

Aula 9 – Jogos Sequenciais I

Teoria da Decisão – 2024.1

Lucas Thevenard

Correção dos exercícios

Jogo 1

	C	D
A	(20, 1)	(2, 2)
B	(15, 15)	(1, 20)

Jogo 1

	C	D
A	(<u>20</u> , 1)	(2, 2)
B	(15, 15)	(1, 20)

Jogo 1

	C	D
A	(<u>20</u> , 1)	(<u>2</u> , 2)
B	(15, <u>15</u>)	(<u>1</u> , 20)

Jogo 1

	C	D
A	(<u>20</u> , 1)	(<u>2</u> , 2)
B	(15, <u>15</u>)	(1, <u>20</u>)

Jogo 1

	C	D
A	(<u>20</u> , 1)	(<u>2</u> , 2)
B	(15 , 15)	(1 , <u>20</u>)

Jogo 1

	C	D
A	(<u>20</u> , 1)	(<u>2</u> , <u>2</u>)
B	(<u>15</u> , 15)	(1 , <u>20</u>)

Jogo 1

	C	D
A	(<u>20</u> , 1)	(<u>2</u> , <u>2</u>)
B	(<u>15</u> , <u>15</u>)	(<u>1</u> , <u>20</u>)

Jogo 1

	C	D
A	(<u>20</u> , 1)	(<u>2</u> , <u>2</u>)
B	(<u>15</u> , <u>15</u>)	(<u>1</u> , <u>20</u>)

Solução: { (A, D) }

Jogo 1

- Apenas um equilíbrio.
- Estratégias estritamente dominantes.
- Outra combinação de jogadas seria melhor de pareto para os jogadores.
- Qual é o jogo?
 - **Dilema dos prisioneiros.**

Jogo 2

	C	D
A	(11, 15)	(7, 7)
B	(7, 7)	(15, 11)

Jogo 2

	C	D
A	(<u>11</u> , 15)	(7, 7)
B	(7, 7)	(15, 11)

Jogo 2

	C	D
A	(<u>11</u> , 15)	(<u>7</u> , 7)
B	(7, <u>7</u>)	(<u>15</u> , 11)

Jogo 2

	C	D
A	(<u>11</u> , 15)	(7, 7)
B	(7, 7)	(15, <u>11</u>)

Jogo 2

	C	D
A	(<u>11</u> , <u>15</u>)	(<u>7</u> , <u>7</u>)
B	(<u>7</u> , <u>7</u>)	(<u>15</u> , <u>11</u>)

Jogo 2

	C	D
A	(<u>11</u> , <u>15</u>)	(<u>7</u> , <u>7</u>)
B	(<u>7</u> , 7)	(<u>15</u> , 11)

Jogo 2

	C	D
A	(<u>11</u> , <u>15</u>)	(<u>7</u> , <u>7</u>)
B	(<u>7</u> , <u>7</u>)	(<u>15</u> , <u>11</u>)

Jogo 2

	C	D
A	(<u>11</u> , <u>15</u>)	(<u>7</u> , <u>7</u>)
B	(<u>7</u> , <u>7</u>)	(<u>15</u> , <u>11</u>)

Solução: { (A, C), (B, D) }

Jogo 2

- Dois equilíbrios.
- Equilíbrios são melhores que as combinações de jogadas que não são equilíbrios, para ambos os jogadores.
- Equilíbrios desiguais, conflito distributivo entre os jogadores.
- Qual é o jogo?
 - **Batalha dos Sexos.**

Jogo 3

	C	D
A	(18, 18)	(9, 9)
B	(9, 9)	(18, 18)

Jogo 3

	C	D
A	(<u>18</u> , 18)	(9, 9)
B	(9, 9)	(18, 18)

Jogo 3

	C	D
A	(<u>18</u> , 18)	(9, <u>9</u>)
B	(9, <u>9</u>)	(<u>18</u> , 18)

Jogo 3

	C	D
A	(<u>18</u> , 18)	(9, 9)
B	(9, 9)	(<u>18</u> , 18)

Jogo 3

	C	D
A	(<u>18</u> , 18)	(9 , 9)
B	(9 , 9)	(<u>18</u> , 18)

Jogo 3

	C	D
A	(<u>18</u> , <u>18</u>)	(<u>9</u> , <u>9</u>)
B	(<u>9</u> , 9)	(<u>18</u> , 18)

Jogo 3

	C	D
A	(<u>18</u> , <u>18</u>)	(9, 9)
B	(9, 9)	(<u>18</u> , <u>18</u>)

Jogo 3

	C	D
A	(<u>18</u> , <u>18</u>)	(<u>9</u> , <u>9</u>)
B	(<u>9</u> , <u>9</u>)	(<u>18</u> , <u>18</u>)

Solução: { (A, C), (B, D) }

Jogo 3

- Dois equilíbrios.
- Equilíbrios são melhores que as combinações de jogadas que não são equilíbrios, para ambos os jogadores.
- Equilíbrios são idênticos: jogadores são indiferentes em relação aos equilíbrios.
- Que jogo é esse?
 - **Jogo de coordenação pura.**

Jogo 4

	C	D
A	(4, -3)	(4, 4)
B	(10, 10)	(-3, 4)

Jogo 4

	C	D
A	(4, -3)	(4, 4)
B	(<u>10</u> , 10)	(-3, 4)

Jogo 4

	C	D
A	(4, -3)	(<u>4</u> , 4)
B	(<u>10</u> , 10)	(-3, 4)

Jogo 4

	C	D
A	(<u>4</u> , -3)	(<u>4</u> , 4)
B	(<u>10</u> , 10)	(-3, <u>4</u>)

Jogo 4

	C	D
A	(4, -3)	(<u>4</u> , <u>4</u>)
B	(<u>10</u> , <u>10</u>)	(-3, 4)

Jogo 4

	C	D
A	(4, -3)	(4, 4)
B	(10, 10)	(-3, 4)

Jogo 4

	C	D
A	(<u>4</u> , <u>-3</u>)	(<u>4</u> , <u>4</u>)
B	(<u>10</u> , <u>10</u>)	(<u>-3</u> , <u>4</u>)

Jogo 4

	C	D
A	(<u>4</u> , <u>-3</u>)	(<u>4</u> , <u>4</u>)
B	(<u>10</u> , <u>10</u>)	(<u>-3</u> , <u>4</u>)

Solução: { (A, D), (B, C) }

Jogo 4

- Dois equilíbrios.
- Um equilíbrio é melhor, para ambos os jogadores, do que o outro.
- O equilíbrio mais vantajoso pode não ser obtido porque ambos garantem um payoff mínimo adotando as jogadas que levam ao equilíbrio inferior.
 - Jogo evidencia um possível problema de confiança entre os jogadores.
- Que jogo é esse?
 - **Jogo da Caça ao Veado.**

Jogo 5

	C	D
A	(6, 17)	(15, 15)
B	(1, 1)	(17, 6)

Jogo 5

	C	D
A	(<u>6</u> , 17)	(15, 15)
B	(1, 1)	(17, 6)

Jogo 5

	C	D
A	(<u>6</u> , 17)	(15, <u>15</u>)
B	(1, 1)	(<u>17</u> , 6)

Jogo 5

	C	D
A	(<u>6</u> , 17)	(15, <u>15</u>)
B	(1, 1)	(<u>17</u> , 6)

Jogo 5

	C	D
A	(<u>6</u> , <u>17</u>)	(<u>15</u> , <u>15</u>)
B	(<u>1</u> , <u>1</u>)	(<u>17</u> , <u>6</u>)

Jogo 5

	C	D
A	(<u>6</u> , <u>17</u>)	(15, 15)
B	(1, 1)	(<u>17</u> , 6)

Jogo 5

	C	D
A	(<u>6</u> , <u>17</u>)	(<u>15</u> , <u>15</u>)
B	(<u>1</u> , <u>1</u>)	(<u>17</u> , <u>6</u>)

Jogo 5

	C	D
A	(<u>6</u> , <u>17</u>)	(<u>15</u> , <u>15</u>)
B	(<u>1</u> , <u>1</u>)	(<u>17</u> , <u>6</u>)

Solução: { (A, C), (B, D) }

Jogo 5

- Dois equilíbrios.
- Equilíbrios desiguais, conflito distributivo entre os jogadores.
- Se ambos os jogadores tentam obter o maior payoff possível (estratégia agressiva) o resultado é o pior para ambos.
- Qual é o jogo?
 - **Jogo da Galinha.**

Jogo 6

	C	D
A	(12, -1)	(12, 12)
B	(14, 14)	(-1, 12)

Jogo 6

	C	D
A	(12 , -1)	(12, 12)
B	(14 , 14)	(-1, 12)

Jogo 6

	C	D
A	(<u>12</u> , -1)	(<u>12</u> , 12)
B	(<u>14</u> , 14)	(-1, <u>12</u>)

Jogo 6

	C	D
A	(<u>12</u> , -1)	(<u>12</u> , 12)
B	(<u>14</u> , 14)	(-1, <u>12</u>)

Jogo 6

	C	D
A	(<u>12</u> , -1)	(<u>12</u> , <u>12</u>)
B	(<u>14</u> , <u>14</u>)	(-1, <u>12</u>)

Jogo 6

	C	D
A	(<u>12</u> , -1)	(<u>12</u> , <u>12</u>)
B	(<u>14</u> , <u>14</u>)	(-1, <u>12</u>)

Jogo 6

	C	D
A	(<u>12</u> , -1)	(<u>12</u> , <u>12</u>)
B	(<u>14</u> , <u>14</u>)	(-1, <u>12</u>)

Jogo 6

	C	D
A	(<u>12</u> , -1)	(<u>12</u> , <u>12</u>)
B	(<u>14</u> , <u>14</u>)	(-1, <u>12</u>)

Solução: { (A, D), (B, C) }

Jogo 6

- Dois equilíbrios.
- Um equilíbrio é melhor, para ambos os jogadores, do que o outro.
- O equilíbrio mais vantajoso pode não ser obtido porque ambos garantem um payoff mínimo adotando as jogadas que levam ao equilíbrio inferior.
 - Jogo evidencia um possível problema de confiança entre os jogadores.
- Que jogo é esse?
 - **Jogo da Caça ao Veado.**

Jogo 7

	C	D
A	(1, 1)	(11, 11)
B	(11, 11)	(1, 1)

Jogo 7

	C	D
A	(1, 1)	(11, 11)
B	(11, 11)	(1, 1)

Jogo 7

	C	D
A	(1, 1)	(<u>11</u> , 11)
B	(<u>11</u> , 11)	(1, 1)

Jogo 7

	C	D
A	(<u>1</u> , <u>1</u>)	(<u>11</u> , <u>11</u>)
B	(<u>11</u> , <u>11</u>)	(<u>1</u> , <u>1</u>)

Jogo 7

	C	D
A	(1, 1)	(<u>11</u> , <u>11</u>)
B	(<u>11</u> , <u>11</u>)	(1, 1)

Jogo 7

	C	D
A	(1, 1)	(<u>11</u> , <u>11</u>)
B	(<u>11</u> , <u>11</u>)	(1, 1)

Jogo 7

	C	D
A	(1, 1)	(<u>11</u> , <u>11</u>)
B	(<u>11</u> , <u>11</u>)	(1, 1)

Jogo 7

	C	D
A	(<u>1</u> , <u>1</u>)	(<u>11</u> , <u>11</u>)
B	(<u>11</u> , <u>11</u>)	(<u>1</u> , <u>1</u>)

Solução: { (A, D), (B, C) }

Jogo 7

- Dois equilíbrios.
- Equilíbrios são melhores que as combinações de jogadas que não são equilíbrios, para ambos os jogadores.
- Equilíbrios são idênticos: jogadores são indiferentes em relação aos equilíbrios.
- Que jogo é esse?
 - **Jogo de coordenação pura.**

Jogo 8

	C	D
A	(1, 16)	(14, 14)
B	(5, 5)	(16, 1)

Jogo 8

	C	D
A	(1, 16)	(14, 14)
B	(5, 5)	(16, 1)

Jogo 8

	C C	D D
A A	(1, 16) (1, 16)	(14, 14) (14, 14)
B B	(5, 5) (5, 5)	(16, 1) (16, 1)

Jogo 8

	C	D
A	(1, 16)	(14, 14)
B	(5, 5)	(16, 1)

Jogo 8

	C D	
A	(1, <u>16</u>)	(14, 14)
<u>B</u>	(5, 5)	(16, 1)

Jogo 8

	C	D
A	(1, <u>16</u>)	(14, 14)
B	(<u>5</u> , <u>5</u>)	(<u>16</u> , 1)

Jogo 8

	C	D
A	(1, <u>16</u>)	(14, 14)
B	(<u>5</u>, 5)	(<u>16</u>, 1)

Jogo 8

	C	D
A	(1, <u>16</u>)	(14, 14)
B	(<u>5</u>, 5)	(16, 1)

Solução: { (B, C) }

Jogo 8

- Apenas um equilíbrio.
- Estratégias estritamente dominantes.
- Outra combinação de jogadas seria melhor de pareto para os jogadores.
- Qual é o jogo?
 - **Dilema dos prisioneiros.**

Jogo 9

	C	D
A	(17, 14)	(6, 6)
B	(6, 6)	(14, 17)

Jogo 9

	C	D
A	(<u>17</u> , 14)	(6, 6)
B	(6, 6)	(14, 17)

Jogo 9

	C	D
A	(<u>17</u> , 14)	(6, <u>6</u>)
B	(6, <u>6</u>)	(<u>14</u> , 17)

Jogo 9

	C	D
A	(<u>17</u> , 14)	(6, 6)
B	(6, 6)	(<u>14</u> , 17)

Jogo 9

	C	D
A	(<u>17</u> , 14)	(6 , 6)
B	(6 , 6)	(<u>14</u> , 17)

Jogo 9

	C	D
A	(<u>17</u> , <u>14</u>)	(<u>6</u> , <u>6</u>)
B	(<u>6</u> , 6)	(<u>14</u> , 17)

Jogo 9

	C	D
A	(<u>17</u> , <u>14</u>)	(<u>6</u> , <u>6</u>)
B	(<u>6</u> , <u>6</u>)	(<u>14</u> , <u>17</u>)

Jogo 9

	C	D
A	(<u>17</u> , <u>14</u>)	(<u>6</u> , <u>6</u>)
B	(<u>6</u> , <u>6</u>)	(<u>14</u> , <u>17</u>)

