10.3-4 算子和矩阵的行列式

Tiao Lu

Peking University

2017.11.28

$T\in\mathcal{L}(V)$. V是一个复数域上的n维向量空间，n是一个正整数

存在V的一个基$v_1,\dots,v_n$使得T关于这个基的矩阵是

上三角矩阵.

$$\mathcal{M}(T)=\begin{bmatrix}\lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix}$$

其中对角元是T的特征值、λ_j中可能会有相等的.

例如 $\mathcal{M}(T)=\begin{bmatrix}4 & 0 & 3 & 7+i \\ 0 & 4 & 5 & 9-i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5+i\end{bmatrix}$ 那么T的特征值是4(2重), i, $5+i$

或者写成 $4,4,i,5+i$

一个算子的 $T\in\mathcal{L}(V)$ 的行列式定义为它所有的特征值的乘积

即 $\det(T) = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$

刚才的例子 $\det(T) = 4\cdot4\cdot(5+i)i = -16+80i$

一个算子 $T\in\mathcal{L}(V)$ 的特征多项式是

$$p(z) = (z-\lambda_1)(z-\lambda_2)\cdots(z-\lambda_n)$$

也就是以 T 的特征值为根的首一多项式。

首项系数为1

如果 $T\in\mathcal{L}(V)$ 的特征值是 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，不能验证 $zI-T$ 的特征值是 $z-\lambda_1, z-\lambda_2,\cdots,z-\lambda_n$，因此 $\boxed{\det(zI-T) = T\text{的特征多项式}\ p(z)}$

Cayley-Hamilton 定理：设 $T \in \mathcal{L}(V)$ 是 n 维复向量空间 V 的线性算子，$p(z) = (z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_n)$ 是 T 的特征多项式，其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是 T 的特征值。那么 $p(T) = 0$.

举个例子，看 $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$，$Te_1 = 3e_1$，$Te_2 = 2e_1 + e_2$

$$\mathcal{M}(T) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 3$，$\lambda_2 = 1$ 是 T 的两个特征值.

$p(z) = (z-3)(z-1)$ $\quad p(T) = (T-3I)(T-I)$.

要证明 $p(T)=0$，只要证明 $p(T)e_1 = 0$. $p(T)e_2 = 0$.

$$p(T)e_1 = \underline{(T-3I)}\,\underline{(T-I)}e_1 = \underline{(T-I)}\,\underline{(T-3I)e_1} = (T-I)(0) = 0$$

可交换

$$M(T) = \begin{array}{c|cc} & e_1 & e_2 \\ \hline e_1 & 3 & 2 \\ e_2 & 0 & 1 \end{array} \qquad Te_1 = 3e_1 \Rightarrow (T-3I)e_1 = 0$$

$$p(T)e_2 = (T-3I)\,\underline{(T-I)e_2} = (T-3I)\,\underline{(Te_2 - e_2)}$$

$$= (T-3I)(2e_1 + e_2 - e_2) = (T-3I)(2e_1) = 0$$

$$(T-I)e_2 \in \operatorname{span}\{e_1\} \Rightarrow (T-3I)(T-I)e_2 = 0$$

Cayley-Hamilton 定理的证明：（数学归纳法）

$$\mathcal{M}(T) = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array} & \begin{bmatrix} \lambda_1 & a_{1,2} & & a_{1,n} \\ 0 & \lambda_2 & & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \end{array}$$

$$p(T) = (T-\lambda_1 I)(T-\lambda_2 I)\cdots(T-\lambda_n I)$$

假设 $(T-\lambda_1 I)e_1 = 0$, $(T-\lambda_1 I)(T-\lambda_2 I)e_2 = 0$, $\cdots$, $(T-\lambda_1 I)\cdots(T-\lambda_j I)e_j = 0$

$(T-\lambda_{j+1} I)e_{j+1} \in \operatorname{span}(e_1, e_2, \cdots, e_j)$，于是

$$(T-\lambda_1 I)(T-\lambda_2 I)\cdots(T-\lambda_j I)(T-\lambda_{j+1} I)e_{j+1} = 0$$

由数学归纳法知

$p(T)e_n = 0$，显然 $p(T)e_1 = (T-\lambda_2 I)\cdots(T-\lambda_n I)(T-\lambda_1 I)e_1 = 0$

$p(T)e_2 = 0, \cdots, p(T)e_{n-1} = 0$，这样就证明了 $p(T) = 0$.

$\det(T)$ 和 $p(z)=(z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_n)$ 的关系

$$\det(T)=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

$$p(z) \text{ 的常数项 } = (-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

如何计算算子的行列式？把它所有的特征值都求出，

固然可行，但是 too costly.

回顾韦达定理. $x^2-3x+2.5=0$ 的两根的乘积是 2.5，

不用把两个根求出来.

我们定义算子的迹和矩阵的迹，它们二者相等，这值得我们借鉴.

