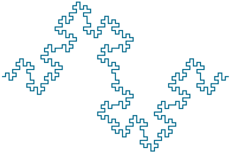
线性代数 B：线性映射的矩阵

Tiao Lu
Peking University



October 18, 2019

线性映射的矩阵

§3.3 线性映射的矩阵

回想上一节学习的线性方程组和构造的相应的相应的映射

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$e_1 = (1, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n$

映射 $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $\qquad$ $\mathbb{R}^n$ 的标准基 $e_1, \cdots, e_n$

$(x_1, \cdots, x_n) \mapsto \left(\sum_{i=1}^{n} a_{1i}x_i, \cdots, \sum_{i=1}^{m} a_{mi}x_i\right)$ $\mathbb{R}^m$ 的标准基 $f_1, \cdots, f_m$

映射 T 可由 a_{ij} 共 mn 个数来表示.

$f_1 = (1, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^m$

矩阵（线性方程组的矩阵）

线性方程组的系数 a_{ij} $i=1,\cdots,m,\ j=1,\cdots,n$

可以排成下面的长方形阵列

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

这就是一个矩阵（matrix）

矩阵（线性映射的矩阵）

$$T: F^n \longrightarrow F^m$$

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \longmapsto (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n, \cdots, a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

矩阵（线性映射的矩阵）

$$T: F^n \longrightarrow F^m$$

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \longmapsto (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n, \cdots, a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n)$$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$Te_1 = T(1, 0, \cdots, 0) = (a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{m1})$$

矩阵（线性映射的矩阵）

$$T: F^n \longrightarrow F^m$$

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \longmapsto (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n, \cdots, a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n)$$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$Te_1 = T(1, 0, \cdots, 0) = (a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{m1})$$

矩阵（线性映射的矩阵）

$$T: F^n \longrightarrow F^m$$

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \longmapsto (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n, \ \cdots, \ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n)$$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n$

$$\begin{array}{c} e_1 \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$T e_1 = T(1, 0, \cdots, 0) = (a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{m1})$$

矩阵（线性映射的矩阵）

$T: F^n \longrightarrow F^m$

$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \longmapsto (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n, \cdots, a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n)$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n$

$$\begin{array}{c} e_1 \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

$T e_1 = T(1, 0, \cdots, 0) = (a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{m1}) = a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + \cdots + a_{m1}f_m$

矩阵（线性映射的矩阵）

$$T:\ F^n \longrightarrow F^m$$

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \longmapsto (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n,\ \cdots,\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n)$$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n$

$$\begin{array}{c} \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1 & & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$Te_1 = T(1, 0, \cdots, 0) = (a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{m1}) = a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + \cdots + a_{m1}f_m$$

矩阵（线性映射的矩阵）

$$T:\ F^n \longrightarrow F^m$$

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \longmapsto (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n,\ \cdots,\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n)$$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n$

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} e_1 & & & \end{array} \\
\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}
\end{array}$$

$$Te_1 = T(1, 0, \cdots, 0) = (a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{m1}) = a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + \cdots + a_{m1}f_m$$

这意味着矩阵的第1列是映射T作用在F^n的第1个基e_1上得到Te_1用F^m的基$(f_1, \cdots, f_m)$展开的系数.

domain

codomain

矩阵（线性映射的矩阵）

$$T: F^n \longrightarrow F^m$$

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \longmapsto (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n, \cdots, a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n)$$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & & \end{array} \\ \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$Te_1 = T(1, 0, \cdots, 0) = (a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{m1}) = a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + \cdots + a_{m1}f_m$$

you check $Te_2 = T(0, 1, \cdots, 0) = (a_{12}, a_{22}, \cdots, a_{m2}) = a_{12}f_1 + a_{22}f_2 + \cdots + a_{m2}f_m$

矩阵（线性映射的矩阵）

$$T: F^n \longrightarrow F^m$$

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \longmapsto (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n, \cdots, a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n)$$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & & e_n \end{array} \\ \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$Te_1 = T(1, 0, \cdots, 0) = (a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{m1}) = a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + \cdots + a_{m1}f_m$$

you check $Te_2 = T(0, 1, \cdots, 0) = (a_{12}, a_{22}, \cdots, a_{m2}) = a_{12}f_1 + a_{22}f_2 + \cdots + a_{m2}f_m$

最后 第n列是Te_n在codomain的基$(f_1, \cdots, f_n)$下的展开系数.

线性映射的矩阵

我们刚才讨论的是从线性方程组导出的映射，

$T: F^n \to F^m$

我们在选定了 domain 和 codomain 的基之后，就把映射用一个矩阵来表示了，这个矩阵称为线性映射的矩阵（precisely，还要把 domain 和 codomain 用的基点出来）.

