V和W同构 (isomorphic)

同构的

可逆的线性映射 $T \in \mathcal{L}(V,W)$ 非常重要，

如果存在可逆的 $T \in \mathcal{L}(V,W)$，那么称V和W是同构的 (isomorphic)。

V 和 W 同构 (isomorphic) 同构的

可逆的线性映射 $T \in \mathcal{L}(V,W)$ 非常重要。

如果存在可逆的 $T \in \mathcal{L}(V,W)$，那么称 V 和 W 是同构的 (isomorphic)。

例: $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) = \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}$

是次数小于或等于 2 的实系数实变量的多项式集合，也是实数域上的 3 维向量空间。

定义一个映射 $T: \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mapsto (a_0, a_1, a_2)$$

可以验证 $T: P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ 是一个可逆的线性映射.

$$T^{-1}: \mathbb{R}^3 \to P_2(\mathbb{R})$$

$$(a_0, a_1, a_2) \longmapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$P_2(\mathbb{R})$ 和 $\mathbb{R}^3$ 同构.

一个是多项式集合，一个是三元有序数组集合

两个看起来截然不同的集合都是三维向量空间，

它俩是同构的.

同构的例子

$$P_2(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

求导 $\frac{d}{dx} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 \longmapsto a_1 + 2a_2x$$

$P_2(\mathbb{R})$ 和 $\mathbb{R}^3$ 同构

$$T : P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 \mapsto (a_0, a_1, a_2)$$

$T\frac{d}{dx}T^{-1}$ 就成 $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ 中的一个线性映射，
也就是说 $\frac{d}{dx}$ 是作用在函数上的算子 经可逆线性映射
T 这样的乘积 就变成了我们熟悉的 $\mathbb{R}^3$ 上的线性映射

同构、维数

前面的例子已经看到两个线性空间同构，它们的维数相等，

同构、维数

前面的例子已经看到两个线性空间同构，它们的维数相等，

逆向思维，猜测两个维数相等的线性空间是同构的：

同构、维数

前面的例子已经看到两个线性空间同构，它们的维数相等，

逆向思维：猜测两个维数相等的线性空间是同构的：

同构、维数

前面的例子已经看到两个线性空间同构，它们的维数相等，

逆向思维：猜测两个维数相等的线性空间是同构的：

3.18 定理：两个有限维向量空间同构当且仅当它们的维数相等.

同构、维数

前面的例子已经看到两个线性空间同构，它们的维数相等，

逆向思维，猜测两个维数相等的线性空间是同构的：

3.18 定理：两个有限维向量空间同构当且仅当它们的维数相等。

证明： 设 V 和 W 是域 F 上的有限维线性空间，

$(e_1, \dots, e_n)$ 是 V 的一个基，$(f_1, \dots, f_n)$ 是 W 的一个基：

定义映射 $T: V \to W$ 如下

$$Te_i = f_i \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

$\forall\ v \in V$, 存在 $a_i \in F$, $i=1,2,\cdots,n$ 使得

$$v = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$$

$$Tv = a_1(Te_1) + \cdots + a_n(Te_n) = a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n$$

易验证 $T \in \mathcal{L}(V,W)$.

再验证 T 是可逆的, T^{-1} 的定义如下

$$T^{-1}: W \to V$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i f_i \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \quad i=1,2,\cdots,n$$

这样, 我们就证明了 V 和 W 是同构的.

再证明 如果 V 和 W 是同构的，那么 $\dim V = \dim W$.

（别忘了前提是 $\dim V < \infty$，$\dim W < \infty$）

V 和 W 是同构的，由同构的定义知

存在可逆的线性映射 $T \in \mathcal{L}(V, W)$.

前面还有一个定理说 $T \in \mathcal{L}(V, W)$ 是可逆的，

等价于 T 即单又满。

T 是单射 $\Rightarrow$ $\operatorname{Null} T = \{0\}$.

再证明 如果 V 和 W 是同构的，那么 $\dim V = \dim W$.

（别忘了前提是 $\dim V < \infty$, $\dim W < \infty$）.

V 和 W 是同构的，由同构的定义知

存在可逆的线性映射 $T \in \mathcal{L}(V, W)$.