所有特征值之和　　矩阵的对角元之和

上三角矩阵

当 $T \in \mathcal{L}(V)$ 关于基 $(e_1, \cdots, e_n)$ 是上三角矩阵时, 显然该矩阵的所有对角元之积就是 T 的所有特征值之积, 因此

$$\det(T) = \prod_{j=1}^{n} (\mathcal{M}(T, (e_1, \cdots, e_n))$$

显然该矩阵的所有对角元之积就是 T 的所有特征值之积, 因此

$$\det(T) = \prod_{j=1}^{n} (\mathcal{M}(T, (e_1, \cdots, e_n))$$

下三角矩阵

当 $T\in\mathcal{L}(V)$ 关于基 $(f_1,\cdots,f_n)$ 是下三角矩阵

$$\mathcal{M}(T,(f_1,\cdots,f_n))=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ a_{2,1} & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ a_{3,1} & a_{3,2} & \lambda_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0\\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix}$$

引入一个新的基 $\psi_1=f_n,\cdots,\psi_n=f_1$, 我们可以看到

$$\mathcal{M}(T,(\psi_1,\cdots,\psi_n))=\begin{bmatrix}\lambda_n & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,1}\\ 0 & \lambda_{n-1} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,1}\\ 0 & 0 & \lambda_{n-2} & \cdots & a_{n-2,1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_1\end{bmatrix}$$

也就是说当一个算子在一个基下的矩阵是下三角矩阵的时候, 矩阵的对角元仍然是该算子的特征值. 此时该矩阵的所有对角元之积就是 T 的所有特征值之积, 因此

$$\det(T)=\prod_{j=1}^{n}(\mathcal{M}(T,(f_1,\cdots,f_n))$$

非对角矩阵

问题

刚才的例子 T 的矩阵是上三角矩阵或者下三角矩阵，把矩阵的行列式定义成矩阵的对角元的乘积还是非常合适的，而且矩阵的行列式等于算子的行列式。但是如果矩阵不是对角矩阵，还能这样干吗?

Example 1 (非对角矩阵)

$T \in L(\mathbb{C}^2)$，e_1, e_2 是 $\mathbb{C}^2$ 的标准基，T 定义成

$$Te_1 = e_2, \quad Te_2 = e_1$$

$$\mathcal{M}\left(T, (e_1, e_2)\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathcal{M}\left(T, (e_1, e_2)\right)$ 的所有对角元之乘积 $= 0$.
算子的特征值是 $1, -1$，因此 $\det(T) = -1$.

引入一个新的基

$$\psi_1 = e_1 + e_2, \quad \psi_2 = e_1 - e_2$$

则 (大家自己验证一下) $\mathcal{M}\left(T, (\psi_1, \psi_2)\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

算子的行列式和面积

这个面积不是一般的面积, 我们可以称为有向面积.

有向面积, wedge product

我们考虑 $\mathbb{R}^2$, e_1, e_2 是标准基.

$e_1 \wedge e_2$

e_1 和 e_2 组成了一个正方形 (特殊的平行四变形), 这个平行四边形的有向面积记为 $e_1 \wedge e_2$. 我们规定了一个方向, 用右手螺旋规则来定向.

$e_2 \wedge e_1$

如果是 e_2 和 e_1 组成的正方形, 虽然是同一个正方形, 但是我们规定它的有向面积是 $e_2 \wedge e_1$, 按照右手螺旋规则, $e_2 \wedge e_1$ 的方向和 $e_1 \wedge e_2$ 的方向相反.

规定

$e_2 \wedge e_1 = -e_1 \wedge e_2$. $\quad e_1 \wedge e_1 = 0$, $\quad e_2 \wedge e_2 = 0$

在黑板上画图解释一下这些规定的合理性.

向量与向量的 wedge product

$u \wedge v$

Take $u = ae_1, v = be_2 \in \mathbb{R}^2$, where $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$. 我们该如何定义 $u \wedge v$ 呢?

$u \wedge v = (ae_1) \wedge (be_2) = \underbrace{ab}_{\text{是一个数}} e_1 \wedge e_2$

显然 ab 可能是正的可能是负的, 它的绝对值是面积的大小, 符号表示这面积的方向.

$u \wedge v$

Take $u = a_1 e_1 + a_2 e_2, v = b_1 e_1 + b_2 e_2 \in \mathbb{R}^2$, where $a_j \in \mathbb{R}, b_j \in \mathbb{R}$. 我们该如何定义 $u \wedge v$ 呢?

$$\begin{aligned} u \wedge v &= (a_1 e_1 + a_2 e_2) \wedge (b_1 e_1 + b_2 e_2) \\ &= a_1 b_1 e_1 \wedge e_1 + a_1 b_2 e_1 \wedge e_2 + a_2 b_1 e_2 \wedge e_1 + a_2 b_2 e_2 \wedge e_2 \\ &= a_1 b_2 e_1 \wedge e_2 + a_2 b_1 e_2 \wedge e_1 \\ &= a_1 b_2 e_1 \wedge e_2 - a_2 b_1 e_1 \wedge e_2 \\ &= (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_1 \wedge e_2 \end{aligned}$$

这就是 u 和 v 两个向量组成的平行四变形的有向面积.

用一个例子来解释有向面积

我们在黑板上画个图，来解释面积这个事情，找个很特殊的

$$\mathcal{M}\left(T,(e_1,e_2)\right)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ a & 1\end{bmatrix}$$

也就是说 $Te_1=e_1+ae_2$, where a 是一个常数，$Te_2=e_1+e_2$. 我们来尝试把 a 取成不同的数值，例如 $a=0,0.5,1$ 等，来看看 T 把 e_1,e_2 组成的正方形究竟变成了什么样的平行四边形，它的面积是不是等于

$$(e_1+ae_2)\wedge(e_1+e_2)=(1-a)e_1\wedge e_2$$

矩阵行列式的定义

我们曾经把上三角矩阵和下三角矩阵的行列式定义成其所有对角元的乘积. 现在我们把矩阵的行列式定义成 $Te_1 \wedge Te_2$ 与 $e_1 \wedge e_2$ 的比值. 这两种定义是否有冲突呢? (we need to check correpsondence princple holds.)