线性映射的矩阵

我们刚才讨论的是从线性方程组产出的映射，

$T: F^n \to F^m$

我们在选定了 domain 和 codomain 的基之后，就把映射用一个矩阵来表示了。这个矩阵称为线性映射的矩阵（precisely，还要把 domain 和 codomain 用的基点出来）。

把线性映射用一个矩阵表示的方法可以推广到一般的 $T \in \mathcal{L}(V, W)$，其中 V 和 W 是 F 上的向量空间

$T \in \mathcal{L}(V,W)$ 的矩阵

设 $(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ 是 V 的一个基，$(f_1,\cdots,f_m)$ 是 W 的一个基，$T \in \mathcal{L}(V,W)$。那么存在 $a_{ij} \in F$，$i=1,\cdots,m$，$j=1,\cdots,n$ 使得

$$Te_1 = a_{11} f_1 + a_{21} f_2 + \cdots + a_{m1} f_m$$
$$Te_2 = a_{12} f_1 + a_{22} f_2 + \cdots + a_{m2} f_m$$
$$\vdots$$
$$Te_n = a_{1n} f_1 + a_{2n} f_n + \cdots + a_{mn} f_m$$

称 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ 是线性映射 T 关于基 $(e_1,\cdots,e_n)$ 和基 $(f_1,\cdots,f_n)$ 的矩阵，记为 $\mathcal{M}(T,(e_1,\cdots,e_n),(f_1,\cdots,f_n))$

如果所使用的基是自明的，可以省略后写成 $\mathcal{M}(T)$

这里$(e_1, e_2, \cdots, e_n)$不是$\mathbb{R}^n$的标准基，只是用了相同的记号
它是V的一个基，而V可能是任意的向量空间，如$P_{n-1}(F)$

$T \in \mathcal{L}(V, W)$ 的矩阵

设 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 是 V 的一个基，$(f_1, \cdots, f_m)$ 是 W 的一个基，$T \in \mathcal{L}(V, W)$. 那么存在 $a_{ij} \in F$, $i = 1, \cdots, m$, $j = 1, \cdots, n$ 使得

$$
\begin{aligned}
Te_1 &= a_{11} f_1 + a_{21} f_2 + \cdots + a_{m1} f_m \\
Te_2 &= a_{12} f_1 + a_{22} f_2 + \cdots + a_{m2} f_m \\
&\vdots \\
Te_n &= a_{1n} f_1 + a_{2n} f_n + \cdots + a_{mn} f_m
\end{aligned}
$$

称 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ 是线性映射 T 关于基 $(e_1, \cdots, e_n)$ 和基 $(f_1, \cdots, f_n)$ 的矩阵，记为 $M(T, (e_1, \cdots, e_n), (f_1, \cdots, f_n))$

如果所使用的基是自明的，可以省略后写成 $M(T)$

线性映射的矩阵举例

例. $T \in \mathcal{L}(F^2, F^3)$ 定义如下

$$T(x,y) = (x+3y,\ 2x+5y,\ 7x-9y)$$

F^2 和 F^3 的基分别取 $e_1 = (1,0),\ e_2 = (0,1)$ 标准基.

和 $f_1 = (1,0,0),\ f_2 = (0,1,0),\ f_3 = (0,0,1)$

$$\mathcal{M}(T;(e_1,e_2),(f_1,f_2,f_3)) =$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} e_1 & \quad e_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & \quad \\ 2 & \quad \\ 7 & \quad \end{bmatrix} \end{array}$$

线性映射的矩阵举例

例. $T \in \mathcal{L}(F^2, F^3)$ 定义如下

$$T(x, y) = (x+3y,\ 2x+5y,\ 7x-9y)$$

F^2 和 F^3 的基分别取 $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ 标准基

和 $f_1 = (1,0,0)$, $f_2 = (0,1,0)$, $f_3 = (0,0,1)$

$\mathcal{M}(T; (e_1, e_2), (f_1, f_2, f_3)) =$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} e_1 & e_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{array} & \begin{bmatrix} \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 7 \end{array}} & \\ & \\ & \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\boxed{Te_1 = T(1,0) = (1, 2, 7) = \boxed{1} f_1 + \boxed{2} f_2 + \boxed{7} f_3}$$

线性映射的矩阵举例

例. $T \in \mathcal{L}(F^2, F^3)$ 定义如下

$$T(x,y) = (x+3y,\ 2x+5y,\ 7x-9y)$$

F^2 和 F^3 的基分别取 $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ 标准基.

和 $f_1 = (1,0,0)$, $f_2 = (0,1,0)$, $f_3 = (0,0,1)$

$$\mathcal{M}(T; (e_1, e_2), (f_1, f_2, f_3)) =$$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} e_1 & e_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\boxed{Te_1 = T(1,0) = (1, 2, 7) = \boxed{1} f_1 + \boxed{2} f_2 + \boxed{7} f_3}$$

$$Te_2 = T(0,1) = (3,5,9) = 3f_1 + 5f_2 + 9f_3$$

线性映射的矩阵举例

设 T 是 $P_2(\mathbb{R})$ 到 $P_2(\mathbb{R})$ 的求导算子.

取 $P_2(\mathbb{R})$ 的基为 $e_1 = 1$, $e_2 = x$, $e_3 = x^2$

这里 domain 和 codomain 取同一个基

表示 $\mathbb{R}$ 中的数 0

$$Te_1 = \frac{d}{dx} 1 = 0 = 0e_1 + 0e_2 + 0e_3$$

表示 $P_2(\mathbb{R})$ 中的 0 多项式

$$\begin{array}{cc} & e_1 \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & & \\ 0 & & \\ 0 & & \end{bmatrix} \end{array}$$

线性映射的矩阵举例

设 T 是 $P_2(\mathbb{R})$ 到 $P_2(\mathbb{R})$ 的求导算子.