前面还有一个定理说 $T \in \mathcal{L}(V, W)$ 是可逆的，

等价于 T 即单又满。

T 是单射 $\Rightarrow$ $\operatorname{Null} T = \{0\}$. T 是满射 $\Rightarrow$ $\operatorname{Range} T = W$

再证明 如果 V 和 W 是同构的，那么 $\dim V = \dim W$.

（别忘了前提是 $\dim V < \infty$, $\dim W < \infty$）

V 和 W 是同构的，由同构的定义知

存在可逆的线性映射 $T \in \mathcal{L}(V, W)$.

前面还有一个定理说 $T \in \mathcal{L}(V, W)$ 是可逆的，

等价于 T 即单又满。

T 是单射 $\Rightarrow$ $\operatorname{Null} T = \{0\}$. T 是满射 $\Rightarrow$ $\operatorname{Range} T = W$

再回顾前面学习的一个定理：设 $\dim V < \infty$, $T \in \mathcal{L}(V, W)$，那么

$\dim V = \dim \operatorname{Null} T + \dim \operatorname{Range} T$

再证明 如果 V 和 W 是同构的，那么 $\dim V = \dim W$.

（别忘了前提是 $\dim V < \infty$, $\dim W < \infty$）

V 和 W 是同构的，由同构的定义知

存在可逆的线性映射 $T \in \mathcal{L}(V, W)$.

前面还有一个定理说 $T \in \mathcal{L}(V, W)$ 是可逆的，

等价于 T 即单又满。

T 是单射 $\Rightarrow \operatorname{Null} T = \{0\}$ ①. T 是满射 $\Rightarrow \operatorname{Range} T = W$ ②

再回顾前面学习的一个定理：设 $\dim V < \infty$, $T \in \mathcal{L}(V, W)$，那么

$\dim V = \dim \operatorname{Null} T + \dim \operatorname{Range} T$ ③

①②③ $\Rightarrow \dim V = \dim W$. 证毕.

两个线性空间同构的例子

由前一个定理知：任意一个数域F上的n维线性空间V都和F^n是同构的.

例：$P_n(F)$和F^{n+1}同构.

例：$F^{2\times 2}$和F^4是同构的

两个线性空间同构的例子

由前一个定理知：任意一个数域F上的n维线性空间V都和F^n是同构的.

例：$P_n(F)$ 和 F^{n+1} 同构.

例. $F^{2\times 2}$ 和 F^4 是同构的

You only need to check $\dim F^{2\times 2}=4$.

$E_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$, $E_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$, $E_{21}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$, $E_{22}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$

$(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})$ 是 $F^{2\times 2}$ 的一个基.

两个线性空间同构的例子

由前一个定理知：任意一个数域F上的n维线性空间V都和F^n是同构的.

例：$\mathcal{P}_n(F)$ 和 F^{n+1} 同构.

例. $F^{2\times 2}$ 和 F^4 是同构的

You only need to check $\dim F^{2\times 2}=4$.

$E_{11}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_{12}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_{21}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $E_{22}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ 是 $F^{2\times 2}$ 的一个基.

注意： V 和 W 同构是指：存在一个可逆的线性映射 $T\in\mathcal{L}(V,W)$.

$(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ 是V中的线性无关组，

那么 $(Tv_1, \cdots, Tv_n)$ 也是W中的线性无关组

可以说线性无关性在映射前后保持不变.

两个线性空间同构的例子

由前一个定理知：任意一个数域F上的n维线性空间V都和F^n是同构的。

例：$\mathcal{P}_n(F)$ 和 F^{n+1} 同构.

例. $F^{2\times 2}$ 和 F^4 是同构的

You only need to check $\dim F^{2\times 2}=4$.

$E_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$, $E_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$, $E_{21}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$, $E_{22}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$

$(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})$ 是 $F^{2\times 2}$ 的一个基.

注意： V 和 W 同构是指：存在一个可逆的线性映射 $T\in\mathcal{L}(V,W)$.

$(v_1,v_2,\cdots,v_n)$ 是V中的线性无关组，

那么 $(Tv_1,\cdots,Tv_n)$ 也是W中的线性无关组

可以说线性无关性在两个同构空间中保持不变.

两个线性空间同构的例子

由前一个定理知：任意一个数域 F 上的 n 维线性空间 V 都和 F^n 是同构的。

例：$\mathcal{P}_n(F)$ 和 F^{n+1} 同构.