Example 2

设 $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2$ ，在一个基 e_1, e_2 下的矩阵是

$$\mathcal{M}(T,(e_1,e_2)) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & a \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

按照新的定义

$$\det(\mathcal{M}(T,(e_1,e_2))) = \frac{(\lambda_1 e_1) \wedge (ae_1 + \lambda_2 e_2)}{e_1 \wedge e_2} = \lambda_1\lambda_2$$

按照老的定义

$$\det(\mathcal{M}(T,(e_1,e_2))) = \lambda_1\lambda_2$$

二者是一致的.

非对角矩阵

我们现在的定义是可以推广到任意的基的，也就是说我们这样定义的矩阵的行列式总是等于算子的行列式，不管在这个基下，算子的矩阵是否是上 (下) 三角矩阵，也不管这个基是不是正交的.
回到我们原来的一个例子

Example 3 (非对角矩阵)

$T \in L(\mathbb{C}^2)$，e_1, e_2 是 $\mathbb{C}^2$ 的标准基，T 定义成

$$Te_1 = e_2, \quad Te_2 = e_1$$

$$\mathcal{M}\left(T, (e_1, e_2)\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

矩阵的行列式是 $\det(\mathcal{M}\left(T, (e_1, e_2)\right)) = \frac{e_2 \wedge e_1}{e_1 \wedge e_2} = -1$.
算子的特征值是 $1, -1$，因此 $\det(T) = -1$.

引入一个新的基 (这是一个不正交的基)$\psi_1 = 5e_1 + 7e_2, \quad \psi_2 = e_1 + 2e_2$ 在黑板上算算 $\det(\mathcal{M}\left(T, (\psi_1, \psi_2)\right))$，然后算算这个矩阵的行列式，也就是

$$\frac{T\psi_1 \wedge T\psi_2}{\psi_1 \wedge \psi_2}$$

上一页的的演算结果

$$\psi_1 = 5e_1 + e_2, \quad \psi_2 = 7e_1 + 2e_2$$

反解出来

$$e_1 = \frac{2}{3}\psi_1 - \frac{1}{3}\psi_2, \quad e_2 = -\frac{7}{3}\psi_1 + \frac{5}{3}\psi_2$$

或者写成下面的形式

$$\begin{bmatrix}\psi_1 & \psi_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e_1 & e_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 7\\ 1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e_1 & e_2\end{bmatrix}\underbrace{\mathcal{M}\left(I, (\psi_1, \psi_2), (e_1, e_2)\right)}_{S}$$

$$\begin{bmatrix}e_1 & e_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\psi_1 & \psi_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{7}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\psi_1 & \psi_2\end{bmatrix}\underbrace{\mathcal{M}\left(I, (e_1, e_2), (\psi_1, \psi_2)\right)}_{S^{-1}}$$

$$\mathcal{M}\left(T, (\psi_1, \psi_2)\right) = S^{-1}\mathcal{M}\left(T, (e_1, e_2)\right)S = \begin{bmatrix}-11 & -15\\ 8 & 11\end{bmatrix}$$

在上一页上给出了 $\mathcal{M}\left(T, (e_1, e_2)\right)] = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

如果忘记了公式

可以按照定义去求

$$\begin{aligned} T\psi_1 &= T(5e_1 + e_2) = 5Te_1 + Te_2 \\ &= 5e_2 + e_1 \\ &= 5\left(-\frac{7}{3}\psi_1 + \frac{5}{3}\psi_2\right) \\ &\quad + \left(\frac{2}{3}\psi_1 - \frac{1}{3}\psi_2\right) \\ &= -11\psi_1 + 8\psi_2 \end{aligned}$$

这样我们就可以得到 $\mathcal{M}\left(T, (\psi_1, \psi_2)\right)$ 的第一列是

$$\begin{bmatrix} -11 & \nabla \\ 8 & \star \end{bmatrix}$$

非对角矩阵的行列式

再弄出第二列来

$$\mathcal{M}\left(T,(\psi_1,\psi_2)\right) = S^{-1}\mathcal{M}\left(T,(e_1,e_2)\right)S = \begin{bmatrix} -11 & -15 \\ 8 & 11 \end{bmatrix}$$

我们来计这个矩阵的行列式

$$\begin{aligned} \det(\mathcal{M}\left(T,(\psi_1,\psi_2)\right)) &= \frac{(-11e_1 + 8e_2) \wedge (-15e_1 + 11e_2)}{e_1 \wedge e_2} \\ &= \frac{(-11) \times 11e_1 \wedge e_2 + 8 \times (-15)e_2 \wedge e_1}{e_1 \wedge e_2} \\ &= -1. \end{aligned}$$

行列式的简化计算

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \frac{(a_{1,1}e_1 + a_{2,1}e_2) \wedge (a_{1,2}e_1 + a_{2,2}e_2)}{e_1 \wedge e_2}$$

$$= \frac{a_{1,1}a_{2,1}e_1 \wedge e_1 + a_{1,1}a_{2,2}e_1 \wedge e_2 + a_{2,1}a_{2,1}e_2 \wedge e_1 + a_{2,1}a_{2,2}e_2 \wedge e_2}{e_1 \wedge e_2}$$

