FGV DIREITO RIO

Aula 9 – Jogos Sequenciais I

Teoria da Decisão – 2023.1

Lucas Thevenard

Roteiro da Aula

- Recapitulando os problemas estratégicos estudados
  - Definição de jogo, Conceitos de solução, Cooperação, Coordenação
- Calculando equilíbrios em estratégias mistas
- Jogos Sequenciais

1. Recapitulando os problemas estratégicos estudados

Recapitulando

- Jogos: situação estratégica
- Solução por Dominância - conceito forte, mas incompleto
- Solução por Equilíbrio de Nash - aspecto dinâmico, completo
    - Estratégias puras - melhores respostas se estabilizam
    - Estratégias mistas - inclui aleatoriedade (melhor não ser previsível)
- Problema da cooperação – dilema dos prisioneiros
- Problema da coordenação - 4 jogos clássicos

Observe o jogo abaixo

	D	E	F
A	(3, 2)	(1, 1)	(0, 4)
B	(1, 1)	(2, 3)	(0, 4)
C	(4, 0)	(4, 0)	(1, 1)

Observe o jogo abaixo

	D	E	F
A	(3, 2)	(1, 1)	(0, 4)
B	(1, 1)	(2, 3)	(0, 4)
C	(4, 0)	(4, 0)	(1, 1)

Observe o jogo abaixo

	D	E	F
A	(3, 2)	(1, 1)	(0, 4)
B	(1, 1)	(2, 3)	(0, 4)
C	(4, 0)	(4, 0)	(1, 1)

FGV DIREITO RIO

Observe o jogo abaixo

	D	E	F
A	(3, 2)	(1, 1)	(0, 4)
B	(1, 1)	(2, 3)	(0, 4)
C	(4, 0)	(4, 0)	(1, 1)

FGV DIREITO RIO

Observe o jogo abaixo

	D	E	F
A	(3, 2)	(1, 1)	(0, 4)
B	(1, 1)	(2, 3)	(0, 4)
C	(4, 0)	(4, 0)	(1, 1)

FGV DIREITO RIO

Observe o jogo abaixo

	D	E	F
A	(3, **2**)	(1, **1**)	(0, **4**)
B	(1, 1)	(2, 3)	(0, 4)
C	(4, 0)	(4, 0)	(1, 1)

Observe o jogo abaixo

	D	E	F
A	(3, 2)	(1, 1)	(0, 4)
B	(1, **1**)	(2, **3**)	(0, **4**)
C	(4, 0)	(4, 0)	(1, 1)

Observe o jogo abaixo

	D	E	F
A	(3, 2)	(1, 1)	(0, 4)
B	(1, 1)	(2, 3)	(0, 4)
C	(4, 0)	(4, 0)	(1, 1)

FGV DIREITO RIO

Observe o jogo abaixo

	D	E	<u>F</u>
A	(3, 2)	(1, 1)	(0, <u>4</u>)
B	(1, 1)	(2, 3)	(0, <u>4</u>)
<u>C</u>	(<u>4</u>, 0)	(<u>4</u>, 0)	(<u>1</u>, <u>1</u>)

FGV DIREITO RIO

Observe o jogo abaixo

	D	E	F
A	(3, 2)	(1, 1)	(0, 4)
B	(1, 1)	(2, 3)	(0, 4)
C	(4, 0)	(4, 0)	(1, 1)

- Os dois jogadores possuem estratégias dominantes.

  Solução: (C, F)

- Mas esse equilíbrio é benéfico para os jogadores?
  - Qual seria o resultado se jogassem infinitas vezes?

FGV DIREITO RIO

Observe o jogo abaixo

	D	E	~~F~~
A	(3, 2)	(1, 1)	~~(0, 4)~~
B	(1, 1)	(2, 3)	~~(0, 4)~~
~~C~~	~~(4, 0)~~	~~(4, 0)~~	~~(1, 1)~~

- Os dois jogadores possuem estratégias dominantes.

Solução: (C, F)

- Mas esse equilíbrio é benéfico para os jogadores?
    - Qual seria o resultado se jogassem infinitas vezes?

Observe o jogo abaixo

	D	E
A	(3, 2)	(1, 1)
B	(1, 1)	(2, 3)

Observe o jogo abaixo

	D	E
A	(3, 2)	(1, 1)
B	(1, 1)	(2, 3)

FGV DIREITO RIO

Observe o jogo abaixo

	D	E
A	(<u>3</u>, 2)	(1, 1)
B	(1, 1)	(<u>2</u>, 3)

FGV DIREITO RIO

Observe o jogo abaixo

	D	E
A	(<u>3</u>, 2)	(1, 1)
B	(1, 1)	(<u>2</u>, 3)

FGV DIREITO RIO

Observe o jogo abaixo

	D	E
A	(3, 2)	(1, 1)
B	(1, 1)	(2, 3)

Observe o jogo abaixo

	D	E
A	(3, 2)	(1, 1)
B	(1, 1)	(2, 3)

Observe o jogo abaixo

	D	E
A	(<u>3</u>, <u>2</u>)	(1, 1)
B	(1, 1)	(<u>2</u>, <u>3</u>)

FGV DIREITO RIO

Observe o jogo abaixo

	D	E
A	(3, 2)	(1, 1)
B	(1, 1)	(2, 3)

- O novo jogo envolve um problema de coordenação. Que jogo é esse?
  - Jogo da Batalha dos Sexos.

Solução: { (A, D), (B, E) }

2. Calculando equilíbrios em estratégias mistas

IMPORTANTE

Respire fundo e tenha brio!

- Esse é o conceito de solução mais sofisticado que teremos no curso.
- O John Nash é um gênio mesmo??
    - Resposta: **SIM!**

FGV DIREITO RIO

Jogo "Run or Pass" (futebol americano)

Defesa

Ataque

	Defende o Passe	Defende a Corrida
Passe	(2, -2)	(17, -17)
Corrida	(6, -6)	(1, -1)

FGV DIREITO RIO

Jogo "Run or Pass" (futebol americano)

Defesa

Ataque

	Defende o Passe	Defende a Corrida
Passe	(2, -2)	(17, -17)
Corrida	(6, -6)	(1, -1)

FGV DIREITO RIO

Jogo "Run or Pass" (futebol americano)

Defesa

Ataque		Defende o Passe	Defende a Corrida
	Passe	(2, -2)	(<u>17</u>, -17)
	Corrida	(<u>6</u>, -6)	(1, -1)

FGV DIREITO RIO

Jogo "Run or Pass" (futebol americano)

Defesa

		Defende o Passe	Defende a Corrida
Ataque	Passe	(2, -2)	(17, -17)
	Corrida	(6, -6)	(1, -1)

FGV DIREITO RIO

Jogo "Run or Pass" (futebol americano)

Defesa

		Defende o Passe	Defende a Corrida
Ataque	Passe	(2, -2)	(17, -17)
	Corrida	(6, -6)	(1, -1)

FGV DIREITO RIO

Jogo "Run or Pass" (futebol americano)

Defesa

Ataque

	Defende o Passe	Defende a Corrida
Passe	(2, -2)	(17, -17)
Corrida	(6, -6)	(1, -1)

FGV DIREITO RIO

Jogo "Run or Pass" (futebol americano)

Defesa

Ataque		Defende o Passe	Defende a Corrida
	Passe	(2, -2)	(17, -17)
	Corrida	(6, -6)	(1, -1)

Não há solução em estratégias puras

Como jogar esse jogo?

- O ataque pode sempre optar pela jogada com o maior potencial de ganho (passe)?
  - Não, pois o ataque, nesse caso, vai sempre defender o passe, garantindo que o ataque avance apenas 2 jardas.
- O ataque deve defender o passe, aleatoriamente, em 50% dos casos? Que tal em 60% dos casos?
  - Como analisar as estratégias da defesa nesse caso?

Análise do valor esperado

- Precisamos calcular o valor esperado de cada resposta da defesa, sabendo que o ataque opta pelo passe em 50% dos casos e pela corrida nos outros 50%.
- $E_{dp} = (0,5)(-2) + (0,5)(-6) = -4$
- $E_{dc} = (0,5)(-17) + (0,5)(-1) = -9$
- $E_{dp} > E_{dc}$
- Defesa sempre prefere defender o passe, e o ataque ganha em média apenas 4 jardas!

Como evitar que o outro jogador antecipe nossa jogada?

- Devemos escolher as probabilidades das estratégias de forma que a outra parte, em cada jogo, seja indiferente entre qual resposta adotar.
  - **Ataque**: probabilidade de passar e de correr que iguala o valor esperado de defender o passe ou a corrida.
  - **Defesa**: probabilidade de defender o passe e de defender a corrida que iguala o valor esperado de passar ou correr.

Análise da estratégia do ataque

- Escolhe a probabilidade de passar (q_p) de forma que, para a defesa, o valor esperado de defender o passe (E_{dp}) seja igual ao valor esperado de defender a corrida (E_{dc}).
- $(1 - q_p) = \text{probabilidade de correr}$
- $E_{dp} = (q_p)(-2) + (1 - q_p)(-6) = 4q_p - 6$
- $E_{dc} = (q_p)(-17) + (1 - q_p)(-1) = -16q_p - 1$
- $E_{dp} = E_{dc} \implies 4q_p - 6 = -16q_p - 1 \implies q_p = \frac{5}{20} = 25\%$

Análise da estratégia da defesa

- Escolhe a probabilidade de defender o passe (q_{dp}) de forma que, para o ataque, o valor esperado de passar (E_p) seja igual ao valor esperado de correr (E_c).

- $(1 - q_{dp}) = \text{probabilidade de defender a corrida}$

- $E_p = (q_{dp})(2) + (1 - q_{dp})(17) = -15q_{dp} + 17$
- $E_c = (q_{dp})(6) + (1 - q_{dp})(1) = 5q_{dp} + 1$
- $E_p = E_c \implies -15q_{dp} + 17 = 5q_{dp} + 1 \implies q_{dp} = \frac{16}{20} = 80\%$

FGV DIREITO RIO

Solução do jogo "Run or Pass"

		Defesa	
		Defende o Passe	**Defende a Corrida**
Ataque	**Passe**	(2, -2)	(17, -17)
	Corrida	(6, -6)	(1, -1)

Ataque passa em 25% dos casos e corre em 75% dos casos,
Defesa defende o passe em 80% dos casos e a corrida em 20% dos casos.

Voltando ao jogo da galinha...

Predador 2

Predador 1

	Agressivo (Hawk)	Passivo (Dove)
Agressivo (Hawk)	(-3, -3)	(4, 0)
Passivo (Dove)	(0, 4)	(2, 2)

Voltando ao jogo da galinha...

Predador 2

Predador 1

	Agressivo (Hawk)	Passivo (Dove)
Agressivo (Hawk)	(-3, -3)	(4, 0)
Passivo (Dove)	(0, 4)	(2, 2)

Voltando ao jogo da galinha...

Predador 2

Predador 1		Agressivo (Hawk)	Passivo (Dove)
	Agressivo (Hawk)	(-3, -3)	(4, 0)
	Passivo (Dove)	(0, 4)	(2, 2)

Voltando ao jogo da galinha...

Predador 2

Predador 1

	Agressivo (Hawk)	Passivo (Dove)
Agressivo (Hawk)	(-3, -3)	(<u>4</u>, 0)
Passivo (Dove)	(<u>0</u>, 4)	(2, 2)

Voltando ao jogo da galinha...

Predador 2

Predador 1		Agressivo (Hawk)	Passivo (Dove)
	Agressivo (Hawk)	(-3, -3)	(4, 0)
	Passivo (Dove)	(0, 4)	(2, 2)

FGV DIREITO RIO

Voltando ao jogo da galinha...

Predador 2

Predador 1		Agressivo (Hawk)	Passivo (Dove)
	Agressivo (Hawk)	(-3, -3)	(4, 0)
	Passivo (Dove)	(0, 4)	(2, 2)

Voltando ao jogo da galinha...

Predador 2

Predador 1		Agressivo (Hawk)	Passivo (Dove)
	Agressivo (Hawk)	(-3, -3)	(4, 0)
	Passivo (Dove)	(0, 4)	(2, 2)

Solução (estratégias puras): { (Hawk, Dove), (Dove, Hawk) }

FGV DIREITO RIO

Qual seria o equilíbrio desse jogo em estratégias mistas?

- Cada predador escolhe a probabilidade de ser agressivo (q_a) de forma que, para o outro, o valor esperado de ser agressivo (E_a) seja igual ao de ser passivo (E_p).
- $(1 - q_a) = \text{probabilidade de ser passivo}$
- $E_a = (q_a)(-3) + (1 - q_a)(4) = 4 - 7q_a$
- $E_p = (q_a)(0) + (1 - q_a)(2) = 2 - 2q_a$
- $E_a = E_p \implies 4 - 7q_a = 2 - 2q_a \implies q_a = \frac{2}{5} = 40\%$

Equilíbrio representa a tendência de equilíbrio da população

- Se mais indivíduos se tornam hawks, há um excesso de encontro entre agressivos, gerando prejuízos para ambos (-3, -3).
- Se mais indivíduos se tornam doves, há uma maior oportunidade para hawks ganharem mais (4, 0).

3. Jogos Sequenciais

Vamos jogar NIM!

- Cada jogador escolhe retirar entre 1 e 6 peças a cada turno.
- O jogo começa com 20 peças.
- O último jogador que retira (acaba com as peças) vence.

Entendendo o resultado de NIM

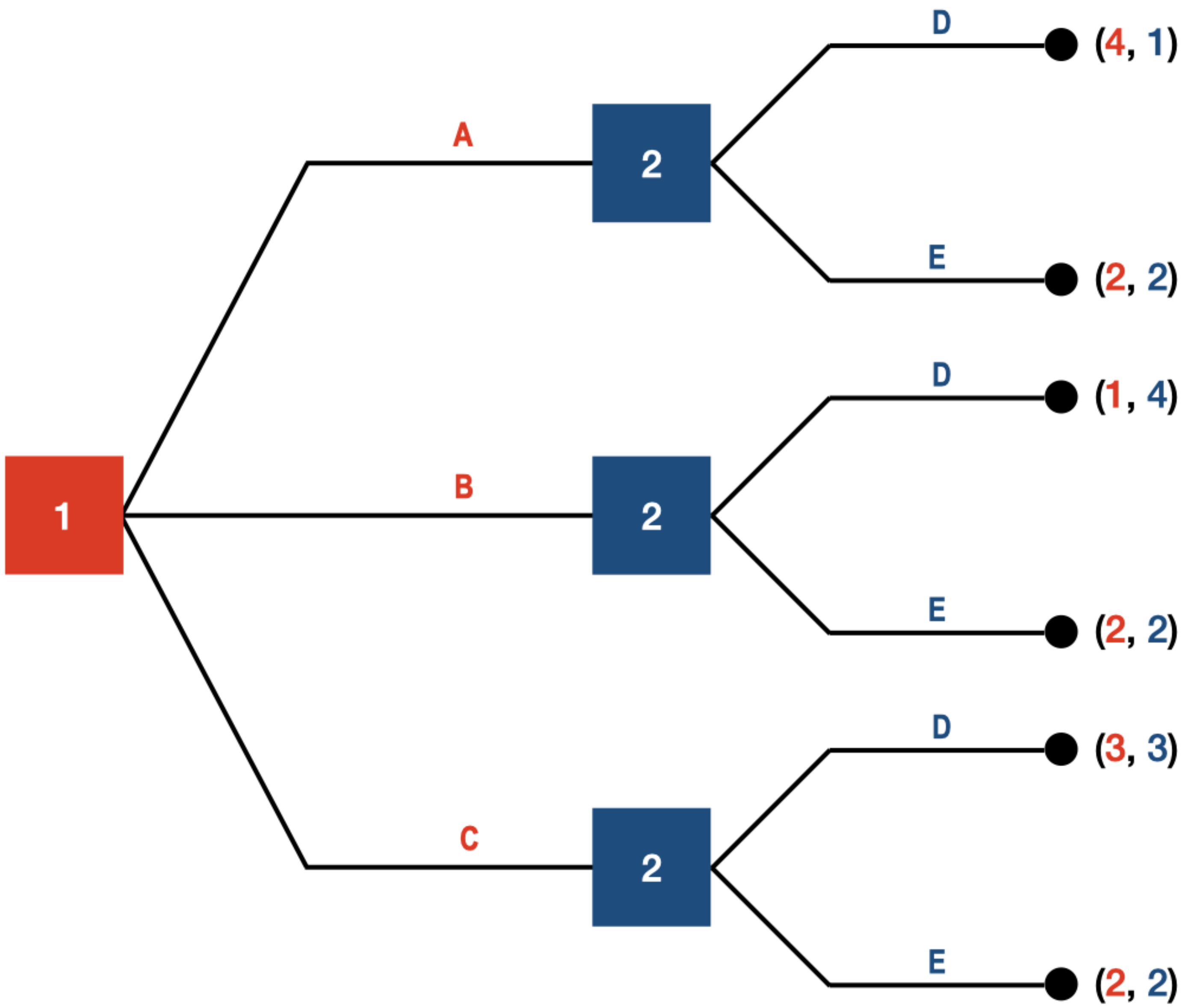
- Jogador que joga quando há 7 peças perde o jogo.
- Consequentemente, jogador que joga quando há 14 peças perde o jogo.

