Chapter 7 内积空间上的算子

Tiao Lu

Peking University

2017.11.29

Introduction

- 上一章我们学习了 $T \in \mathcal{L}(V, W)$ ，$T^* \in \mathcal{L}(W, V)$, 一个知识点: 二者的矩阵 (在规范正交基下) 是互为共轭转置.
- 这一章 $T \in \mathcal{L}(V)$, 也就是说 domain 和 codomain 是一样的线性映射, 此时 $T^* \in \mathcal{L}(V)$
- 内积空间上的算子 $T \in \mathcal{L}(V)$, $T^* \in \mathcal{L}(V)$, 此时, 我们可以研究 T 特征值, $T = T^*$ 的算子 (自伴算子), $T^*T = TT^*$ 的算子 (正规算子).

约定

F 表示实数域或者复数域, V 表示 F 上的有限维非零内积空间.

§7.1 自伴算子与正规算子

算子 $T \in \mathcal{L}(V)$ 称为**自伴的** (**self-adjoint**), 如果 $T = T^*$. 例如, 若 T 是 $\mathbf{F}^2$ 上的算子, 它 (关于标准基) 的矩阵是

$$\begin{bmatrix} 2 & b \\ 3 & 7 \end{bmatrix},$$

则 T 是自伴的当且仅当 $b=3$ (这是因为, $\mathcal{M}(T)=\mathcal{M}(T^*)$ 当且仅当 $b=3$; 回想一下, $\mathcal{M}(T^*)$ 是 $\mathcal{M}(T)$ 的共轭转置 —— 参见 6.47).

你应该验证, 两个自伴算子的和是自伴的, 一个实数和一个自伴算子的乘积是自伴的.

厄米特矩阵

定义 1 (厄米特矩阵)

我们称矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 为厄米特矩阵, 如果 $A = A^*$.

也就是说, 厄米特矩阵 (Hermitian conjugate matrix) 就是等于它的共轭转置的矩阵, 又称为自共轭矩阵 (自己和自己的共轭相等的矩阵)

你可以验证

一个算子是自伴算子等价于它关于某个规范正交基的矩阵是厄米特矩阵.

要记住这样的类比 (尤其当 $\mathbf{F}=\mathbf{C}$ 时): 伴随在 $\mathcal{L}(V)$ 上所起的作用犹如复共轭在 $\mathbf{C}$ 上所起的作用. 复数 z 是实的当且仅当 $z=\bar{z}$; 因而, 自伴算子 $(T=T^*)$ 可与实数类比. 我们将看到, 这种类比也反映在自伴算子的某些重要性质上, 先来看本征值.

7.1 命题: 自伴算子的本征值都是实的.

命题7.1. 自伴算子的特征值都是实的

证明：设 $T \in \mathcal{L}(V)$ 是 self-adjoint，即 $T = T^*$.

设 λ 是 T 的一个特征值，那么存在 $v \neq 0$，使得

$$Tv = \lambda v.$$

命题7.1. 自伴算子的特征值都是实的

证明：设 $T \in \mathcal{L}(V)$ 是 self-adjoint，即 $T = T^*$.

设 λ 是 T 的一个特征值，那么存在 $v \neq 0$，使得

$$Tv = \lambda v. \qquad (1)$$

(1) 式两边同时与 v 做内积，得

$$\langle Tv, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle$$

命题7.1. 自伴算子的特征值都是实的

证明：设 $T \in \mathcal{L}(V)$ 是 self-adjoint，即 $T = T^*$.

设 λ 是 T 的一个特征值，那么存在 $v \neq 0$，使得

$$Tv = \lambda v. \qquad (1)$$

(1) 式两边同时与 v 做内积，得

$$\langle Tv, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle$$

用 T^* 的定义，得 $\quad \langle v, T^* v \rangle = \lambda \langle v, v \rangle$

用 $T = T^*$，得 $\quad \langle v, Tv \rangle = \lambda \langle v, v \rangle$

用 $Tv = \lambda v$，得 $\quad \langle v, \lambda v \rangle = \lambda \langle v, v \rangle$

命题7.1. 自伴算子的特征值都是实的

证明: 设 $T \in \mathcal{L}(V)$ 是 self-adjoint, 即 $T = T^*$.