四项为啥变成两项? 因为 $e_1 \wedge e_1 = 0, e_2 \wedge e_2 = 0$

$$= a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}$$

于是 2×2 矩阵的行列式对角元的乘积减去斜对角元的乘积, 写成

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}$$

3×3 矩阵的行列式

$$A=\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3}\\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}\end{bmatrix}$$

它是映射 T 在基 e_1, e_2, e_3 下的矩阵，于是

$$\begin{aligned} Te_1 &= a_{1,1}\,e_1 + a_{2,1}\,e_2 + a_{3,1}\,e_3\\ Te_2 &= a_{1,2}\,e_1 + a_{2,2}\,e_2 + a_{3,2}\,e_3\\ Te_3 &= a_{1,3}\,e_1 + a_{2,3}\,e_2 + a_{3,3}\,e_3 \end{aligned}$$

e_1 ,e_2, e_3 组成的平行六面体的有向体积是 $e_1\wedge e_2\wedge e_3$. 映射 T 把上面的六面体映射成了一个新的六面体，这个新六面体的有向体积和原来的六面体的有向体积的比值就是矩阵的行列式，也是映射的行列式.

$$\begin{aligned} \det(A) &= \frac{(Te_1)\wedge(Te_2)\wedge(Te_3)}{e_1\wedge e_2\wedge e_3}\\ &= \frac{a_{i,1}\,e_i\wedge a_{j,2}\,e_j\wedge a_{k,3}\,e_k}{e_1\wedge e_2\wedge e_3} \end{aligned}$$

采用了爱因斯坦求和约定

爱因斯坦求和约定 I

爱因斯坦求和约定，是指两个相同指标就表示求和，而不管指标是什么字母，有时亦称求和的指标为“哑指标”．例如:

$$a_{i,1}\,e_i = \sum_{i=1}^{3} a_i e_i = a_1\,e_1 + a_2\,e_2 + a_3\,e_3$$

$$a_{j,2}\,e_j = \sum_{j=1}^{3} a_{j,2}\,e_j = a_{1,2}\,e_1 + a_{2,2}\,e_2 + a_{3,2}\,e_3$$

$$a_{k,3}\,e_k = \sum_{k=1}^{3} a_{k,3}\,e_k = a_{1,3}\,e_1 + a_{2,3}\,e_2 + a_{3,3}\,e_3$$

具体约定如下：

1. 在同一项中，如果同一指标（如上式中的 i）成对出现，就表示遍历其取值范围求和。这时求和符号可以省略，如上所示。
2. 上述成对出现的指标叫做哑指标，简称哑标。表示哑标的小写字母可以用另一对小写字母替换，只要其取值范围不变。

爱因斯坦求和约定 II

3. 当两个求和式相乘时，两个求和式的哑标不能使用相同的小写字母。为了避免混乱，常用的办法是根据上一条规则，先将其中一个求和式的哑标改换成其它小写字母。(这一条规则以后会用到)

上面我们使用 i, j, k 就是为了避免混乱，

$$
\begin{aligned}
&(a_{1,1}e_1 + a_{2,1}e_2 + a_{3,1}e_3) \wedge (a_{1,2}e_1 + a_{2,2}e_2 + a_{3,2}e_3) \\
=&a_{1,1}a_{1,2}e_1 \wedge e_1 + a_{1,1}a_{2,2}e_1 \wedge e_2 + a_{1,1}a_{3,2}e_1 \wedge e_3 \\
&+ a_{2,1}a_{1,2}e_2 \wedge e_1 + a_{2,1}a_{2,2}e_2 \wedge e_2 + a_{2,1}a_{3,2}e_2 \wedge e_3 \\
&+ a_{3,1}a_{1,2}e_3 \wedge e_1 + a_{3,1}a_{2,2}e_3 \wedge e_2 + a_{3,1}a_{3,2}e_3 \wedge e_3
\end{aligned}
$$

用爱因斯坦求和约定重写上面的式子就会非常简洁

$$(a_{i,1}e_i) \wedge (a_{j,2}e_j) = a_{i,1}a_{j,2}e_i \wedge e_j$$

从上面的式子中能够清楚的看出来上面式子的右端有 9 项，因为 (i, j) 的排列共有 9 种.

爱因斯坦求和约定 III

如果不使用爱因斯坦求和约定,

$$
\begin{aligned}
&(a_{1,1}e_1 + a_{2,1}e_2 + a_{3,1}e_3) \wedge (a_{1,2}e_1 + a_{2,2}e_2 + a_{3,2}e_3) \\
&\wedge (a_{1,3}e_1 + a_{2,3}e_2 + a_{3,3}e_3) \\
=&[a_{1,1}a_{1,2}e_1 \wedge e_1 + a_{1,1}a_{2,2}e_1 \wedge e_2 + a_{1,1}a_{3,2}e_1 \wedge e_3 \\
&+ a_{2,1}a_{1,2}e_2 \wedge e_1 + a_{2,1}a_{2,2}e_2 \wedge e_2 + a_{2,1}a_{3,2}e_2 \wedge e_3 \\
&+a_{3,1}a_{1,2}e_3 \wedge e_1 + a_{3,1}a_{2,2}e_3 \wedge e_2 + a_{3,1}a_{3,2}e_3 \wedge e_3] \\
&\wedge (a_{1,3}e_1 + a_{2,3}e_2 + a_{3,3}e_3) \\
=&a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}e_1 \wedge e_1 \wedge e_1 + a_{1,1}a_{1,2}a_{2,3}e_1 \wedge e_1 \wedge e_2 \\
&+ a_{1,1}a_{1,2}a_{3,3}e_1 \wedge e_1 \wedge e_3 + a_{1,1}a_{2,2}a_{1,3}e_1 \wedge e_2 \wedge e_1 \\
&+ a_{1,1}a_{2,2}a_{2,3}e_1 \wedge e_2 \wedge e_2 + a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \\
&+ \cdots \text{还有 } 18 \text{ 项}
\end{aligned}
$$