取 $P_2(\mathbb{R})$ 的基为 $e_1 = 1$, $e_2 = x$, $e_3 = x^2$

这里 domain 和 codomain 取同一个基

表示 $\mathbb{R}$ 中的数 0

$$Te_1 = \frac{d}{dx} 1 = 0 = 0e_1 + 0e_2 + 0e_3$$

表示 $P_2(\mathbb{R})$ 中的 0 多项式

$$\begin{array}{c|ccc} & e_1 & e_2 & e_3 \\ \hline e_1 & & & \\ e_2 & & & \\ e_3 & & & \end{array}
\quad
\begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}
\begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

$$Te_2 = \frac{d}{dx} x = 1 = 1e_1 + 0e_2 + 0e_3$$

线性映射的矩阵举例

设 T 是 $P_2(\mathbb{R})$ 到 $P_2(\mathbb{R})$ 的求导算子.

取 $P_2(\mathbb{R})$ 的基为 $e_1 = 1,\ e_2 = x,\ e_3 = x^2$

这里 domain 和 codomain 取同一个基

表示 $\mathbb{R}$ 中的数 0

$$Te_1 = \frac{d}{dx} 1 = 0 = 0e_1 + 0e_2 + 0e_3$$

表示 $P_2(\mathbb{R})$ 中的 0 函数

domain 的 basis

$$\begin{array}{c|ccc} & e_1 & e_2 & e_3 \\ \hline e_1 & & & \\ e_2 & & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \\ e_3 & & & \end{array}$$

$$Te_2 = \frac{d}{dx} x = 1 = 1e_1 + 0e_2 + 0e_3$$

$$Te_3 = \frac{d}{dx} x^2 = 2x = 0e_1 + 2e_2 + 0e_3$$

codomain 的 basis

线性映射的矩阵举例

设 T 是 $P_2(\mathbb{R})$ 到 $P_2(\mathbb{R})$ 的求导算子.

取 $P_2(\mathbb{R})$ 的基为 $e_1 = 1$, $e_2 = x$, $e_3 = x^2$

这里 domain 和 codomain 取同一个基

表示 $\mathbb{R}$ 中的数 0

$$Te_1 = \frac{d}{dx} 1 = 0 = 0e_1 + 0e_2 + 0e_3$$

表示 $P_2(\mathbb{R})$ 中的 0 多项式

domain 的 basis

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$Te_2 = \frac{d}{dx} x = 1 = 1e_1 + 0e_2 + 0e_3$$

$$Te_3 = \frac{d}{dx} x^2 = 2x = 0e_1 + 2e_2 + 0e_3$$

codomain 的 basis

$$\mathcal{M}(T; (e_1, e_2, e_3), (e_1, e_2, e_3)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

线性映射和的矩阵

下面我们总假设 $(v_1, \cdots, v_n)$ 是 V 的一个基.

$(f_1, \cdots, f_m)$ 是 W 的一个基.

$\mathcal{L}(V,W)$ 中的映射的矩阵总是关于基 $(e_1, \cdots, e_n)$ 和基 $(f_1, \cdots, f_n)$ 的.

$S \in \mathcal{L}(V,W)$, $M(S) = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\cdots,m \\ j=1,\cdots,n}}$

$T \in \mathcal{L}(V,W)$, $M(T) = [b_{ij}]_{\substack{i=1,\cdots,m \\ j=1,\cdots,n}}$.

和映射 $S+T$ 的矩阵是什么?

和映射的矩阵

回顾映射矩阵的定义.

$$\mathcal{M}(S) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$Se_1 = a_{11}f_1 + \cdots + a_{m1}f_m$$

和映射的矩阵

回顾映射矩阵的定义

$$M(S) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$Se_1 = a_{11}f_1 + \cdots + a_{m1}f_m$$

第一列是 Se_1 在基 $(f_1, \cdots, f_m)$ 下的展开系数.

和映射的矩阵

回顾 映射矩阵的定义

$$M(S) = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{matrix}} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$Se_1 = \underline{a_{11}} f_1 + \cdots + \underline{a_{m1}} f_m$$

第一列是 Se_1 在基 $(f_1, \cdots, f_m)$ 下的展开系数

$$M(T) = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

第一列是 Te_1 在基 $(f_1, \cdots, f_m)$ 下的展开系数

和映射 $(S+T)$ 的矩阵的第1列由 $(S+T)e_1$ 在 $(f_1, \cdots, f_m)$ 下的展开系数给出

$$(S+T)e_1 \overset{\text{由和映射的定义}}{=\!=} Se_1 + Te_1 = (a_{11} f_1 + \cdots + a_{m1} f_m) + (b_{11} f_1 + \cdots + b_{m1} f_m)$$

$$\overset{\text{由W中的交换律、结合律、分配律}}{=\!=} (a_{11} + b_{11}) f_1 + \cdots (a_{m1} + b_{m1}) f_m$$