NIM com 20 peças

- Com 20 peças, Jogador 1 sempre pode vencer se jogar corretamente.
    - Jogador 1 tira 6, deixando o jogador 2 com 14.
    - Em seguida, tira o suficiente para deixar o outro jogador com 7 peças.
    - Por fim, tira as remanescentes.
- **First-mover advantage**: em diversos jogos, quem age primeiro tem a vantagem.
    - Mas o que acontece quando jogamos NIM com 21 peças?
    - Embora seja comum, nem todos os jogos possuem first-mover advantage.

Indução retroativa

- Para resolver jogos sequenciais, precisamos voltar ao conceito de **indução retroativa**.
    - Em NIM, para entendermos nossa primeira jogada, precisamos entender como o jogo termina.
    - Em jogos sequenciais, cada jogador tenta antecipar as jogadas seguintes por isso a análise é feita de trás para frente.


1
A
B
C
2
2
2
D
E
D
E
D
E
(4, 1)
(2, 2)
(1, 4)
(2, 2)
(3, 3)
(2, 2)

Jogo da proposição e veto

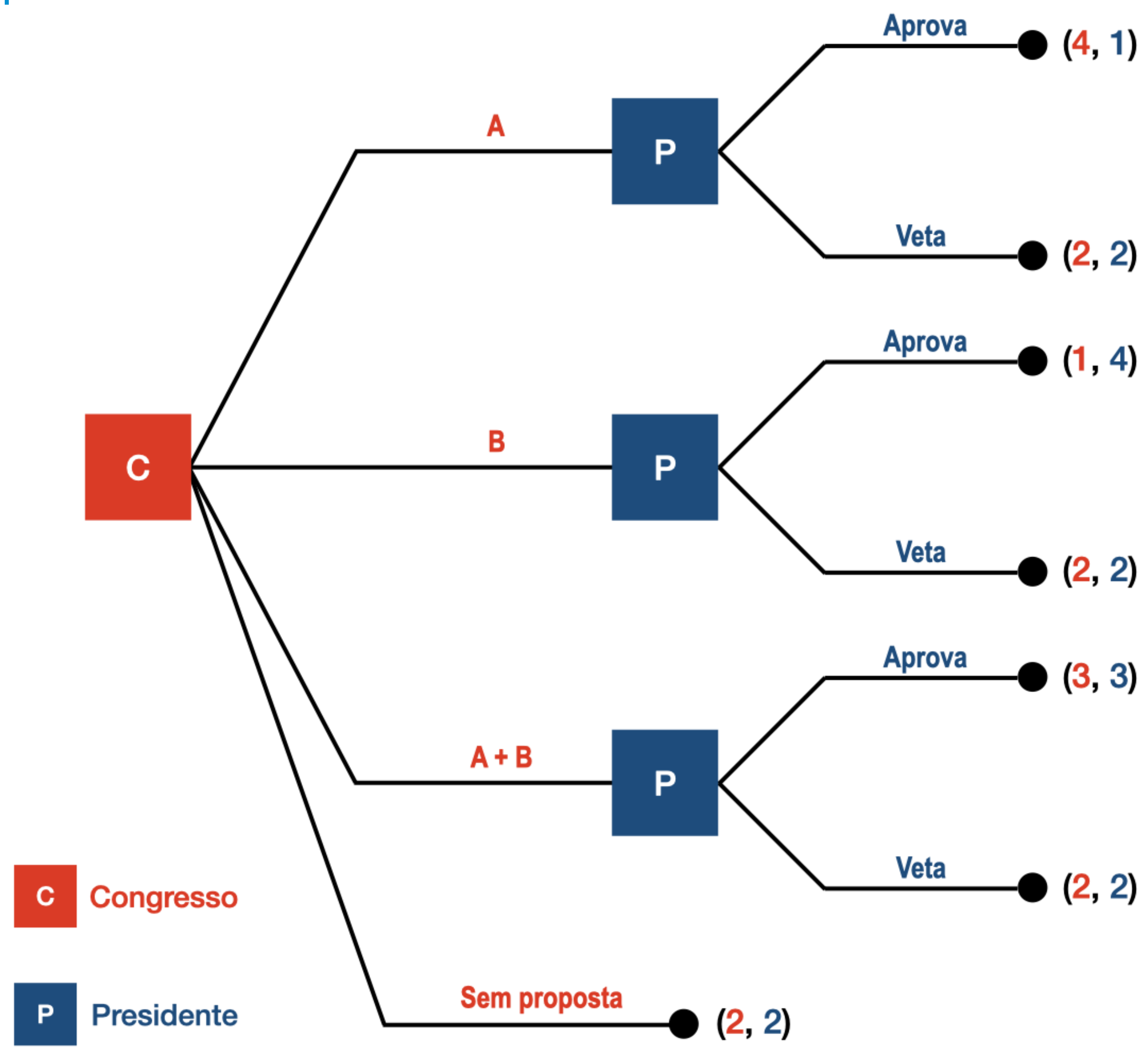
- Interação entre o Congresso e um Presidente com preferências divergentes.
- Congresso prefere a provisão A, mas não gosta da provisão B.
- Presidente gosta da provisão B, mas não gosta da provisão A.

Ranking de preferências dos jogadores

Resultado	Congresso	Presidente
Apenas A	4	1
Apenas B	1	4
A + B	3	3
Nenhuma	2	2

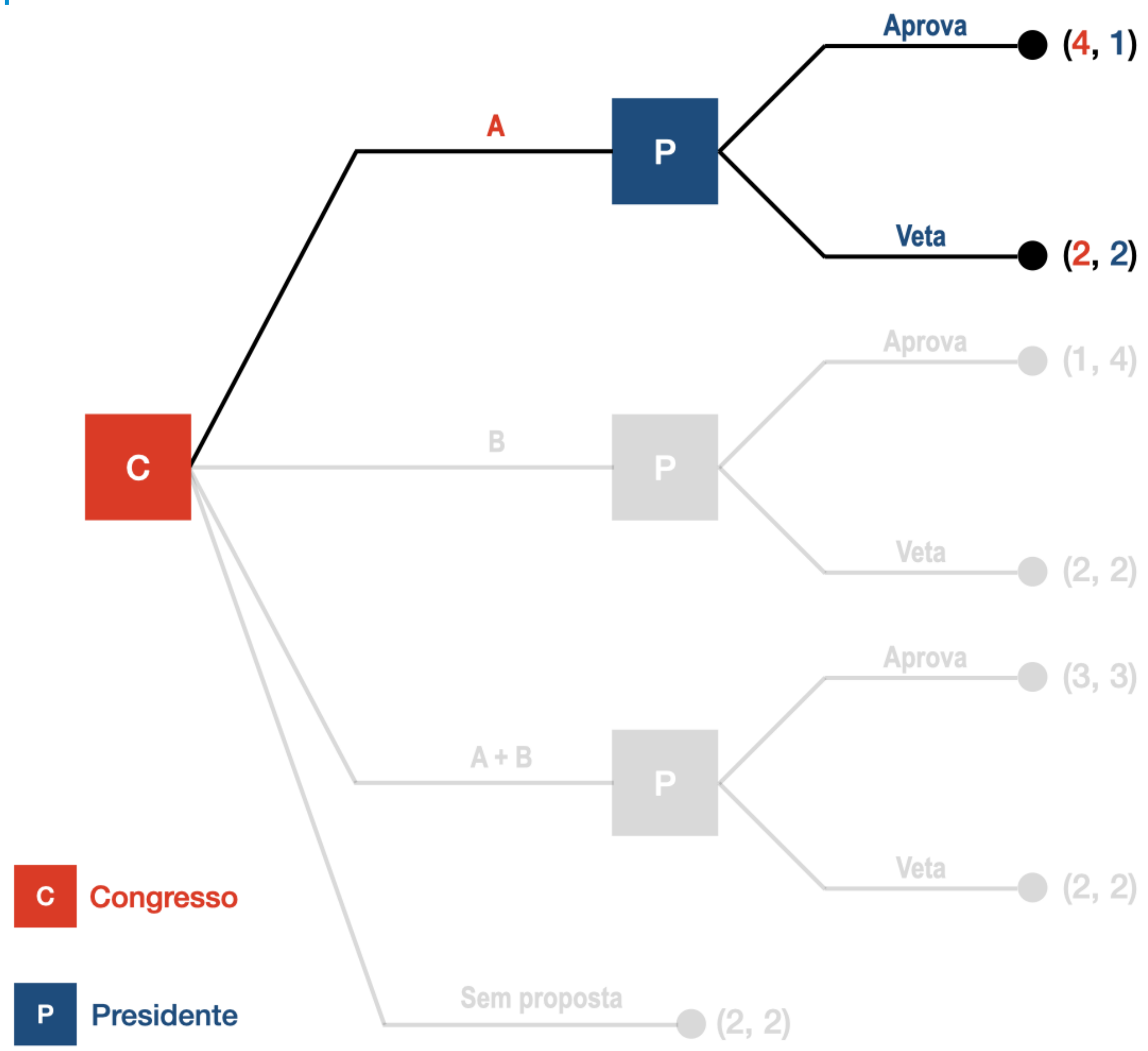
Jogo da proposição e veto

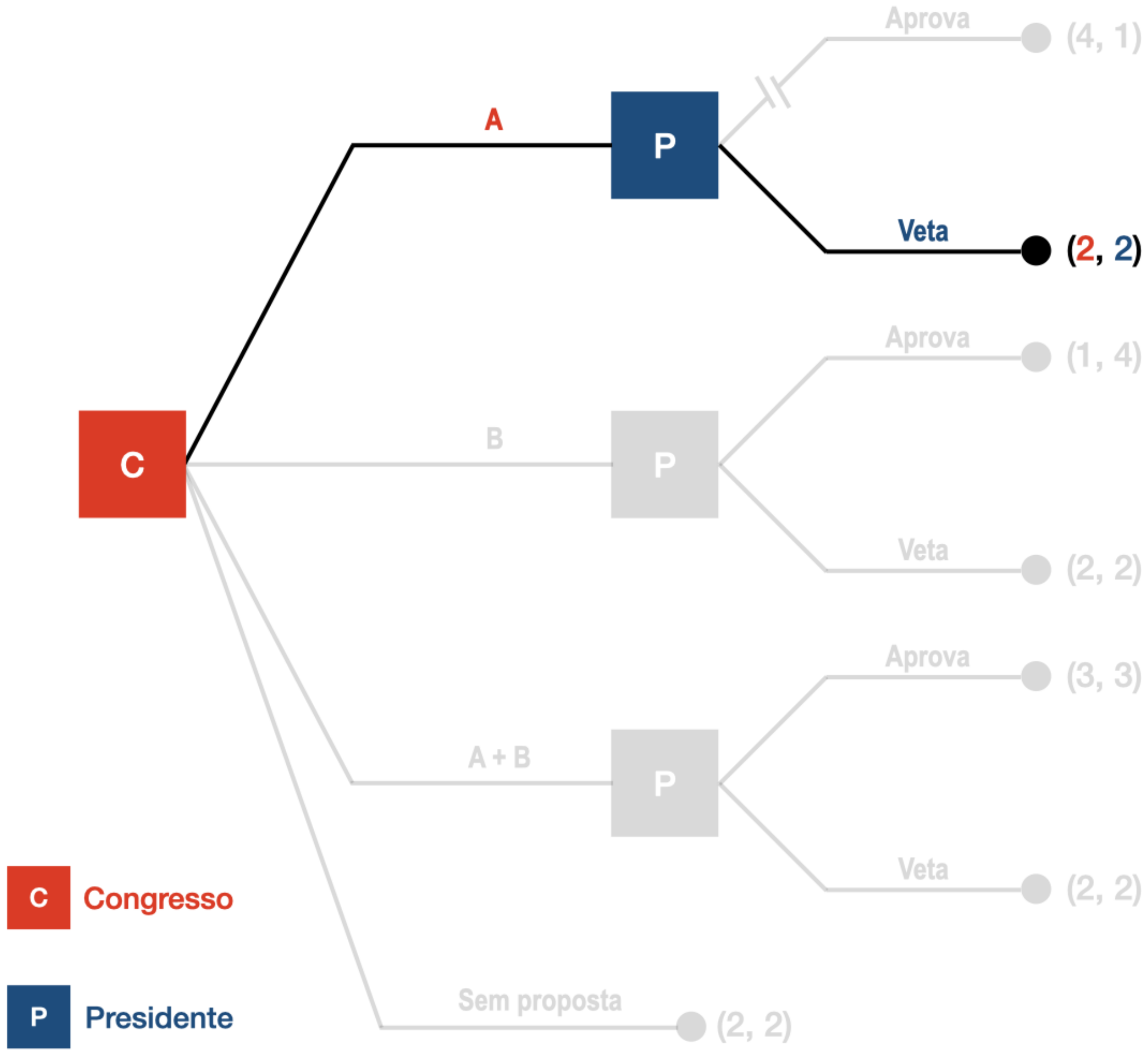
- Opções do Congresso:
  - Enviar proposta apenas com a provisão A.
  - Enviar proposta apenas com a provisão B.
  - Enviar proposta com ambas as provisões, A + B.
  - Não enviar proposta nenhuma.
- Opções do Presidente:
  - Aprova totalmente a proposta enviada
  - Veta totalmente rejeita totalmente a proposta enviada.



