 $T(u)$

Tv 就是 $T(v)$

加性 加法和映射 T 可交换次序

齐性 (homogeneity)

对所有 $a \in F$, $v \in V$ 都有 $T(av) = a(Tv)$

齐性 数乘和映射 T 可交换

Remark 1. 线性映射也称为线性变换 (linear transformation)

§3.1 线性映射的定义与例子

从 V 到 W 的**线性映射**(linear map)是指具有下列性质的映射 $T: V \to W$.

加性(additivity)

对所有 $u, v \in V$ 都有 $\boxed{T(u+v) = Tu + Tv}$;

Tu 就是 $T(u)$

Tv 就是 $T(v)$

加性 加法和映射 T 可交换次序

齐性(homogeneity)

对所有 $a \in F$, $v \in V$ 都有 $\boxed{T(av) = a(Tv)}$

齐性 数乘和映射 T 可交换

Remark 1. 线性映射也称为线性变换(linear transformation)

Remark 2. 线性映射 $T: V \to W$, $\forall v \in T$, 在后面的学习中会看到 $T(v)$ 和一个数乘以 v 很相似，因此常常写成 Tv

§3.1 线性映射的定义与例子

从 V 到 W 的线性映射 (linear map) 是指具有下列性质的映射 $T: V \to W$.

加性 (additivity)

对所有 $u, v \in V$ 都有 $T(u+v) = Tu + Tv$;

加性　加法和映射 T 可交换次序

Tu 就是 $T(u)$

Tv 就是 $T(v)$

齐性 (homogeneity)

对所有 $a \in F$, $v \in V$ 都有 $T(av) = a(Tv)$

齐性　数乘和映射 T 可交换

Remark 1. 线性映射也称为线性变换 (linear transformation)

Remark 2. 线性映射 $T: V \to W$, $\forall v \in T$, 在后面的学习中会看到 $T(v)$ 和一个数乘以 v 很相似, 因此常常写成 Tv

括号省去了.

线性映射的例子.

设 V 和 W 是数域 F 上的线性空间

$T: V \to W$ 定义成

$$Tv = 0 \quad \forall v \in V$$

线性映射的例子.

设 V 和 W 是数域 F 上的线性空间

$T: V \to W$ 定义成

$$Tv = 0 \quad \forall v \in V$$

表示 W 中的零元素.

线性映射的例子.

设 V 和 W 是数域 F 上的线性空间

$T: V \to W$ 定义成

$$Tv = 0 \qquad \forall v \in V$$

表示 W 中的零元素.

也就是说 T 把 V 中的所有元素 $v \in V$ 都映成了 W 中的零元素

线性映射的例子.

设 V 和 W 是数域 F 上的线性空间

$T: V \to W$ 定义成

$$Tv = \underset{\text{表示}W\text{中的零元素}}{0} \quad \forall v \in V$$

也就是说 T 把 V 中的所有元素 $v \in V$ 都映成了 W 中的零元素

这个映射被称为零映射. 记成 0, 即

$$0: V \to W$$
$$v \mapsto 0$$

表示零映射

$$0v = 0$$

线性映射的例子.

设 V 和 W 是数域 F 上的线性空间

$T: V \to W$ 定义成

$$Tv = 0 \quad \forall v \in V$$

表示 W 中的零元素.

也就是说 T 把 V 中的所有元素 $v \in V$ 都映成了 W 中的零元素

这个映射被称为零映射. 记成 0. 即

$$0: V \to W$$

$$v \mapsto 0$$

表示零映射

$0v = 0$ 表示 W 中的零元素.

线性映射的例子.

设 V 和 W 是数域 F 上的线性空间

$T: V \to W$ 定义成

$$Tv = 0 \quad \forall v \in V$$

表示 W 中的零元素

也就是说 T 把 V 中的所有元素 $v \in V$ 都映成了 W 中的零元素

这个映射被称为零映射. 记成 0, 即

表示零映射

$$0: V \to W$$

$$v \mapsto 0$$

$0v = 0$ 表示 W 中的零元素.

如果 $W = V$, 也就是 codomain 和 domain 是同一个向量空间

那么 $0v = 0$.

零映射 $0: V \to V$　　V 中的零元素.

线性映射的例子.