Solução: { (A, C), (B, D) }

Jogo 9

- Dois equilíbrios.
- Equilíbrios são melhores que as combinações de jogadas que não são equilíbrios, para ambos os jogadores.
- Equilíbrios desiguais, conflito distributivo entre os jogadores.
- Qual é o jogo?
 - **Batalha dos Sexos.**

Jogo 10

	C	D
A	(4, 4)	(18, 10)
B	(10, 18)	(13, 13)

Jogo 10

	C	D
A	(4, 4)	(18, 10)
B	(<u>10</u> , 18)	(13, 13)

Jogo 10

	C	D
A	(4, 4)	(<u>18</u> , 10)
B	(10, <u>18</u>)	(13, 13)

Jogo 10

	C	D
A	(4, 4)	(<u>18</u> , 10)
B	(10, <u>18</u>)	(13, 13)

Jogo 10

	C	D
A	(4, 4)	(<u>18</u> , <u>10</u>)
B	(<u>10</u> , <u>18</u>)	(13, 13)

Jogo 10

	C	D
A	(4, 4)	(<u>18</u> , <u>10</u>)
B	(<u>10</u> , 18)	(13, 13)

Jogo 10

	C	D
A	(4, 4)	(<u>18</u> , <u>10</u>)
B	(<u>10</u> , <u>18</u>)	(13, 13)

Jogo 10

	C	D
A	(4, 4)	(<u>18</u> , <u>10</u>)
B	(<u>10</u> , <u>18</u>)	(13, 13)

Solução: { (A, D), (B, C) }

Jogo 10

- Dois equilíbrios.
- Equilíbrios desiguais, conflito distributivo entre os jogadores.
- Se ambos os jogadores tentam obter o maior payoff possível (estratégia agressiva) o resultado é o pior para ambos.
- Qual é o jogo?
 - **Jogo da Galinha.**

Jogo 11

	C	D
A	(7, 9)	(10, 10)
B	(9, 9)	(9, 7)

Jogo 11

	C	D
A	(<u>7</u> , 9)	(10, <u>10</u>)
B	(<u>9</u> , 9)	(9, <u>7</u>)

Jogo 11

	C	D
A	(7, 9)	(<u>10</u> , 10)
B	(9, 9)	(9, 7)

Jogo 11

	C	D
A	(<u>7</u> , 9)	(<u>10</u> , 10)
B	(9, <u>9</u>)	(9, 7)

Jogo 11

	C	D
A	(<u>7</u> , 9)	(<u>10</u> , 10)
B	(9 , <u>9</u>)	(9 , <u>7</u>)

Jogo 11

	C	D
A	(7, 9)	(<u>10</u> , <u>10</u>)
B	(<u>9</u> , <u>9</u>)	(9, 7)

Jogo 11

	C	D
A	(<u>7</u> , <u>9</u>)	(<u>10</u> , <u>10</u>)
B	(<u>9</u> , <u>9</u>)	(<u>9</u> , <u>7</u>)

Jogo 11

	C	D
A	(7, 9)	(<u>10</u> , <u>10</u>)
B	(<u>9</u> , <u>9</u>)	(9, 7)

Solução: { (A, D), (B, C) }

Jogo 11

- Dois equilíbrios.
- Um equilíbrio é melhor, para ambos os jogadores, do que o outro.
- O equilíbrio mais vantajoso pode não ser obtido porque ambos garantem um payoff mínimo adotando as jogadas que levam ao equilíbrio inferior.
 - Jogo evidencia um possível problema de confiança entre os jogadores.
- Que jogo é esse?
 - **Jogo da Caça ao Veado.**

Jogo 12

	C	D
A	(10, 10)	(-5, 14)
B	(14, -5)	(2, 2)

Jogo 12

	C	D
A	(10 , 10)	(-5, 14)
B	(14 , -5)	(2, 2)

Jogo 12

	C	D
A	(10, 10)	(-5, 14)
B	(14, -5)	(2, 2)

Jogo 12

	C	D
A	(10, 10)	(-5, 14)
B	(<u>14</u> , -5)	(<u>2</u> , 2)

Jogo 12

	C	D
A	(10, 10)	(-5, 14)
B	(14, -5)	(2, 2)

Jogo 12

	C	D
A	(10, 10)	(-5, 14)
B	(14, -5)	(2, 2)

Jogo 12

	C	D
A	(10, 10)	(-5, <u>14</u>)
B	(<u>14</u>, -5)	(<u>2</u>, <u>2</u>)

Jogo 12

	C	D
A	(10, 10)	(-5, <u>14</u>)
B	(<u>14</u>, -5)	(2, 2)

Solução: { (B, D) }

Jogo 12

- Apenas um equilíbrio.
- Estratégias estritamente dominantes.
- Outra combinação de jogadas seria melhor de pareto para os jogadores.
- Qual é o jogo?
 - **Dilema dos prisioneiros.**

Roteiro da Aula

- Recapitulando os problemas estratégicos estudados
 - Definição de jogo, Conceitos de solução, Cooperação, Coordenação
- Equilíbrios em estratégias mistas
- Jogos Sequenciais

1. Recapitulando os problemas estratégicos estudados

Recapitulando

- Jogos: situação estratégica
- Solução por Dominância - conceito forte, mas incompleto
- Solução por Equilíbrio de Nash - aspecto dinâmico, completo
 - Estratégias puras - melhores respostas se estabilizam
 - Estratégias mistas - inclui aleatoriedade (melhor não ser previsível)
- Problema da cooperação – dilema dos prisioneiros
- Problema da coordenação - 4 jogos clássicos

Observe o jogo abaixo

	D	E	F
A	(3, 2)	(1, 1)	(0, 4)
B	(1, 1)	(2, 3)	(0, 4)
C	(4, 0)	(4, 0)	(1, 1)

Observe o jogo abaixo

	D	E	F
A	(3, 2)	(1, 1)	(0, 4)
B	(1, 1)	(2, 3)	(0, 4)
C	(4, 0)	(4, 0)	(1, 1)

Observe o jogo abaixo

	D	E	F
A	(3, 2)	(1, 1)	(0, 4)
B	(1, 1)	(2, 3)	(0, 4)
C	(4, 0)	(4, 0)	(1, 1)

Observe o jogo abaixo

	D	E	F
A	(3, 2)	(1, 1)	(0, 4)
B	(1, 1)	(2, 3)	(0, 4)
C	(4, 0)	(4, 0)	(1, 1)

Observe o jogo abaixo

	D	E	F
A	(3, 2)	(1, 1)	(0, 4)
B	(1, 1)	(2, 3)	(0, 4)
C	(4, 0)	(4, 0)	(1, 1)

Observe o jogo abaixo

	D	E	F
A	(3, 2)	(1 , 1)	(0, 4)
B	(1, 1)	(2, 3)	(0, 4)
C	(4 , 0)	(4 , 0)	(1 , 1)

Observe o jogo abaixo

	D	E	F
A	(3, 2)	(1, 1)	(0, <u>4</u>)
B	(1, 1)	(2, 3)	(0, <u>4</u>)
C	(<u>4</u> , 0)	(<u>4</u> , 0)	(<u>1</u> , 1)

Observe o jogo abaixo

	D	E	F
A	(3, 2)	(1, 1)	(0, <u>4</u>)
B	(1, 1)	(2, 3)	(0, <u>4</u>)
C	(<u>4</u> , 0)	(<u>4</u> , 0)	(<u>1</u> , 1)

Observe o jogo abaixo

	D	E	F
A	(3, 2)	(1, 1)	(0, <u>4</u>)
B	(1, 1)	(2, 3)	(0, <u>4</u>)
C	(<u>4</u> , 0)	(<u>4</u> , 0)	(<u>1</u> , 1)

Observe o jogo abaixo

	D	E	F
A	(3, 2)	(1, 1)	(0, <u>4</u>)
B	(1, 1)	(2, 3)	(0, <u>4</u>)
C	(<u>4</u> , 0)	(<u>4</u> , 0)	(1, 1)

- Os dois jogadores possuem estratégias dominantes.

Solução: (C, F)

- Mas esse equilíbrio é benéfico para os jogadores?
 - Qual seria o resultado se jogassem infinitas vezes?

Observe o jogo abaixo

	D	E	F
A	(3, 2)	(1, 1)	(-0, 4)
B	(1, 1)	(2, 3)	(-0, 4)
C	(-4, 0)	(-4, 0)	(1, 1)
-	-	-	-

- Os dois jogadores possuem estratégias dominantes.

Solução: (C, F)

- Mas esse equilíbrio é benéfico para os jogadores?
 - Qual seria o resultado se jogassem infinitas vezes?

Observe o jogo abaixo

	D	E
A	(3, 2)	(1, 1)
B	(1, 1)	(2, 3)

Observe o jogo abaixo

	D	E
A	(<u>3</u> , 2)	(1, 1)
B	(1, 1)	(2, 3)

Observe o jogo abaixo

	D	E
A	(<u>3</u> , 2)	(<u>1</u> , 1)
B	(1, <u>1</u>)	(<u>2</u> , 3)

Observe o jogo abaixo

	D	E
A	(<u>3</u> , 2)	(1, <u>1</u>)
B	(1, <u>1</u>)	(<u>2</u> , 3)

Observe o jogo abaixo

	D	E
A	(<u>3</u> , <u>2</u>)	(<u>1</u> , <u>1</u>)
B	(<u>1</u> , <u>1</u>)	(<u>2</u> , <u>3</u>)

Observe o jogo abaixo

	D	E
A	(<u>3</u> , <u>2</u>)	(<u>1</u> , <u>1</u>)
B	(<u>1</u> , 1)	(<u>2</u> , <u>3</u>)

Observe o jogo abaixo

	D	E
A	(<u>3</u> , <u>2</u>)	(<u>1</u> , <u>1</u>)
B	(<u>1</u> , <u>1</u>)	(<u>2</u> , <u>3</u>)

Observe o jogo abaixo

	D	E
A	(<u>3</u> , <u>2</u>)	(<u>1</u> , <u>1</u>)
B	(<u>1</u> , <u>1</u>)	(<u>2</u> , <u>3</u>)

- O novo jogo envolve um problema de coordenação. Que jogo é esse?
 - Jogo da Batalha dos Sexos.

Solução: { (A, D), (B, E) }

2. Equilíbrios em estratégias mistas

		Ímpar
	0	1
Par	0	(<u>10</u> , 0) (0, <u>10</u>)
	1	(0, <u>10</u>) (<u>10</u> , 0)

Introdução ao conceito de estratégias mistas

- Como jogar par ou ímpar?
- Por que não devemos sempre jogar 0 ou sempre jogar 1.
- Seria desejável jogar 1 em 75% dos casos? Por que?

Estratégias mistas

- **Par ou ímpar:** nenhum jogador deve utilizar uma estratégia com mais frequência que a outra (mais de 50% das vezes).
 - A situação em que cada jogador utiliza cada estratégia em 50% dos casos é considerada um equilíbrio de Nash.
 - Cada jogador, nesse caso, está dando sua melhor resposta ao outro.
 - Qualquer mudança nas distribuições seria instável pois os jogadores teriam incentivos para mudar suas estratégias.
 - Chamamos esse tipo de equilíbrio de "**estratégias mistas**" pois cada jogador não usa apenas uma estratégia. Mais de uma estratégia é usada, cada uma em uma certa proporção de casos (distribuição de probabilidades).

Estratégias mistas

- Nem sempre a distribuição de probabilidades será 50% para cada jogador.
 - Como calcular o equilíbrio em estratégias mistas em casos menos triviais que o jogo de par ou ímpar? (...)
- Jogos podem possuir simultaneamente equilíbrios em estratégias puras e equilíbrios em estratégias mistas.
 - Exemplo: o jogo da galinha também possui um equilíbrio em estratégias mistas.

**Agora vamos aprender a calcular o equilíbrio em
estratégias mistas**

Pode deixar que eu
sei o que estou
fazendo...



Modelos de
decisão racional



Jogos, estratégia
e dominância



Equilíbrio de Nash
em estratégias
puras



Estratégias
mistas



IMPORTANTE

Respire fundo e tenha brio!

- Esse é o conceito de solução mais sofisticado que teremos no curso.
- O John Nash é um gênio mesmo??
 - Resposta: **SIM!**

Jogo "Run or Pass" (futebol americano)

		Defesa	
		Defende o Passe	Defende a Corrida
Ataque	Passe	(2, -2)	(17, -17)
	Corrida	(6, -6)	(1, -1)

Jogo "Run or Pass" (futebol americano)

		Defesa	
		Defende o Passe	Defende a Corrida
Ataque	Passe	(2, -2)	(17, -17)
	Corrida	(<u>6</u> , -6)	(1, -1)

Jogo "Run or Pass" (futebol americano)

		Defesa	
		Defende o Passe	Defende a Corrida
Ataque	Passe	(2, -2)	(17, -17)
	Corrida	(6, -6)	(1, -1)

Jogo "Run or Pass" (futebol americano)

		Defesa	
		Defende o Passe	Defende a Corrida
Ataque	Passe	(2, -2)	(17, -17)
	Corrida	(6, -6)	(1, -1)

Jogo "Run or Pass" (futebol americano)

		Defesa	
		Defende o Passe	Defende a Corrida
Ataque	Passe	(2, <u>-2</u>)	(<u>17</u> , -17)
	Corrida	(<u>6</u> , -6)	(1, -1)

Jogo "Run or Pass" (futebol americano)

		Defesa	
		Defende o Passe	Defende a Corrida
Ataque	Passe	(2, <u>-2</u>)	(<u>17</u> , -17)
	Corrida	(<u>6</u> , -6)	(1, <u>-1</u>)

Jogo "Run or Pass" (futebol americano)

		Defesa	
		Defende o Passe	Defende a Corrida
Ataque	Passe	(2, <u>-2</u>)	(<u>17</u> , -17)
	Corrida	(<u>6</u> , -6)	(1, <u>-1</u>)

Não há solução em estratégias puras

Como jogar esse jogo?

- O ataque pode sempre optar pela jogada com o maior potencial de ganho (passe)?
 - Não, pois o ataque, nesse caso, vai sempre defender o passe, garantindo que o ataque avance apenas 2 jardas.
- O ataque deve defender o passe, aleatoriamente, em 50% dos casos? Que tal em 60% dos casos?
 - Como analisar as estratégias da defesa nesse caso?

Análise do valor esperado

- Precisamos calcular o valor esperado de cada resposta da defesa, sabendo que o ataque opta pelo passe em 50% dos casos e pela corrida nos outros 50%.
- $E_{dp} = (0,5)(-2) + (0,5)(-6) = -4$
- $E_{dc} = (0,5)(-17) + (0,5)(-1) = -9$
- $E_{dp} > E_{dc}$
- Defesa sempre prefere defender o passe, e o ataque ganha em média apenas 4 jardas!