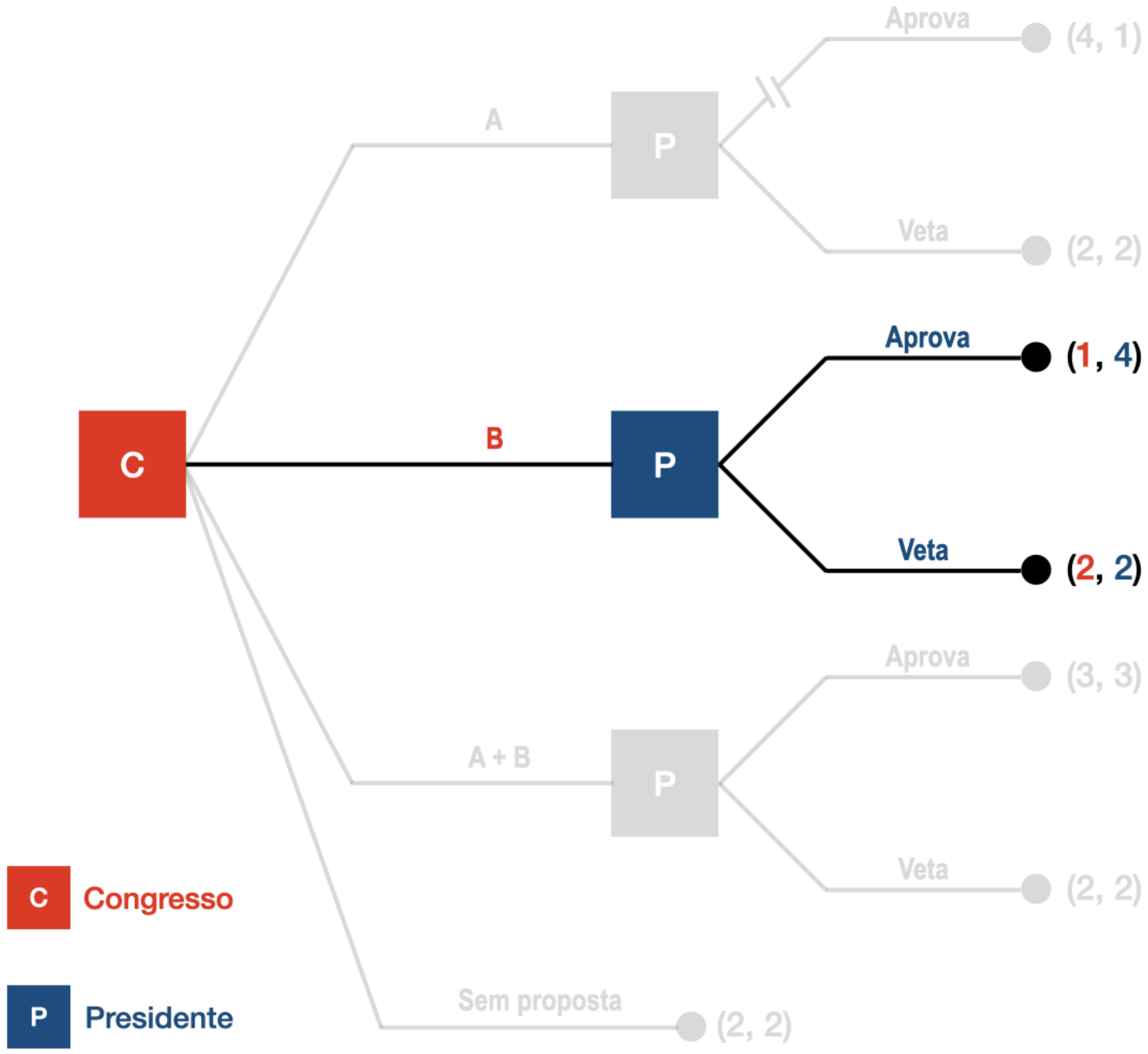
Aprova
(4, 1)
A
P
Veta
(2, 2)
Aprova
(1, 4)
C
B
P
Veta
(2, 2)
Aprova
(3, 3)
A + B
P
Veta
(2, 2)
C Congresso
P Presidente
Sem proposta
(2, 2)

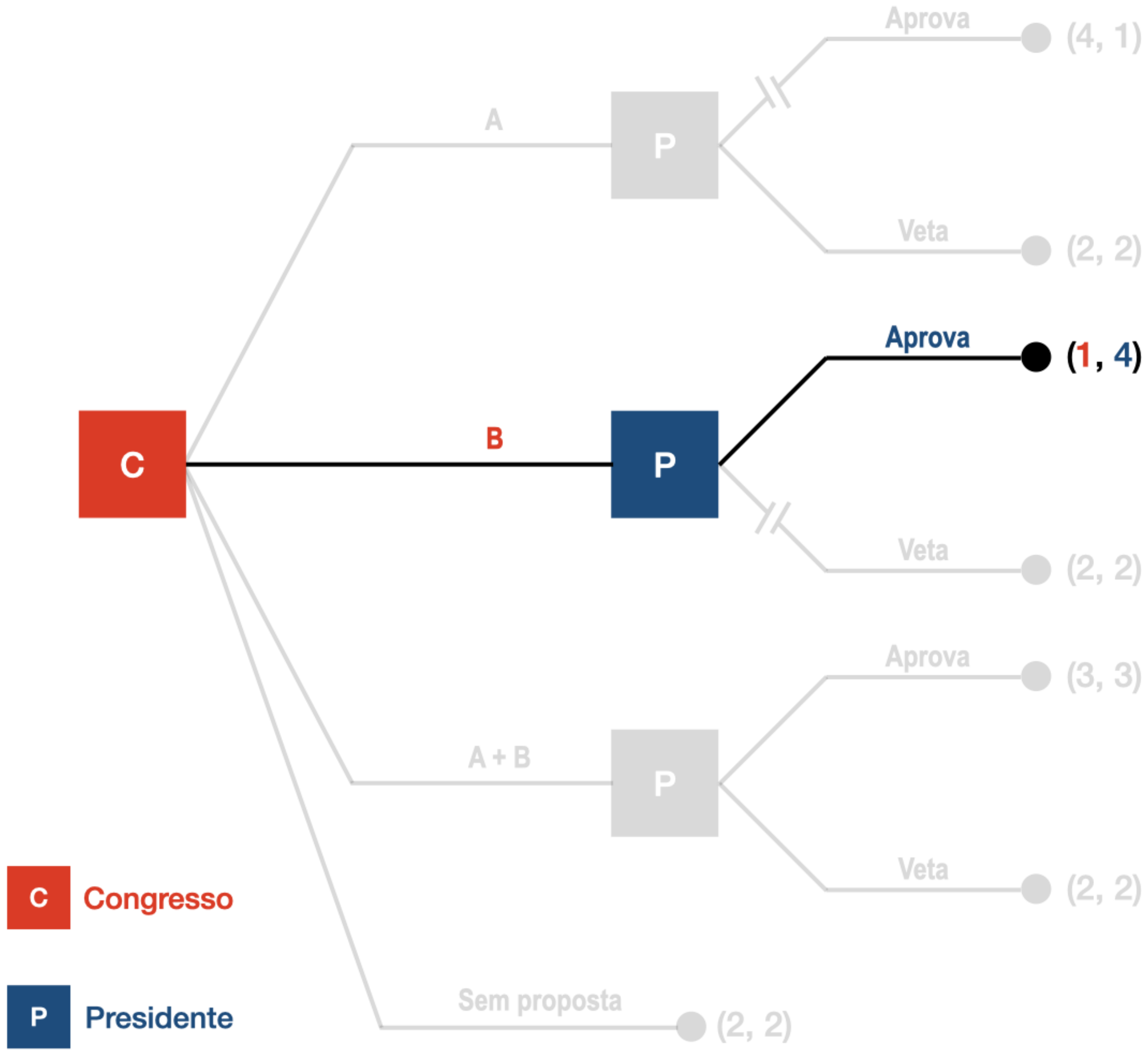
FGV DIREITO RIO



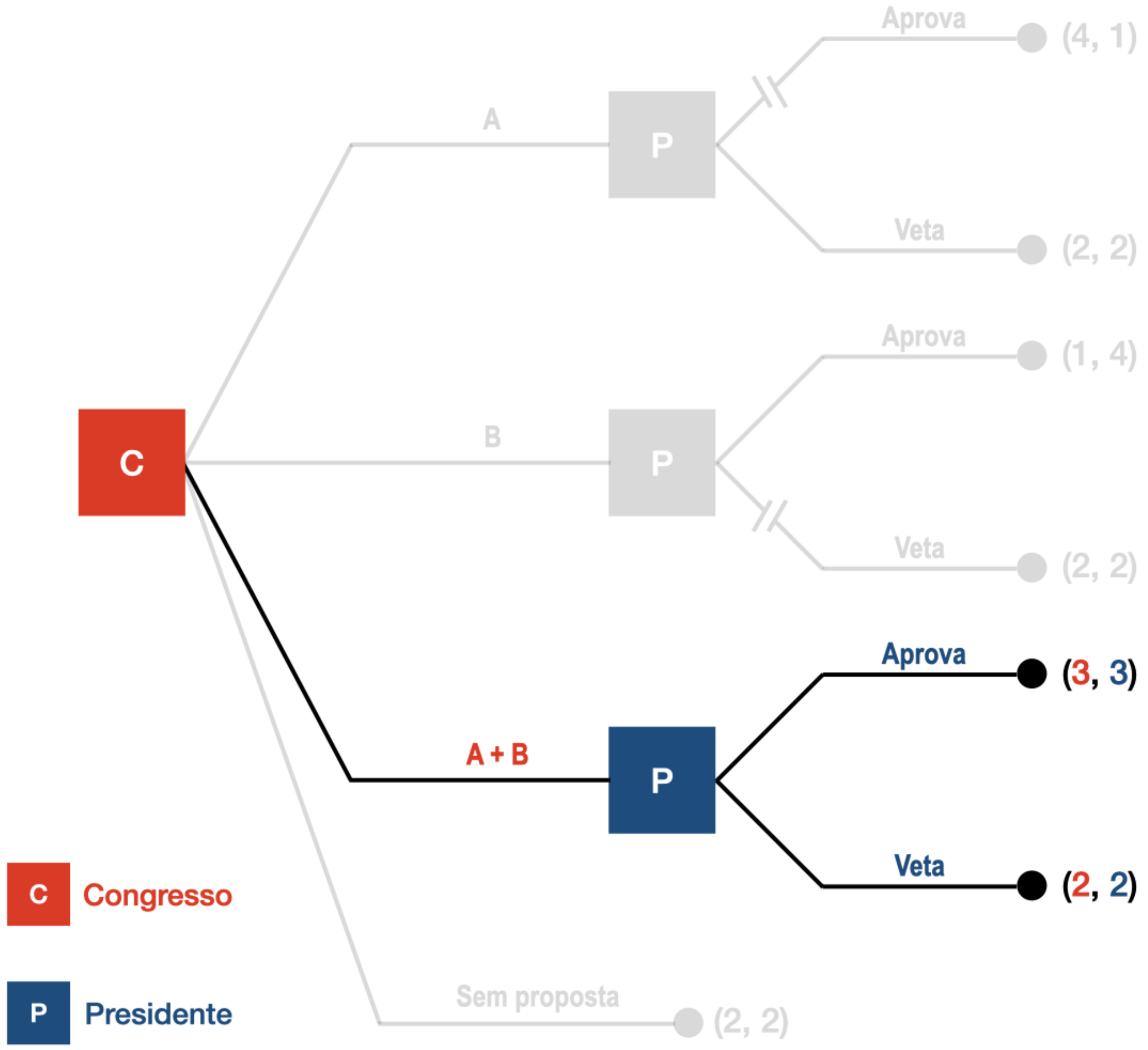

A
P
Aprova
(4, 1)
Veta
(2, 2)
C
B
P
Aprova
(1, 4)
Veta
(2, 2)
A + B
P
Aprova
(3, 3)
Veta
(2, 2)
Sem proposta
(2, 2)
C Congresso
P Presidente

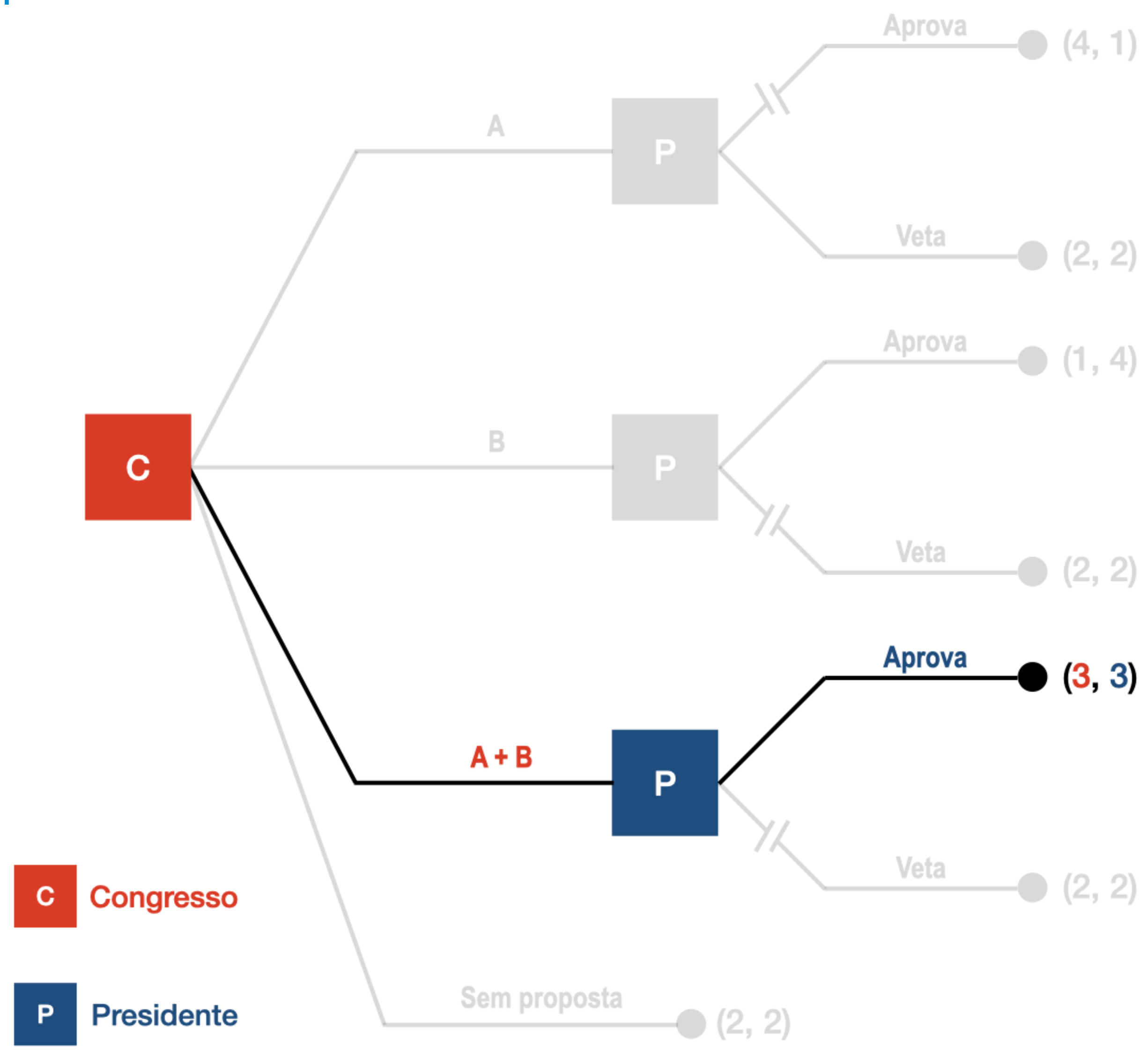
FGV DIREITO RIO




A
P
Aprova
(4, 1)
Veta
(2, 2)
C
B
P
Aprova
(1, 4)
Veta
(2, 2)
A + B
P
Aprova
(3, 3)
Veta
(2, 2)
Sem proposta
(2, 2)
C Congresso
P Presidente