例. $F^{2\times 2}$ 和 F^4 是同构的

You only need to check $\dim F^{2\times 2}=4$.

$E_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$, $E_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$, $E_{21}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$. $E_{22}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$

$(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})$ 是 $F^{2\times 2}$ 的一个基.

注意： V 和 W 同构是指：存在一个可逆的线性映射 $T\in\mathcal{L}(V,W)$.

$(v_1,v_2,\cdots,v_n)$ 是 V 中的线性无关组，

那么 $(Tv_1,\cdots,Tv_n)$ 也是 W 中的线性无关组

可以说线性无关性在两个同构空间中保持不变。

关于这种运算，同构啥也没说

但这例中 $F^{2\times 2}$ 矩阵有乘法运算. 这个不是线性空间定义中的运算.

$\dim V = n, \quad \dim W = m$

$\mathcal{L}(V, W)$ 和 $F^{m\times n}$

$\boxed{\mathcal{L}(V,W) \text{ 是 } mn \text{ 维的}}$, $F^{m\times n}$ 也是 mn 维的

二者是同构的.

以前未证明过这个结论吗？后面会先假设不知 $\mathcal{L}(V,W)$ 是 mn 维的就证明 $\mathcal{L}(V,W)$ 和 $F^{m\times n}$ 同构

但两个线性空间在 $V=W$ 时，还可以定义乘法. 我们希望找到一种同构映射,

$$\tilde{T} \in \mathcal{L}\big(\mathcal{L}(V,W), F^{m\times n}\big)$$

在 $V=W$ 时. $S, T \in \mathcal{L}(V,V)$ 时

$$\tilde{T}(ST) = \tilde{T}(S)\tilde{T}(T)$$

$\dim V = n,\quad \dim W = m$

$\mathcal{L}(V, W)$ 和 $F^{m\times n}$

$\mathcal{L}(V,W)$ 是 mn 维的，$F^{m\times n}$ 也是 mn 维的

二者是同构的.

在两个线性空间在 $V=W$ 时，还可以定义

乘法. 我们希望找到一种同构映射，

$$\tilde{T} \in \mathcal{L}\left(\mathcal{L}(V,W), F^{m\times n}\right)$$

在 $V=W$ 时. $S, T \in \mathcal{L}(V,V)$ 时

$$\tilde{T}(ST) = \tilde{T}(S)\tilde{T}(T)$$

我们说这个映射 $\tilde{T}$ 还保持乘法

也就是 S 和 T 的乘积的像 $=$ S 和 T 像的乘积

$\dim V = n$, $\dim W = m$

$\mathcal{L}(V, W)$ 和 $F^{m\times n}$

$\mathcal{L}(V,W)$ 是 mn 维的，$F^{m\times n}$ 也是 mn 维的

二者是同构的。

在两个线性空间在 $V=W$ 时，还可以定义乘法。我们希望找到一种同构映射，

$$\widetilde{T} \in \mathcal{L}\left(\mathcal{L}(V,W), F^{m\times n}\right)$$

在 $V=W$ 时。 $S, T \in \mathcal{L}(V,V)$ 时

$$\widetilde{T}(ST) = \widetilde{T}(S)\widetilde{T}(T)$$

我们说这个映射下还保持乘法

也就是 S 和 T 的乘积的像 = S 和 T 像的乘积

我们将映射 $T \in \mathcal{L}(V,W)$ 的矩阵映到一个矩阵 $M(T:(v_1,\dots,v_n),(w_1,\dots,w_m))$ 就给出来一个可逆线性映射。

$$\mathcal{L}(\overset{n}{V}, \overset{m}{W}) \to F^{m\times n}$$

命题3.19：设$(v_1, v_2, \cdots, v_n)$是V的一个基，$(w_1, w_2, \cdots, w_m)$是W的一个基。

那么$\mathcal{M}$是$\mathcal{L}(V,W)$到$F^{m\times n}$的一个可逆线性映射。

$$\overset{\mathcal{M}}{\mathcal{L}(V,W)} \to F^{m\times n}$$

命题3.19：设$(v_1, v_2, \cdots, v_n)$是V的一个基，$(w_1, w_2, \cdots, w_m)$是W的一个基，那么$\mathcal{M}$是$\mathcal{L}(V,W)$到$F^{m\times n}$的一个可逆线性映射。