设 λ 是 T 的一个特征值, 那么存在 $v \neq 0$, 使得

$$Tv = \lambda v. \qquad (1)$$

(1) 式两边同时与 v 做内积, 得

$$\langle Tv, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle$$

用 T^* 的定义, 得 $\langle v, T^* v \rangle = \lambda \langle v, v \rangle$

用 $T = T^*$, 得 $\langle v, Tv \rangle = \lambda \langle v, v \rangle$

用 $Tv = \lambda v$, 得 $\langle v, \lambda v \rangle = \lambda \langle v, v \rangle$

用内积关于 second slot 的共轭齐性, 得 $\bar{\lambda} \langle v, v \rangle = \lambda \langle v, v \rangle$

因为 $v \neq 0$ 所以 $\langle v, v \rangle \neq 0$. 所以 $\bar{\lambda} = \lambda$

命题 7.1. 自伴算子的特征值都是实的

证明：设 $T \in \mathcal{L}(V)$ 是 self-adjoint，即 $T = T^*$.

设 λ 是 T 的一个特征值，那么存在 $v \neq 0$，使得

$$Tv = \lambda v. \qquad (1)$$

(1) 式两边同时与 v 做内积，得

$$\langle Tv, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle$$

用 T^* 的定义，得 $\langle v, T^* v \rangle = \lambda \langle v, v \rangle$

用 $T = T^*$，得 $\langle v, Tv \rangle = \lambda \langle v, v \rangle$

用 $Tv = \lambda v$，得 $\langle v, \lambda v \rangle = \lambda \langle v, v \rangle$

用内积关于 second slot 的共轭齐次性，得 $\bar{\lambda} \langle v, v \rangle = \lambda \langle v, v \rangle$

因为 $v \neq 0$ 所以 $\langle v, v \rangle \neq 0$. 所以 $\bar{\lambda} = \lambda$

所以 $\lambda \in \mathbb{R}$. 从而得证 自伴算子的特征值都是实的.

下一个命题对实内积空间不成立. 例如, 考虑算子 $T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$, 它是绕原点的反时针 $90°$ 旋转, 因此 $T(x,y)=(-y,x)$. 虽然 T 不是 0, 但是对每个 $\boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^2$, $T\boldsymbol{v}$ 显然正交于 $\boldsymbol{v}$.

7.2 命题: 若 V 是复内积空间, T 是 V 上的算子, 使得对所有 $\boldsymbol{v} \in V$ 都有

$$\langle T\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle = 0,$$

则 $T=0$.

思考: 上面的旋转算子看成 $\mathbb{C}^2$ 中的算子,

还是否有 $(Tv, v)=0, \forall v \in \mathbb{C}^2$?

证明：设 V 是复内积空间，$T \in \mathcal{L}(V)$，则对所有 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \in V$，通过计算可得

$$\begin{aligned}\langle T\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}\rangle =& \frac{\langle T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}), \boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}\rangle - \langle T(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}), \boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}\rangle}{4} \\ &+ \frac{\langle T(\boldsymbol{u}+i\boldsymbol{w}), \boldsymbol{u}+i\boldsymbol{w}\rangle - \langle T(\boldsymbol{u}-i\boldsymbol{w}), \boldsymbol{u}-i\boldsymbol{w}\rangle}{4} i.\end{aligned}$$

注意到右端的每一项都具有 $\langle T\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle$ 的形式. 如果对所有 $\boldsymbol{v} \in V$ 都有 $\langle T\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle = 0$，则由上式可知，对所有 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \in V$ 都有 $\langle T\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}\rangle = 0$，从而 $T = 0$ (取 $\boldsymbol{w} = T\boldsymbol{u}$). ■

为得到推论 7.3 做的准备

命题

设 T 是复内积空间上的算子. 则 $T = T^* \Rightarrow \langle Tv, v\rangle \in \mathbb{R}, \forall v \in V$.
黑板上证明一下.
顺便说一下: 如果 T 是实内积空间上的算子, 无论 T 是不是自伴算子, 都有 $\langle Tv, v\rangle \in \mathbb{R}$ 成立.

上面命题的反命题是否成立?