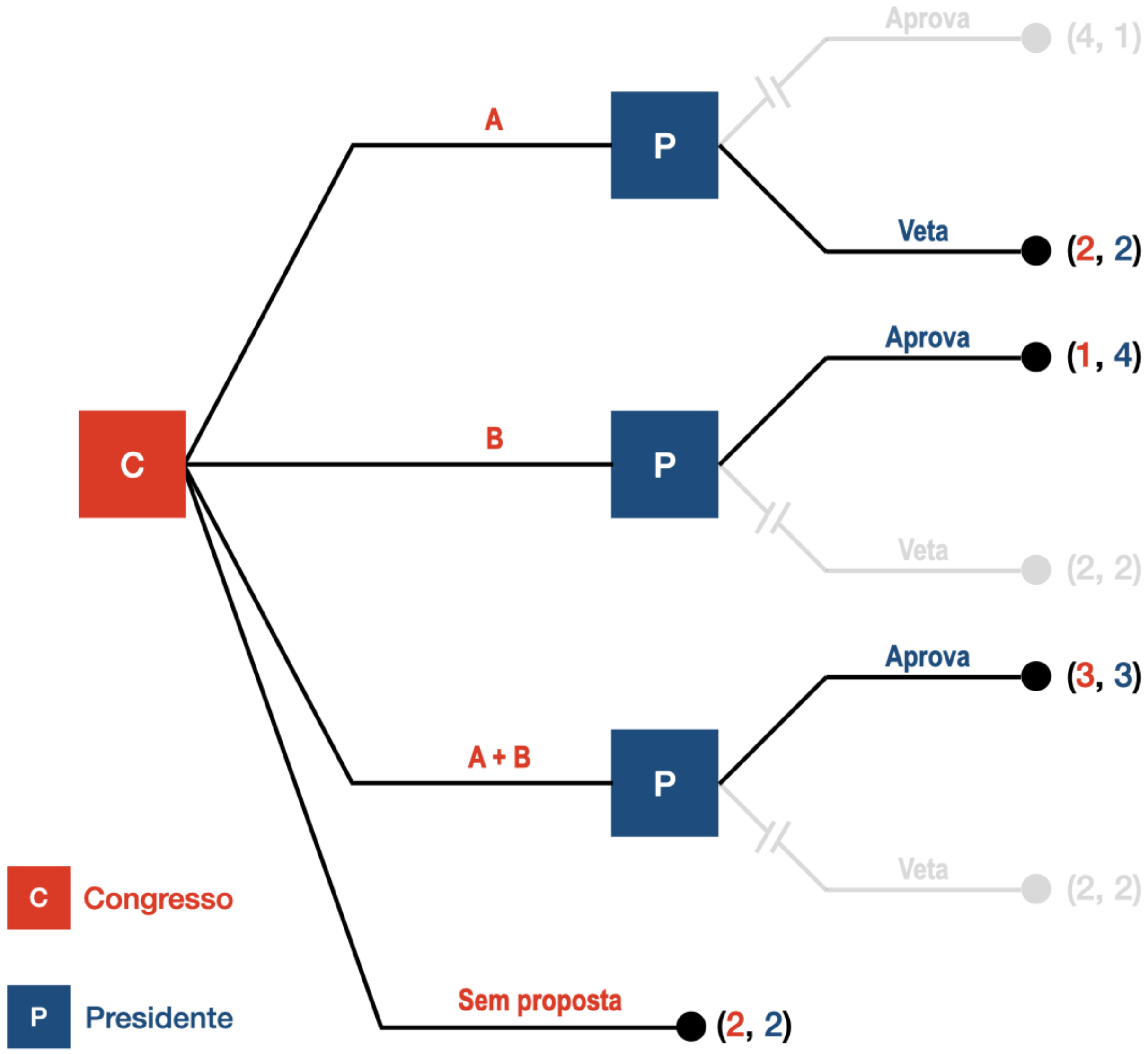
FGV DIREITO RIO



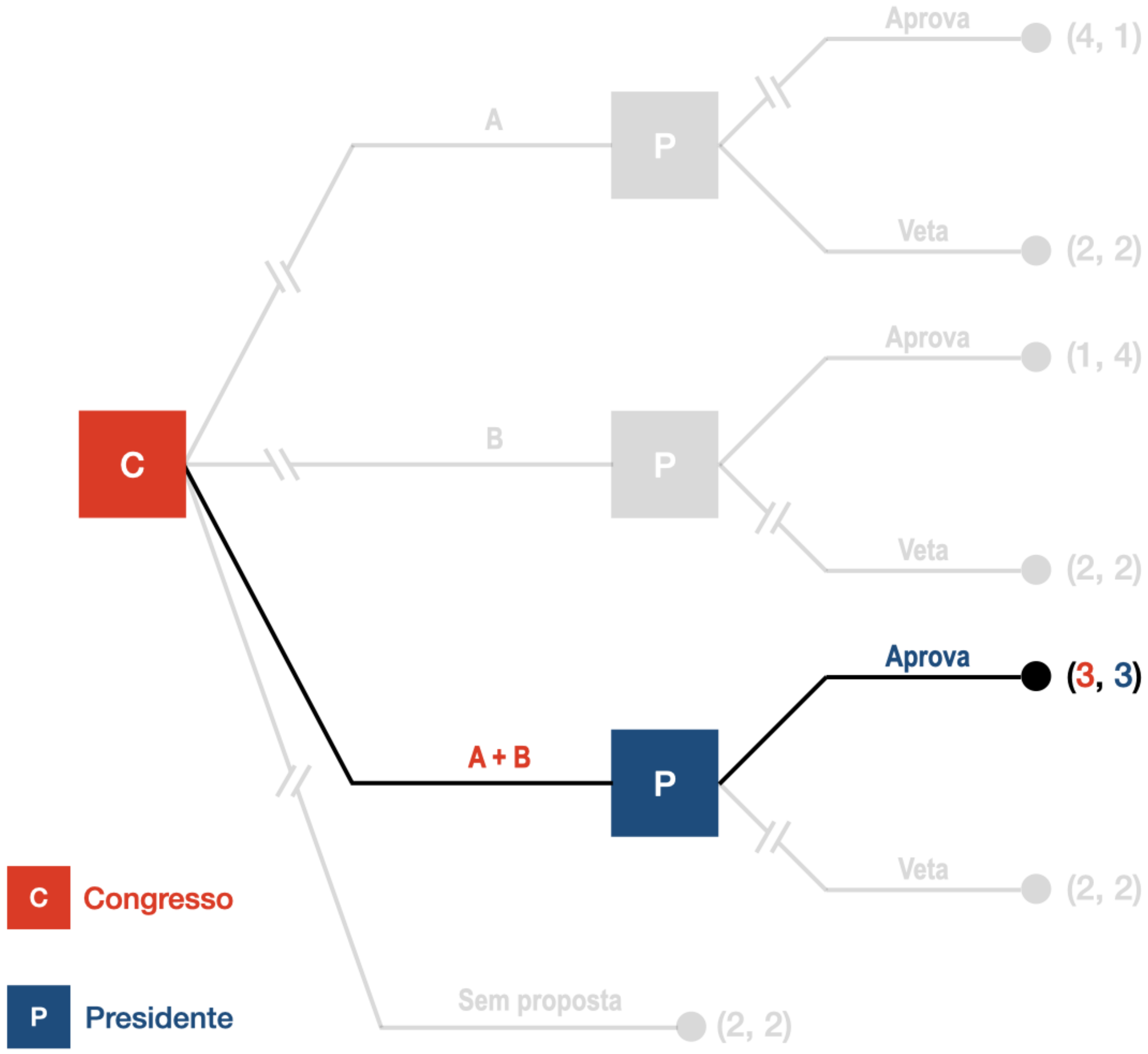


Aprova
(4, 1)
A
P
Veta
(2, 2)
Aprova
(1, 4)
C
B
P
Veta
(2, 2)
Aprova
(3, 3)
A + B
P
Veta
(2, 2)
C
Congresso
P
Presidente
Sem proposta
(2, 2)

FGV DIREITO RIO



FGV DIREITO RIO



Jogo da proposição e veto

- Solução: **(A + B, Aprova)**
- Antecipando que a proposição A seria vetada pelo Presidente, o Congresso envia a proposta que contém tanto a proposição A como a proposição B.

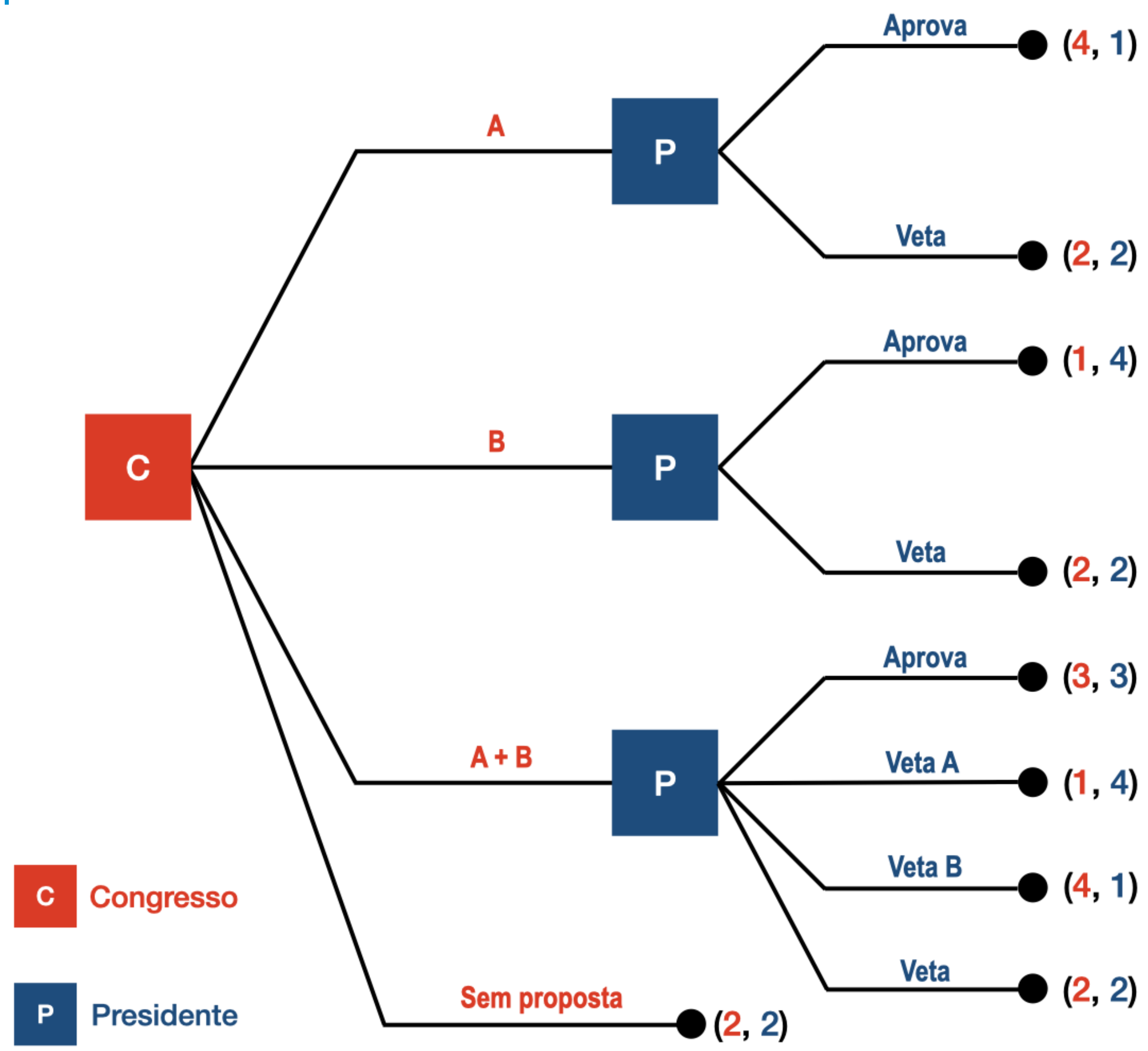
Conceitos

- Em jogos sequenciais, chamamos de "estratégia" a sequência de jogadas que descreve todo o percurso até um nodulo final do jogo (também chamado de nó terminal).
- A ideia de equilíbrio de Nash ainda pode ser aplicada: cada jogador está dando sua melhor resposta, dadas as respostas dos demais.
    - A melhor jogada do Presidente se o Congresso propõe A + B é aprovar, e a melhor jogada do Congresso se o Presidente aprova A + B é propor A + B.

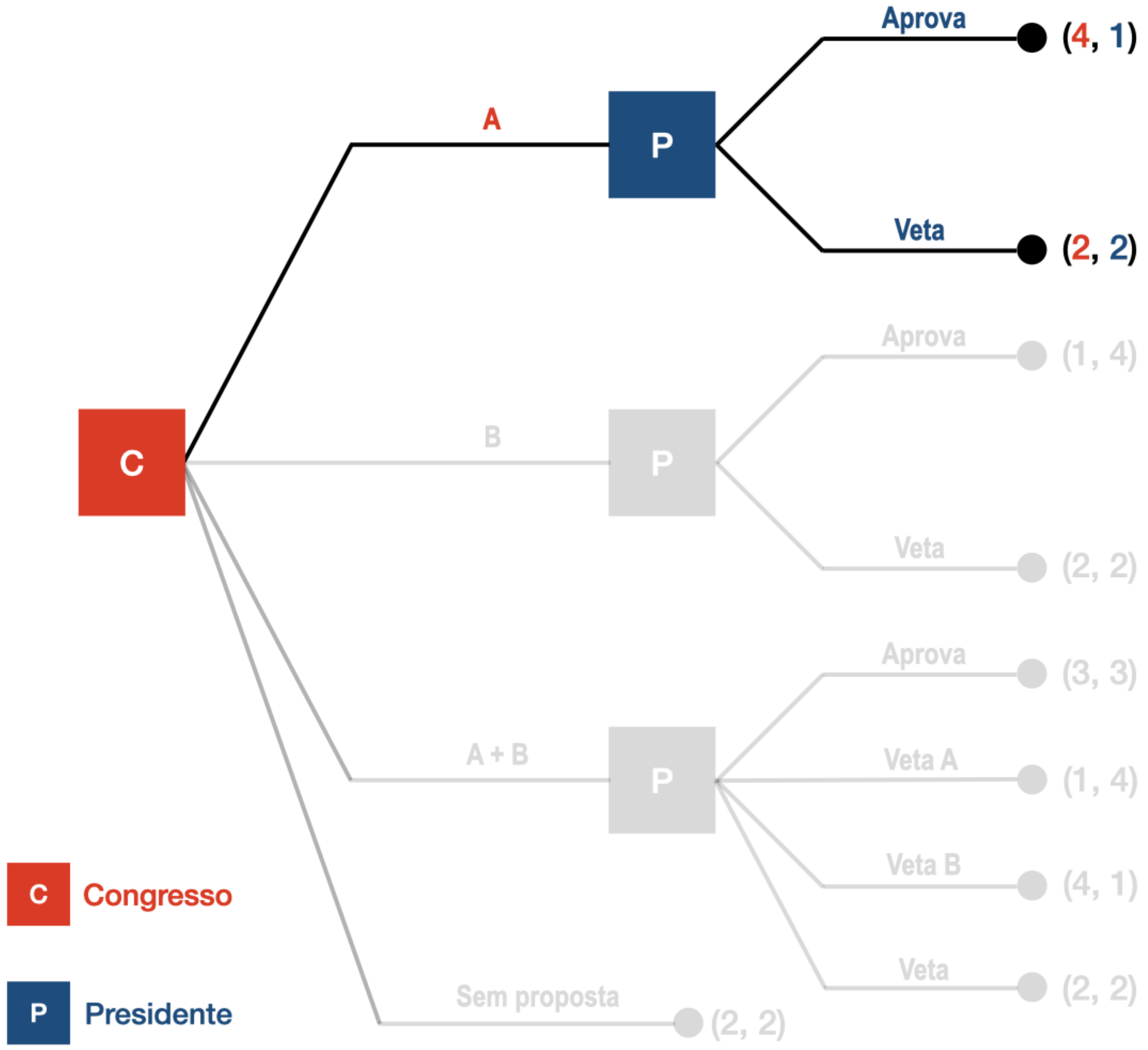
Veto parcial

- O que acontece se o presidente puder vetar parcialmente apenas a proposição de que não gosta?
  - Agora, quando o congresso propõe A + B o presidente pode também vetar apenas A ou apenas B.