证明：$\mathcal{M}$是一个线性映射，我们在前面已经证明了。现在只需要证明$\mathcal{M}$是可逆的

$$\mathcal{L}(\overset{n}{V},\overset{m}{W}) \to F^{m\times n}$$

命题3.19：设$(v_1, v_2, \cdots, v_n)$是V的一个基，$(w_1, w_2, \cdots, w_m)$是W的一个基，则$\mathcal{M}$是$\mathcal{L}(V,W)$到$F^{m\times n}$的一个可逆线性映射。

证明：$\mathcal{M}$是一个线性映射，我们在前面已经证明了。现在只需要证明$\mathcal{M}$是可逆的。由前面一个定理知$\mathcal{M}$是可逆的$\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}$即单又满

先证明$\mathcal{M}$是单射，即要证$\forall T\in\mathcal{L}(V,W)$，如果$\mathcal{M}(T)=0$，那么$T=0$。

由$\mathcal{M}(T,(v_1,\cdots,v_n),(w_1,\cdots w_m))$的定义知，

$$Tv_j=\sum_{i=1}^{m}[\mathcal{M}(T)]_{ij}w_i$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} v_1 & v_j & \cdots \end{matrix} \\ \begin{matrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{matrix} & \begin{bmatrix} & 0 & \\ & 0 & \\ & \vdots & \\ & 0 & \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\mathcal{L}(\overset{n}{V},\overset{m}{W}) \longrightarrow F^{m\times n}$$

命题3.19：设 $(v_1,v_2,\dots,v_n)$ 是 V 的一个基，$(w_1,w_2,\dots,w_m)$ 是 W 的一个基。

那么 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{L}(V,W)$ 到 $F^{m\times n}$ 的一个可逆线性映射.

证明：$\mathcal{M}$ 是一个线性映射，我们在前面已经证明了。现在只需要证明 $\mathcal{M}$ 是可逆的

由前面一个定理知 $\mathcal{M}$ 是可逆的 $\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}$ 即单又满

先证明 $\mathcal{M}$ 是单射，即要证 $\forall\, T\in\mathcal{L}(V,W)$，

如果 $\mathcal{M}(T)=0$ 那么 $T=0$.

由 $\mathcal{M}(T,(v_1,\dots,v_n),(w_1,\dots,w_m))$ 的定义知，

$$Tv_j=\sum_{i=1}^{m}[\mathcal{M}(T)]_{ij}\,w_i = 0 \qquad j=1,\dots,n$$

$$\begin{array}{c|ccc} & v_1 & v_j & \cdots \\ \hline w_1 & & 0 & \\ w_2 & & 0 & \\ \vdots & & \vdots & \\ w_m & & 0 & \end{array}$$

$\forall\, v\in V$，那 $v=\sum_{j=1}^{n}a_j v_j$

$Tv=\sum_{j=1}^{n}a_j(Tv_j)$

$$\mathcal{L}(\overset{n}{V},\overset{m}{W}) \to F^{m\times n}$$

命题3.19：设 $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ 是 V 的一个基，$(w_1, w_2, \cdots, w_m)$ 是 W 的一个基。
那么 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{L}(V,W)$ 到 $F^{m\times n}$ 的一个可逆线性映射。

证明：$\mathcal{M}$ 是一个线性映射，我们在前面已经证明了。现在只需要证明 $\mathcal{M}$ 是可逆的。
由前面一个定理知 $\mathcal{M}$ 是可逆的 $\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}$ 即单又满
先证明 $\mathcal{M}$ 是单射，即要证 $\forall T \in \mathcal{L}(V,W)$，
如果 $\mathcal{M}(T) = 0$，那么 $T = 0$。
由 $\mathcal{M}(T, (v_1, \cdots, v_n), (w_1, \cdots w_m))$ 的定义知，

$$Tv_j = \sum_{i=1}^{m} [\mathcal{M}(T)]_{ij} w_i = 0 \quad j=1,\cdots n$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} v_1 & v_i & \cdots \end{array} \\ \begin{array}{c} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{array} & \left[\begin{array}{ccc} & 0 & \\ & 0 & \\ & \vdots & \\ & 0 & \end{array}\right] \end{array}$$

$\forall v \in V$，那 $v = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j$

$Tv = \sum_{j=1}^{n} a_j (Tv_j) = 0$ 这就证明 $T = 0$，$\mathcal{M}$ 是单射得证了

再证明 $\mathcal{M}$ 是满射.

