7.3 实内积空间上的正规算子

Tiao Lu

Peking University

2017.12.2

分块矩阵

在下面几页 PPT 中解释一下什么叫做块对角矩阵.

实内积空间上的正规算子

$T \in \mathcal{L}(V)$, 其中 V 是实内积空间. 在实数域上的特征值和特征向量的定义要求特征值 $\lambda \in \mathbb{R}$. 例如旋转算子

$$Te_1 = e_2, Te_2 = -e_1.$$

$$\mathcal{M}\left(T, (e_1, e_2)\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

这个算子是没有实数特征值的. 所以我们无法找到 V 的一个规范正交基, 使得正规算子 T 的矩阵 $\mathcal{M}(T)$ 是上三角矩阵.

构造复内积空间 I

设 $T \in \mathcal{L}(V)$ 是一个正规算子, 其中 V 是一个 n 维实内积空间. 我们引入一个复线性空间 $\widetilde{V}$, 和复线性空间上的算子 $\widetilde{T} \in \mathcal{L}(\widetilde{V})$.

做法如下:

取 V 的一个规范正交基 $e_1, \cdots, e_n$

$$\widetilde{V} := \left\{ \sum_{j=1}^{n} c_j e_j : c_j \in \mathbb{C}, j = 1, \cdots, n \right\}$$

$\widetilde{V}$ 是一个复内积空间

定义 $\widetilde{V}$ 的内积如下

$$\langle c_j e_j, d_k e_k \rangle_{\widetilde{V}} = c_j \bar{d}_k \langle e_j, e_k \rangle_V$$

我们很容易验证我们定义的的确是一个内积, 于是 $\widetilde{V}$ 配上我们定义的内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\widetilde{V}}$ 就构成了一个复内积空间.

构造复内积空间 II

$\widetilde{V}$ 上的基

V 的正交规范基 $(e_1, \cdots, e_n)$ 也是 $\widetilde{V}$ 上的一个规范正交基. 这个从构造来看, $(e_1, \cdots, e_n)$ 是 $\widetilde{V}$ 的基, 计算一下它们的长度和相互的正交性, 就可以看出来.

构造一个复内积空间上的线性算子 $\widetilde{T}$

$$\widetilde{T}(\sum_{j=1}^{n} c_j e_j) := \sum_{j=1}^{n} c_j T e_j, \quad c_j \in \mathbb{C}, j = 1, \cdots, n.$$

例子

回想刚才的例子 $T \in \mathcal{L}(V)$, 其中 V 是实内积空间. 旋转算子

$$Te_1 = e_2, Te_2 = -e_1.$$

原来的实内积空间 $V = \{a_1 e_1 + a_2 e_2 : \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$.
我们定义的 $\widetilde{V} = \{c_1 e_1 + c_2 e_2; \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}\}$. $\widetilde{T}$ 上的旋转算子

$$\tilde{T}e_1 = e_2, \tilde{T}e_2 = -e_1.$$

$$\mathcal{M}\left(\widetilde{T}, (e_1, e_2)\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

例如 $\widetilde{T}((3+i)e_1 + (5-i)e_2) = (3+i)Te_1 + (5-i)T_e 2 = (3+i)e_2 + (-5+i)e_1$.

$\widetilde{T} \in \mathcal{L}(\widetilde{V})$

我们能验证 T 是线性算子. 而且, 当 $v \in V \subset \widetilde{V}$ 时, $\widetilde{T}v = Tv \in V$. 这意味着 $T = \widetilde{T}\Big|_V$.

算子的矩阵

$$\mathcal{M}\left(\widetilde{T}, (e_1, \cdots, e_n)\right) = \mathcal{M}\left(T, (e_1, \cdots, e_n)\right) \tag{1}$$

复内积空间上 $\widetilde{V}$ 上的算子 IV

$\widetilde{T}$ 是复内积空间上的正规算子

由于 T 是正规算子, 因此

$$\left(\mathcal{M}\left(T,(e_j)\right)\right)^* \mathcal{M}\left(T,(e_j)\right) = \mathcal{M}\left(T,(e_j)\right)\left(\mathcal{M}\left(T,(e_j)\right)\right)^*$$

利用(**??**), 我们知道

$$\left(\mathcal{M}\left(\widetilde{T},(e_j)\right)\right)^* \mathcal{M}\left(\widetilde{T},(e_j)\right) = \mathcal{M}\left(\widetilde{T},(e_j)\right)\left(\mathcal{M}\left(\widetilde{T},(e_j)\right)\right)^*$$

因此 $\widetilde{T}$ 是正规算子.

$\widetilde{T}$ 的谱分解 I

$\widetilde{T}$ 是复内积空间 $\widetilde{V}$ 上的正规算子, 因此根据复谱分解定理知道存在一个规范正交基

$$\begin{aligned} f_1 &= a_{j,1}e_j + ib_{j,1}e_j \\ &\vdots \\ f_n &= a_{j,n}e_j + ib_{j,n}e_j \end{aligned}$$

其中 $a_{j,k}, b_{j,k}$ 都是实数, $i = \sqrt{-1}$. 使得 $\widetilde{T}$ 的矩阵是对角阵, 对角元是 $\widetilde{T}$ 的特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$.