Como evitar que o outro jogador antecipe nossa jogada?

- Devemos escolher as probabilidades das estratégias de forma que a outra parte, em cada jogo, seja indiferente entre qual resposta adotar.
 - **Ataque:** probabilidade de passar e de correr que iguala o valor esperado de defender o passe ou a corrida.
 - **Defesa:** probabilidade de defender o passe e de defender a corrida que iguala o valor esperado de passar ou correr.

Análise da estratégia do ataque

- Escolhe a probabilidade de passar (q_p) de forma que, para a defesa, o valor esperado de defender o passe (E_{dp}) seja igual ao valor esperado de defender a corrida (E_{dc}).
- $(1 - q_p)$ = probabilidade de correr
- $E_{dp} = (q_p)(-2) + (1 - q_p)(-6) = 4q_p - 6$
- $E_{dc} = (q_p)(-17) + (1 - q_p)(-1) = -16q_p - 1$
- $E_{dp} = E_{dc} \implies 4q_p - 6 = -16q_p - 1 \implies q_p = \frac{5}{20} = 25\%$

Análise da estratégia da defesa

- Escolhe a probabilidade de defender o passe (q_{dp}) de forma que, para o ataque, o valor esperado de passar (E_p) seja igual ao valor esperado de correr (E_c).
- $(1 - q_{dp})$ = probabilidade de defender a corrida
- $E_p = (q_{dp})(2) + (1 - q_{dp})(17) = -15q_{dp} + 17$
- $E_c = (q_{dp})(6) + (1 - q_{dp})(1) = 5q_{dp} + 1$
- $E_p = E_c \implies -15q_{dp} + 17 = 5q_{dp} + 1 \implies q_{dp} = \frac{16}{20} = 80\%$

Solução do jogo "Run or Pass"

		Defesa	
		Defende o Passe	Defende a Corrida
Ataque	Passe	(2, <u>-2</u>)	(<u>17</u> , -17)
	Corrida	(<u>6</u> , -6)	(1, <u>-1</u>)

**Ataque passa em 25% dos casos e corre em 75% dos casos,
Defesa defende o passe em 80% dos casos e a corrida em 20% dos casos.**

Voltando ao jogo da galinha...

		Predador 2	
		Agressivo (Hawk)	Passivo (Dove)
Predador 1	Agressivo (Hawk)	(-3, -3)	(4, 0)
	Passivo (Dove)	(0, 4)	(2, 2)

Voltando ao jogo da galinha...

		Predador 2	
		Agressivo (Hawk)	Passivo (Dove)
Predador 1	Agressivo (Hawk)	(-3, -3)	(4, 0)
	Passivo (Dove)	(0, 4)	(2, 2)

Voltando ao jogo da galinha...

		Predador 2	
		Agressivo (Hawk)	Passivo (Dove)
Predador 1	Agressivo (Hawk)	(-3, -3)	(4, 0)
	Passivo (Dove)	(0, 4)	(2, 2)

Voltando ao jogo da galinha...

		Predador 2	
		Agressivo (Hawk)	Passivo (Dove)
Predador 1	Agressivo (Hawk)	(-3, -3)	(4, 0)
	Passivo (Dove)	(0, 4)	(2, 2)

Voltando ao jogo da galinha...

		Predador 2	
		Agressivo (Hawk)	Passivo (Dove)
Predador 1	Agressivo (Hawk)	(-3, -3)	(4, 0)
	Passivo (Dove)	(0, 4)	(2, 2)

Voltando ao jogo da galinha...

		Predador 2	
		Agressivo (Hawk)	Passivo (Dove)
Predador 1	Agressivo (Hawk)	(-3, -3)	(4, 0)
	Passivo (Dove)	(0, 4)	(2, 2)

Voltando ao jogo da galinha...

		Predador 2	
		Agressivo (Hawk)	Passivo (Dove)
Predador 1	Agressivo (Hawk)	(-3, -3)	(4, 0)
	Passivo (Dove)	(0, 4)	(2, 2)

Solução (estratégias puras): { (Hawk, Dove), (Dove, Hawk) }

Qual seria o equilíbrio desse jogo em estratégias mistas?

- Cada predador escolhe a probabilidade de ser agressivo (q_a) de forma que, para o outro, o valor esperado de ser agressivo (E_a) seja igual ao de ser passivo (E_p).
- $(1 - q_a)$ = probabilidade de ser passivo
- $E_a = (q_a)(-3) + (1 - q_a)(4) = 4 - 7q_a$
- $E_p = (q_a)(0) + (1 - q_a)(2) = 2 - 2q_a$
- $E_a = E_p \implies 4 - 7q_a = 2 - 2q_a \implies q_a = \frac{2}{5} = 40\%$

Equilíbrio representa a tendência de equilíbrio da população

- Se mais indivíduos se tornam hawks, há um excesso de encontro entre agressivos, gerando prejuízos para ambos (-3, -3).
- Se mais indivíduos se tornam doves, há uma maior oportunidade para hawks ganharem mais (4, 0).

3. Jogos Sequenciais

Vamos jogar NIM!

- Cada jogador escolhe retirar entre 1 e 6 peças a cada turno.
- O jogo começa com 20 peças.
- O último jogador que retira (acaba com as peças) vence.

Entendendo o resultado de NIM

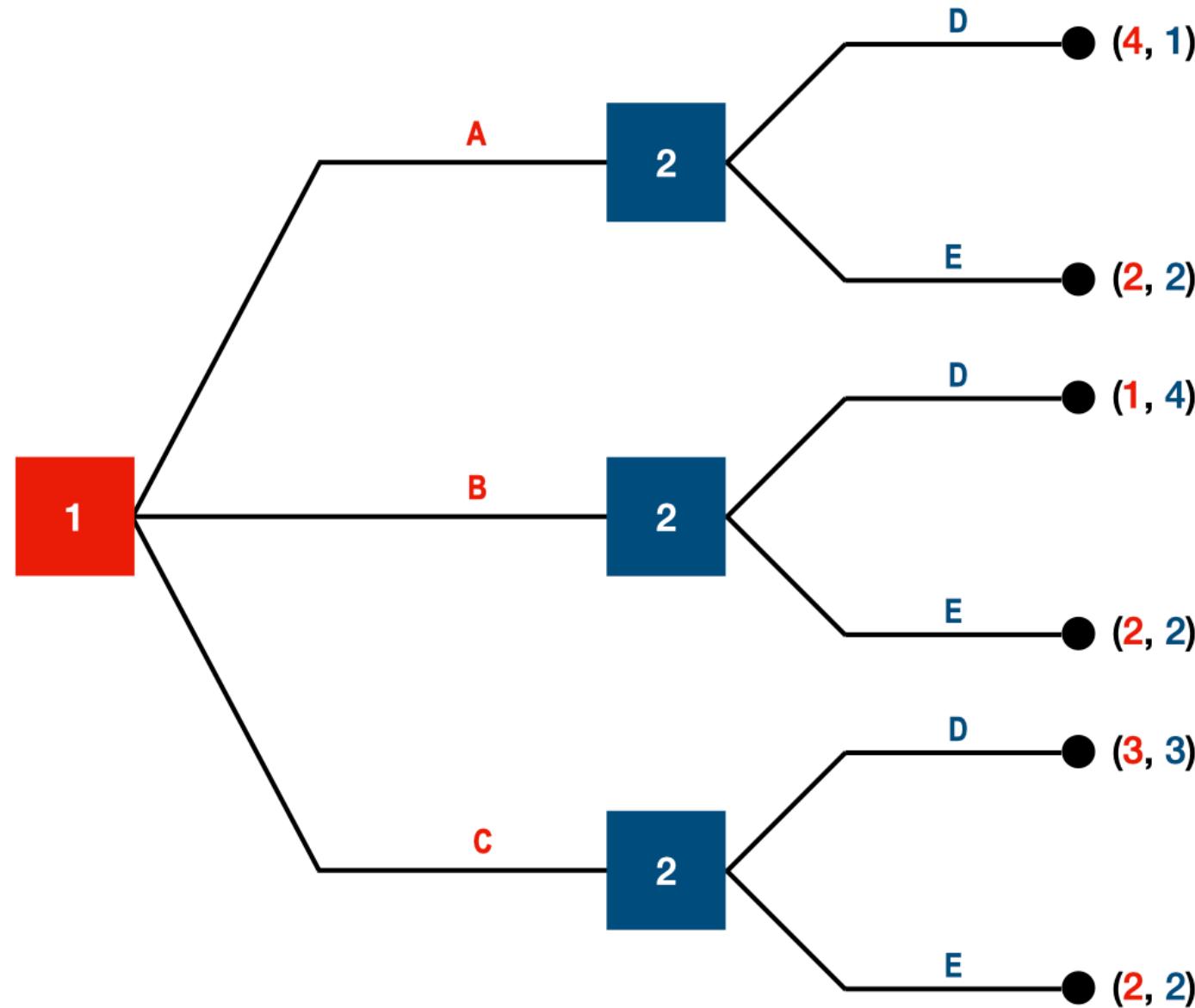
- Jogador que joga quando há 7 peças perde o jogo.
- Consequentemente, jogador que joga quando há 14 peças perde o jogo.

NIM com 20 peças

- Com 20 peças, Jogador 1 sempre pode vencer se jogar corretamente.
 - Jogador 1 tira 6, deixando o jogador 2 com 14.
 - Em seguida, tira o suficiente para deixar o outro jogador com 7 peças.
 - Por fim, tira as remanescentes.
- **First-mover advantage:** em diversos jogos, quem age primeiro tem a vantagem.
 - Mas o que acontece quando jogamos NIM com 21 peças?
 - Embora seja comum, nem todos os jogos possuem first-mover advantage.

Indução retroativa

- Para resolver jogos sequenciais, precisamos voltar ao conceito de **indução retroativa**.
 - Em NIM, para entendermos nossa primeira jogada, precisamos entender como o jogo termina.
 - Em jogos sequenciais, cada jogador tenta antecipar as jogadas seguintes por isso a análise é feita de trás para frente.



Jogo da proposição e voto

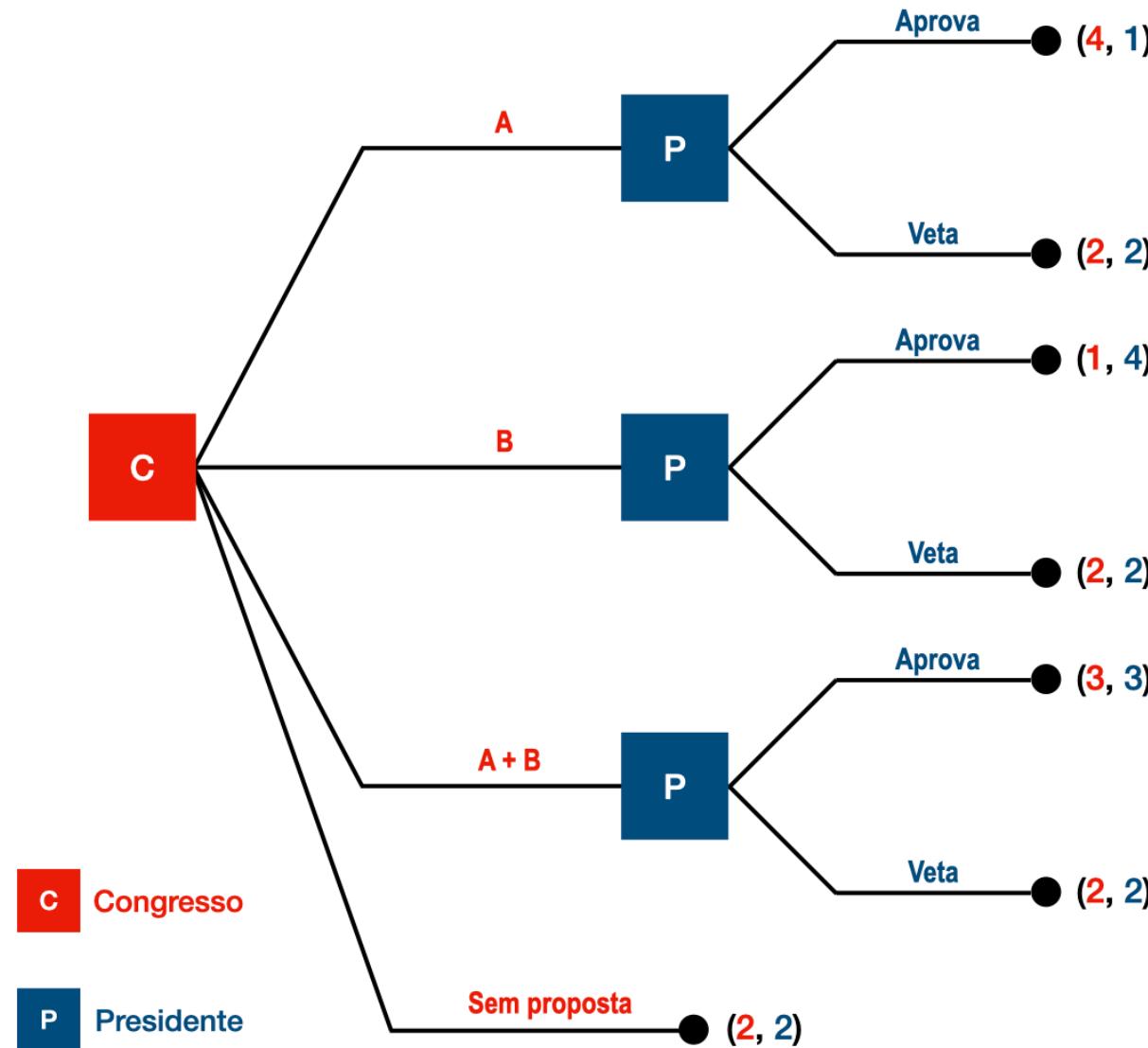
- Interação entre o Congresso e um Presidente com preferências divergentes.
- Congresso prefere a provisão A, mas não gosta da provisão B.
- Presidente gosta da provisão B, mas não gosta da provisão A.