证明. $\forall A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in F^{m\times n}$

那么我们可以定一个映射

$$T: V \to W$$

使得 $T v_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$

且 $\forall v \in V$, $v = \sum_{j=1}^{n} c_j v_j$

$$T v := \sum_{j=1}^{n} c_j (T v_j)$$

易验证 $T \in \mathcal{L}(V, W)$，且 $\mathcal{M}(T) = A$.

这证明了 $\mathcal{M}$ 是满射.

这样我们就证明 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{L}(V,W)$ 和 $F^{m\times n}$ 之间的一个可逆线性映射.

$\mathcal{L}(V,W)$ 和 $F^{m\times n}$ 的维数

$$F^{n\times m} = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} : a_{ij} \in F,\ i=1,\cdots,n,\ j=1,\cdots,m \right\}$$

的一个基是 $(E_{11}, \cdots, E_{mn})$，维数是 mn

设 V 和 W 是 F 上的线性空间，$\dim V = n$，$\dim W = m$.

那么 $\mathcal{L}(V,W)$ 和 $F^{m\times n}$ 同构，而些同构的空间具有相同的维数，故有下面的命题

3.20 命题：如果 V 和 W 都是有限维的，那么 $\mathcal{L}(V,W)$ 也是有限维的，并且 $\dim \mathcal{L}(V,W) = (\dim V)(\dim W)$.

线性映射和算子(operator)

$\mathcal{L}(V,W)$ 是从 V 到 W 的所有线性映射组成的集合(是域 F 上的向量空间)

线性映射和算子(operator)

domain codomain

$\mathcal{L}(V,W)$ 是从 V 到 W 的所有线性映射组成的集合(是域 F 上的向量空间)

$T \in \mathcal{L}(V,W)$ 指的是 T 是一个从 V 到 W 的线性映射.

当 $V=W$ 时,即 domain 和 codomain 是同一个向量空间时,即 $T \in \mathcal{L}(V,V)$ 时,T 称为一个算子(operator).

定义:设 V 是域 F 上的向量空间,$T \in \mathcal{L}(V,V)$ 称为 V 上的一个线性算子。$\mathcal{L}(V,V)$ 简记为 $\mathcal{L}(V)$ 表示 V 上所有的线性算子组成的集合。

$\mathcal{L}(V)$: V上的所有线性算子组成的集合

$T \in \mathcal{L}(V)$ $\qquad V \xrightarrow{T} V$

乘积: $T, T^2, T^3, \dots, T^n$ 都是 well-defined

$\mathcal{L}(V)$：V 上的所有线性算子组成的集合

$T \in \mathcal{L}(V)$

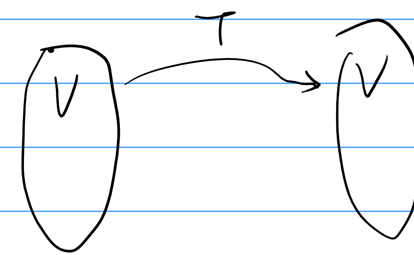
$$V \xrightarrow{T} V$$

乘积：$T, T^2, T^3, \ldots, T^n$ 都是 well-defined

定义 $T^0 = I$ 是 V 上的恒等算子

$\mathcal{L}(V)$：V上的所有线性算子组成的集合

$T \in \mathcal{L}(V)$



乘积：$T, T^2, T^3, \cdots, T^n$ 都是 well-defined

定义 $T^0 = I$ 是V上的恒等算子

Recall：① T是可逆的 $\Leftrightarrow$ T即单又满.

② 当 $\dim V < \infty$ 时. $\dim V = \dim \operatorname{Null} T + \dim \operatorname{Range} T$

③ 当 $\dim V < \infty$ 时，T是满射 $\Leftrightarrow$ $\dim \operatorname{Range} T = \dim V$

codomain

研究有限维向量空间上的线性算子 $T\in\mathcal{L}(V)$

Recall: ① T 是可逆的 $\Leftrightarrow$ T 即单又满.