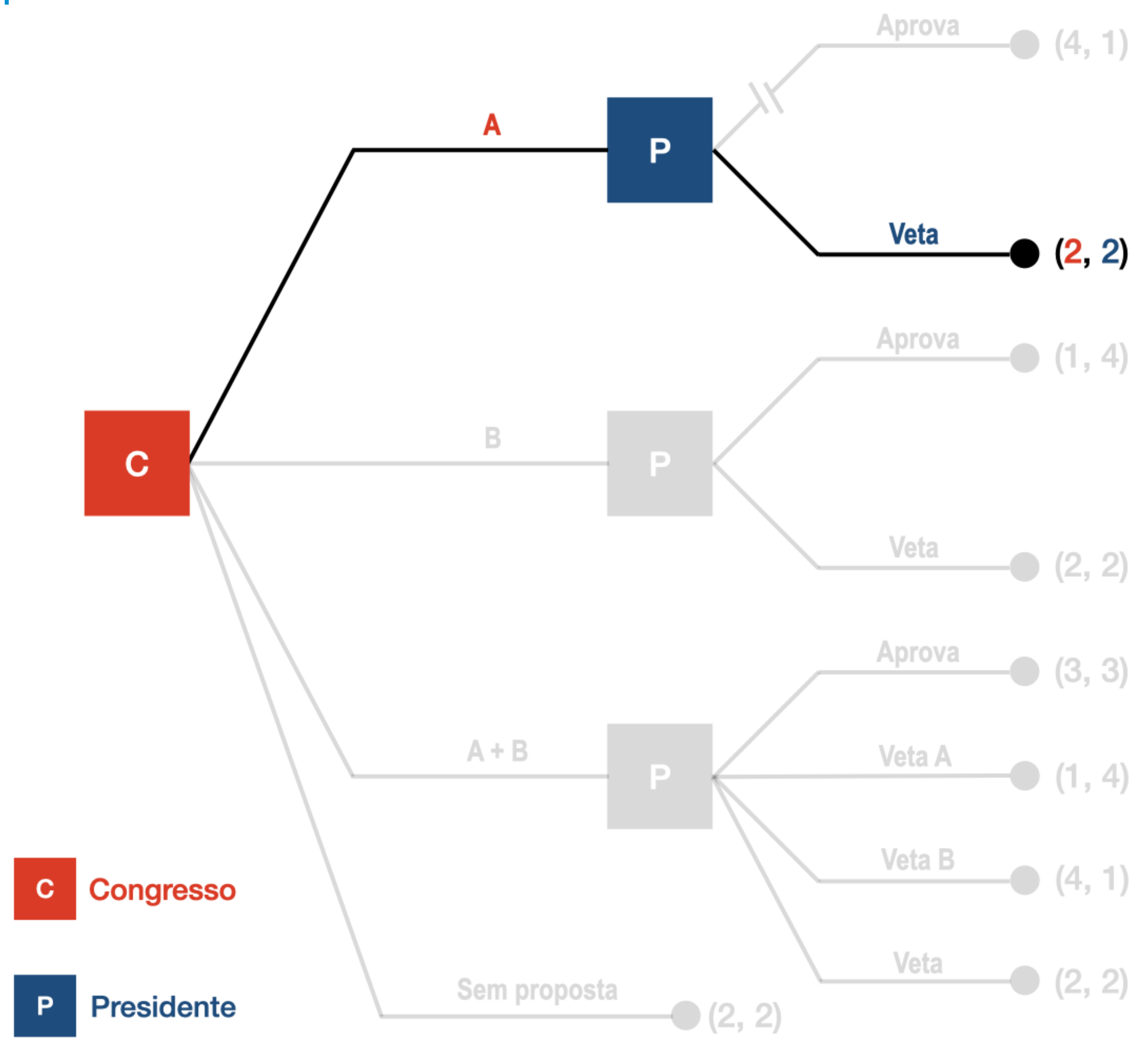
FGV DIREITO RIO



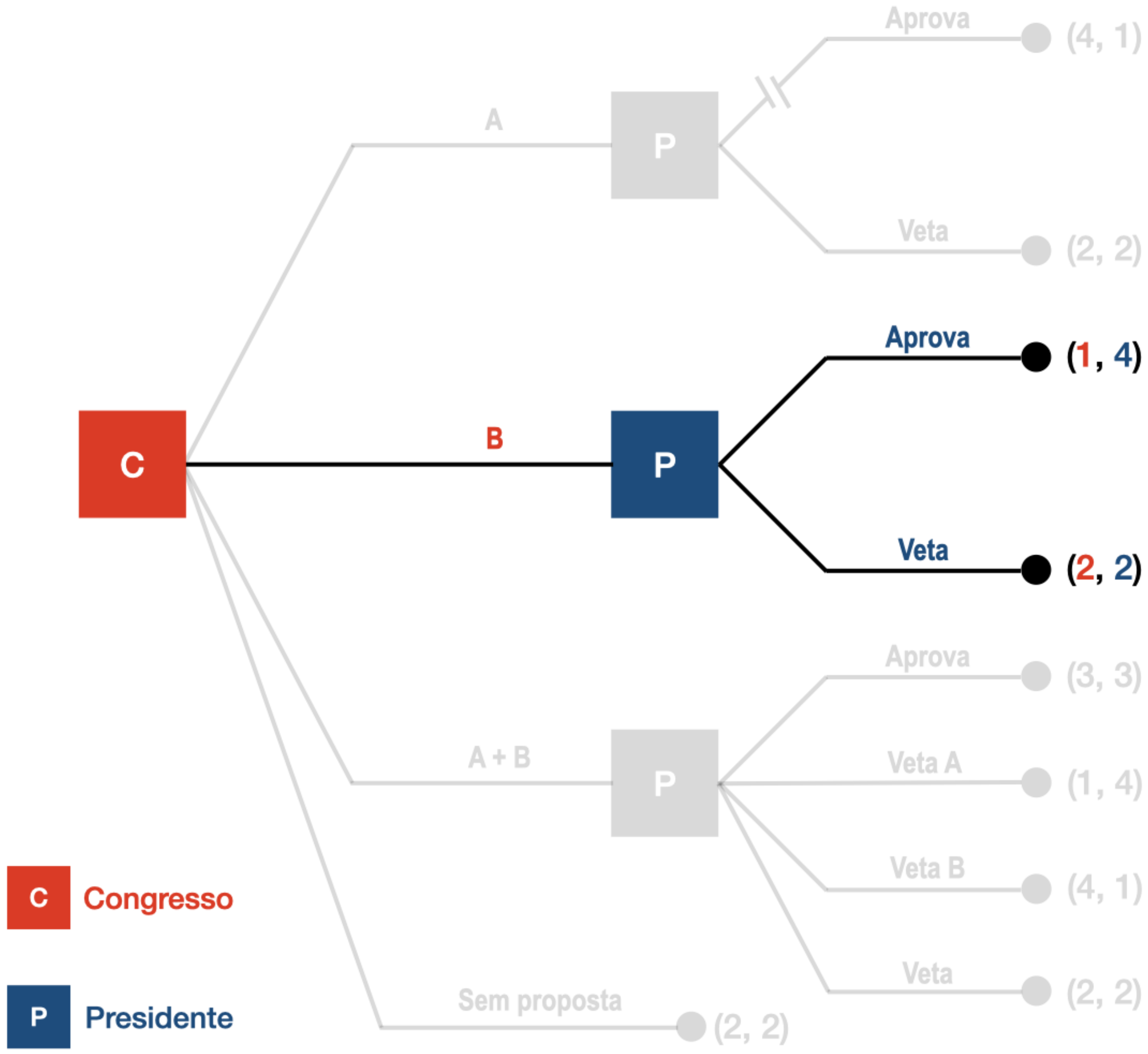
FGV DIREITO RIO

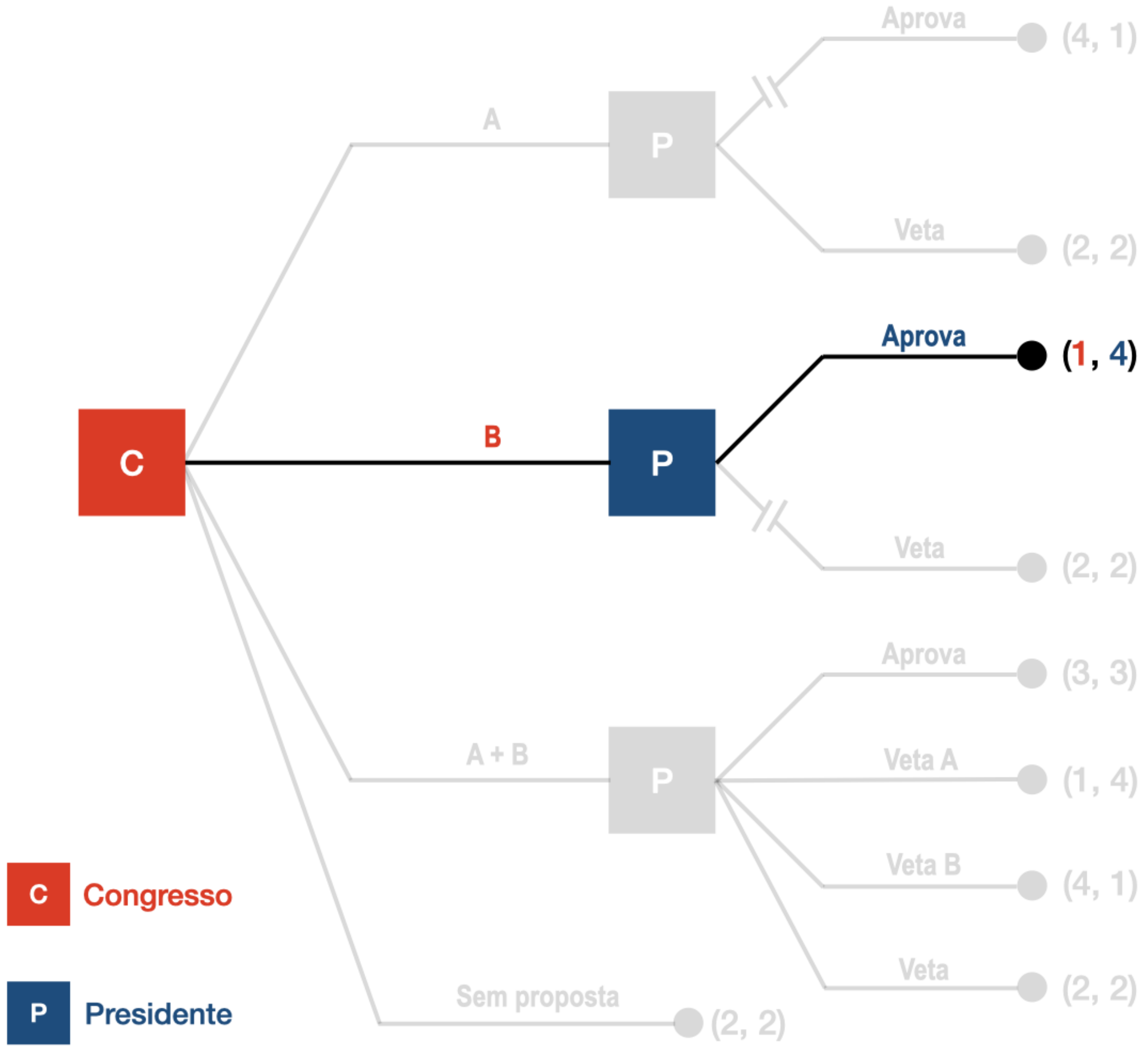


FGV DIREITO RIO

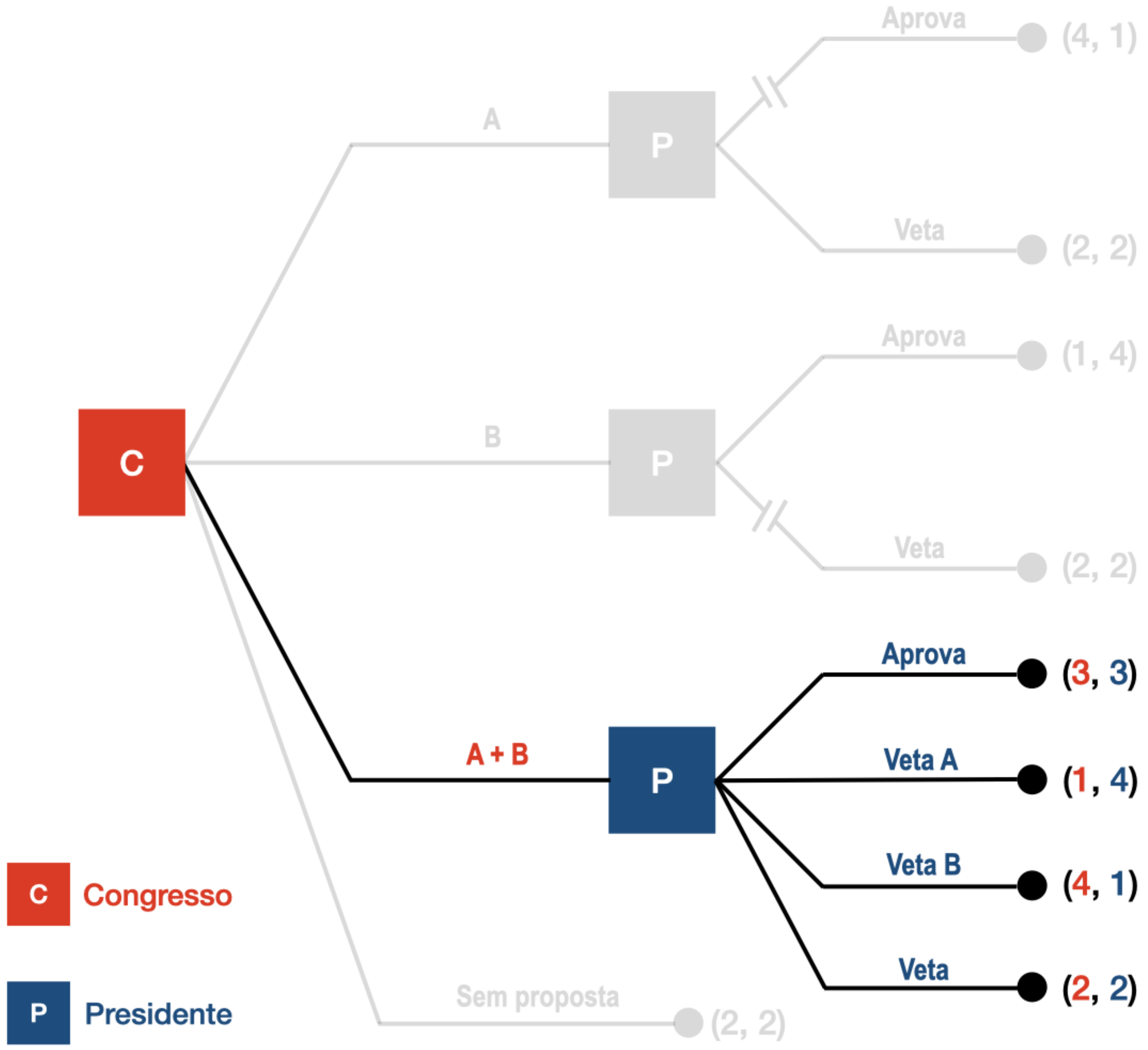


FGV DIREITO RIO

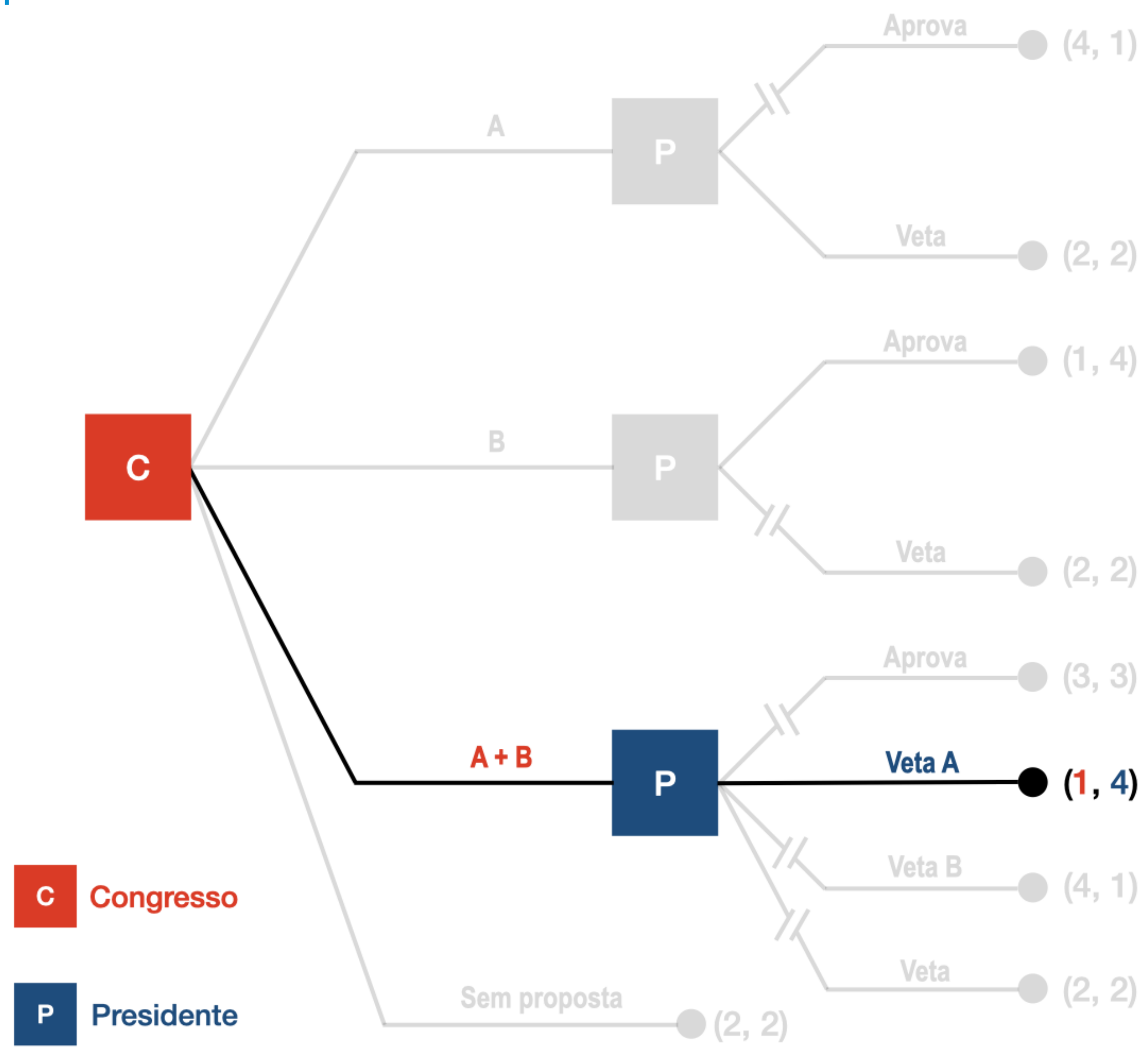




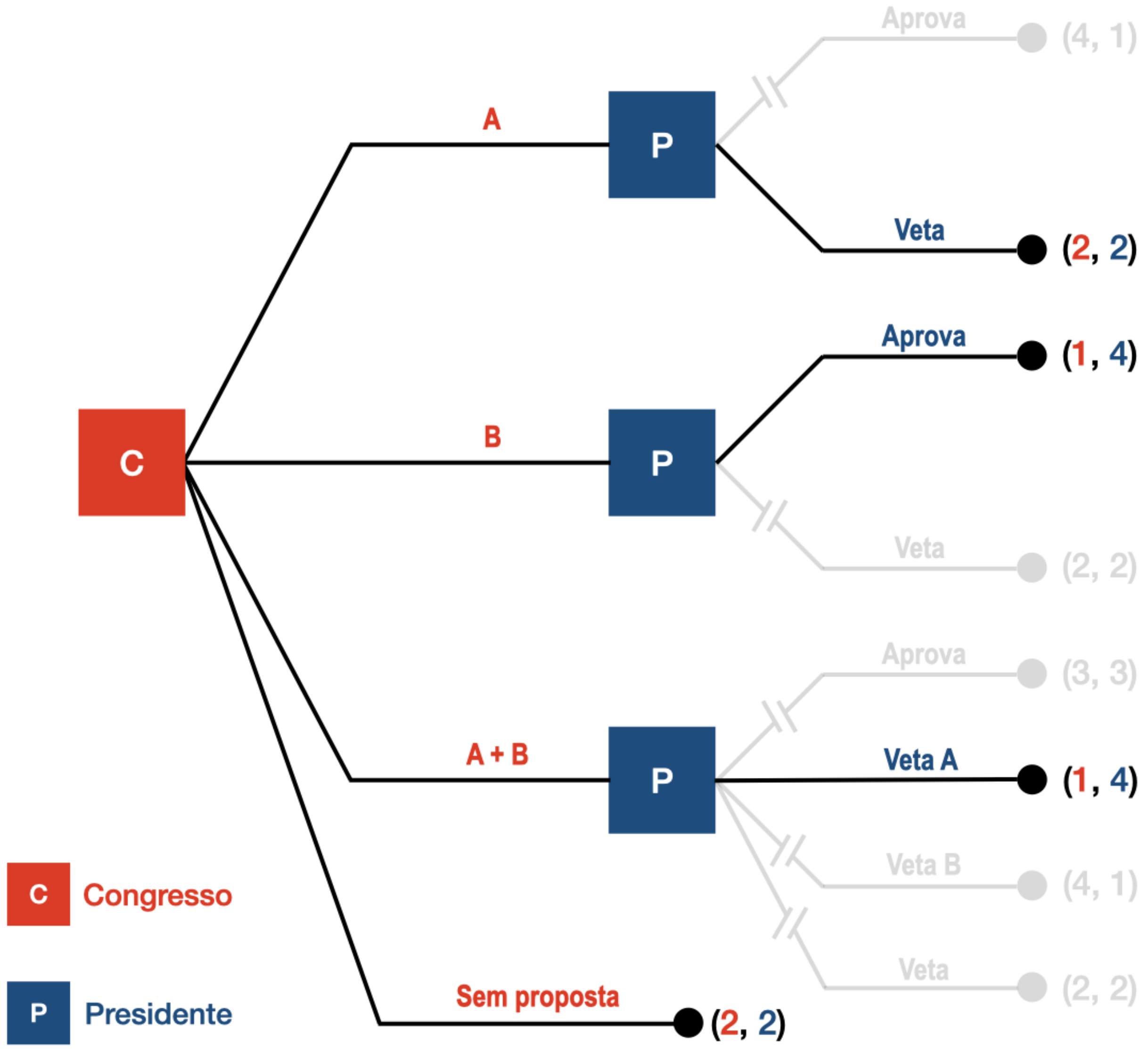
Aprova
(4, 1)
A
P
Veta
(2, 2)
Aprova
(1, 4)
C
B
P
Veta
(2, 2)
Aprova
(3, 3)
A + B
P
Veta A
(1, 4)
Veta B
(4, 1)
Veta
(2, 2)
Sem proposta
(2, 2)
C
Congresso
P
Presidente


A
Aprova
(4, 1)
P
Veta
(2, 2)
C
B
P
Aprova
(1, 4)
Veta
(2, 2)
A + B
P
Aprova
(3, 3)
Veta A
(1, 4)
Veta B
(4, 1)
Veta
(2, 2)
Sem proposta
(2, 2)
C Congresso
P Presidente