$\widetilde{T}$ 的特征值向量 I

设 $\lambda = \alpha + i\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) 是 $\widetilde{T}$ 的一个实特征值, $\psi = a_j e_j + i b_j e_j$ 是相应的一个特征向量. 那么

$$\widetilde{T}(a_j e_j + i b_j e_j) = \lambda(a_j e_j + i bj e_j)$$

根据 $\widetilde{T}$ 的定义知道

$$a_j T e_j + i b_j T e_j = \lambda a_j e_j + i\lambda b_j e_j$$

把 $\lambda = \alpha + i\beta$ 代入, 得到

$$a_j T e_j + i b_j T e_j = [\alpha a_j e_j - \beta b_j e_j] + i[\beta a_j e_j + \alpha b_j e_j]$$

要注意 $Te_j \in V$, 也就是说 Te_j 一定可以表达成 e_j 的实系数的线性组合. 再注意到 α, β, a_j, b_j 都是实数, 因此

$$a_j T e_j = [\alpha a_j e_j - \beta b_j e_j]$$

$$b_j T e_j = [\beta a_j e_j + \alpha b_j e_j]$$

$\widetilde{T}$ 的特征值向量 II

如果 $\beta = 0$, 我们就得到

$$a_j T e_j = \alpha a_j e_j$$

$$b_j T e_j = \alpha b_j e_j$$

这说明, 我们可以取到一个实的特征值向量, 这个特征向量和其他的特征值向量都正交, 然后我们把它的长度放缩到 1.

如果 $\beta \neq 0$, 我们可以验证

$$\widetilde{T}(a_j e_j - i b_j e_j) = (\alpha - i\beta)(a_j e_j - i b_j e_j)$$

这说明 λ 可定是成对共轭出现的, 而且对于一个 normal operator, 它的属于不同的特征值的特征向量是正交的. 这意味着 $a_j e_j + i b_j e_j$ 和 $a_j e_j - i b_j e_j$ 是正交的, 这首先意味着 $a_j e_j, b_j e_j$ 是 $\widetilde{V}$ 中线性无关的向量, 当然也是 V 中线性无关的两个向量, 其次还意味着

$$\langle a_j e_j + i b_j e_j, a_j e_j - i b_j e_j \rangle_{\widetilde{V}} = 0$$

按照我们对 $\widetilde{V}$ 内积的定义计算, 我们得到

$$\langle a_j e_j + i b_j e_j, a_j e_j - i b_j e_j \rangle_{\widetilde{V}} = \sum_{j=1}^{n} (a_j + i b_j)\overline{a_j - i b_j}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (a_j^2 - b_j^2) + i2 \sum_{j=1}^{n} (a_j b_j)$$

一对共轭的非实特征值对 II

上面的式子要等于 0, 必然有

$$\sum_{j=1}^{n}(a_j b_j) = 0$$

这就是说 $a_j e_j$ 和 $b_j e_j$ 作为实内积空间中的两个向量, 它们的内积是 0. 也就是说 $a_j e_j$ 和 $b_j e_j$ 是正交的.
再加上, 我们原来推出的

$$a_j T e_j = [\alpha a_j e_j - \beta b_j e_j]$$

$$b_j T e_j = [\beta a_j e_j + \alpha b_j e_j]$$

我们知道 $a_j e_j$ 和 $b_j e_j$ 是相互垂直的, 而且可以张成 T 的一个二维不变子空间. 这个二维不变子空间是和其他的特征向量都是垂直的, 我们可以把它们的长度弄放缩到 1.

小结

我们就是要利用复内积空间上的 $\widetilde{T}$ 的对角化的结果来到寻找一个实内积空间的基, 当 $\widetilde{T}$ 的特征值是实数的时候, 我们就把那个特征向量选成是实向量 (也就是 e_j 的系数都是实数), 如果 $\widetilde{T}$ 的特征值是一对共轭复特征值 (一定是成对出现的), 我们就把选择这个特征值向量的实部和虚部 (分别都是实向量), 使得它们张成的空间是 T 的一个二维不变子空间. 这样我们就可以得到下面的实内积空间上的正规算子的分解定理.

定理 7.25

Theorem 1

定理 *7.25* 假设 V 是实内积空间, 并且 $T \in \mathcal{L}(V)$, 则 T 是正规算子当且仅当 V 有规范正交基使得 T 关于此基有分块对角矩阵, 并且每个块都是 1×1 矩阵或如下形式的 2×2 矩阵

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \quad b > 0. \tag{2}$$

Homework

Problems 6-10.
提示见 lectureLA15hw.pdf (见 ftp)