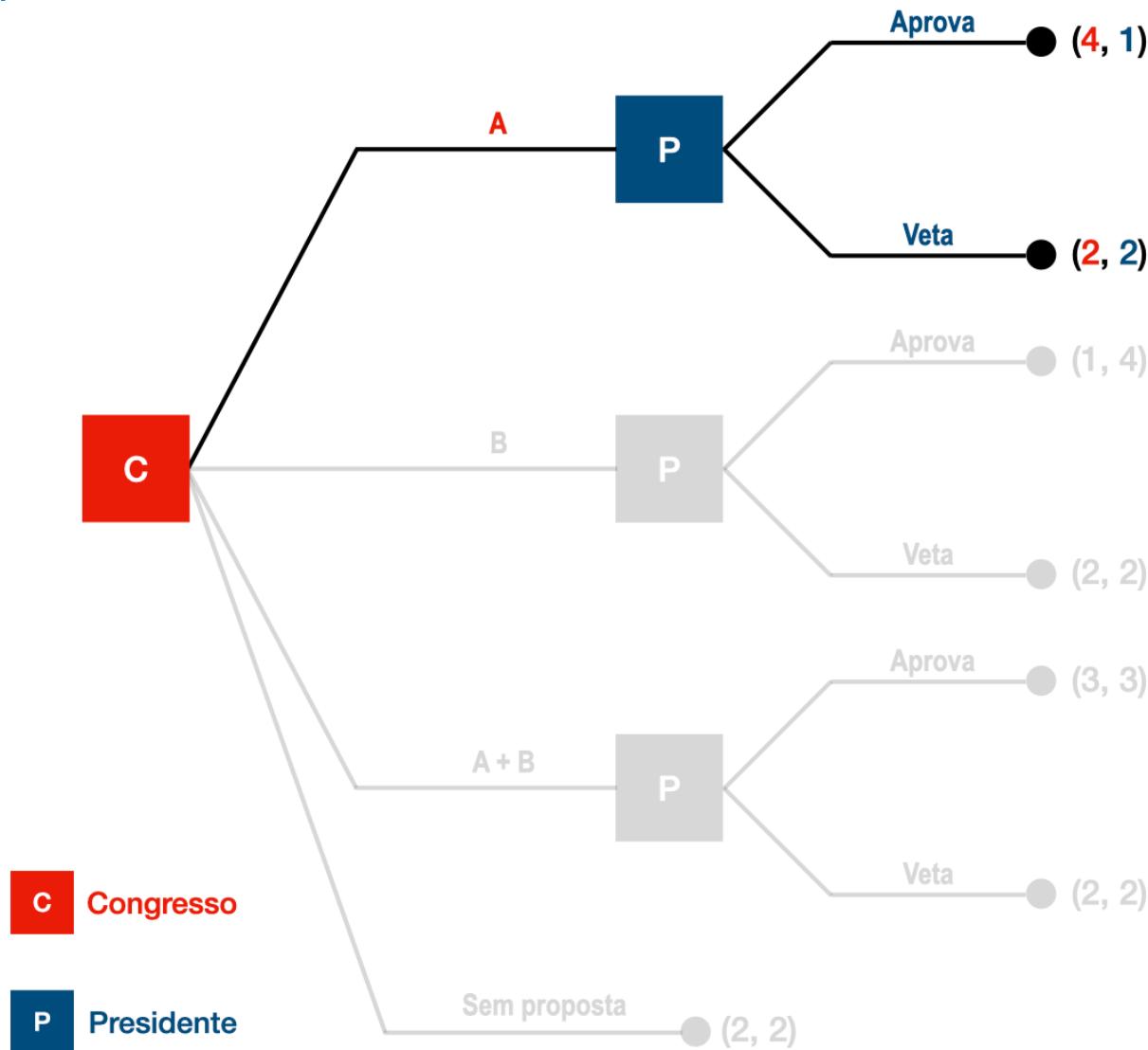
Ranking de preferências dos jogadores

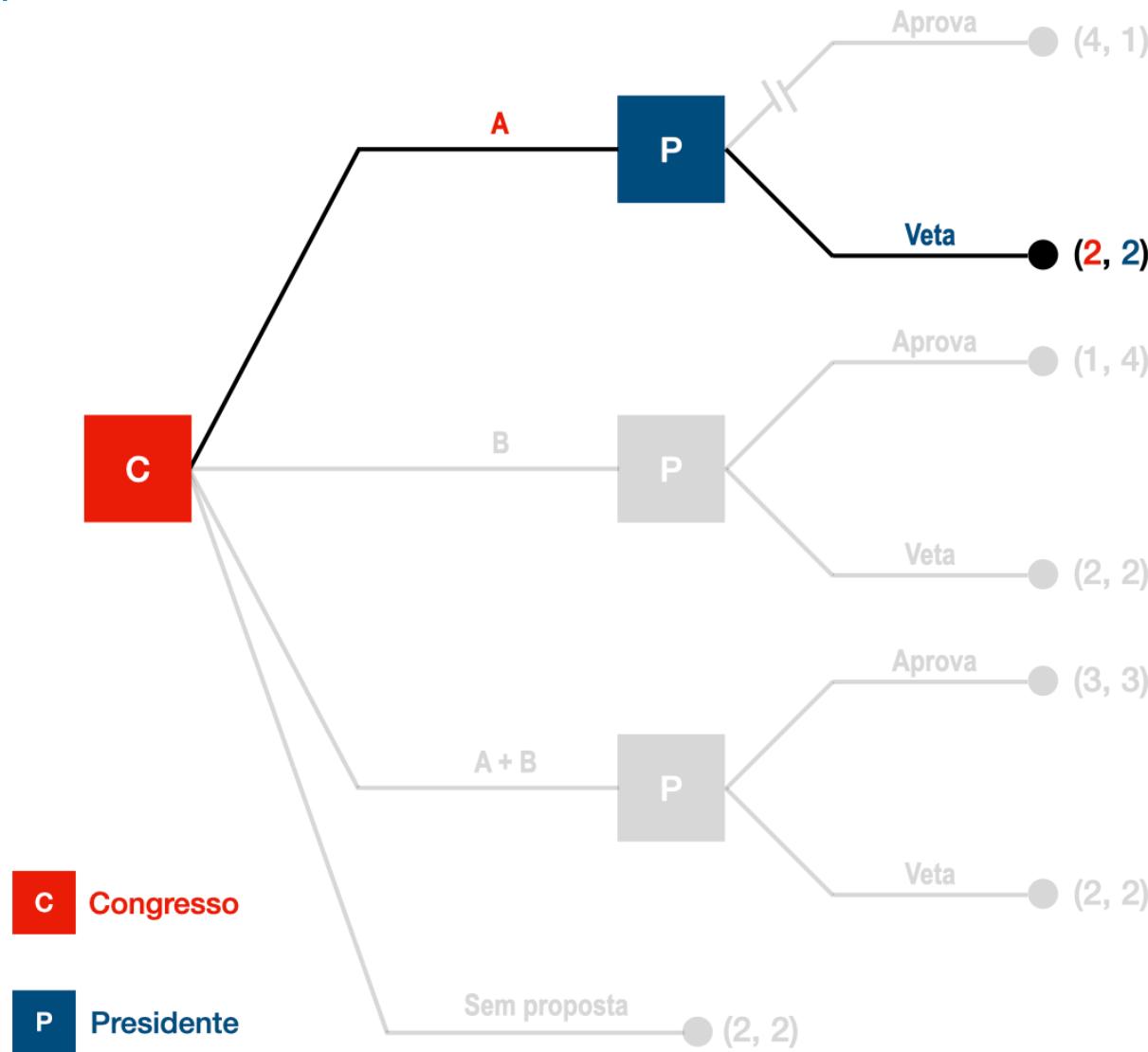
Resultado	Congresso	Presidente
Apenas A	4	1
Apenas B	1	4
A + B	3	3
Nenhuma	2	2

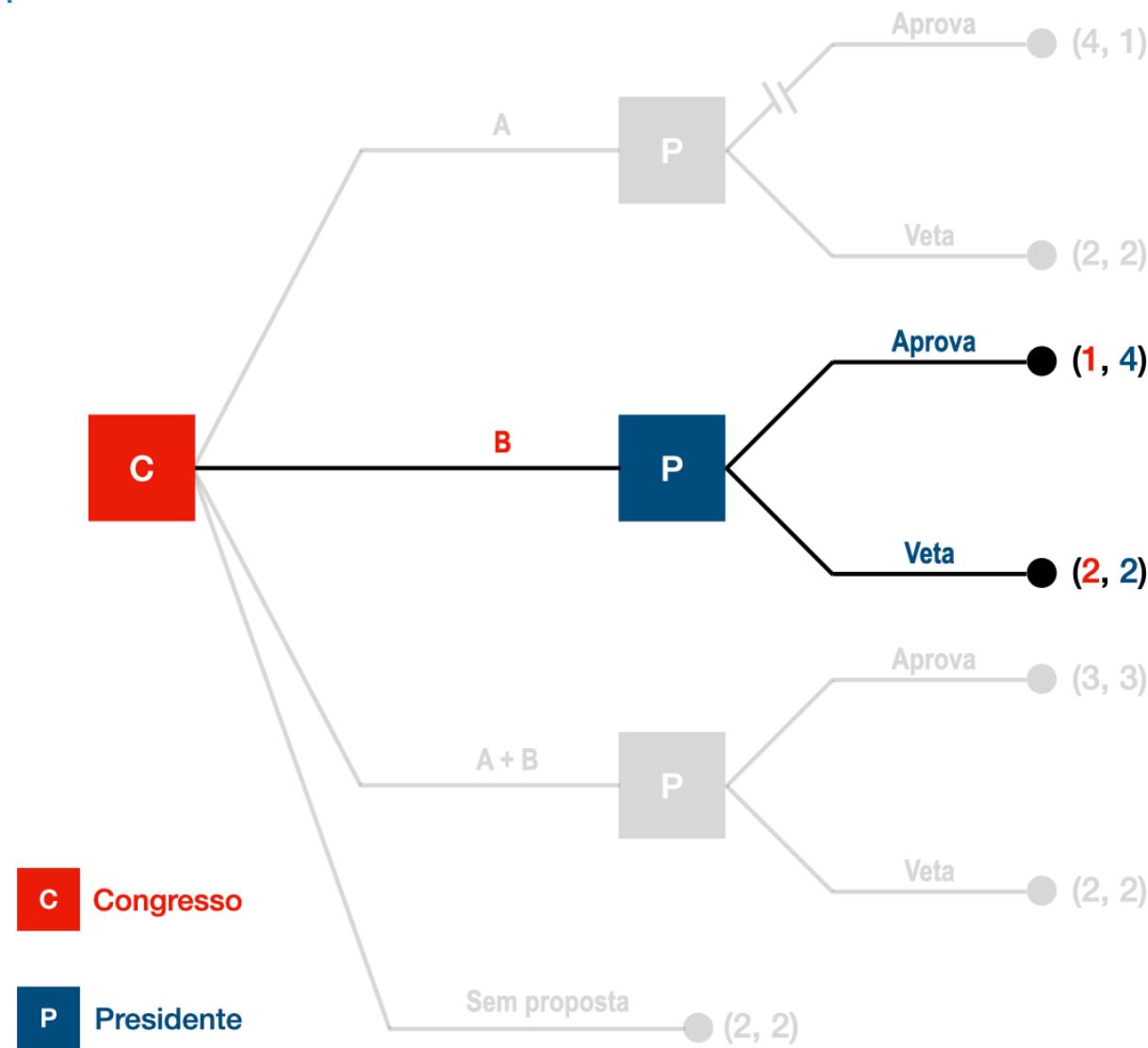
Jogo da proposição e voto

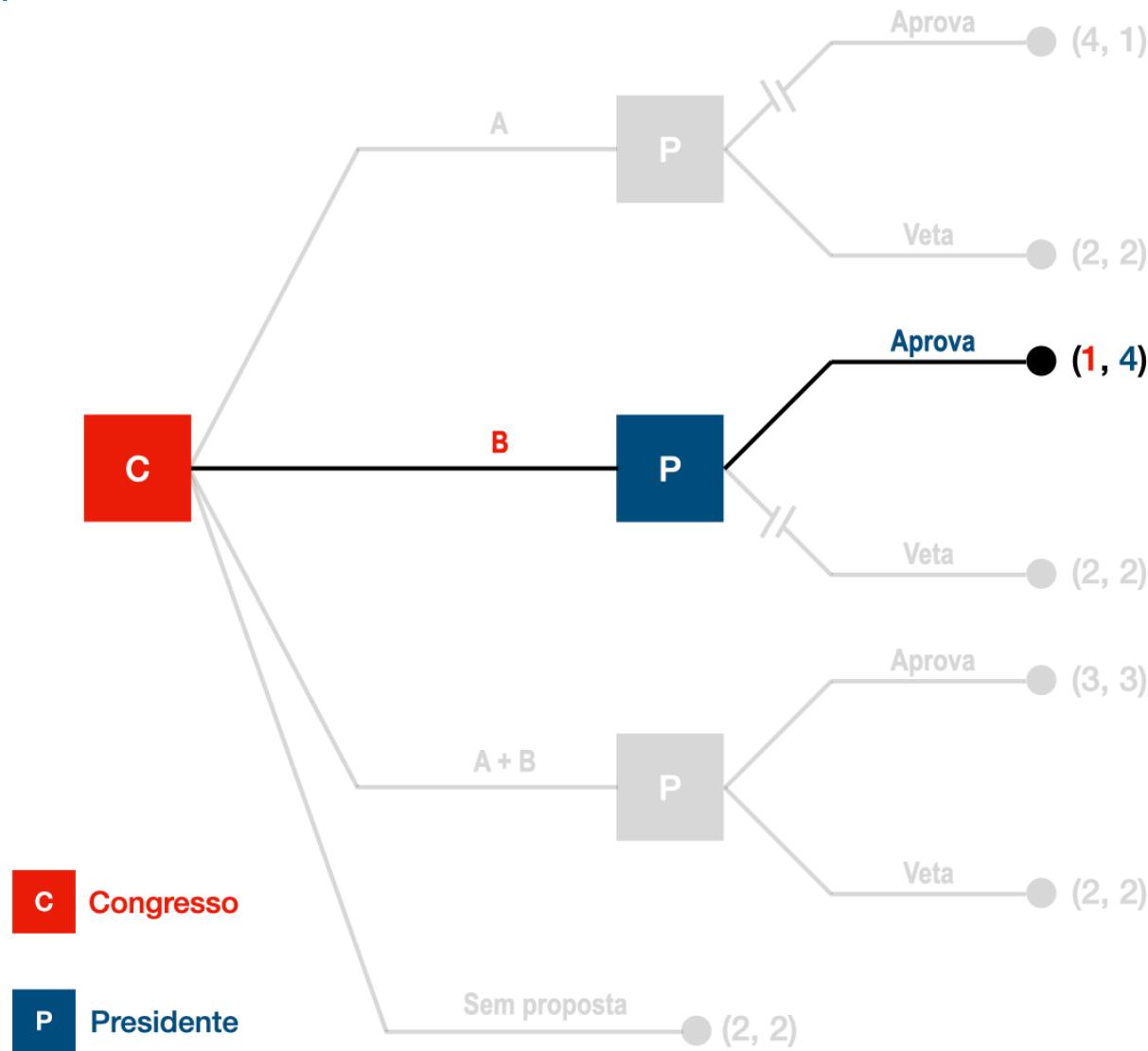
- Opções do Congresso:
 - Enviar proposta apenas com a provisão A.
 - Enviar proposta apenas com a provisão B.
 - Enviar proposta com ambas as provisões, A + B.
 - Não enviar proposta nenhuma.
- Opções do Presidente:
 - Aprova totalmente a proposta enviada
 - Veta totalmente/rejeita totalmente a proposta enviada.