② 当 $\dim V<\infty$ 时. $\dim V=\dim \operatorname{Null} T+\dim \operatorname{Range} T$

③ 当 $\dim V<\infty$ 时, T 是满射 $\Leftrightarrow$ $\dim \operatorname{Range} T=\dim V$

codomain

如果我们想证 $T\in\mathcal{L}(V)$ 是可逆的, 而且我们证明了 T 是单射, 那么由 ② ③ 就推出 T 是满射

研究有限维向量空间上的线性算子 $T\in\mathcal{L}(V)$

Recall: ① T 是可逆的 $\Leftrightarrow$ T 即单又满.

② 当 $\dim V<\infty$ 时. $\dim V=\dim \operatorname{Null} T+\dim \operatorname{Range} T$

③ 当 $\dim V<\infty$ 时, T 是满射 $\Leftrightarrow$ $\dim \operatorname{Range} T=\dim V$

codomain

如果我们想证 $T\in\mathcal{L}(V)$ 是可逆的, 而且我们证明了 T 是单射, 那么由 ② ③ 就推出 T 是满射

过程如下.

T 是单射 $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Null} T=\{0\}$ $\Rightarrow$ $\dim \operatorname{Null} T=0$ $\overset{由②}{\Longrightarrow}$ $\dim V=\dim \operatorname{Range} T$

$\overset{由③}{\Longrightarrow}$ T 是满射

当 $\dim V < \infty$ 时，V 上的算子的单射和满射等价。

定理 3.21　设 V 是有限维的向量空间，$T \in \mathcal{L}(V)$

那么下列等价：

a) T 是可逆的 (invertible)；

b) T 是单的 (injective)；

c) T 是满的 (surjective).

证明：a) => b) 由前面学习的 T 是可逆的等价于 T 即单又满可证

b) => c) 由上一页的讨论可得

c) => a) T 是 surjective 可得 $\operatorname{Range} T = V$. ↗ codomain

当 $\dim V < \infty$ 时，$\dim V = \dim \operatorname{Null} T + \dim \operatorname{Range} T$

当 $\dim V<\infty$ 时，V 上的算子的单射和满射等价。

定理 3.21 设 V 是有限维的向量空间，$T\in\mathcal{L}(V)$

那么下列等价：

a) T 是可逆的 (invertible);

b) T 是单的 (injective);

c) T 是满的 (surjective).

证明： a) => b) 由前面学习的 T 是可逆的等价于 T 即单又满可证

b) => c) 由上一页的讨论可得

c) => a) T 是 surjective 可得 $\text{Range}\, T = V$ ① ↗ domain

当 $\dim V<\infty$ 时，$\dim V = \dim \text{Null}\, T + \dim \text{Range}\, T$ ②

由①② 知 $\dim \text{Null}\, T = 0$，从而 $\text{Null}\, T = \{0\}$. 这就证明了 T 是单的 (surjective).

当 $\dim V<\infty$ 时，V 上的算子的单射和满射等价。

定理 3.21　设 V 是有限维的向量空间，$T\in\mathcal{L}(V)$

那么下列等价：

a) T 是可逆的（invertible）；

b) T 是单的（injective）；

c) T 是满的（surjective）。

证明：　a) $\Rightarrow$ b) 由前面学习的 $\boxed{T\text{ 是可逆的等价于}}$

T 即单又满可证

b) $\Rightarrow$ c)　由上一页的讨论可得

c) $\Rightarrow$ a)　T 是 surjective 可得 $\text{Range}\,T = V$ ①　（$\curvearrowright$ V domain）

当 $\dim V<\infty$ 时，$\dim V = \dim \text{Null}\,T + \dim \text{Range}\,T$ ②

由①②知　$\dim \text{Null}\,T = 0$，从而 $\text{Null}\,T=\{0\}$。这就证明了 T 是单的（surjective），再利用这个就证明了 T 是可逆的。　□

设 $T \in \mathcal{L}(V)$, then T is injective $\Leftrightarrow$ T is surjective $\Leftrightarrow$ T is invertible

设 $T \in \mathcal{L}(V)$, then T is injective $\Leftrightarrow$ T is surjective $\Leftrightarrow$ T is invertible

注意：有一个前提条件 $\dim V < \infty$.