设 V 和 W 是数域 F 上的线性空间

$T: V \to W$ 定义成

$$T v = 0 \quad \forall v \in V$$

表示 W 中的零元素

也就是说 T 把 V 中的所有元素 $v \in V$ 都映成了 W 中的零元素

这个映射被称为零映射. 记成 0. 即

$$0: V \to W$$
$$v \mapsto 0$$

表示零映射

$0v = 0$ 表示 W 中的零元素.

如果 $W = V$. 也就是 codomain 和 domain 是同一个向量空间

那么 $0v = 0$. 回想数 $0 \in F$, $0v = 0$.

零映射 $0: V \to V$　　V 中的零元素.　　数 0　　V 中的零元素.

线性映射的例子.

设 V 和 W 是数域 F 上的线性空间

$T: V \to W$ 定义成

$$Tv = 0 \quad \forall v \in V$$

表示 W 中的零元素.

也就是说 T 把 V 中的所有元素 $v \in V$ 都映成了 W 中的零元素

这个映射被称为零映射. 记成 0, 即

$$0: V \to W$$

$$v \mapsto 0$$

表示零映射

$0v = 0$ 表示 W 中的零元素.

如果 $W = V$, 也就是 codomain 和 domain 是同一个向量空间

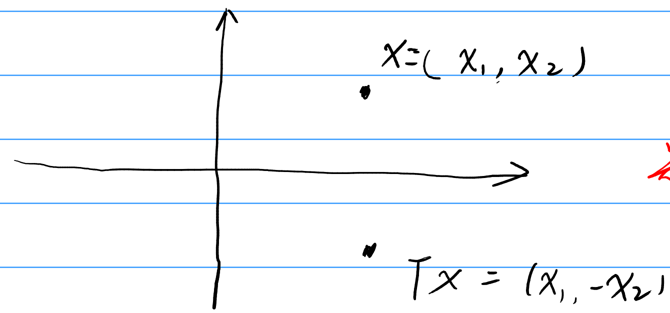
那么 $\boxed{0v=0}$. 回想数 $0 \in F$, $\boxed{0v=0}$. 零映射的名字和记号的由来

零映射 $0: V \to V$　V 中的零元素.　数 0　V 中的零元素.

线性映射的例子

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 由下式定义. $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}$

$$Tx = (x_1, -x_2)$$

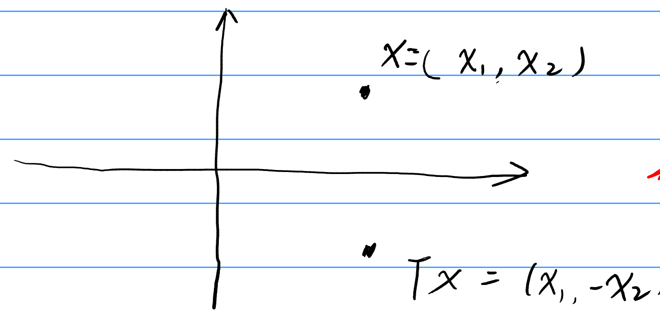


关于横坐标轴的反射

线性映射的例子

$T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 由下式定义. $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$

$$Tx=(x_1,-x_2)$$



关于横坐标轴的反射

更加具体一点: 台球.

球撞台壁前的速度 $v=(v_x,v_y)$

球撞台壁后的速度 $Tv=(v_x,-v_y)$

要映射是一个线性映射是

显然的, 反射是一个线性映射. 需要大家验证一下

$\forall u,v\in\mathbb{R}^2$, $T(u+v)=T((u_1+v_1,u_2+v_2))=(u_1+u_2,-(v_1+v_2))=\cdots=Tu+Tv$

所有的从 V 到 W 的线性映射构成的集合 $\mathcal{L}(V,W)$

$\mathcal{L}$ 是花体的大写字母 L.

零映射 $0: V \to W$ 是一个线性映射. 可以写成 $0 \in \mathcal{L}(V,W)$.

所有的从 V 到 W 的线性映射构成的集合 $\mathcal{L}(V,W)$

$\mathcal{L}$ 是花体的大写字母 L.

零映射 $0: V \to W$ 是一个线性映射. 可以写成 $0 \in \mathcal{L}(V,W)$.

设 V, W 都是域 F 上的非零的向量空间, 定义 $\mathcal{L}(V,W)$ 中的两个映射 S, T 的加法如下

$$(S+T)v = Sv + Tv$$

所有的从 V 到 W 的线性映射构成的集合 $\mathcal{L}(V,W)$

$\mathcal{L}$ 是花体的大写字母 L.