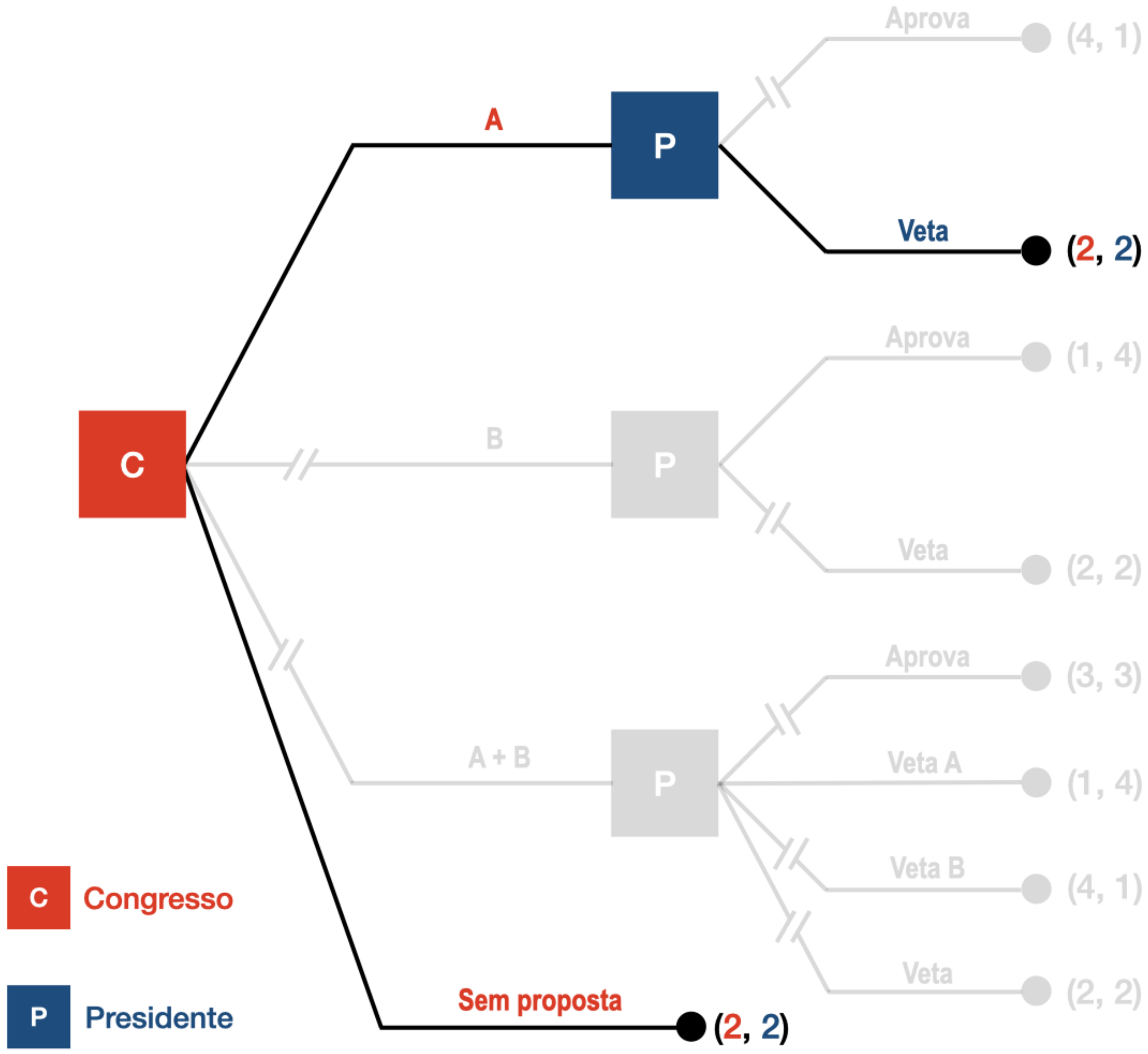
FGV DIREITO RIO



FGV DIREITO RIO

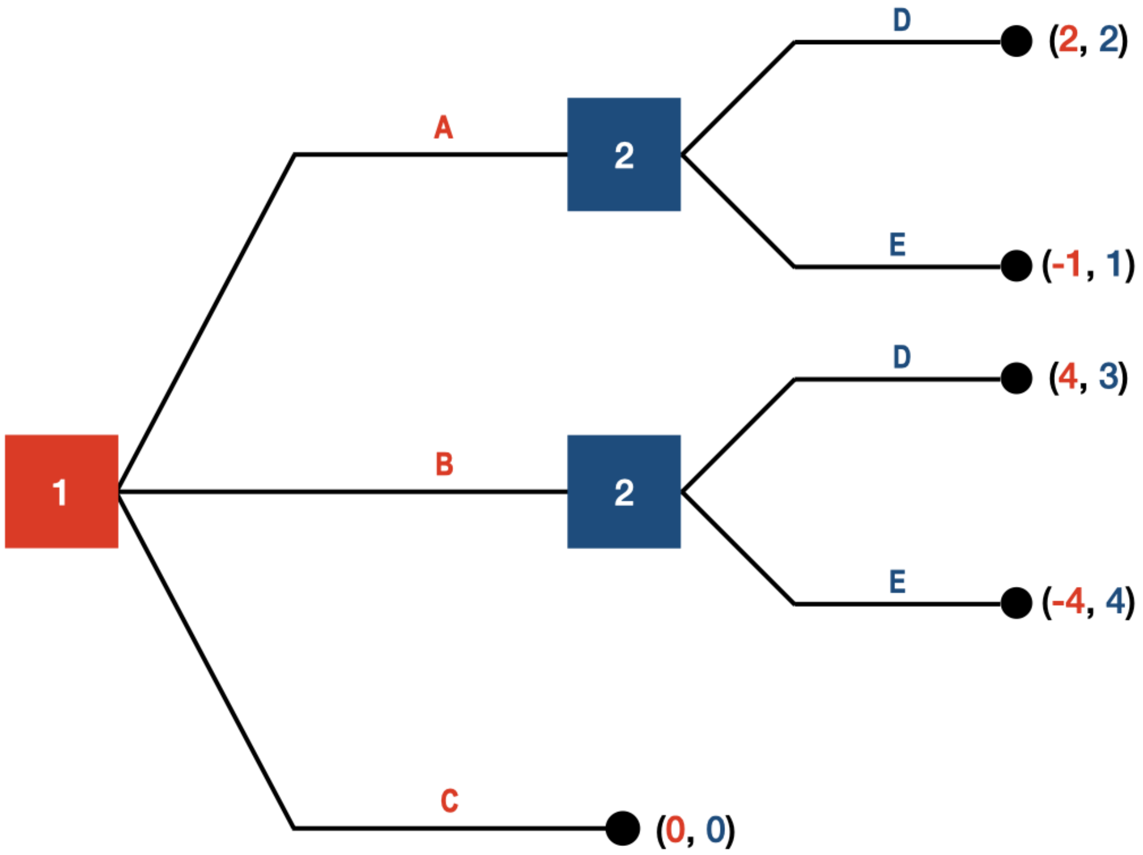


FGV DIREITO RIO

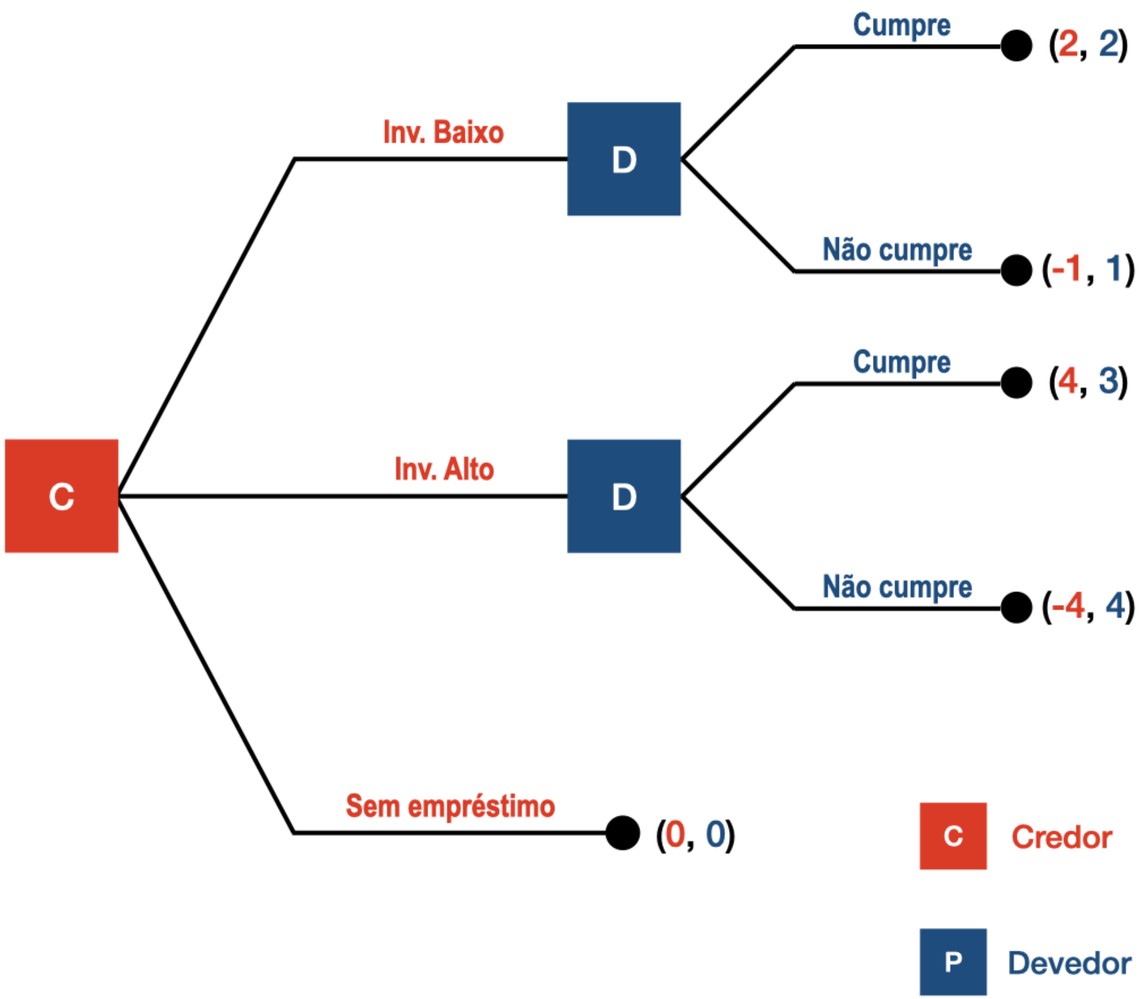


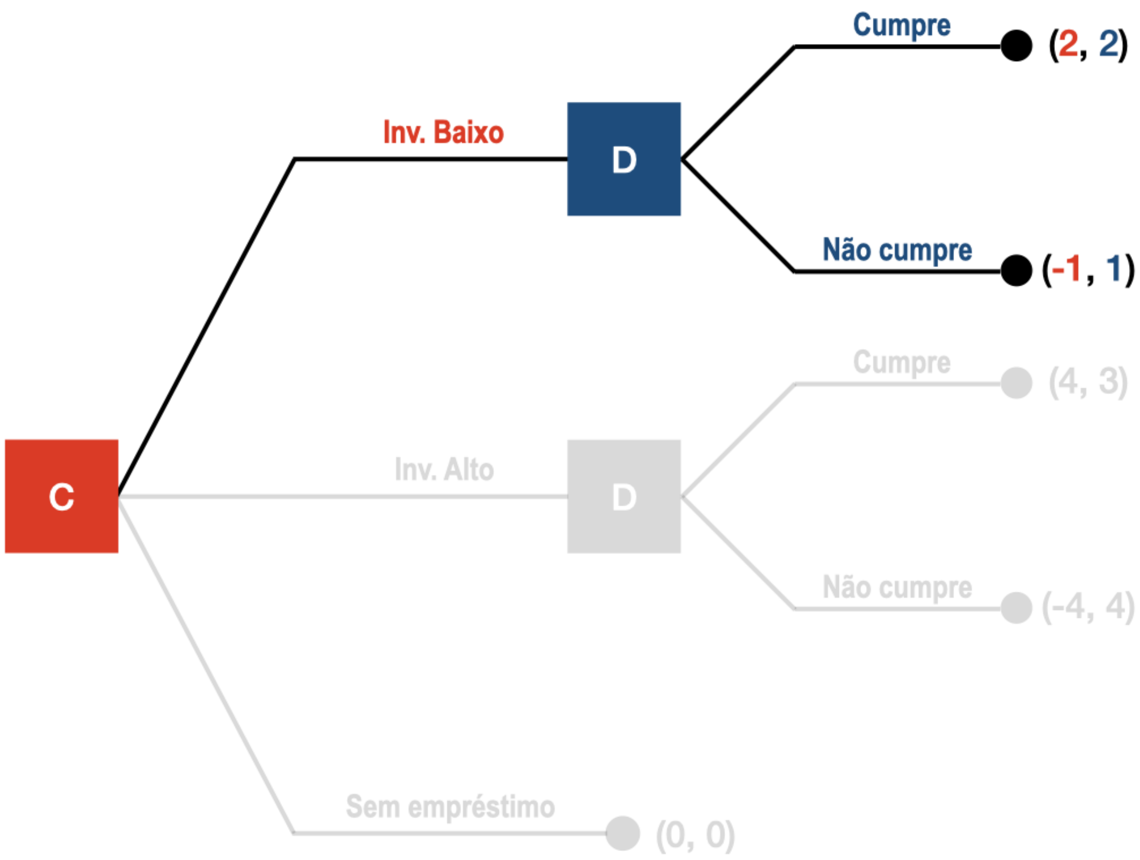
Jogo da proposição com veto parcial

- Solução: **{ (A, Veto), (Sem proposta) }**
- Antecipando que a proposição A + B resultaria em um veto parcial do Presidente, agora o Congresso prefere enviar