故 $M(S+T)$ 的第一列是 $\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} \\ a_{21}+b_{21} \\ \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} \end{bmatrix}$

和映射的矩阵

$$\mathcal{M}(S+T) = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} \\ a_{21}+b_{21} \\ \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} \end{bmatrix}$$

和映射的矩阵

$$\mathcal{M}(S+T) = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} \end{bmatrix}$$

和映射的矩阵

$$M(S+T) = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

这就是 $M(S)$ 和 $M(T)$ 对应的元素相加所得的新矩阵

和映射的矩阵

$$M(S+T) = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

这就是 $M(S)$ 和 $M(T)$ 对应的元素相加所得的新矩阵

因此，我们定义矩阵的加法：两个大小一样的矩阵的和是把相应的元素相加得到的新矩阵.

和映射的矩阵 $M(S+T)=M(S)+M(T)$

$$M(S+T)=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

这就是 $M(S)$ 和 $M(T)$ 对应的元素相加所得的新矩阵

因此，我们定义矩阵的加法：两个大小一样的矩阵的和是把相应的元素相加得到的新矩阵

综上，我们得到．和映射的矩阵等于映射矩阵的和!

映射与数乘的矩阵

$T \in \mathcal{L}(V, W)$, $\mathcal{M}(T) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

$\forall k \in F$ $\quad kT \in \mathcal{L}(V, W)$. $\quad \mathcal{M}(kT) = ?$

映射的数乘的矩阵

$T \in \mathcal{L}(V,W)$, $\mathcal{M}(T) = \begin{array}{c} \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{matrix}} & \begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{matrix} & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \\ \ddots \\ \cdots \end{matrix} & \begin{matrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{matrix} \end{bmatrix} \end{array}$

$\forall k \in F$ $kT \in \mathcal{L}(V,W)$. $\mathcal{M}(kT) = ?$

$\mathcal{M}(kT)$的第一列由 $(kT)e_1$ 在 W的基 $(f_1, \cdots, f_m)$ 下的展开系数给出.

$$(kT)e_1 = k(Te_1) = k\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1} f_i\right)$$

由映射的矩阵的定义给出

由映射的数乘定义得

$$= (ka_{11})f_1 + \cdots + (ka_{m1})f_m.$$

映射的数乘的矩阵

$M(kT)$ 的第一列是 $\begin{bmatrix} ka_{11} \\ ka_{21} \\ \vdots \\ ka_{m1} \end{bmatrix}$

映射的数乘的矩阵

$$M(kT) = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

和 $M(T) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ 比较

$M(kT)$ 是把 $M(T)$ 的每个元素都乘以数 k

矩阵 $A = [a_{ij}]$ 和数 $k \in F$ 相乘定义为 $kA = [ka_{ij}]$.

映射的数乘的矩阵

设 $T \in \mathcal{L}(V, W)$, $k \in F$,

那么 $M(kT) = k M(T)$.

映射的数乘的矩阵

设 $T \in \mathcal{L}(V, W)$，$k \in F$，

那么 $\underline{M(kT) = kM(T)}$.

当然，这里有个前提，$M(T)$ 和 $M(kT)$ 都是关于 V 和 W 的同一组基下的矩阵。

回顾 $M(S+T) = M(S) + M(T)$.

我们已经定义了矩阵（m 行 n 列的矩阵，或 $m \times n$ 矩阵）的加法和数乘。所有的 $m \times n$ 矩阵构成一个线性空间。

所有的 $m\times n$ 矩阵

课本上用的记号是 $Mat(m,n,F)$

令 $F^{m\times n} = \{[a_{ij}] : a_{ij}\in F,\ i=1,\dots,m, j=1,\dots,n\}$

表示所有的 $m\times n$ 矩阵. 加法和数乘如前面所定义，那么 $F^{m\times n}$ 是数域 F 上的一个向量空间.

You can verify that

1. 零元素是零矩阵 $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

⋮

$F^{m\times n}$ 的基和维数

E_{ij} 表示只有 (i,j) 元为 1，其余元素都是 0 的矩阵。

第i行第j列的元素

我们可以证明 $(E_{11}, E_{12}, \cdots, E_{1n}, E_{21}, \cdots, E_{mn})$ 是 $F^{m\times n}$ 的一个基。

$\forall \quad A = [a_{ij}] \in F^{m\times n}$,

$$A = \sum_{i,j} a_{ij} E_{ij}$$

$$\dim F^{m\times n} = mn$$

$\mathbb{R}^{3\times 4}$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的向量空间

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$T_{11} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$, $\mathcal{M}(T_{11}) = E_{11}$

那 $T_{11} e_1 = e_1$, $T_{11} e_2 = 0$, $T_{11} e_3 = 0$, $T_{11} e_4 = 0$

$\mathbb{R}^{3\times 4}$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的向量空间

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$T_{11} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$, $\mathcal{M}(T_{11}) = E_{11}$

那 $T_{11} e_1 = e_1$, $T_{11} e_2 = 0$, $T_{11} e_3 = 0$, $T_{11} e_4 = 0$

E_{ij} $\quad \mathcal{M}(T_{ij}) = E_{ij}$. 那么 $\begin{cases} T_{ij} e_j = e_i \\ T_{ij} e_k = 0, \ k \neq j \end{cases}$

线性映射乘积的矩阵

设 $S \in \mathcal{L}(\overset{n}{U}, \overset{m}{V})$, $T \in \mathcal{L}(\overset{m}{V}, \overset{l}{W})$。

设 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 是 U 的一个基, $(f_1, \cdots, f_m)$ 是 V 的一个基.
$(g_1, \cdots, g_l)$ 是 W 的一个基.