零映射 $0: V \to W$ 是一个线性映射. 可以写成 $0 \in \mathcal{L}(V,W)$.

设 V, W 都是域 F 上的非零的向量空间, 定义 $\mathcal{L}(V,W)$ 中的两个映射 S, T 的加法如下

$$(S+T)v = Sv + Tv$$

需要验证 $S+T$ 也是一个从 V 到 W 的线性映射.

所有的从 V 到 W 的线性映射构成的集合 $\mathcal{L}(V,W)$

$\mathcal{L}$ 是花体的大写字母 L.

零映射 $0: V \to W$ 是一个线性映射. 可以写成 $0 \in \mathcal{L}(V,W)$.

设 V, W 都是域 F 上的非零的向量空间. 定义. $\mathcal{L}(V,W)$ 中的两个映射 S, T 的加法如下

$$(S+T)v = Sv + Tv \qquad \forall\, v \in V$$

需要验证 $S+T$ 也是一个从 V 到 W 的线性映射. (you do it)

定义 $a \in \mathbb{F}$ 和 $T \in \mathcal{L}(V,W)$ 的数乘得到一个映射 aT 如下

$$(aT)v = a(Tv) \qquad \forall\, v \in V.$$

所有的从 V 到 W 的线性映射构成的集合 $\mathcal{L}(V,W)$

$\mathcal{L}$ 是花体的大写字母 L.

零映射 $0: V \to W$ 是一个线性映射. 可以写成 $0 \in \mathcal{L}(V,W)$.

设 V, W 都是域 F 上的非零的向量空间. 定义 $\mathcal{L}(V,W)$ 中的两个映射 S, T 的加法如下

$$(S+T)v = Sv + Tv \qquad \forall\, v \in V$$

需要验证 $S+T$ 也是一个从 V 到 W 的线性映射. (you do it)

定义 $a \in F$ 和 $T \in \mathcal{L}(V,W)$ 的数乘 得到一个映射 aT 如下

$$(aT)v = a(Tv) \qquad \forall\, v \in V.$$

需要验证 aT 也是一个从 V 到 W 的线性映射. (you do it)

所有的从 V 到 W 的线性映射构成的集合 $\mathcal{L}(V,W)$

$\mathcal{L}$ 是花体的大写字母 L.

零映射 $0: V \to W$ 是一个线性映射. 可以写成 $0 \in \mathcal{L}(V,W)$.

设 V, W 都是域 F 上的非零的向量空间, 定义 $\mathcal{L}(V,W)$ 中的两个映射 S, T 的加法如下

$$(S+T)v = Sv + Tv \qquad \forall v \in V$$

需要验证 $S+T$ 也是一个从 V 到 W 的线性映射. (you do it)

定义 $a \in F$ 和 $T \in \mathcal{L}(V,W)$ 的数乘得到一个映射 aT 如下

$$(aT)v = a(Tv) \qquad \forall v \in V.$$

需要验证 aT 也是一个从 V 到 W 的线性映射. (you do it)

再验证加法和数乘满足交换律, 结合律, 加法单位元, ….

验证所有的V到W上的所有的线性映射构成的集合 $\mathcal{L}(V,W)$ 是域F上的线性空间.

1. 零映射是 $\mathcal{L}(V,W)$ 的加法零元素

$\forall T \in \mathcal{L}(V,W)$

$$(T+0)v = Tv + 0v$$

用上页定义的线性映射的加法

验证所有的 V 到 W 上的所有的线性映射构成的集合 $\mathcal{L}(V,W)$ 是域 F 上的线性空间.

1. 零映射是 $\mathcal{L}(V,W)$ 的加法零元素

$\forall T \in \mathcal{L}(V,W)$.

$$(T+0)v = Tv + 0v = Tv + 0$$

用上面定义的线性映射的加法

用零映射的定义

验证所有的V到W上的所有的线性映射构成的集合 $\mathcal{L}(V,W)$ 是域F上的线性空间.

1. 零映射是 $\mathcal{L}(V,W)$ 的加法零元素

$\forall T \in \mathcal{L}(V,W)$

$$(T+0)v = Tv + 0v = Tv + 0 = Tv$$

用上面定义的线性映射的加法

用零映射的定义

是W中的零元素

用W中零元素的定义.