proposta que contém apenas a proposição A (e que será vetada) ou não enviar proposta nenhuma.

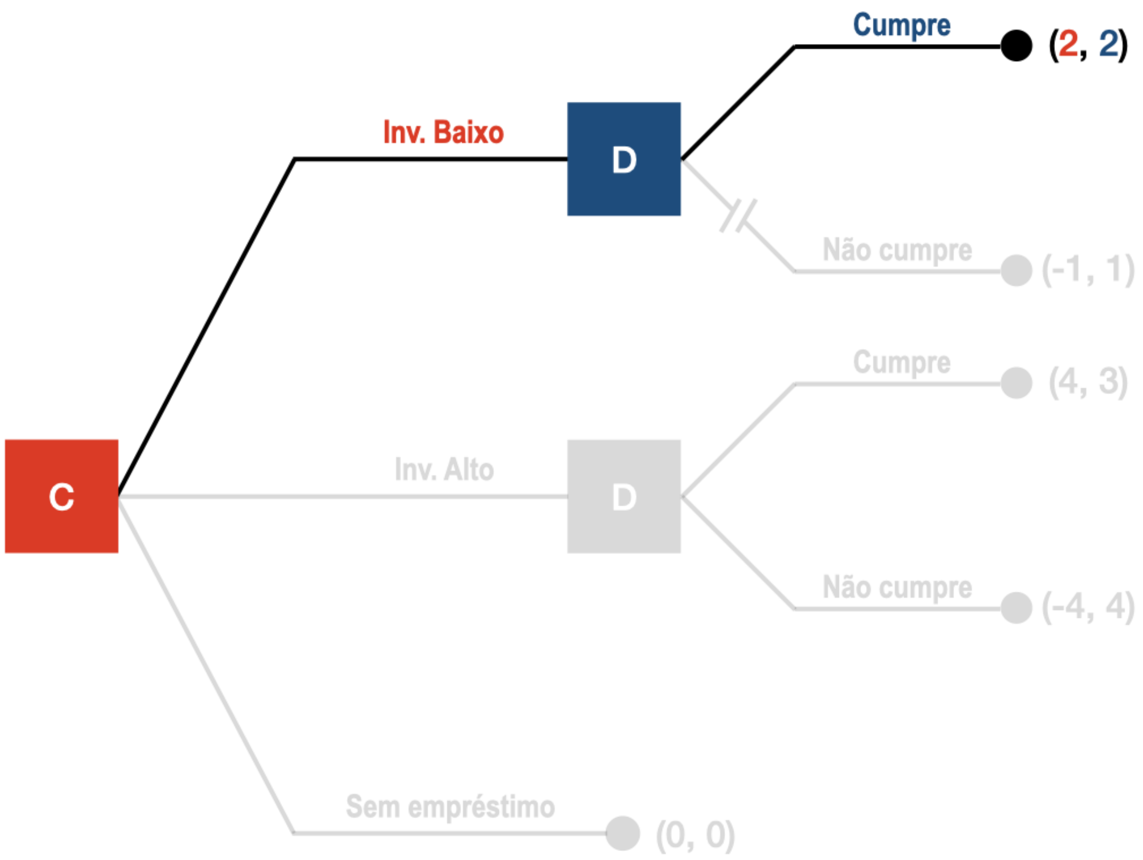

1
A
B
C
2
2
D
E
D
E
(2, 2)
(-1, 1)
(4, 3)
(-4, 4)
(0, 0)

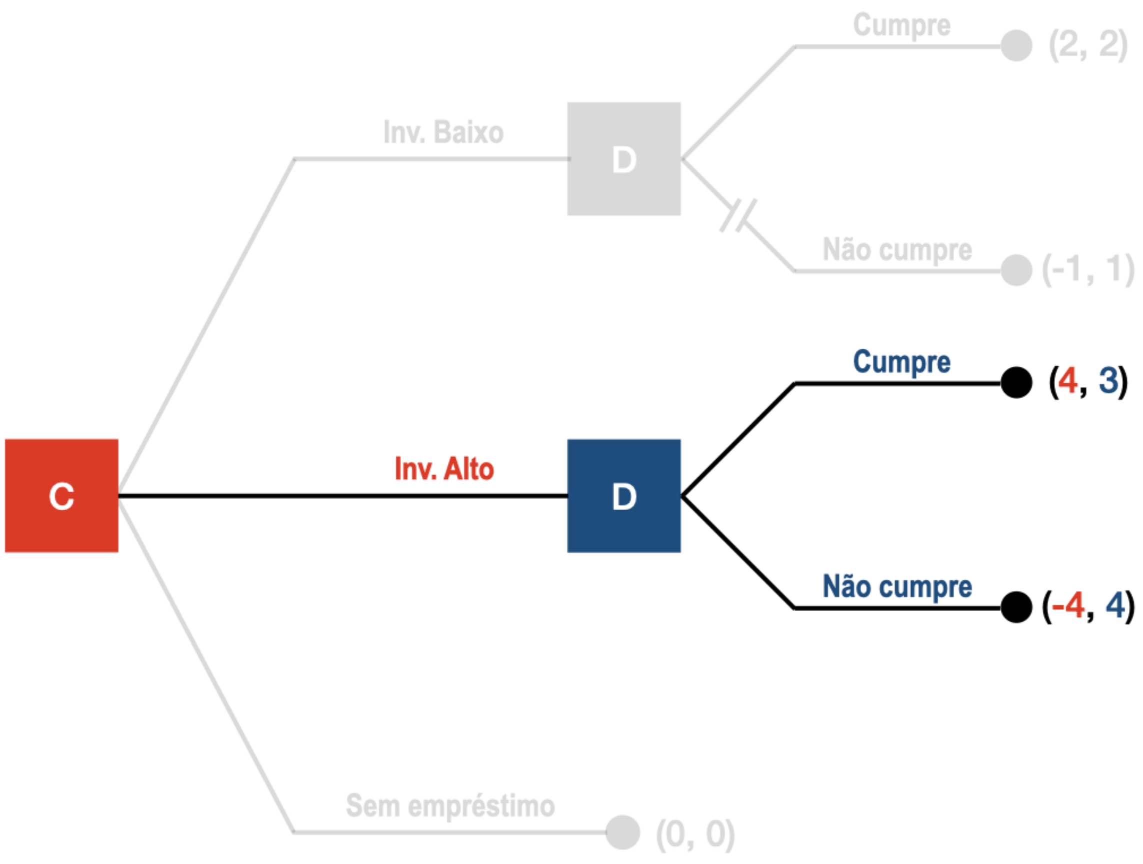
FGV DIREITO RIO

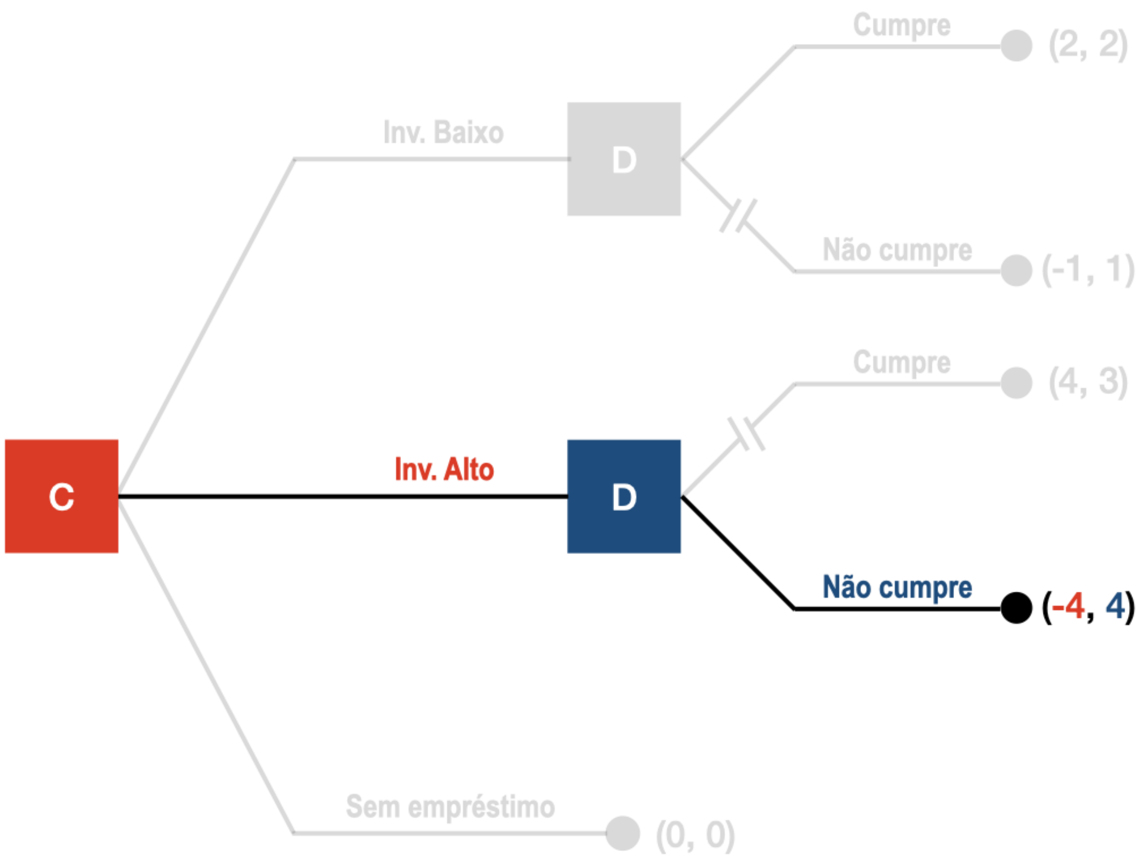



Cumpre
(2, 2)
Inv. Baixo
D
Não cumpre
(-1, 1)
Cumpre
(4, 3)
C
Inv. Alto
D
Não cumpre
(-4, 4)
Sem empréstimo
(0, 0)