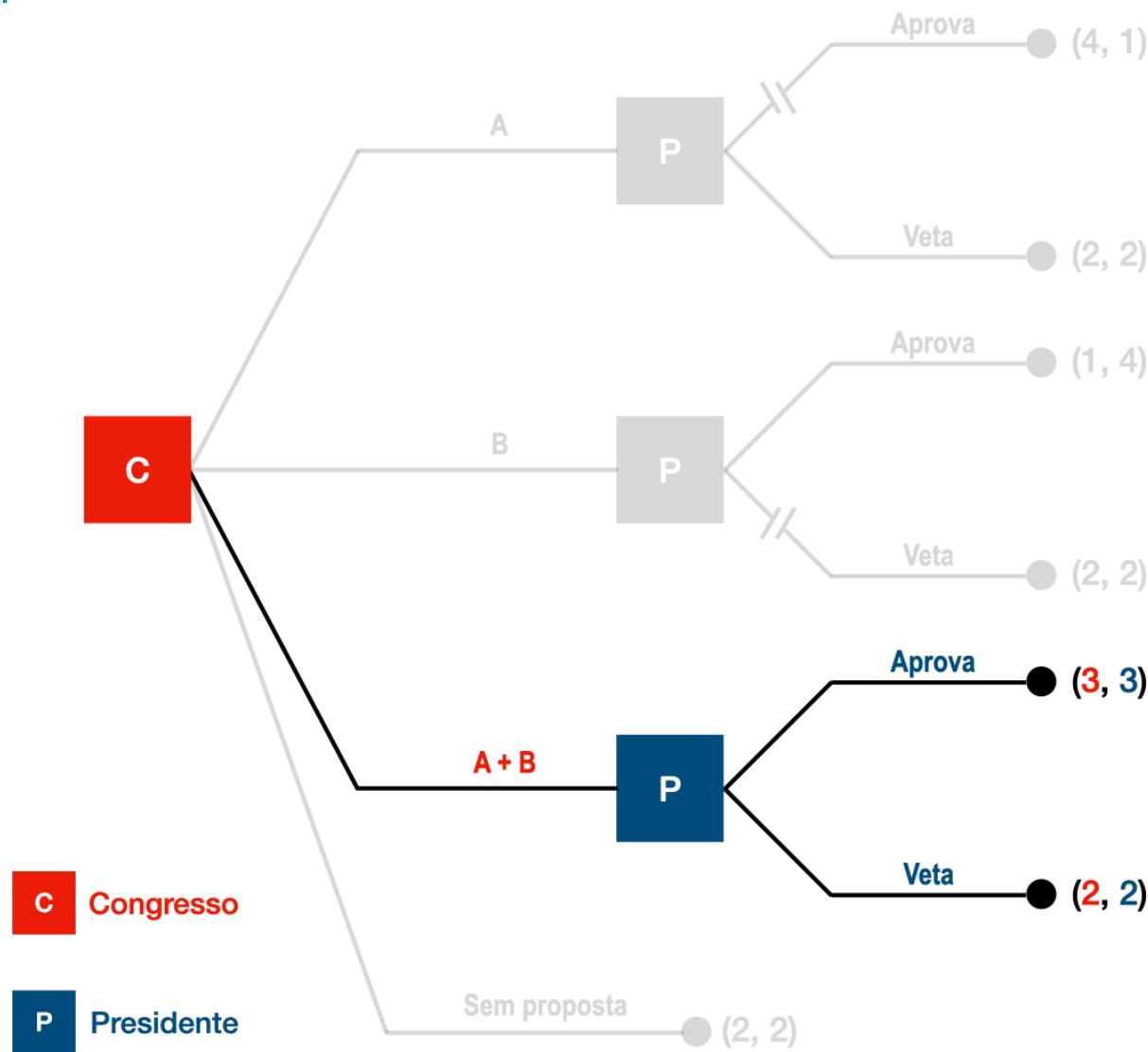


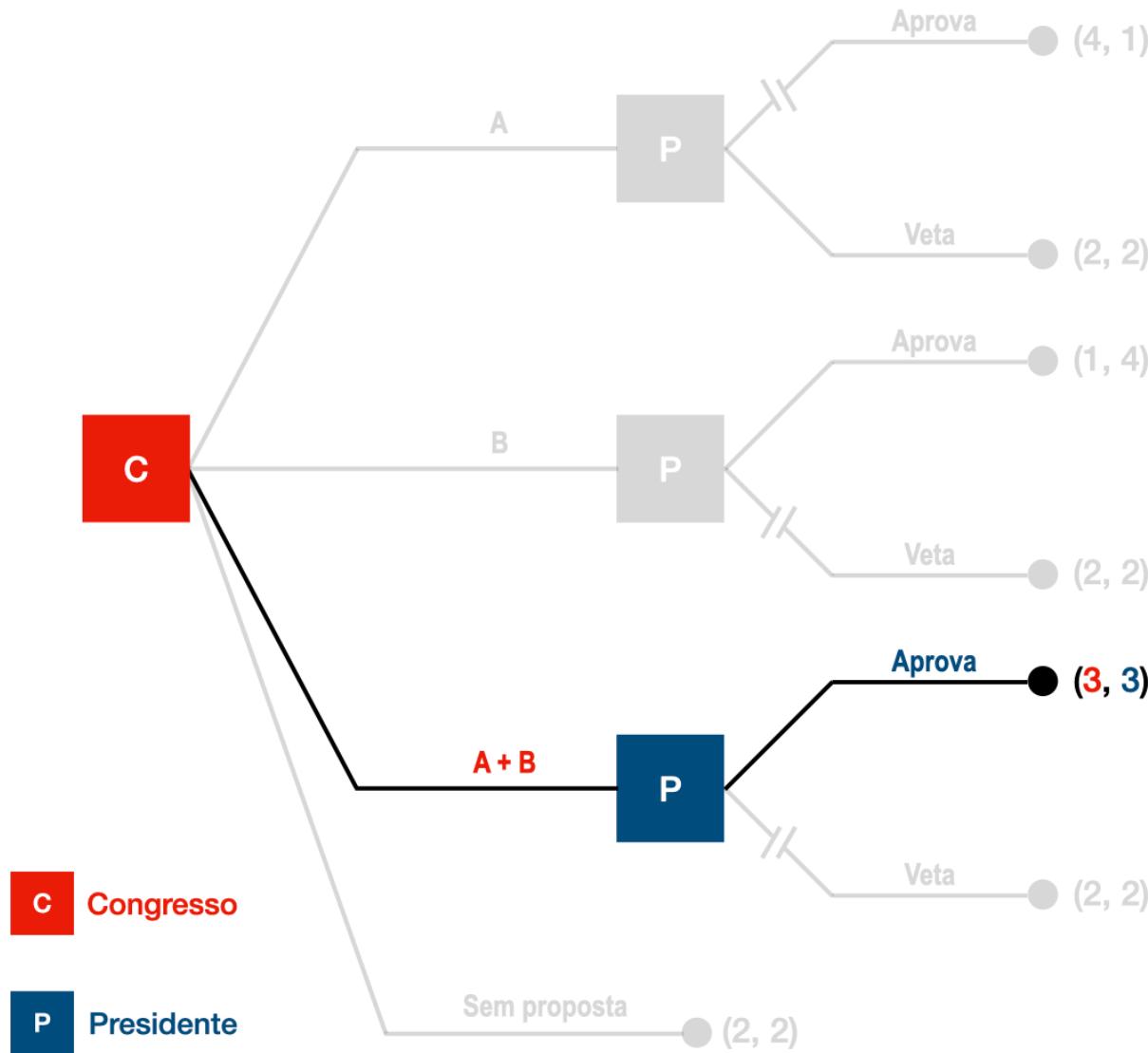


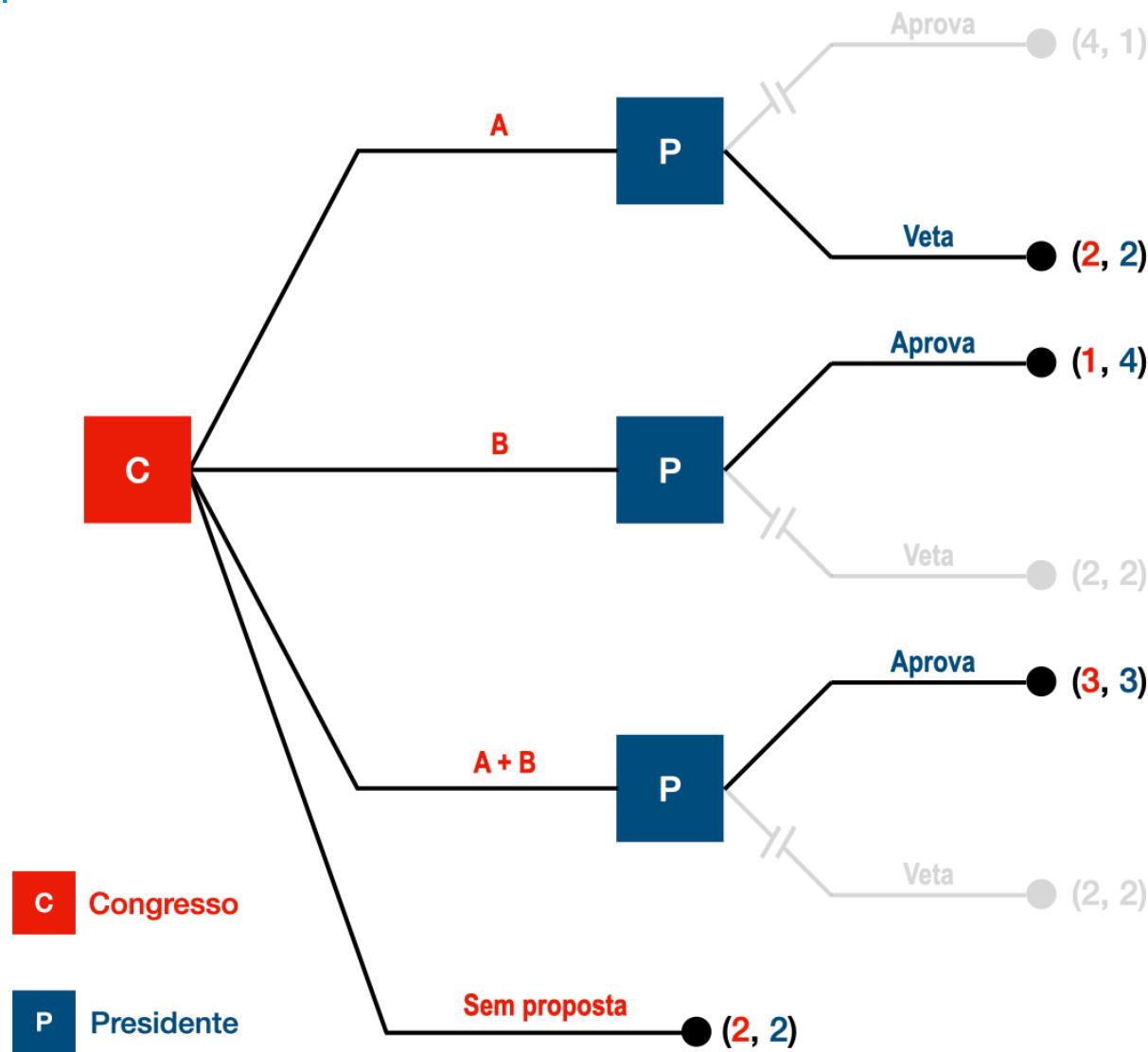


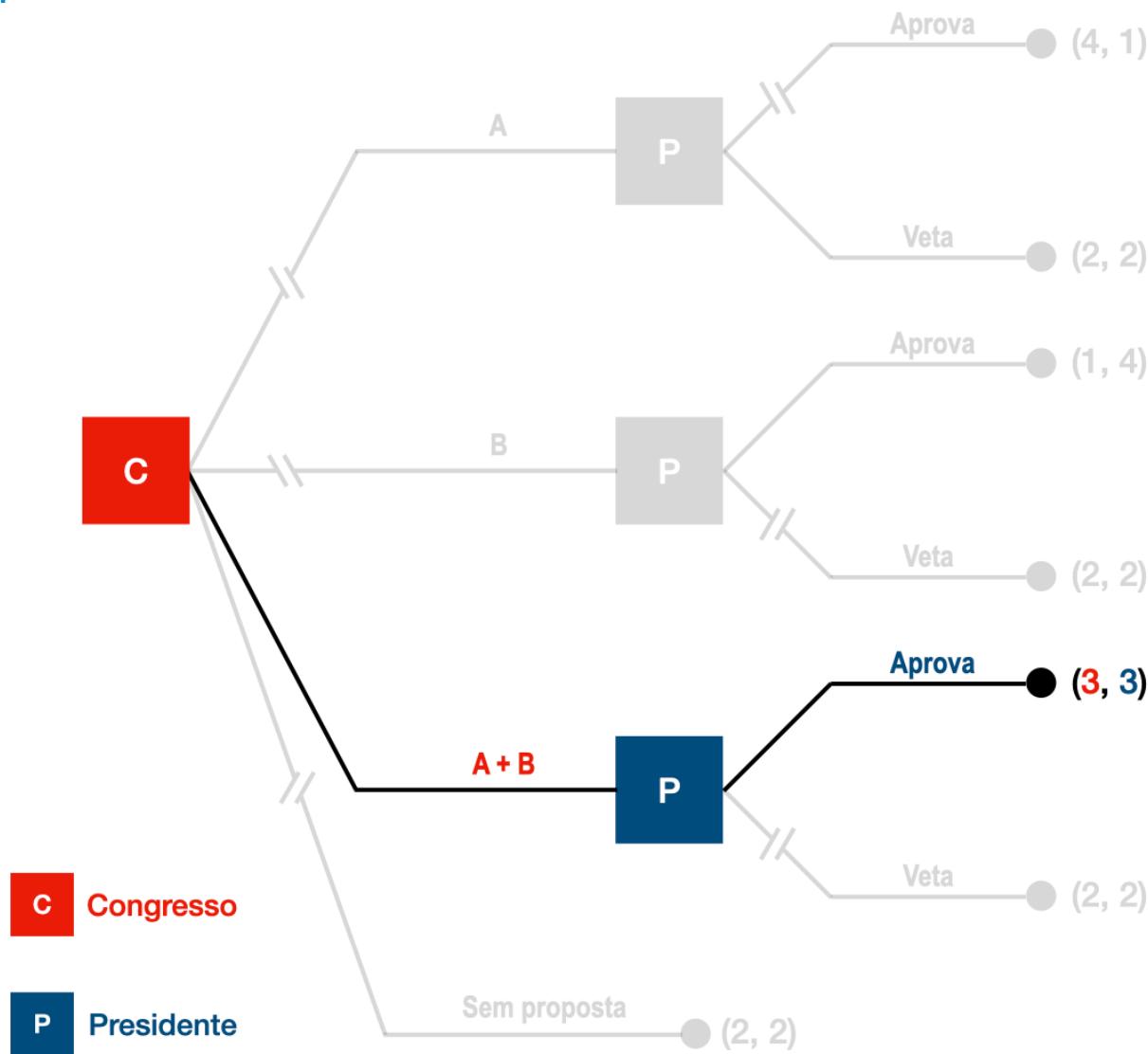












Jogo da proposição e voto

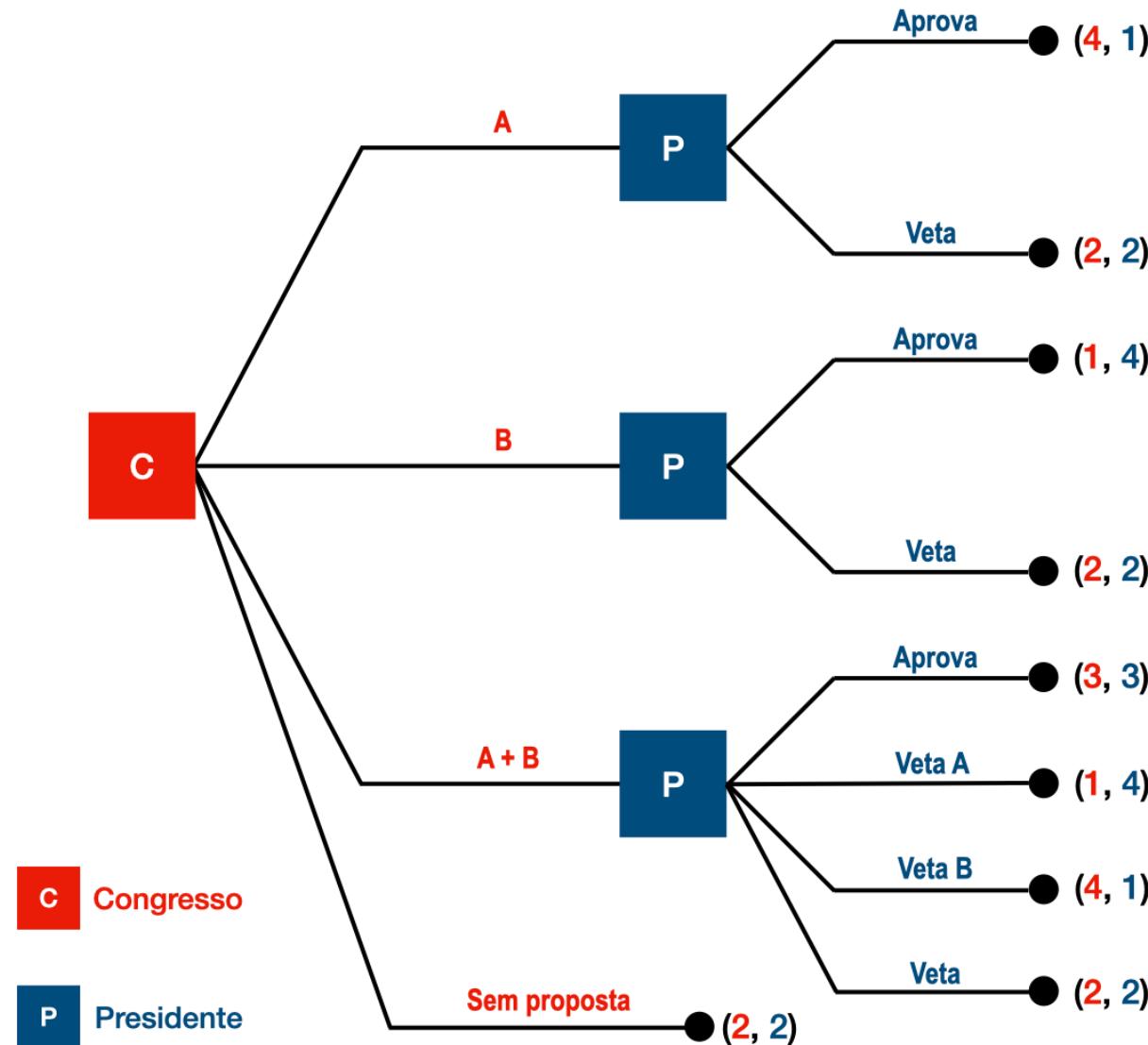
- Solução: **(A + B, Aprova)**
- Antecipando que a proposição A seria vetada pelo Presidente, o Congresso envia a proposta que contém tanto a proposição A como a proposição B.

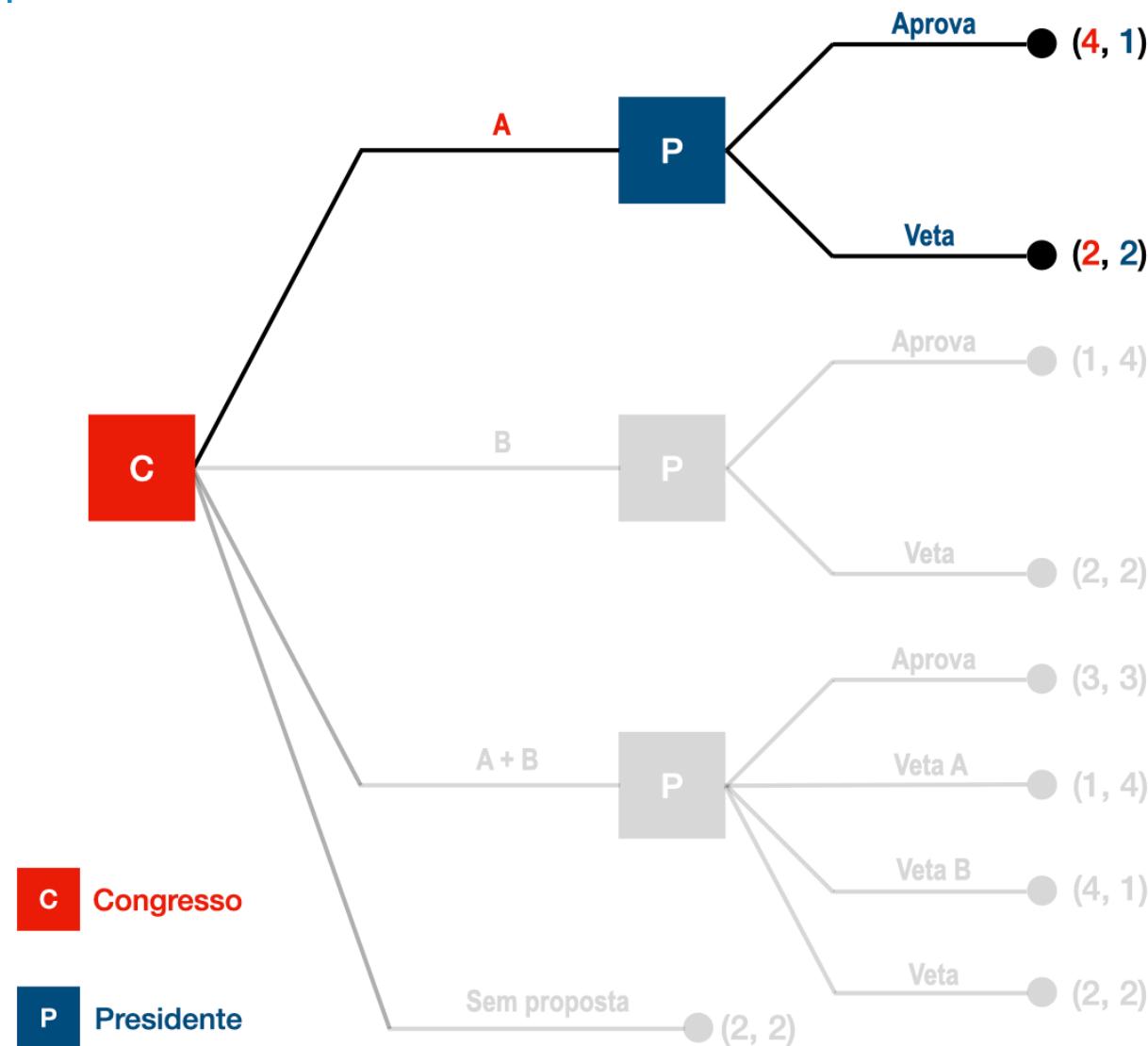
Conceitos