两个映射的矩阵

$M(S) \in F^{m \times n}$, $M(T) \in F^{l \times m}$.

那么 $TS \in \mathcal{L}(\overset{n}{U}, \overset{l}{W})$ 的矩阵是什么?

$$\begin{array}{cccc} & U & \xrightarrow{S} V \xrightarrow{T} & W \\ \text{维数} & n & m & l \end{array}$$

线性映射乘积的矩阵

设 $S \in \mathcal{L}(\overset{n}{U}, \overset{m}{V})$, $T \in \mathcal{L}(\overset{m}{V}, \overset{l}{W})$。

设 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 是 U 的一个基，$(f_1, \cdots, f_m)$ 是 V 的一个基，

$(g_1, \cdots, g_l)$ 是 W 的一个基。

两个映射的矩阵

$M(S) \in F^{m\times n}$, $M(T) \in F^{l\times m}$.

那么 $TS \in \mathcal{L}(\overset{n}{U}, \overset{l}{W})$ 的矩阵是什么？

$$U \xrightarrow{S} V \xrightarrow{T} W$$

维数 $n \quad m \quad l$

至此我们知道

$M(TS) \in F^{l\times n}$

线性映射乘积的矩阵

$TS \in \mathcal{L}(U, W)$.

U 的 basis $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$

W 的 basis $(g_1, g_2, \cdots, g_e)$

$M(TS)$ 的第一列是 $(TS)e_1$ 用 $(g_1, \cdots, g_e)$ 展开的系数

$$(TS)e_1 = T(Se_1)$$

用映射乘积而定义

线性映射乘积的矩阵

$TS \in \mathcal{L}(U, W)$.

U 的 basis $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$
W 的 basis $(g_1, g_2, \cdots, g_e)$

$M(TS)$ 的第一列是 $(TS)e_1$ 用 $(g_1, \cdots, g_e)$ 展开的系数

$(TS)e_1 = T(Se_1)$

用映射乘积而定义

剖完一下
记 $M(S) = [a_{ij}]$
$M(T) = [b_{ij}]$

线性映射乘积的矩阵

$TS \in \mathcal{L}(U, W)$.

U 的 basis $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$

W 的 basis $(g_1, g_2, \cdots, g_\ell)$

$M(TS)$ 的第一列是 $(TS)e_1$ 用 $(g_1, \cdots, g_\ell)$ 展开的系数

$$(TS)e_1 \underset{\text{用映射乘积而定义}}{=} T(Se_1) \underset{\text{用}M(S)\text{而定义}}{=} T\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1} f_i\right)$$

剖完一下

记 $M(S) = [a_{ij}]$

$M(T) = [b_{ij}]$

线性映射乘积的矩阵

$TS \in \mathcal{L}(U, W)$.

U 的 basis $(e_1, e_2, \dots, e_n)$

W 的 basis $(g_1, g_2, \dots, g_e)$

$M(TS)$ 的第一列是 $(TS)e_1$ 用 $(g_1, \dots, g_e)$ 展开的系数

$$(TS)e_1 \underset{\text{用映射乘积而定义}}{=} T(Se_1) \underset{\text{用}M(S)\text{而定义}}{=} T\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1} f_i\right)$$

刻完一下

记 $M(S) = [a_{ij}]$

$M(T) = [b_{ij}]$

$$\underset{\text{用T是线性映射}}{=} \sum_{i=1}^{m} a_{i1} (T f_i)$$

线性映射乘积的矩阵

$TS \in \mathcal{L}(U, W)$.

U 的 basis $(e_1, e_2, \dots, e_n)$
W 的 basis $(g_1, g_2, \dots, g_\ell)$

$M(TS)$ 的第一列是 $(TS)e_1$ 用 $(g_1, \dots, g_\ell)$ 展开的系数

$$(TS)e_1 = T(Se_1) = T\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1} f_i\right)$$

用映射乘积而定义　　用 $M(S)$ 而定义

刻完一下
记 $M(S) = [a_{ij}]$
$M(T) = [b_{ij}]$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_{i1} (T f_i) = \sum_{i=1}^{m} a_{i1} (b_{1i} g_1 + \dots + b_{\ell i} g_\ell)$$

用 T 是线性映射

用 $M(T)$ 而定义 $Tf_i = b_{1i} g_1 + \dots + b_{\ell i} g_\ell$

继续计算 TS 的矩阵的第一列

$$(TS)e_1 = \sum_{i=1}^{m} a_{i1}(b_{1i}g_1 + \cdots + b_{li}g_l)$$

$$= \boxed{\sum_{i=1}^{m} a_{i1}b_{1i}} g_1 + \cdots + \sum_{i=1}^{m} a_{i1}b_{li}g_l$$

$$\alpha_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} + \cdots + a_{m1}b_{1m}$$