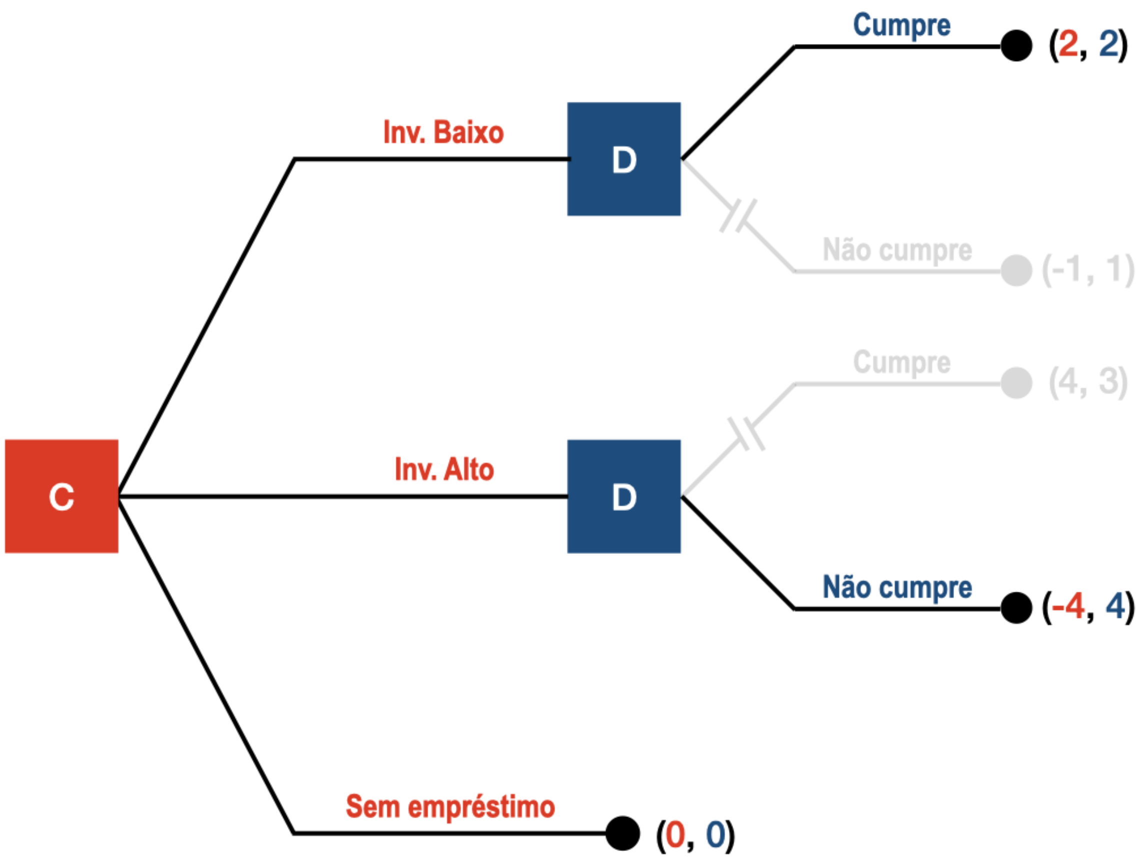
FGV DIREITO RIO

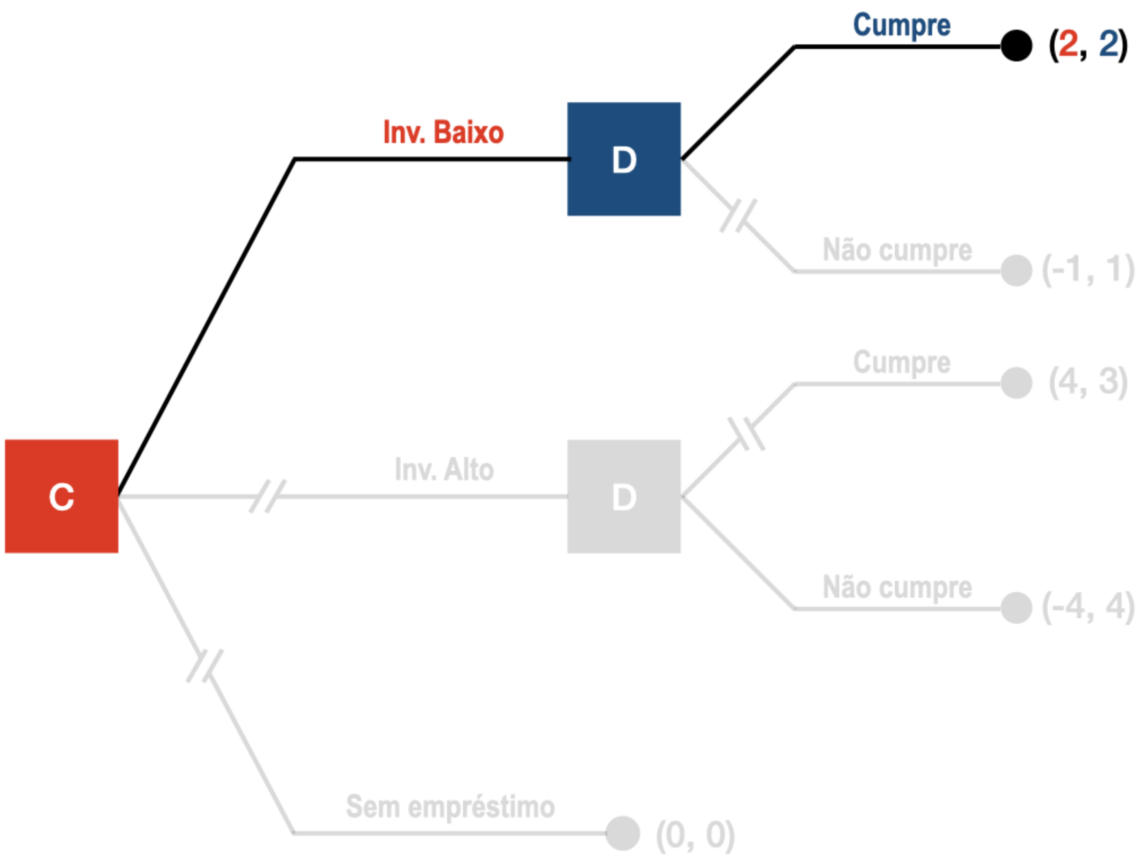


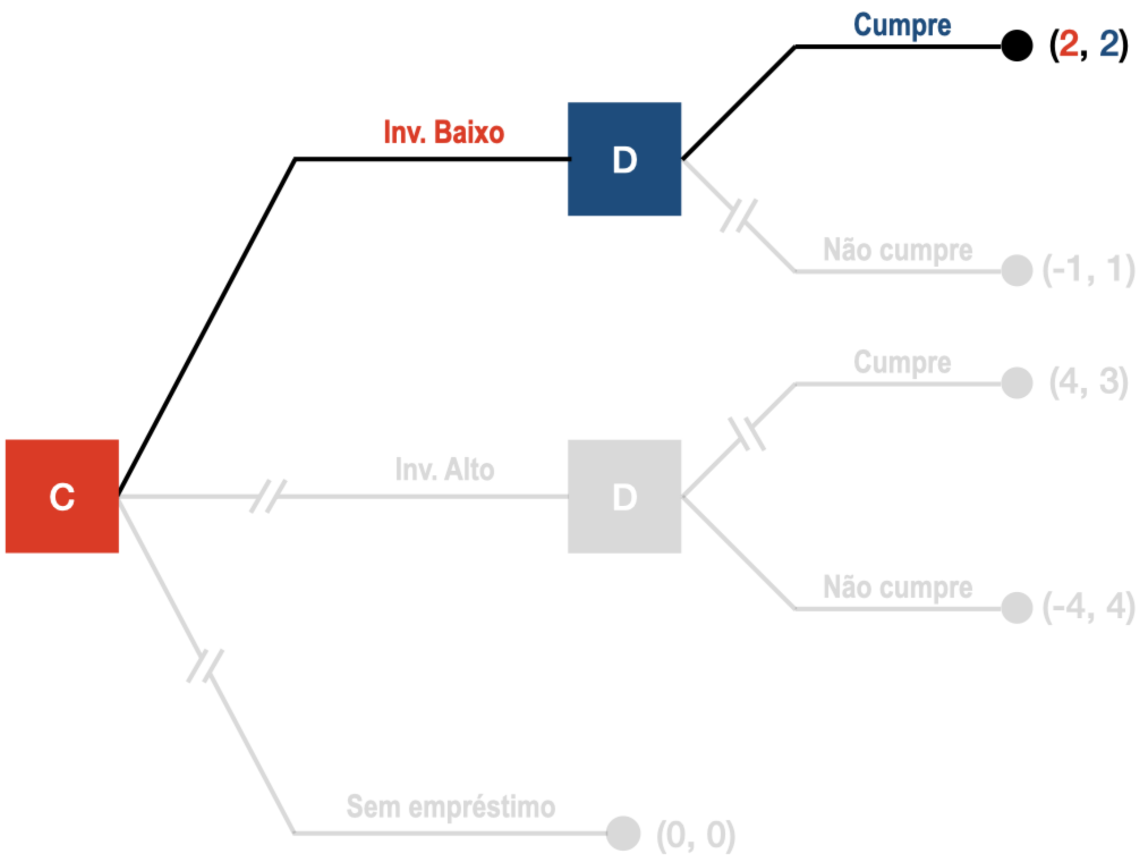

Cumpre
(2, 2)
Inv. Baixo
D
Não cumpre
(-1, 1)
Cumpre
(4, 3)
C
Inv. Alto
D
Não cumpre
(-4, 4)
Sem empréstimo
(0, 0)


Cumpre
(2, 2)
Inv. Baixo
D
Não cumpre
(-1, 1)
Cumpre
(4, 3)
C
Inv. Alto
D
Não cumpre
(-4, 4)
Sem empréstimo
(0, 0)

FGV DIREITO RIO



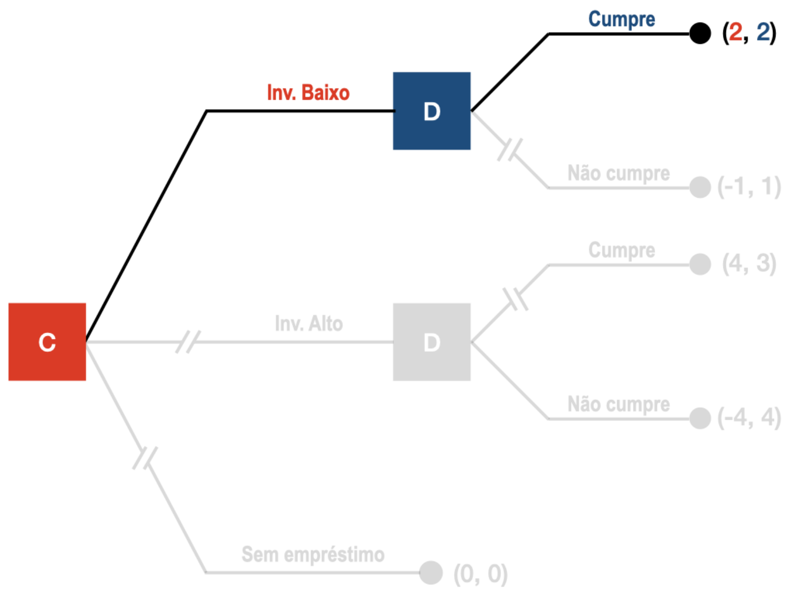

Cumpre
(2, 2)
Inv. Baixo
D
Não cumpre
(-1, 1)
Cumpre
(4, 3)
C
Inv. Alto
D
Não cumpre
(-4, 4)
Sem empréstimo
(0, 0)



Solução do Jogo

- (Investe Baixo, Cumpre)
- É o ótimo de pareto?
  - Não! (2, 2) X (4, 3)

Que problema é esse?



- O J1 quer incumbir o J2 de uma responsabilidade, mas teme que os incentivos de J2 o levem a desviar da solução mutuamente benéfica.
- J2 gostaria de convencer J1 a confiar em sua conduta, mas seus próprios incentivos estão em conflito com os interesses de J1.
- Esse problema espelha um conhecido conceito da AED. Que conceito é esse?
- **RISCO MORAL**

Jogo do empréstimo e o problema do Risco Moral

- Relações de investimento e empréstimo (papel fundamental para a Economia).
- Relações do tipo Principal x Agente.
- Muitas aplicações jurídicas:
  - Seguros e previdência,
  - Direito Societário,
  - Licitações,
  - Representação política e funções estatais,
  - Etc.

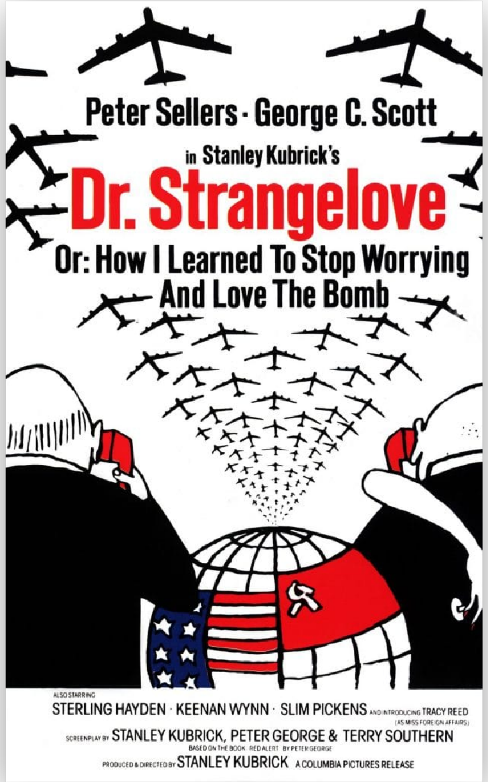
Jogo do empréstimo e o problema do Risco Moral

- Soluções possíveis?
  - Solução normativa (regulação).
  - Monitoramento e controle.
  - Redimensionamento dos payoffs (incentive design).
  - Garantias (commitment strategies).

Garantias e comprometimento (commitment strategies)

- Episódios de “queima de navios” (William na invasão da Normandia, Hernán Cortéz na invasão do novo mundo).
- Tentativa de exclusão voluntária de cursos de ação possíveis.
    - Novamente, ter menos opções de ação pode ser uma vantagem estratégica, como vimos com o jogo dos porquinhos.

Garantias e comprometimento (commitment strategies)



- Dr Strangelove (Dr. Fantástico): a máquina do fim do mundo (doomsday machine) soviética tinha uma falha.
- É preciso que a outra parte saiba. Sem o conhecimento da outra parte, não há nenhum sentido.
- Obs: em jogos com informação limitada, comprometimento pode ser utilizado como mecanismo de sinalização.