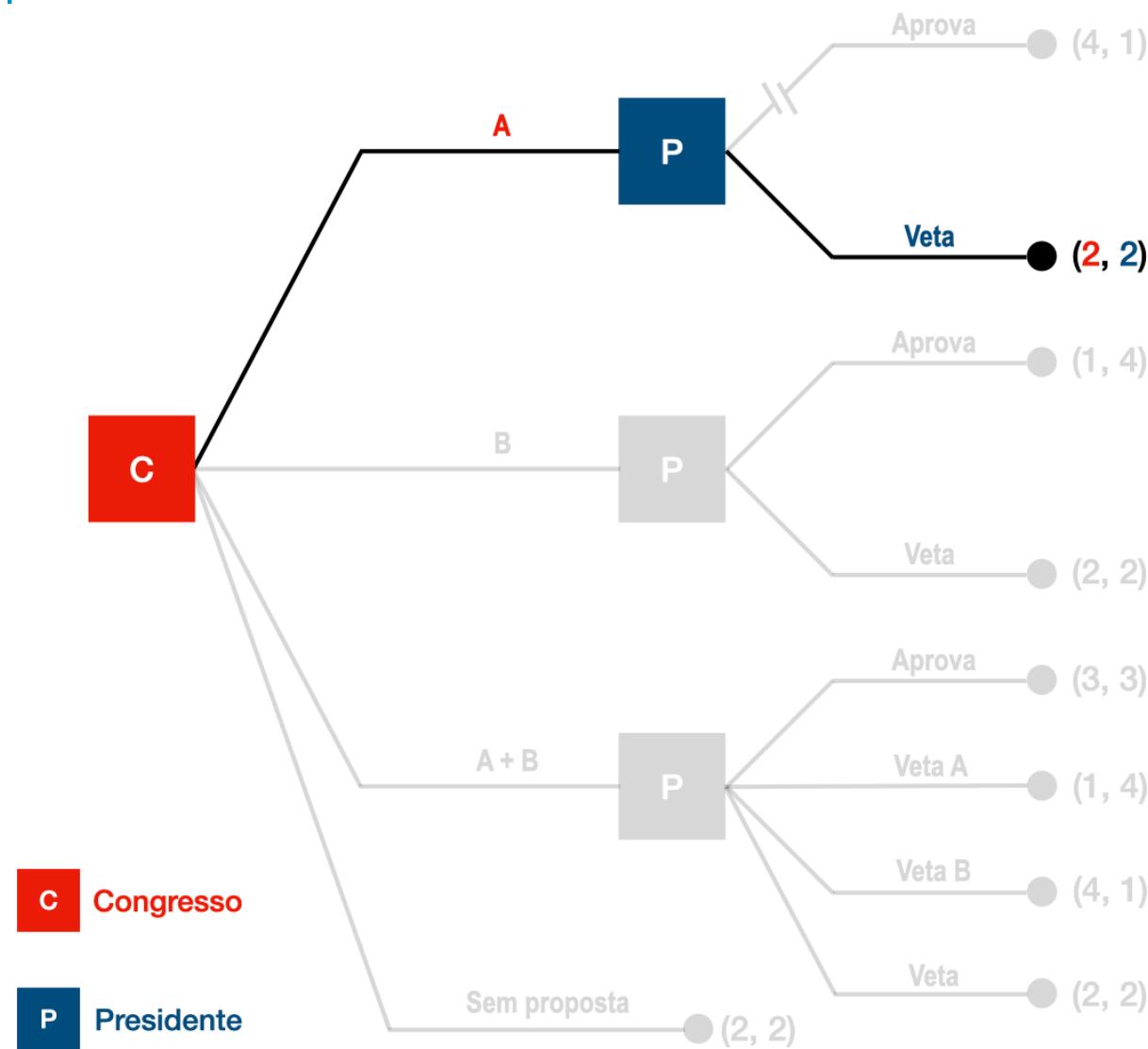
- Em jogos sequenciais, chamamos de "estratégia" a sequência de jogadas que descreve todo o percurso até um nódulo final do jogo (também chamado de nó terminal).
- A ideia de equilíbrio de Nash ainda pode ser aplicada: cada jogador está dando sua melhor resposta, dadas as respostas dos demais.
 - A melhor jogada do Presidente se o Congresso propõe A + B é aprovar, e a melhor jogada do Congresso se o Presidente aprova A + B é propor A + B.