使用爱因斯坦求和约定, 那么我们可以得到把上面的长长的式子写成

$$(a_{i,1}e_i) \wedge (a_{j,1}e_j) \wedge (a_{k,2}e_k) = a_{i,1}a_{j,2}a_{k,3}e_i \wedge e_j \wedge e_k$$

重复的指标表示求和, 求和的范围是 $\{1,2,3\}$, 我们是不是很容易观察出上面式子的右端有 3^3 项.

3×3 矩阵的行列式

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= \frac{(Te_1) \wedge (Te_2) \wedge (Te_3)}{e_1 \wedge e_2 \wedge e_3} \\ &= \frac{a_{i,1} a_{j,2} a_{k,3} e_i \wedge e_j \wedge e_k}{e_1 \wedge e_2 \wedge e_3} \end{aligned}$$

wedge product 的性质

$$e_i \wedge e_j \wedge e_k = 0, \text{ 如果 } i, j, k \text{ 中有两个或者两个以上相同}$$

使用上面的性质，我们知道 (i, j, k) 取值两两不同的取法共有 3! 种 (回忆高中学习的排列综合的知识)，也就是说我们知道

$$\frac{a_{i,1} a_{j,2} a_{k,3} e_i \wedge e_j \wedge e_i}{e_1 \wedge e_2 \wedge e_3} = \sum_{i,j,k\text{两两不同}} a_{i,1} a_{j,2} a_{k,3} \frac{e_i \wedge e_j \wedge e_k}{e_1 \wedge e_2 \wedge e_3}$$

下面我们来研究一下 $\frac{e_i \wedge e_j \wedge e_k}{e_1 \wedge e_2 \wedge e_3}$ 到底等于多少.

我们利用的就是 wedge product 的反对称性，也就是交换变号.

$$
\begin{aligned}
e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 &= (-1)^0 e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \\
e_1 \wedge e_3 \wedge e_2 &= (-1)^1 e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \\
e_2 \wedge e_1 \wedge e_3 &= (-1)^1 e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \\
e_2 \wedge e_3 \wedge e_1 &= (-1)^1 e_2 \wedge e_1 \wedge e_3 = (-1)^2 e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \\
e_3 \wedge e_1 \wedge e_2 &= (-1)^1 e_1 \wedge e_3 \wedge e_2 = (-1)^2 e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \\
e_3 \wedge e_2 \wedge e_1 &= (-1)^1 e_2 \wedge e_3 \wedge e_1 = (-1)^2 e_2 \wedge e_1 \wedge e_3 \\
&= (-1)^3 e_1 \wedge e_2 \wedge e_3
\end{aligned}
$$

我们引入 $\{1,2,3\}$ 的所有的排列 (permutation) 构成的集合，

$$\mathrm{perm}_3 = \{(i,j,k) : i,j,k \in \{1,2,3\} \text{ 且 } i,j,k \text{ 两两不同}\}$$

用 $\mathrm{sign}(i,j,k)$ 表示把 $(i,j,k) \in \mathrm{perm}_3$ 通过一系列交换变成 $(1,2,3)$ 需要的次数，那么

$$e_i \wedge e_j \wedge e_k = (-1)^{\mathrm{sign}(i,j,k)} e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$$

行列式

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

的行列式

$$\det(A) = \sum_{(i,j,k)\in \mathrm{perm}_3} (-1)^{\mathrm{sign}(i,j,k)} a_{i,1} a_{j,2} a_{k,3}$$

或者具体写出来

$$\begin{aligned} \det(A) = {} & a_{1,1} a_{1,2} a_{1,3} + a_{2,1} a_{3,2} a_{1,3} + a_{3,1} a_{2,1} a_{3,2} \\ & - a_{3,1} a_{2,2} a_{1,3} - a_{2,1} a_{1,2} a_{3,3} - a_{1,1} a_{3,2} a_{2,3} \end{aligned}$$

但紧凑的形似更利于推广到 $n \times n$ 的矩阵

$n \times n$ 矩阵的行列式

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

的行列式

$$\det(A) = \sum_{(j_1,\cdots,j_n)\in \mathrm{perm}_n} (-1)^{\mathrm{sign}(j_1,\cdots,j_n)} a_{j_1,1} \cdots a_{j_n,n}$$

我们可以想象, 我们是通过看 $(e_1, \cdots, e_n)$ 组成的平行 n 变边形的有向体积放大的倍数来得到行列式的

$$\det(A) = \frac{(Te_1) \wedge \cdots \wedge (Te_n)}{e_1 \wedge \cdots \wedge e_n}$$

展开写成

$$\det(A) = \frac{a_{i_1,1} \cdots a_{i_n} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n}}{e_1 \wedge \cdots \wedge e_n}$$

使用了爱因斯坦求和约定.