当 $\dim V = \infty$ 时，T 是单的并不意味着 T 是满的

设 $T \in \mathcal{L}(V)$, then T is injective $\Leftrightarrow$ T is surjective $\Leftrightarrow$ T is invertible

注意：有一个前提条件 $\dim V < \infty$.

当 $\dim V = \infty$ 时，T 是单的并不意味着 T 是满的

F^∞ 上的右移算子定义如下

$$T: F^\infty \longrightarrow F^\infty$$

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots) \longmapsto (0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$$

设 $T \in \mathcal{L}(V)$, then T is injective $\Leftrightarrow$ T is surjective $\Leftrightarrow$ T is invertible

注意：有一个前提条件 $\dim V < \infty$.

当 $\dim V = \infty$ 时，T 是单而并不意味着 T 是满而

F^∞ 上的右移算子定义如下

$$T: F^\infty \longrightarrow F^\infty$$

$$(a_1, a_2, a_3, \cdots) \longmapsto (0, a_1, a_2, a_3, \cdots)$$

验证 T 是单射，设 $v = (v_1, v_2, v_3, \cdots) \in F^\infty$.

$Tv = 0$. 那么由 T 的定义知 $(0, v_1, v_2, v_3, \cdots) = 0$

即每一个元素都为 0. $v_i = 0$, $i = 1, 2, 3, \cdots$ 即 $v = 0$

这就证明了 T 是单射.

设 $T \in \mathcal{L}(V)$, then T is injective $\Leftrightarrow$ T is surjective $\Leftrightarrow$ T is invertible

注意：有一个前提条件 $\dim V < \infty$.

当 $\dim V = \infty$ 时，T 是单的并不意味着 T 是满的

F^∞ 上的右移算子定义如下

$$T : F^\infty \longrightarrow F^\infty$$

$$(a_1, a_2, a_3, \cdots) \longmapsto (0, a_1, a_2, a_3, \cdots)$$

易验证 T 是单射，设 $v = (v_1, v_2, v_3, \cdots) \in F^\infty$.

$Tv = 0$. 那么由 T 的定义知 $(0, v_1, v_2, v_3, \cdots) = 0$

即每一个元素都为 0. $v_i = 0$, $i = 1, 2, 3, \cdots$ 即 $v = 0$

这就证明了 T 是单射. $(1, 0, 0, \cdots) \notin \operatorname{Range} T$. 故 T 不是满射。

当 $\dim V=\infty$ 时，$\mathcal{L}(V)$ 中满射但非单射的算子

$\mathbb{F}^\infty$ 上的左移算子定义如下

$$S: \mathbb{F}^\infty \longrightarrow \mathbb{F}^\infty$$

$$(a_1, a_2, a_3, \cdots) \longmapsto (a_2, a_3, \cdots)$$

验证 S 是满射.

codomain

$\forall\ v=(a_1, a_2, a_3, \cdots) \in \mathbb{F}^\infty$，取 $u=(0, a_1, a_2, \cdots)$

由 S 的定义知 $Su=(a_1, a_2, a_3, \cdots)=v$

即 $v \in \operatorname{Range} S$ 故 $\mathbb{F}^\infty \subset \operatorname{Range} S$.

显然 $\operatorname{Range} S \subset \mathbb{F}^\infty$. 这就证明了 $\operatorname{Range} S=\mathbb{F}^\infty$.

所以 S 是满射

当 $\dim V = \infty$ 时，$\mathcal{L}(V)$ 中满射但非单射的算子

F^∞ 上的左移算子定义如下

$$S: F^\infty \longrightarrow F^\infty$$

$$(a_1, a_2, a_3, \cdots) \longmapsto (a_2, a_3, \cdots)$$

验证 S 是满射

codomain

$\forall\ v = (a_1, a_2, a_3, \cdots) \in F^\infty$，取 $u = (0, a_1, a_2, \cdots)$

由 S 的定义知 $Su = (a_1, a_2, a_3, \cdots) = v$

即 $v \in \text{Range}\, S$ 故 $F^\infty \subset \text{Range}\, S$.

显然 $\text{Range}\, S \subset F^\infty$. 这就证明了 $\text{Range}\, S = F^\infty$.