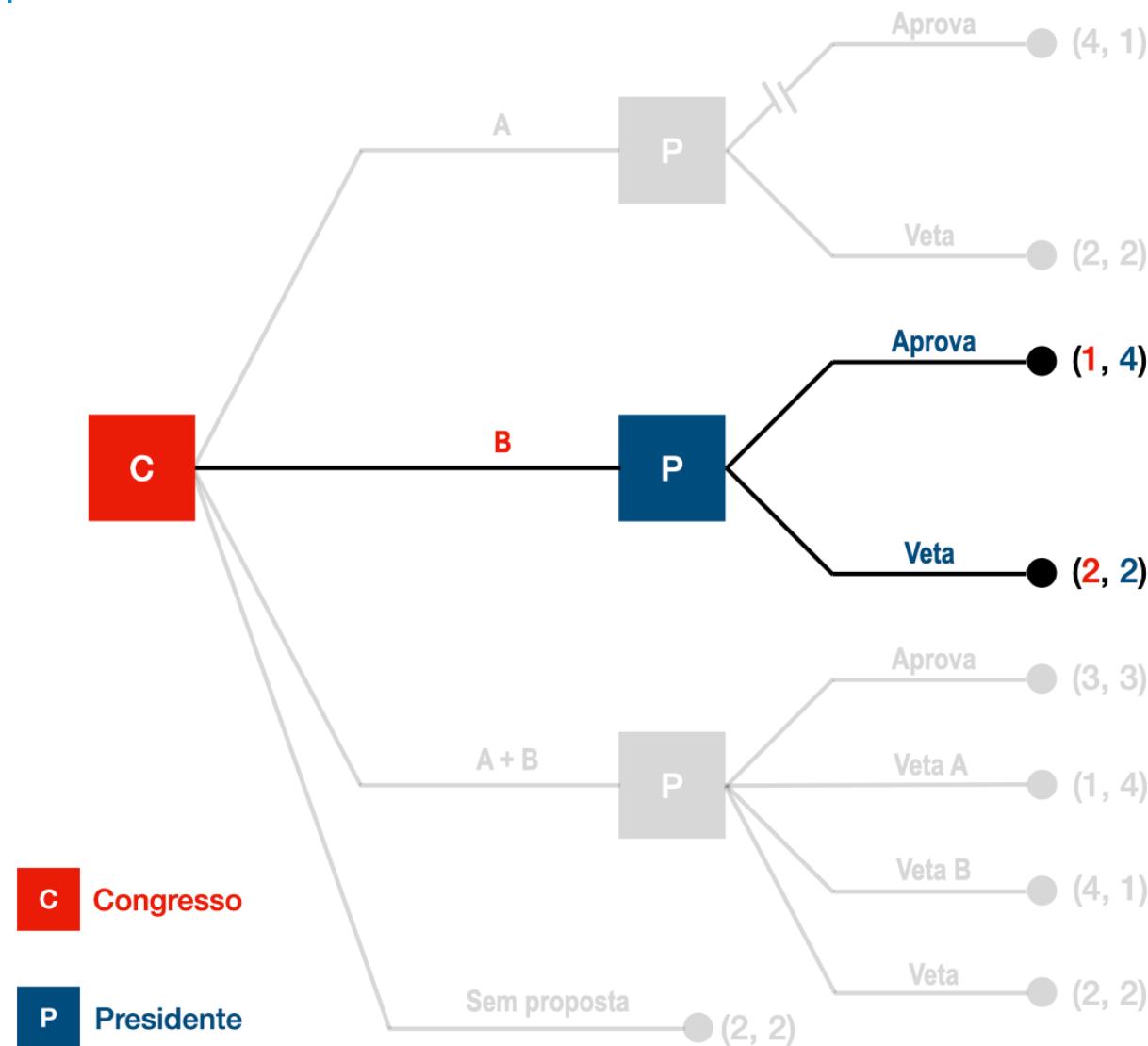
Veto parcial

- O que acontece se o presidente puder vetar parcialmente apenas a proposição de que não gosta?
 - Agora, quando o congresso propõe A + B o presidente pode também vetar apenas A ou apenas B.