成立. 这就是我们课本上推论 7.3. 黑板上证明一下.
我们要从 $\langle Tv, v\rangle \in \mathbb{R}$ 推导出 $T = T^*$(也就是 T 是自伴算子).

证明上一页的命题的反命题

$\langle Tv, v\rangle \in \mathbb{R}$

利用实数的共轭还是它自身

$\langle Tv, v\rangle = \overline{\langle Tv, v\rangle}$

利用内积的共轭对称性

$\langle Tv, v\rangle = \langle v, Tv\rangle$

对上面式子的左边利用伴随算子的定义

$\langle v, T^* v\rangle = \langle v, Tv\rangle$

利用内积对第二个参数的共轭线性

$\langle v, (T^* - T)v\rangle = 0$

利用内积的共轭对称性

$\langle (T^* - T)v, v\rangle = 0$

利用复内积空间上的算子 S, 如果满足 $\langle Sv, v\rangle = 0, \forall v \in V$, 那么 $S = 0$ 就得到 $T^* = T$.

课本上的推论 7.3

推论 2

设 T 是复内积空间上的算子. 则 $T = T^* \Leftrightarrow \langle Tv, v\rangle \in \mathbb{R}, \forall v \in V$.

实内积空间上的算子

举例 3 (旋转算子)

设 $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, T 在标准基下的矩阵是

$$\mathcal{M}(T) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

这是一个反对称矩阵 (转置与它的自己差一个负号的实矩阵).

例子的意义: T 是实内积空间上的算子，因此推论 7.3 不适用.

显然 $(Tv, v) \in \mathbb{R}$, 但是 $T \neq T^*$.

例子还告诉我们：命题 7.2 对实内积空间也不适用

$\langle Tv, v\rangle = 0, \forall v \in V$ 但是 $T \neq 0$.

一个自伴算子是 0 的条件 I

如果想得到下面的结论

$$\langle Tv, v\rangle = 0, \forall v \in V \Rightarrow T = 0$$

但是想要抛弃 V 是复内积空间, 那么需要增加什么条件?

我们只需要增加一个条件: $T = T^*$, 此时仍然有 $\langle Tv, v\rangle = 0, \forall v \in V \Rightarrow T = 0$ 成立.

推论 4 (推论 7.4)

设 $T \in \mathcal{L}(V)$ 是内积空间 V 上的一个自伴算子, 那么如果

$$\langle Tv, v\rangle = 0, \forall v \in V,$$

那么 $T = 0$.

一个自伴算子是 0 的条件 II

Proof.

如果 V 是复内积空间, 我们已经在命题 7.2 中证明了. 这里只需要证明 V 是实内积空间的情形.
因为 T 是实内积空间上的自伴算子, 因此有

$$\langle Tu, w\rangle = \langle u, Tw\rangle$$

实内积空间上内积具有对称性, 故

$$\langle u, Tw\rangle = \langle Tw, u\rangle$$

有了上面两个公式, 我们很有点像下面的公式

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab, \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

计算可以发现下面的式子对任意的 $u, w \in V$ 都成立

$$\langle T(u+w), u+w\rangle - \langle T(u-w), u-w\rangle = 4\langle Tu, w\rangle$$

这意味着我们可以从 $\langle Tv, v\rangle = 0, \forall v \in V$ 得到 $\langle Tu, w\rangle = 0, \forall u, w \in W$. 特别的取 $w = Tu$, 我们就得到 $\langle Tu, Tu\rangle = 0, \quad \forall u \in V$, 从而 $Tu = 0, \forall u$.

下面我们讨论正规算子 (normal operator).

内积空间上的算子称为**正规的 (normal)**, 如果它和它的伴随交换; 也就是说, $T \in \mathcal{L}(V)$ 是正规的当且仅当

$$TT^* = T^*T.$$

自伴算子显然是正规的. 为了举出一个非自伴的正规算子的例子, 考虑 $\mathbf{F}^2$ 上 (关于标准基) 具有如下矩阵的算子,

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

这个算子显然不是自伴的, 但是容易证明它是正规的 (你应该证一下).

我们马上就会看到正规算子值得特别关注的原因. 下一个命题给出了正规算子的一个简单刻划.