算子的行列式和矩阵的行列式

设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, A 的 (i,j) 元记作 $a_{i,j}$, 则 A 的行列式定义为

$$\det(A) = (-1)^{\mathrm{sign}(j_1,\cdots,j_n)} a_{j_1,1}\cdots a_{j_n,n}. \tag{1}$$

我们将证明: 算子 $T \in \mathcal{L}(V)$ 的行列式等于它的矩阵的行列式, 这不依赖于基的选取.

定理

两个矩阵乘积的行列式等于它们行列式的乘积.

Example 4

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \\ 3 & 5 & \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & \\ 4 & 9 & \end{bmatrix}$$

矩阵乘积的行列式

Example 4

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$$

$$e_1 = (1, 0), \quad e_2 = (0, 1)$$

Example 4

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$$

$$e_1 = (1,0), \quad e_2 = (0,1)$$

$$Be_1 = e_1 + 3e_2, \quad Be_2 = 2e_1 + 5e_2$$

矩阵乘积的行列式

Example 4

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$$

$$e_1 = (1,0), \quad e_2 = (0,1)$$

$$Be_1 = e_1 + 3e_2, \quad Be_2 = 2e_1 + 5e_2$$

$$\det(B) = \frac{(Be_1) \wedge (Be_2)}{e_1 \wedge e_2}$$

Example 4

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$$

$$e_1 = (1,0), \quad e_2 = (0,1)$$

$$Be_1 = e_1 + 3e_2, \quad Be_2 = 2e_1 + 5e_2$$

$$\det(B) = \frac{(Be_1) \wedge (Be_2)}{e_1 \wedge e_2}$$

$$\det(AB) = \frac{(ABe_1) \wedge (ABe_2)}{e_1 \wedge e_2}$$

继续上一页

$$ABe_{1} = A\left(B_{1,1}\,e_1 + B_{2,1}\,e_2\right)$$

继续上一页

$$\begin{aligned} ABe_{1} &= A\left(B_{1,1}e_{1} + B_{2,1}e_{2}\right) \\ &= B_{1,1}Ae_{1} + B_{2,1}Ae_{2} \end{aligned}$$

继续上一页

$$ABe_1 = A\left(B_{1,1}e_1 + B_{2,1}e_2\right)$$

$$= B_{1,1}Ae_1 + B_{2,1}Ae_2$$

同样的操作，我们有

$$ABe_2 = A\left(B_{1,2}e_1 + B_{2,2}e_2\right) = B_{1,2}Ae_1 + B_{2,2}Ae_2$$

继续上一页

$$ABe_{1} = A\left(B_{1,1}e_1 + B_{2,1}e_2\right)$$

$$= B_{1,1}Ae_1 + B_{2,1}Ae_2$$

同样的操作，我们有

$$ABe_{2} = A\left(B_{1,2}e_1 + B_{2,2}e_2\right) = B_{1,2}Ae_1 + B_{2,2}Ae_2$$

$$\det(AB) = \frac{(B_{1,1}Ae_1 + B_{2,1}Ae_2) \wedge (B_{1,2}Ae_1 + B_{2,2}Ae_2)}{e_1 \wedge e_2} \tag{2}$$

继续上一页

$$ABe_1 = A\left(B_{1,1}e_1 + B_{2,1}e_2\right)$$

$$= B_{1,1}Ae_1 + B_{2,1}Ae_2$$

同样的操作，我们有

$$ABe_2 = A\left(B_{1,2}e_1 + B_{2,2}e_2\right) = B_{1,2}Ae_1 + B_{2,2}Ae_2$$

$$\det(AB) = \frac{\left(B_{1,1}Ae_1 + B_{2,1}Ae_2\right) \wedge \left(B_{1,2}Ae_1 + B_{2,2}Ae_2\right)}{e_1 \wedge e_2} \tag{2}$$

和 B 的行列式类比

$$\det(B) = \frac{\left(B_{1,1}e_1 + B_{2,1}e_2\right) \wedge \left(B_{1,2}e_1 + B_{2,2}e_2\right)}{e_1 \wedge e_2} = \frac{\det(B)e_1 \wedge e_2}{e_1 \wedge e_2}$$

我们可得

$$\frac{\left(B_{1,1}Ae_1 + B_{2,1}Ae_2\right) \wedge \left(B_{1,2}Ae_1 + B_{2,2}Ae_2\right)}{e_1 \wedge e_2} = \frac{\det(B)(Ae_1) \wedge (Ae_2)}{e_1 \wedge e_2} \tag{3}$$

接上一页

从 (2)和(3), 我们可以得到

$$\det(AB) = \det(B) = \frac{(Ae_1) \wedge (Ae_2)}{e_1 \wedge e_2} = \det(B)\det(A)$$

类似的，我们可以得到

$$\det(BA) = \det(A)\det(B)$$

上面两个式子就给出结论

$$\det(AB) = \det(BA)$$

证明

上面 2×2 的矩阵的证明可以推广到任意阶的矩阵

$$A = [a_{i,j}], \quad B = [b_{i,j}]$$

$$\det(AB) = \frac{(ABe_1) \wedge \cdots \wedge (ABe_n)}{e_1 \wedge \cdots e_n} \tag{4}$$