验证所有的V到W上的所有的线性映射构成的集合 $\mathcal{L}(V,W)$ 是域F上的线性空间.

1. 零映射是 $\mathcal{L}(V,W)$ 的加法零元素

$\forall T \in \mathcal{L}(V,W)$

$$\boxed{(T+0)v = Tv + 0v = Tv + 0 = Tv} \quad \forall v \in V$$

用上页定义的线性映射的加法

用零映射的定义

是W中的零元素

用W中零元素的定义.

$$(T+0)v = Tv \quad \forall v \in V$$

左右作为W中的元素相等

表明和映射 $T+0$ 和映射 T 在所有的 $v \in V$ 的作用都一样

验证 所有的 V 到 W 上的所有的线性映射构成的集合 $\mathcal{L}(V,W)$ 是域 F 上的线性空间.

1. 零映射是 $\mathcal{L}(V,W)$ 的加法零元素

$$\forall T \in \mathcal{L}(V,W),$$

$$\boxed{(T+0)v = Tv + 0v = Tv + 0 = Tv} \quad \forall v \in V$$

用上页定义的线性映射的加法

用零映射的定义

是 W 中的零元素

用 W 中零元素的定义.

$$(T+0)v = Tv \quad \forall v \in V$$

左右 作为 W 中的元素相等

表明 和映射 $T+0$ 和 映射 T 在所有的 $v \in V$ 的作用都一样, 这意味着

$$T + 0 = T$$

左右作为 $\mathcal{L}(V,W)$ 中的元素相等, 也就是两个映射相等

继续验证 $\mathcal{L}(V,W)$ 是F上的向量空间

$$(T+S)v = Tv + Sv$$

映射 加法

定义

继续验证 $\mathcal{L}(V,W)$ 是F上的向量空间

$$(T+S)v = Tv + Sv = Sv + Tv$$

映射加法定义

W中加法的交换律.

继续验证 $\mathcal{L}(V,W)$ 是F上的向量空间

$$(T+S)v = Tv + Sv = Sv + Tv = (S+T)v \quad \forall v \in V$$

映射加法定义　　W中加法的交换律.　　映射加法的定义

继续验证 $\mathcal{L}(V,W)$ 是 F 上的向量空间

$$(T+S)v = Tv + Sv = Sv + Tv = (S+T)v \quad \forall v \in V$$

映射加法定义　　W 中加法的交换律.　　映射加法的定义

这就证明了 $T+S = S+T$

继续验证 $\mathcal{L}(V,W)$ 是 $\mathbb{F}$ 上的向量空间

$$(T+S)v = Tv + Sv = Sv + Tv = (S+T)v \quad \forall v \in V$$

映射加法定义　　　W中加法的交换律.　　　映射加法的定义

这就证明了 $T+S = S+T$

验证一个分配律：

$$[a(T+S)]v = a[(T+S)v] = a(Tv+Sv) = a(Tv)+a(Sv)$$

用 $\mathcal{L}(V,W)$ 和 $\mathbb{F}$ 上的数乘的定义　　　用映射加法定义　　　$(W,\mathbb{F})$ 的数乘定义

$$= (aT)v + (aS)v = (aT+aS)v \quad \forall v \in V. \Rightarrow a(T+S) = aT+aS$$

用 $(\mathcal{L}(V,W),\mathbb{F})$ 的数乘定义　　　用 $\mathcal{L}(V,W)$ 的加法定义

继续验证 $\mathcal{L}(V,W)$ 是 F 上的向量空间

$$(T+S)v = Tv + Sv = Sv + Tv = (S+T)v \quad \forall v \in V$$

映射加法定义 W 中加法的交换律. 映射加法的定义

这就证明了 $T+S = S+T$

$\boxed{\text{验证一个分配律}}$: $[a(T+S)]v = a[(T+S)v] = a(Tv+Sv) = a(Tv)+a(Sv)$

用 $\mathcal{L}(V,W)$ 和 F 上的数乘的定义 用映射加法定义 (W, F) 的数乘定义

$= (aT)v + (aS)v = (aT+aS)v \quad \forall v \in V. \Rightarrow a(T+S) = aT+aS$

用 $(\mathcal{L}(V,W), F)$ 的数乘定义 用 $\mathcal{L}(V,W)$ 的加法定义

Now you know how to 验证其他性质, So you continue.