7.6 命题: 算子 $T \in \mathcal{L}(V)$ 是正规的当且仅当对所有 $v \in V$ 都有

$$\|T\boldsymbol{v}\| = \|T^*\boldsymbol{v}\|.$$

命题 7.6 的证明 I

Proof.

先证明 $T^*T = TT^* \Rightarrow \|Tv\| = \|T^*v\|, \forall v \in V.$

$$\|Tv\| = \langle Tv, Tv\rangle = \langle v, T^*Tv\rangle$$

利用 $T^*T = TT^*$

$$= \langle v, TT^*v\rangle$$

利用 $(T = (T^*)^*$

$$= \left\langle v, (T^*)^* T^*v\right\rangle$$

利用共轭算子的定义

$$= \langle T^*v, T^*v\rangle$$

$$= \|T^*v\|$$

$\square$

命题 7.6 的证明 II

Proof.

再证明 $\|Tv\| = \|T^*v\|, \forall v \in V \Rightarrow T^*T = TT^*$

$$\|Tv\| = \langle Tv, Tv\rangle = \langle v, T^*Tv\rangle$$

$$\|T^*v\| = \langle T^*v, T^*v\rangle = \langle v, TT^*v\rangle$$

利用内积对第二个变量是共轭线性的

$$\langle v, T^*Tv\rangle - \langle v, TT^*v\rangle = \langle v, (T^*T - TT^*)v\rangle$$

这样由 $\|Tv\| = \|T^*v\|$ 可得上式的左端为 0, 从而右端也有

$$\langle v, (T^*T - TT^*)v\rangle = 0, \forall v \in V.$$

再由内积的共轭对称性, 我们得到

$$\langle (T^*T - TT^*)v, v\rangle = 0, \forall v \in V.$$

显然 $(T^*T - TT^*)$ 是一个自伴算子, 于是上面的式子就意味着 $T^*T - TT^* = 0$ (这是根据推论 7.4).

正规算子和非正规算子的差别 I

正规算子和非正规算子的差别 II

举例 5 (非正规算子)

$S \in \mathbb{R}^2$ *is defined by*

$$Se_1 = 0, \quad Se_2 = e_1.$$

显然 0 是 S 的特征值, e_1 是相应的特征向量 (只有一个特征向量).

$$\mathcal{M}(S) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

我们知道 S^* 的矩阵等于 S 矩阵的共轭转置 (因为 e_1, e_2 是规范正交基)

$$\mathcal{M}(S^*) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

那么

$$S^* e_1 = e_2, \quad S^* e_2 = 0.$$

总结: S 的特征值 0 的复共轭还是 S^* 的特征值, 但是相应的特征向量 e_1 不是 S^* 的 *eigenvector* .

S 不是一个正规算子 (normal operator)

我们可以验证

$$\mathcal{M}(S^*S) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{M}(SS^*) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S^*S \neq SS^*$$

正规算子

T 不是正规算子, 我们不能指望它的特征向量还是 T^* 的特征向量, 但是对于正规算子, 我们有这样的结论. 请看推论 7.7.

正规算子的特征值和特征向量

推论 6 (推论 7.7)

设 $T \in \mathcal{L}(V)$ 是正规算子. 如果 $Tv = \lambda v$, 那么 $T^* v = \bar{\lambda} v$. 也就是说, 如果 v 是 T 的关于 λ 的特征向量, 那么它也是 T^* 关于 $\bar{\lambda}$ 的特征向量.

推论 7.7 的证明

推论 7.7：设 $T\in\mathcal{L}(V)$ 是正规算子，如果 $Tv=\lambda v$，那么 $T^*v=\bar{\lambda}v$。也就是说，如果 v 是 T 的关于 λ 的特征向量，那么 v 也是 T^* 的关于 $\bar{\lambda}$ 的特征向量。

证明：设 $v\neq 0$ $\quad Tv=\lambda v$ ①

再由 T 是正规算子 (normal operator) 知 $TT^*=T^*T$

$(T-\lambda I)$ 的伴随算子是 $(T^*-\bar{\lambda}I)$

由命题 7.6 知 $\|(T^*-\bar{\lambda}I)v\|=\|(T-\lambda I)v\|$ ②

由①②知 $\|(T^*-\bar{\lambda}I)v\|=0$，从而知 v 是 T^* 的属于 $\bar{\lambda}$ 的特征向量。 $\square$

推论7.7的证明

推论7.7：设 $T \in \mathcal{L}(V)$ 是正规算子，如果 $Tv = \lambda v$，那么 $T^* v = \bar{\lambda} v$。也就是说，如果 v 是 T 的关于 λ 的特征向量，那么 v 也是 T^* 的关于 $\bar{\lambda}$ 的特征向量。

证明：设 $v \neq 0$　$Tv = \lambda v$　①

再由 T 是正规算子 (normal operator) 知 $TT^* = T^*T$.