所以 S 是满射

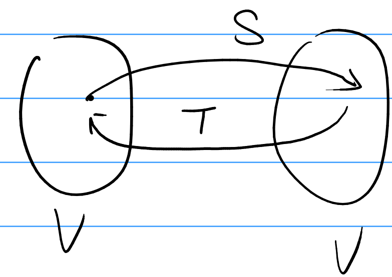
domain　　　　codomain 中的零

再验证 S 不是单射，取 $u = (1, 0, 0, \cdots) \in F^\infty$，由 S 的定义得 $Su = (0, 0, \cdots) = 0$

这就验证了 S 不是单射.

例题: 请证明.

设 $\dim V < \infty$, $T, S \in \mathcal{L}(V)$ 如果 $TS = I$, 那么 $ST = I$



$ST = I$

① 先证 $\operatorname{Range}(T) \supset \operatorname{Range}(TS)$

证明: $\forall\, y \in \operatorname{Range}(TS)$ 那么 存在 $x \in V$.

使得 $(TS)x = y$.

由线性映射乘积的定义知 $T(Sx) = y$.

Recall $S \in \mathcal{L}(V)$, so $Sx \in V$. 也就说 存在

$Sx \in V$, 有 $T(Sx) = y$, 这就证明了 $y \in \operatorname{Range} T$

② $TS = I \Rightarrow \operatorname{Range}(TS) = \operatorname{Range} I = V$.

在①中证了 $\operatorname{Range}(T) \supset \operatorname{Range}(TS)$ 得 $\operatorname{Range} T \supset V$

显然 $\operatorname{Range} T \subset V$. 从而 $\operatorname{Range} T = V$, T 是满射.

$\left.\begin{array}{l}\dim V < \infty \\ T \text{ 是满射}\end{array}\right\} \Rightarrow T$ 是可逆的

$$TS = I$$

两边同时左乘以 T^{-1}，得

$$T^{-1}TS = T^{-1}$$

即 $\quad S = T^{-1}$

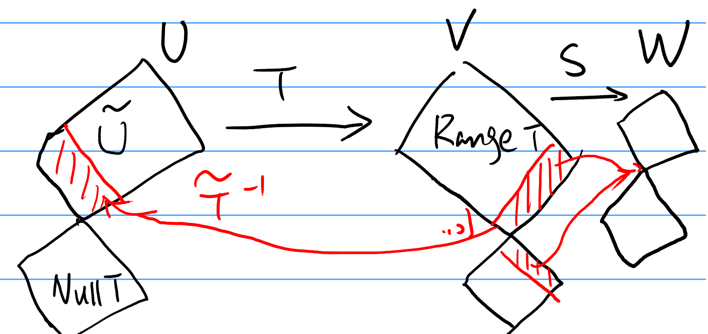
T^{-1} 是唯一的，故 $\underbrace{S}_{S=T^{-1}}T = T^{-1}T = I$

这就证明了 $ST = I$。

例题：设 U and V are finite dimensional vector spaces. $T \in \mathcal{L}(U,V)$, $S \in \mathcal{L}(V,W)$.

证明：$\dim \operatorname{Null} ST \le \dim \operatorname{Null} S + \dim \operatorname{Null} T$

提示：$\left.\begin{array}{l}\dim U < \infty \\ T \in \mathcal{L}(W,V)\end{array}\right\} \Rightarrow \dim V = \dim \operatorname{Null} T + \dim \operatorname{Range} T$



$\exists\ \tilde{U}$ s.t. $U = \tilde{U} \oplus \operatorname{Null} T$

易证 $\dim \tilde{U} = \dim \operatorname{Range} T$

$\tilde{U}$ 和 Range T 同构（因 $\dim \tilde{U} < \infty$）

$\tilde{T} = T|_{\tilde{U}}$ 是 $\tilde{U}$ 和 Range T 之间的同构映射

$\operatorname{Null} ST = \operatorname{Null} T \oplus \tilde{T}^{-1}(\operatorname{Range} T \cap \operatorname{Null} S)$

$\dim \operatorname{Null} ST = \dim \operatorname{Null} T + \dim(\operatorname{Range} T \cap \operatorname{Null} S) \le \dim \operatorname{Null} T + \dim \operatorname{Null} S$.