证明

上面 2×2 的矩阵的证明可以推广到任意阶的矩阵

$$A = [a_{i,j}], \quad B = [b_{i,j}]$$

$$\det(AB) = \frac{(ABe_1) \wedge \cdots \wedge (ABe_n)}{e_1 \wedge \cdots e_n} \tag{4}$$

$$= \frac{(A \sum_{j_1} B_{j_1,1} e_{j_1}) \wedge \cdots \wedge (A \sum_{j_n} B_{j_n,1} e_{j_n})}{e_1 \wedge \cdots e_n} \tag{5}$$

证明

上面 2×2 的矩阵的证明可以推广到任意阶的矩阵

$$A = [a_{i,j}], \quad B = [b_{i,j}]$$

$$\det(AB) = \frac{(ABe_1) \wedge \cdots \wedge (ABe_n)}{e_1 \wedge \cdots e_n} \tag{4}$$

$$= \frac{(A\sum_{j_1} B_{j_1,1} e_{j_1}) \wedge \cdots \wedge (A\sum_{j_n} B_{j_n,1} e_{j_n})}{e_1 \wedge \cdots e_n} \tag{5}$$

$$= \frac{(\sum_{j_1} B_{j_1,1} A e_{j_1}) \wedge \cdots \wedge (\sum_{j_n} B_{j_n,1} A e_{j_n})}{e_1 \wedge \cdots e_n} \tag{6}$$

证明

上面 2×2 的矩阵的证明可以推广到任意阶的矩阵

$$A=[a_{i,j}],\quad B=[b_{i,j}]$$

$$\det(AB)=\frac{(ABe_1)\wedge\cdots\wedge(ABe_n)}{e_1\wedge\cdots e_n} \tag{4}$$

$$=\frac{(A\sum_{j_1}B_{j_1,1}e_{j_1})\wedge\cdots\wedge(A\sum_{j_n}B_{j_n,1}e_{j_n})}{e_1\wedge\cdots e_n} \tag{5}$$

$$=\frac{(\sum_{j_1}B_{j_1,1}Ae_{j_1})\wedge\cdots\wedge(\sum_{j_n}B_{j_n,1}Ae_{j_n})}{e_1\wedge\cdots e_n} \tag{6}$$

$$=\det(B)\frac{(Ae_1)\wedge\cdots\wedge(Ae_n)}{e_1\wedge\cdots e_n}=\det(B)\det(A) \tag{7}$$

这样就完成了对任意阶的矩阵 A 和 B 都有

$$\det(AB)=\det(BA)$$

矩阵行列式的性质

Theorem 5

设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. 则 $\det(A) = \det(A^T)$, 其中 A^T 表示的 A 的转置。

Proof.

设 $(e_1, \cdots, e_n)$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的标准基. 把 A 看成一个算子 T 的矩阵 $\mathcal{M}(T, (e_1, \cdots, e_n))$,

$$Te_j = \sum_j A_{i,j} e_i$$

$\mathcal{M}(T^*, (e_1, \cdots, e_n)) = A^*$ T^* 和 T 的关系是互为共轭 (重数也相同)，因此

$$\det(T^*) = \overline{\det(T)} \tag{8}$$

A^T 和 A^* 的关系是

$$A^T_{i,j} = \overline{A^*_{i,j}}$$

□

继续证明

Proof.

Recalling the definition of the formula of the determinant for a matrix $C = [C_{i,j}]$

$$\det(C) = \sum_{i_1,\cdots,i_n} (-1)^{\mathrm{sign}(i_1,\cdots,i_n)} C_{i_1,1} \cdots C_{i_n,n},$$

We have

$$\det(A^T) = \overline{\det(A^*)}. \tag{9}$$

(8)和(9)放在一起就给出了我们想要证明结论

$$\det(A) = \det(A^T).$$

□

把矩阵的两列互换，行列式会如何变?

设 $A \in \mathbb{C}^3$. 还是把 A 看成算子 T 在标准基下的矩阵,

$$Te_1 = A_{1,1}e_1 + A_{2,1}e_2 + A_{3,1}e_3$$

$$Te_2 = A_{1,2}e_1 + A_{2,2}e_2 + A_{3,2}e_3$$

$$Te_3 = A_{1,3}e_1 + A_{2,3}e_2 + A_{3,3}e_3$$

$$\det(A) = \frac{Te_1 \wedge Te_2 \wedge Te_3}{e_1 \wedge e_2 \wedge e_3}$$

把 T 稍微改变一点，得到一个新算子 S

$$Se_1 = Te_1 = A_{1,1}e_1 + A_{2,1}e_2 + A_{3,1}e_3$$

$$Se_2 = Te_3 = A_{1,3}e_1 + A_{2,3}e_2 + A_{3,3}e_3$$

$$Se_3 = Te_2 = A_{1,2}e_1 + A_{2,2}e_2 + A_{3,2}e_3$$

继续

S 关于基 (e_1, e_2, e_3) 的矩阵是

$$B = \mathcal{M}\left(S, (e_1, e_2, e_3)\right) = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,3} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,3} & A_{2,2} \\ A_{3,1} & A_{3,3} & A_{3,2} \end{bmatrix}$$