继续计算 TS 的矩阵的第一列

$$(TS)e_1 = \sum_{i=1}^{m} a_{i1}(b_{1i}g_1 + \cdots + b_{li}g_l)$$

$$= \boxed{\sum_{i=1}^{m} a_{i1}b_{1i}}\, g_1 + \cdots + \sum_{i=1}^{m} a_{i1}b_{li}g_l$$

$$a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} + \cdots + a_{m1}b_{1m}$$

$M(TS)$ 的第一列是

$$a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} + \cdots + a_{m1}b_{1m}$$

继续计算 TS 的矩阵的第一列

$$(TS)e_1 = \sum_{i=1}^{m} a_{i1}(b_{1i}g_1 + \cdots + b_{li}g_l)$$

$$= \boxed{\sum_{i=1}^{m} a_{i1}b_{1i}}\, g_1 + \cdots + \sum_{i=1}^{m} a_{i1}b_{li}g_l$$

$$a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} + \cdots + a_{m1}b_{1m}$$

g_2 的系数

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i1}b_{2i}g_2$$

$M(TS)$ 的第一列是

$$a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} + \cdots + a_{m1}b_{1m}$$

$$a_{11}b_{21} + a_{21}b_{22} + \cdots + a_{m1}b_{2m}$$

继续计算 TS 的矩阵的第一列

$$(TS)e_1 = \sum_{i=1}^{m} a_{i1}(b_{1i}g_1 + \cdots + b_{li}g_l)$$

$$= \boxed{\sum_{i=1}^{m} a_{i1}b_{1i}}\, g_1 + \cdots + \sum_{i=1}^{m} a_{i1}b_{li}g_l$$

$$\boxed{a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} + \cdots + a_{m1}b_{1m}}$$

g_2 的系数

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i1}b_{2i}g_2$$

$M(TS)$ 的第一列是

$$a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} + \cdots + a_{m1}b_{1m}$$

$$a_{11}b_{21} + a_{21}b_{22} + \cdots + a_{m1}b_{2m}$$

$$\vdots$$

$$a_{11}b_{l1} + a_{21}b_{l2} + \cdots + a_{m1}b_{lm}$$

继续计算 TS 的矩阵

$M(S) = [a_{ij}]$

$$(TS)e_j = T(Se_j) = T\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i\right)$$

$j = 1, 2, \cdots, n$

继续计算 TS 的矩阵

$M(S) = [a_{ij}]$

$$(TS)e_j = T(Se_j) = T\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} T(f_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \sum_{k=1}^{\ell} b_{ki} g_k$$

Recall $M(T) = [b_{ij}]$

U 的 basis (e_i)

V 的 basis (f_i)

W 的 basis (g_i)

继续计算 TS 的矩阵

$M(S) = [a_{ij}]$

U 的 basis (e_i)

V 的 basis (f_i)

W 的 basis (g_i)

$$(TS)e_j = T(Se_j) = T\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} T(f_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \sum_{k=1}^{\ell} b_{ki} g_k$$

Recall $M(T) = [b_{ij}]$

$$= \sum_{k=1}^{\ell} \left(\sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_{ij} \right) g_k$$

继续计算 TS 的矩阵

$M(S) = [a_{ij}]$

U 的 basis (e_i)

V 的 basis (f_i)

W 的 basis (g_i)

$$
\begin{aligned}
(TS)e_j &= T(Se_j) = T\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, T(f_i) \\
&= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \sum_{k=1}^{l} b_{ki}\, g_k \\
&= \sum_{k=1}^{l} \left(\sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_{ij}\right) g_k
\end{aligned}
$$

Recall $M(T) = [b_{ij}]$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} \phantom{a_{11}b_{11}+a_{21}b_{12}+\cdots+a_{m1}b_{1m}} & & \text{第}j\text{列} & & \phantom{\sum b_{1i}a_{in}} \end{array} \\
M(TS) = & \begin{bmatrix}
a_{11}b_{11}+a_{21}b_{12}+\cdots+a_{m1}b_{1m} & \cdots & \sum_{i=1}^{m} b_{1i}a_{ij} & \cdots & \sum_{i=1}^{m} b_{1i}a_{in} \\
a_{11}b_{21}+a_{21}b_{22}+\cdots+a_{m1}b_{2m} & \cdots & \sum_{i=1}^{m} b_{2i}a_{ij} & \cdots & \sum_{i=1}^{m} b_{2i}a_{in} \\
\vdots & & \vdots & & \\
a_{11}b_{l1}+a_{21}b_{l2}+\cdots+a_{m1}b_{lm} & & \sum_{i=1}^{m} b_{li}a_{ij} & \cdots & \sum_{i=1}^{m} b_{li}a_{in}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

定义矩阵的乘法

$M(S) \in F^{m\times n}$, $M(T) \in F^{l\times m}$

$M(TS)$ 的元素是由 $M(S)$ 和 $M(T)$ 的元素运算得来.