推论7.7 的证明

推论7.7：设 $T \in \mathcal{L}(V)$ 是正规算子，如果 $Tv = \lambda v$，那么 $T^* v = \bar{\lambda} v$. 也就是说，如果 v 是 T 的关于 λ 的特征向量，那么它也是 T^* 的关于 $\bar{\lambda}$ 的特征向量。

证明：设 $v \neq 0$　$Tv = \lambda v$　①

再由 T 是正规算子 (normal operator) 知 $TT^* = T^*T$.

命题7.6说　如果 $SS^* = S^*S$. 那么 $\|Sv\| = \|S^*v\|$.

我们将对 $T - \lambda I$ 应用命题7.6.

$$(T-\lambda I)(T^*-\bar{\lambda} I) = TT^* - \bar{\lambda} T - \lambda T^* + \lambda\bar{\lambda} I$$

推论7.7的证明

推论7.7：设 $T\in\mathcal{L}(V)$ 是正规算子，如果 $Tv=\lambda v$，那么 $T^*v=\bar{\lambda}v$。也就是说，如果 v 是 T 的关于 λ 的特征向量，那么它也是 T^* 的关于 $\bar{\lambda}$ 的特征向量。

证明：设 $v\neq 0$　$Tv=\lambda v$　①

再由 T 是正规算子（normal operator）知 $TT^*=T^*T$.

命题7.6说　如果 $SS^*=S^*S$，那么 $\|Sv\|=\|S^*v\|$.

我们将对 $T-\lambda I$ 应用命题7.6.

$$(T-\lambda I)(T^*-\bar{\lambda}I)=TT^*-\bar{\lambda}T-\lambda T^*+\lambda\bar{\lambda}I$$

$$(T^*-\bar{\lambda}I)(T-\lambda I)=T^*T-\lambda T^*-\bar{\lambda}I+\bar{\lambda}\lambda I$$

推论7.7的证明

推论7.7：设 $T\in\mathcal{L}(V)$ 是正规算子，如果 $Tv=\lambda v$，那么 $T^*v=\bar{\lambda}v$. 也就是说，如果 v 是 T 的关于 λ 的特征向量，那么 v 也是 T^* 的关于 $\bar{\lambda}$ 的特征向量。

证明：设 $v\neq 0$　　$Tv=\lambda v$　　①

再由 T 是正规算子 (normal operator) 知 $TT^*=T^*T$

$(T-\lambda I)$ 的伴随算子是 $(T^*-\bar{\lambda}I)$ 且 $T-\lambda I$ 也是正规算子

对 $(T-\lambda I)$ 应用命题7.6，得 $\|(T^*-\bar{\lambda}I)v\|=\|(T-\lambda I)v\|$　　②

由①②知 $\|(T^*-\bar{\lambda}I)v\|=0$. 从而知 v 是 T^* 的属于 $\bar{\lambda}$ 的特征向量. □

因为自伴算子是正规的，所以下一个结果也适用于自伴算子.

7.8 推论： 如果 $T \in \mathcal{L}(V)$ 是正规的，那么 T 的相应于不同本征值的本征向量是正交的.