B 就是把 A 的 2,3 列互换得到的矩阵。

$$\det(B) = \frac{Se_1 \wedge Se_2 \wedge Se_3}{e_1 \wedge e_2 \wedge e_3}$$

S 关于基 (e_1, e_2, e_3) 的矩阵是

$$B = \mathcal{M}(S, (e_1, e_2, e_3)) = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,3} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,3} & A_{2,2} \\ A_{3,1} & A_{3,3} & A_{3,2} \end{bmatrix}$$

B 就是把 A 的 2,3 列互换得到的矩阵。

$$\det(B) = \frac{Se_1 \wedge Se_2 \wedge Se_3}{e_1 \wedge e_2 \wedge e_3}$$

$$= \frac{Te_1 \wedge Te_3 \wedge Te_2}{e_1 \wedge e_2 \wedge e_3}$$

继续

S 关于基 (e_1, e_2, e_3) 的矩阵是

$$B = \mathcal{M}\left(S, (e_1, e_2, e_3)\right) = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,3} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,3} & A_{2,2} \\ A_{3,1} & A_{3,3} & A_{3,2} \end{bmatrix}$$

B 就是把 A 的 2,3 列互换得到的矩阵。

$$\det(B) = \frac{Se_1 \wedge Se_2 \wedge Se_3}{e_1 \wedge e_2 \wedge e_3}$$

$$= \frac{Te_1 \wedge Te_3 \wedge Te_2}{e_1 \wedge e_2 \wedge e_3}$$

$$= -\frac{Te_1 \wedge Te_2 \wedge Te_3}{e_1 \wedge e_2 \wedge e_3} = \det(A)$$

于是我们就证明了，两列互换的矩阵的行列式护卫相反数。

刚才我们只是把 2,3 列互换, 一般情况下，

$$Te_1 \wedge Te_3 \wedge Te_2 \cdots Te_i \cdots Te_j \cdots , Te_n = -Te_1 \wedge Te_3 \wedge Te_2 \cdots Te_j \cdots Te_i \cdots , Te_n$$

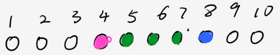
i 和 j 互换，多一个负号 (需要证明)。

我们根据两个相邻的交换，相差一个负号，可以证明，i,j 即使不相邻，那么一定要通过奇数次的相邻交换才能实现二者互换。

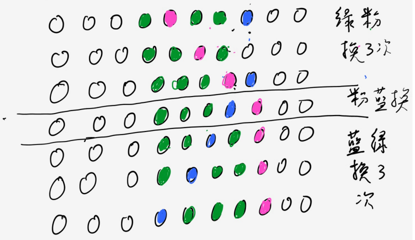
举例证明两列互换，需要做的相邻交换的次数是奇数次

举例看下一页的图片。例如 i 和 j 之间隔着 3 个元素，那么 i 一定要想互换 3 次，才来到仅挨着 j 的的左侧位置，这时候，让 j 移动，j 首先向左与 i 互换 1 次，然后还要把 i 互换过的那 3 个元素挨着互换一便才来到 i 的位置。
这样 i 和 j 实现交换需要做的相邻交换的次数为

$$2 \times \underbrace{3}_{i\text{ 和 }j\text{ 之间的元素}} + \underbrace{1}_{i\text{ 和 }j\text{ 相邻后互换的一次}}$$



粉蓝要互换



实现粉(4号)和蓝(8号)互换

需要做 $2\times3+1=7$ 次 相邻互换

两行互换呢，行列式有什么变化?

还是差一个负号。利用刚才的结论和 $\det(A) = \det(A^T)$.

如果第 i 列加上第 j 列 $(i \neq j)$, 行列式会有什么变化

A 和算子 T 对应, B 和算子 S 对应

$$Se_i = Te_i + Te_j$$

$$\det(B) = \frac{Se_1 \wedge \cdots \wedge Se_n}{e_1 \wedge \cdots \wedge e_n}$$

如果第 i 列加上第 j 列 $(i \neq j)$, 行列式会有什么变化

A 和算子 T 对应, B 和算子 S 对应

$$Se_i = Te_i + Te_j$$

$$\det(B) = \frac{Se_1 \wedge \cdots \wedge Se_n}{e_1 \wedge \cdots \wedge e_n}$$

$$\det(B) = \frac{Te_1 \wedge \cdots (Te_i + Te_j) \wedge \cdots \wedge Te_j \cdots \wedge Se_n}{e_1 \wedge \cdots \wedge e_n}$$

如果第 i 列加上第 j 列 $(i \neq j)$, 行列式会有什么变化

A 和算子 T 对应, B 和算子 S 对应

$$Se_i = Te_i + Te_j$$

$$\det(B) = \frac{Se_1 \wedge \cdots \wedge Se_n}{e_1 \wedge \cdots \wedge e_n}$$

$$\det(B) = \frac{Te_1 \wedge \cdots (Te_i + Te_j) \wedge \cdots \wedge Te_j \cdots \wedge Se_n}{e_1 \wedge \cdots \wedge e_n}$$

$$\det(B) = \frac{Te_1 \wedge \cdots Te_i \wedge \cdots \wedge Te_j \cdots \wedge Se_n}{e_1 \wedge \cdots \wedge e_n} + \frac{Te_1 \wedge \cdots Te_j \wedge \cdots \wedge Te_j \cdots \wedge Se_n}{e_1 \wedge \cdots \wedge e_n}$$

上式右边的第二项是 0，因此，行列式是不变的。