我们想要得到 $\boxed{M(TS) = M(T)M(S)}$

也就是 映射乘积的矩阵 = 映射矩阵的乘积.

我们要定义合适的矩阵乘法.

$M(TS)$ 的 (k,j) 元 $= \sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_{ij}$

矩阵乘法的定义

定义 $A=[a_{ij}]\in F^{m\times n}$, $B=[b_{ij}]\in F^{l\times m}$

定义 BA 的乘积是一个 $l\times n$ 的矩阵

设 $BA=[c_{ij}]$ $i=1,2,\cdots,l$, $j=1,\cdots,n$

则 $c_{ij}=\sum_{k=1}^{m} b_{ik}a_{kj}$

矩阵乘法的定义

定义 $A=[a_{ij}]\in F^{m\times n}$，$B=[b_{ij}]\in F^{l\times m}$

定义 BA 的乘积是一个 $l\times n$ 的矩阵

设 $BA=[c_{ij}]$ $i=1,2,\cdots,l$，$j=1,\cdots,n$

则 $c_{ij}=\sum_{k=1}^{m} b_{ik}a_{kj}$

由矩阵乘积的定义和前面对线性映射乘积的矩阵的推导知 $\boxed{M(TS)=M(T)M(S)}$

矩阵乘积举例

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

矩阵乘积举例

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\4&5\\7&8\end{bmatrix}\in \mathbb{R}^{3\times 2},\quad B=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&4\end{bmatrix}\in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

$$AB=\begin{bmatrix}\boxed{1\quad 2}\\4\quad 5\\7\quad 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boxed{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}}&\begin{matrix}0\\2\end{matrix}&\begin{matrix}1\\4\end{matrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times1+2\times0&&\\&&\\&&\end{bmatrix}$$

矩阵乘积举例

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

$$AB = \begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2} \\ 4 \quad 5 \\ 7 \quad 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 2 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 4 \end{matrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

矩阵乘积举例

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

矩阵乘积举例

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

$$AB = \begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2} \\ 4 \quad 5 \\ 7 \quad 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 4 \end{matrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 10 & 24 \\ 7 & 16 & 39 \end{bmatrix}$$

矩阵乘积举例

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 4 & 10 & 24 \\ 7 & 16 & 39 \end{bmatrix}$$

A 是映射 $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ 的矩阵

B 是 $S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ 的矩阵

AB 是 $TS \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ 的矩阵.

矩阵和线性映射

当 V 和 W 是数域 F 上的向量空间而且选定了 V 的基 $(e_1, \dots, e_n)$ 和 W 上的一个基 $(f_1, \dots f_m)$，

那么，任给 $T \in \mathcal{L}(V, W)$，按照把 Te_i 在基 $(f_1, \dots, f_m)$ 下的展开系数作为第 i 列方法，就构造了一个唯一的矩阵，即 $\mathcal{M}(T)$。

矩阵和线性映射

设 V 和 W 是数域 F 上的向量空间

而且选定了 V 的基 $(e_1,\dots,e_n)$ 和 W 上的一个基 $(f_1,\dots f_m)$.

那么，任给 $T\in\mathcal{L}(V,W)$，按照把 Te_i 在基 $(f_1,\dots,f_m)$ 下的展开系数作为第 i 列方法，就构造了一个唯一的矩阵，即 $M(T)$.

反过任给一个矩阵 $A=[a_{ij}]\in F^{m\times n}$，

用 $Te_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}f_i$ 也唯一地构造了一个 $T\in\mathcal{L}(V,W)$.

矩阵和线性映射

当 V 和 W 是数域 F 上的向量空间，并且选定了 V 的基 $(e_1, \dots, e_n)$ 和 W 上的一个基 $(f_1, \dots f_m)$，

$T \in \mathcal{L}(V,W)$ 和 $F^{n\times m}$ 建立了一个一一对应 先不展开

那么，任给 $T \in \mathcal{L}(V,W)$，按照把 Te_i 在基 $(f_1, \dots, f_m)$ 下的展开系数作为第 i 列方法，就构造了一个唯一的矩阵，即 $M(T)$.

反过任给一个矩阵 $A = [a_{ij}] \in F^{m\times n}$，用 $Te_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i$ 也唯一地构造了一个 $T \in \mathcal{L}(V,W)$.

线性映射的矩阵知识点回顾

$\rightarrow$ $S \in \mathcal{L}(V,W)$, $T \in \mathcal{L}(V,W)$,

$\Rightarrow$ $S+T \in \mathcal{L}(V,W)$ 且 $\mathcal{M}(S+T) = \mathcal{M}(S) + \mathcal{M}(T)$

$\rightarrow$ $\forall\ k \in \mathbb{F}$, $\mathcal{M}(kT) = k\mathcal{M}(T)$

$\rightarrow$ $\forall\ S \in \mathcal{L}(U,V)$, $T \in \mathcal{L}(V,W)$ 有

$$\mathcal{M}(TS) = \mathcal{M}(T)\mathcal{M}(S)$$

$T \in \mathcal{L}(V, W)$, $v \in V$, $Tv = ?$

设 $\dim V = n$，$(e_1, \ldots, e_n)$ 是 V 的一个基

$\dim W = m$ $(f_1, \ldots, f_m)$ 是 W 的一个基

$T \in \mathcal{L}(V, W)$ 的矩阵

$$\mathcal{M}(T) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$T \in \mathcal{L}(V, W)$, $v \in V$, $Tv = ?$

设 $\dim V = n$, $(e_1, \dots, e_n)$ 是 V 的一个基

$\dim W = m$ $(f_1, \dots, f_m)$ 是 W 的一个基

$T \in \mathcal{L}(V, W)$ 的矩阵

$$\mathcal{M}(T) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

设 $v \in V$, 那么 $v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$, $(c_1, \dots, c_n) \in F^n$.