推论 7.8 的证明详细过程 I

已知

$$Tu = \alpha u, Tv = \beta v, u \neq 0, v \neq 0, \alpha \neq \beta$$

要证明 $u \perp v$.

$$\langle v, Tu \rangle = \langle v, \alpha u \rangle$$

利用 T^* 的定义

$$\langle T^* v, u \rangle = \langle v, \alpha u \rangle$$

T 是正规算子的特征向量还是它的伴随算子的特征向量 (推论 7.7) 得到

$$\langle \bar{\beta} v, u \rangle = \langle v, \alpha u \rangle$$

利用内积关于第一个参数是线性的, 关于第二个参数是共轭线性的性质, 得到

$$\langle v, \beta u \rangle = \langle v, \alpha u \rangle$$

$$\langle v, (\beta - \alpha) u \rangle = 0$$

推论 7.8 的证明详细过程 II

$$\left(\bar{\beta}-\bar{\alpha}\right)\langle v, u\rangle=0$$

再由 $(\beta-\alpha) \neq 0$, 得到

$$\langle v, u\rangle=0.$$

Homework

1. 按照下面的定义, $\mathcal{P}_2(\mathbf{R})$ 是内积空间,

$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\mathrm{d}x.$$

定义 $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_2(\mathbf{R}))$ 使得 $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1x$.

(a) 证明 T 不是自伴的.

(b) T 关于基 $(1, x, x^2)$ 的矩阵是

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

虽然 T 不是自伴的, 但是这个矩阵却和它的共轭转置相等. 解释为什么这并不矛盾.

2. 证明或举反例：有限维内积空间上的两个自伴算子之积是自伴的.

提示：设 $S=S^*$，$T=S^*$，那么 $(ST)^*=T^*S^*=TS$

$(ST)^*$ 和 ST 不一定相等，除非 $ST=TS$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 17 & 32 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 17 \\ 5 & 26 \end{bmatrix}$$

3. (a) 证明：若 V 是实内积空间，则 V 上的自伴算子之集是 $\mathcal{L}(V)$ 的子空间.

   (b) 证明：若 V 是复内积空间，则 V 上的自伴算子之集不是 $\mathcal{L}(V)$ 的子空间.

4. 设 $P \in \mathcal{L}(V)$ 使得 $P^2 = P$. 证明 P 是正交投影当且仅当 P 是自伴的.

5. 证明：若 $\dim V \geqslant 2$，则 V 上的正规算子之集不是 $\mathcal{L}(V)$ 的子空间.

提示 for Problem 4. $P^2 = P \Leftrightarrow P(P-I) = 0$

P 是自伴的. $\Leftrightarrow P^* = P$

$\mathrm{null}\, P = (\mathrm{range}\, P^*)^\perp = (\mathrm{range}\, P)^\perp$

$V = \mathrm{null}\, P \oplus \mathrm{range}\, P$. 而且是正交直和

$\forall\ w \in \mathrm{range}\, P$,

$P|_{\mathrm{range}\, P} \in \mathcal{L}(\mathrm{range}\, P)$ 是单射

$\forall\ w \in \mathrm{range}\, P$,

$(P^2 - P)w = 0$ 即 $P(P-I)w = 0$

由 $P|_{\mathrm{range}\, P}$ 是单射知 $(P-I)w = 0$, 即 $Pw = w$.

这就证明了 P 是一个投影。

提示 for Problem 5. 设 $\dim V \geq 2$ 要证 正规算子不是 $\mathcal{L}(V)$ 的子空间.

如果 $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ 是一个自伴算子, $S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ 是一个正规算子

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

一般情况下. 设 $V = \mathrm{span}(e_1, e_2, \dots, e_n)$ $T: V \to V$ defined by

标准正交基

$$Te_1 = e_1$$
$$Te_2 = 2e_2$$
$$Te_i = 0 \quad i = 3, \dots, n$$

$S: V \to V$ defined by

$$Se_1 = -e_2$$
$$Se_2 = e_1$$
$$Se_i = 0 \quad i = 3, \dots, n$$

you can check T and S are normal (正规) operators but $S+T$ is not normal (正规).

6. 证明：若 $T \in \mathcal{L}(V)$ 是正规的，则

$$\operatorname{range} T = \operatorname{range} T^*.$$

7. 证明：若 $T \in \mathcal{L}(V)$ 是正规的，则对每个正整数 k 都有

$$\operatorname{null} T^k = \operatorname{null} T, \quad \operatorname{range} T^k = \operatorname{range} T.$$