$T \in \mathcal{L}(V,W)$, $v \in V$, $Tv = ?$

设 $\dim V = n$, $(e_1, \dots, e_n)$ 是 V 的一个基

$\dim W = m$ $(f_1, \dots, f_m)$ 是 W 的一个基

$T \in \mathcal{L}(V,W)$ 的矩阵

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{c} v_j \\ \text{第}j\text{列} \end{array} \\ \mathcal{M}(T) = & \begin{array}{c} \\ f_k \end{array} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{kj} & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

设 $v \in V$, 那么 $v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$, $(c_1, \dots, c_n) \in F^n$.

$$Tv = T(c_1 v_1 + \dots + c_n v_n) = \sum_{j=1}^{n} (T v_j) = \sum_{j=1}^{n} c_j \left(\sum_{k=1}^{m} a_{kj} f_k \right)$$

$T\in\mathcal{L}(V,W)$, $v\in V$, $Tv=?$

设 $\dim V = n$, $(e_1,\dots,e_n)$ 是 V 的一个基

$\dim W = m$ $(f_1,\dots,f_m)$ 是 W 的一个基

$T\in\mathcal{L}(V,W)$ 的矩阵

$$\mathcal{M}(T) = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} \phantom{a_{11}} & \phantom{a_{12}} & & v_j\ \text{第}j\text{列} & & \phantom{a_{1n}} \end{matrix} \\ f_k & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{kj} & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

设 $v\in V$, 那么 $v = c_1v_1+\dots+c_nv_n$, $(c_1,\dots,c_n)\in F^n$.

$$Tv = T(c_1v_1+\dots+c_nv_n) = \sum_{j=1}^{n}(Tv_j) = \sum_{j=1}^{n} c_j\Big(\sum_{k=1}^{m} a_{kj}f_k\Big)$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}c_j\Big) f_k$$

交换求和次序

$T \in \mathcal{L}(V, W)$, $v \in V$, $Tv = ?$

$$\mathcal{M}(T) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

对于向量 $v = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n$，我们也引入一个 $n \times 1$ 的矩阵 $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$

由 $Tv = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{kj} c_j f_k$

对 Tv 类似引入一个矩阵 $\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix}$ 易知 $\mathcal{M}(Tv) = \mathcal{M}(T)\mathcal{M}(v)$

这样的列数为 1 的矩阵，我们称为向量（列向量）

$F^{m\times n}$ 矩阵. F^n 向量 ($n\times 1$ 矩阵)

$\mathcal{L}(V,W) \longleftrightarrow F^{m\times n}$

$V \longleftrightarrow F^n$

① 两种不同的导出矩阵的方式. $Te_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i$

$T \in \mathcal{L}(V,W) \longleftrightarrow (M(T))_{ij} = Te_j$ 的第 i 个坐标.

② $v \in V \longleftrightarrow M(v) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$

$v = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i$

两种完全不同方式得到矩阵, 大家一定注意.

线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

线性映射 $T \in \mathcal{L}(F^n, F^m)$ $b = (b_1, \cdots, b_m) \in F^m$.

$x = (x_1, \cdots, x_n) \in F^n$

线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

线性映射 $T \in \mathcal{L}(F^n, F^m)$ $b = (b_1, \cdots, b_m) \in F^m$.

$x = (x_1, \cdots, x_n) \in F^n$

对应

$$Tx = b$$

矩阵 $A = \mathcal{M}(T) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ $\mathcal{M}(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\mathcal{M}(b) = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

线性映射 $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m)$ $b = (b_1, \cdots, b_m) \in \mathbb{F}^m$.

$x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{F}^n$

对应

$$Tx = b$$

矩阵 $A = \mathcal{M}(T) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ $\vec{x}$: $\mathcal{M}(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\vec{b}$: $\mathcal{M}(b) = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

对应

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

左右两边都是两个列向量（或 $m\times1$ 矩阵），

它们相等是指每一个元素都相等。

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}} \\ \boxed{a_{21} \quad a_{22} \quad \cdots \quad a_{2n}} \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ a_{m1} \quad a_{m2} \quad \cdots \quad a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

左右两边都是两个列向量（或 $m\times1$ 矩阵），
它们相等是指每一个元素都相等.

$$\text{左边} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \quad + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

左右两边都是两个列向量（或 $m\times1$ 矩阵），

它们相等是指每一个元素都相等。

$$\text{左边} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \quad + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} \qquad = b_1$$

与线性方程组对照一下。