提示 for problem 6. 若 $T \in \mathcal{L}(V)$ 是一个 normal operator,

即 $T^*T = TT^*$. 则 range T = range T^*

T 是 normal operator, so. $\|T^*v\| = \|Tv\|$ for all $v \in V$

这就意味着 $Tv = 0 \iff T^*v = 0$

so null T = null T^*. ①

由 Fredholm 二择一定理知 range $T = (\text{null}\, T^*)^\perp$ ②

range $T^* = (\text{null}\, T)^\perp$ ③

由 ①②③. 知 range T = range T^*

Hints for problem 7 设 $TT^* = T^*T$

那么是不是也能证明 T^k 是正规算子呢？

$$(T^2)(T^2)^* = (T^2)(T^*)^2 = TTT^*T^* \quad \text{换成 } T^*T$$

$$= TT^*TT^* = T^*TTT^*$$

$$= \cdots = (T^*)^2T^2 = (T^2)^*T^2$$

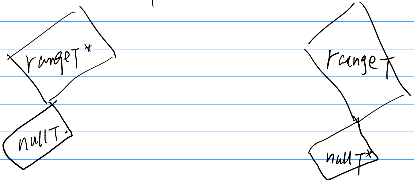
$\operatorname{null} T \subset \operatorname{null} T^k$ $\quad \operatorname{range} T^k \subset \operatorname{range} T$

$V = \operatorname{null} T^k \oplus \operatorname{range} T^k$ 正交直和

$V = \operatorname{null} T \oplus \operatorname{range} T$ 正交直和.

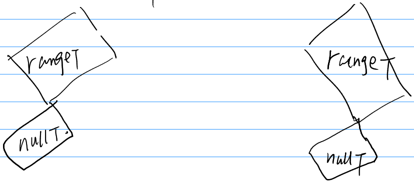
这似乎表明：$\operatorname{null} T^k$ 随 k 而增加而变大，$\operatorname{range} T^k$ 随着 k 而增加而减少也是可能发生的.

$T \in \mathcal{L}(V)$



$T \in \mathcal{L}(V)$ 且 T 是 normal operator

range T^* = range T



null T^* = null T.

$T|_{\text{range}\,T}$: range $T \rightarrow$ range T 是一个单射.

这会导致 T^k 的 range 不会减小， T^k 的 null space 不会扩大

8. 证明没有自伴算子 $T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$ 能使得

$$T(1,2,3) = (0,0,0), \quad T(2,5,7) = (2,5,7).$$

Hints for Problem 8.

方法一：

自伴算子的不同特征的特征向量是正交的。

$T(1,2,3) = (0,0,0)$

$T(2,5,7) = (2,5,7)$

$(1,2,3)$ 是特征向量吗？ $(2,5,7)$ 呢？

方法二：$(1,2,3) \in \operatorname{null} T$，$(2,5,7) \in \operatorname{range} T$

自伴算子的 null T 和 range T 是正交的

但 $(1,2,3)$ 和 $(2,5,7)$ 不正交

命题7.2证明的一个细节.

$$
\begin{aligned}
\langle Tu, w\rangle &= \frac{1}{4}\Big(\langle T(u+w), u+w\rangle - \langle T(u-w), u-w\rangle\Big) \\
&\quad + \frac{i}{4}\Big(\langle T(u+iw), u+iw\rangle - \langle T(u-iw), u-iw\rangle\Big) \\
&= \frac{1}{4}\Big[\big(\langle Tu, u\rangle + \langle Tu, w\rangle + \langle Tw, u\rangle + \langle Tw, w\rangle\big) \\
&\qquad - \big(\langle Tu, u\rangle + \langle Tu, -w\rangle + \langle T(-w), u\rangle + \langle T(-w), -w\rangle\big)\Big] \\
&\quad + \frac{i}{4}\Big[\big(\langle Tu, u\rangle + \langle Tu, iw\rangle + \langle T(iw), u\rangle + \langle T(iw), iw\rangle\big) \\
&\qquad - \big(\langle Tu, u\rangle + \langle Tu, -iw\rangle + \langle T(-iw), u\rangle + \langle T(-iw), -iw\rangle\big)\Big] \\
&= \frac{1}{2}\Big(\langle Tu, w\rangle + \langle Tw, u\rangle\Big) + \frac{i}{2}\Big(-i\langle Tu, w\rangle + i\langle Tw, u\rangle\Big) \\
&= \langle Tu, w\rangle
\end{aligned}
$$