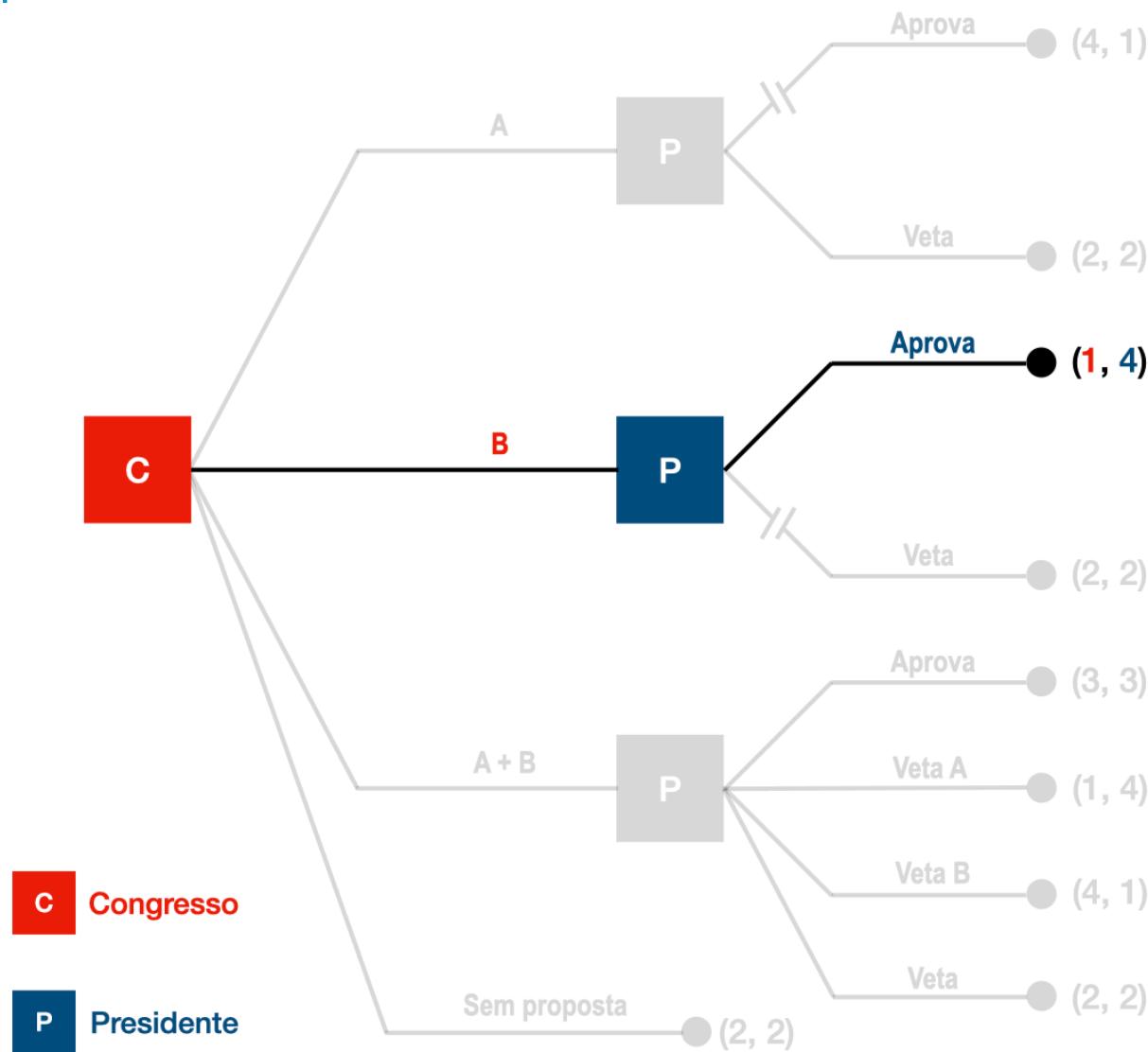


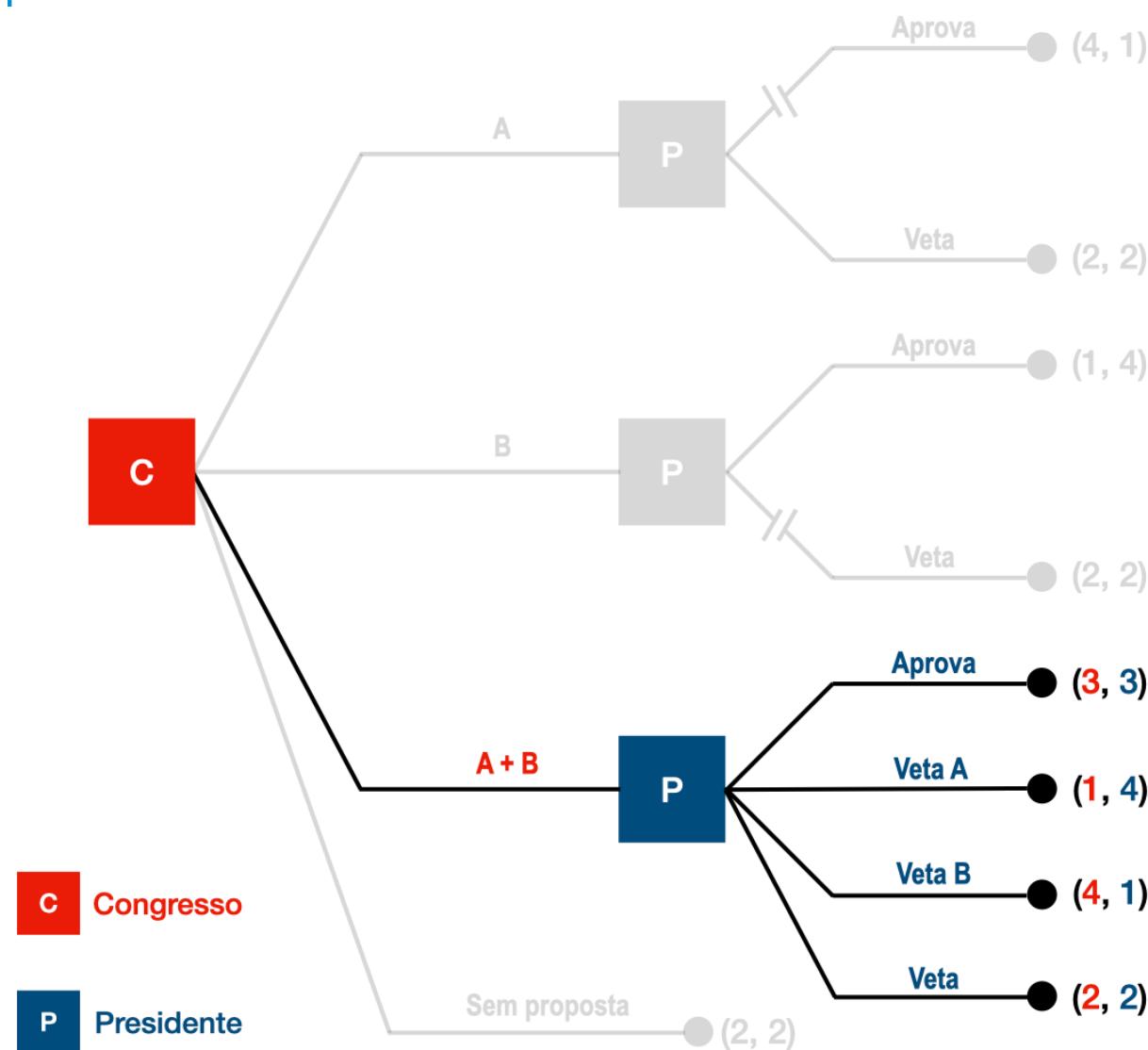


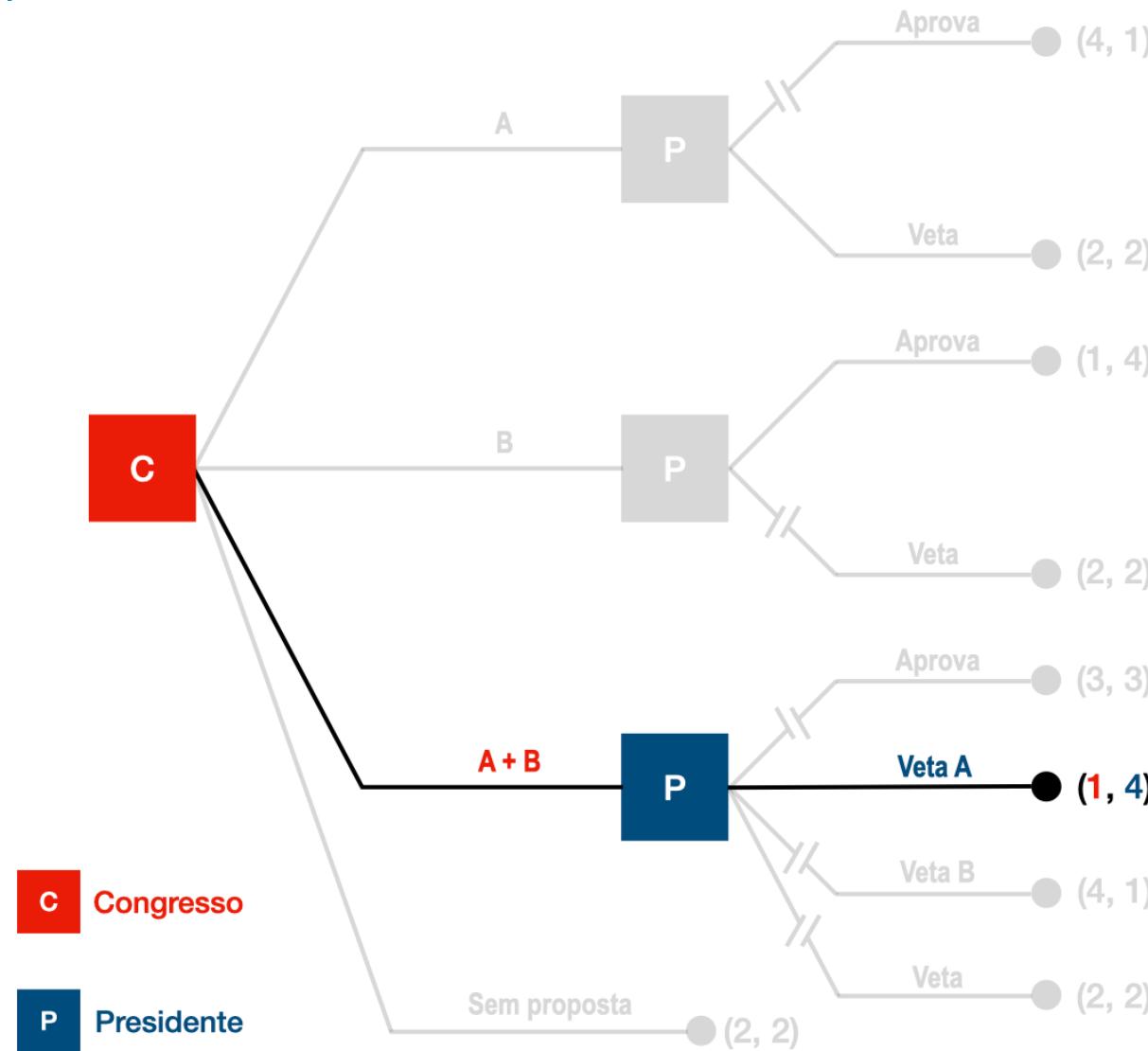


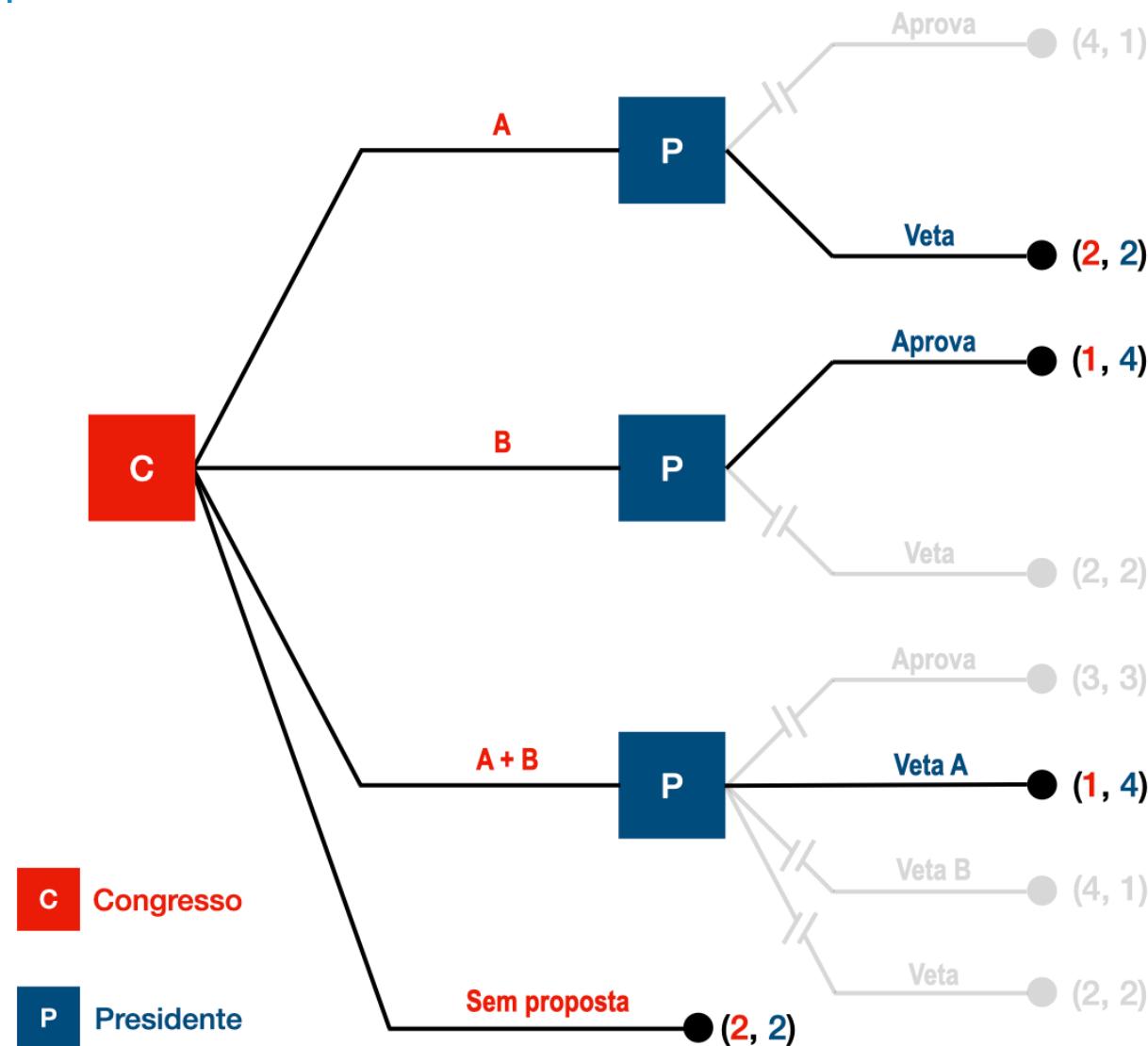
C Congresso

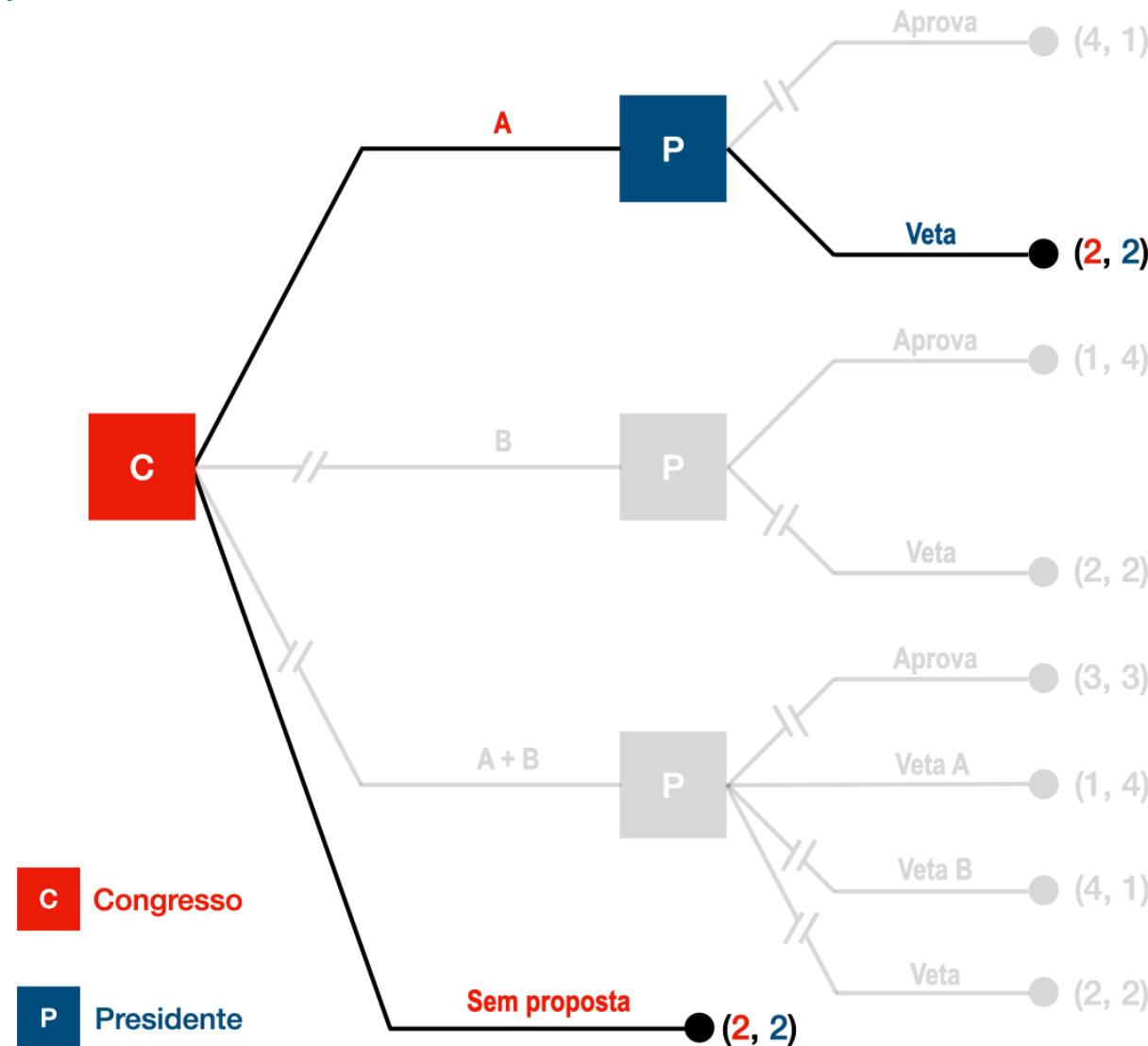
P Presidente





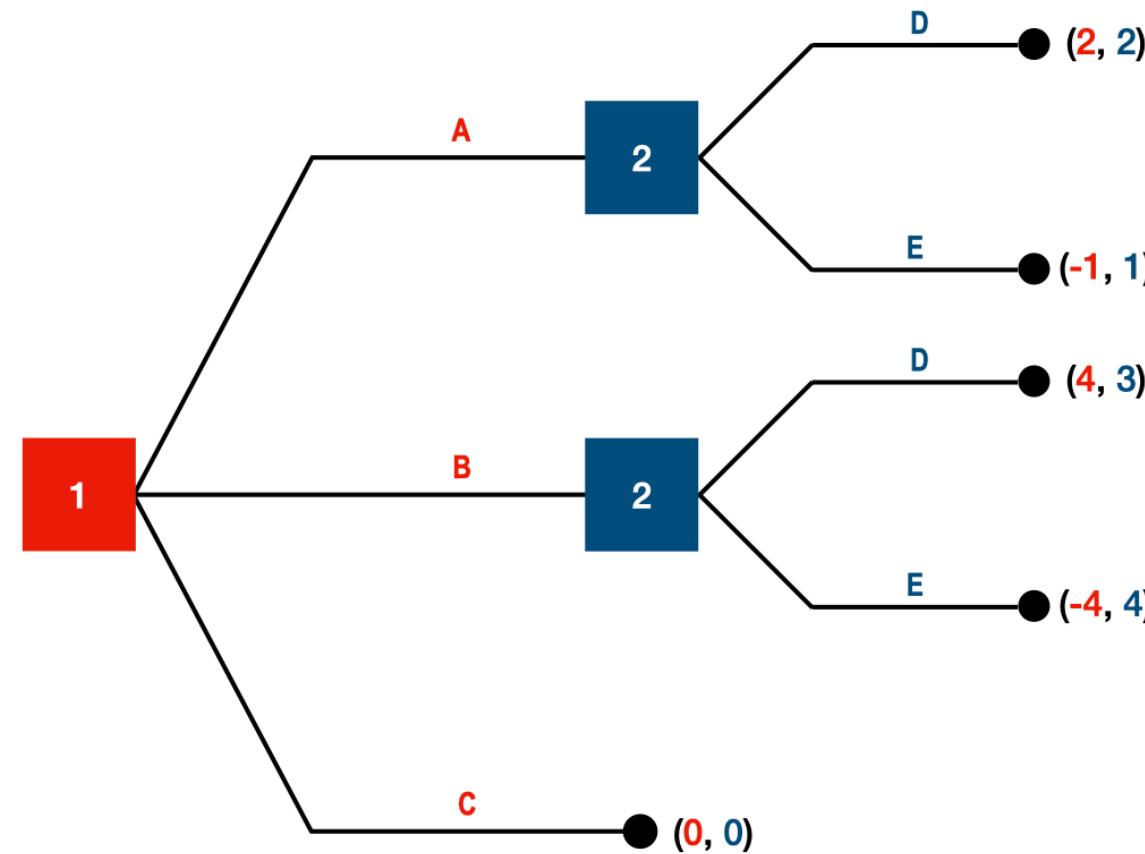


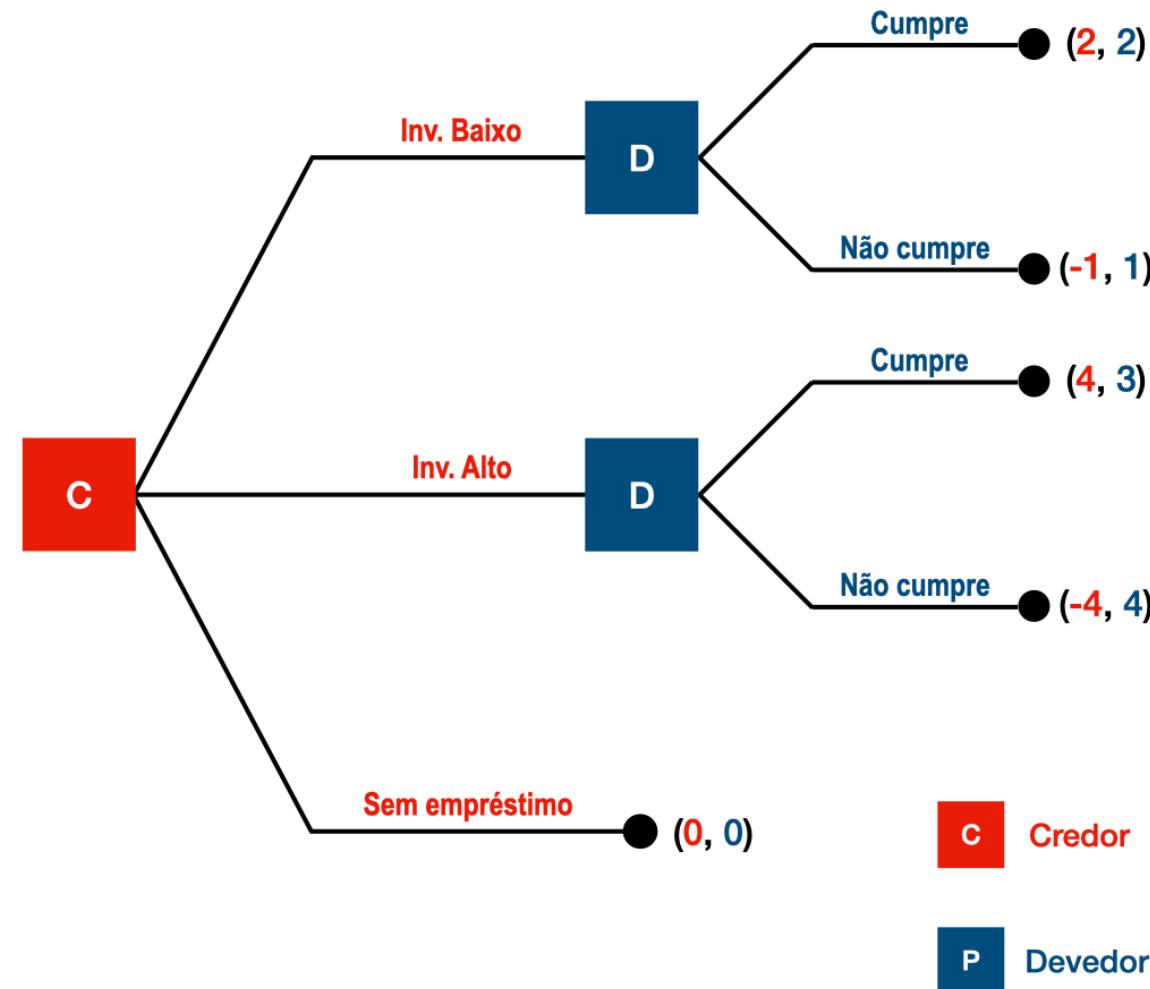


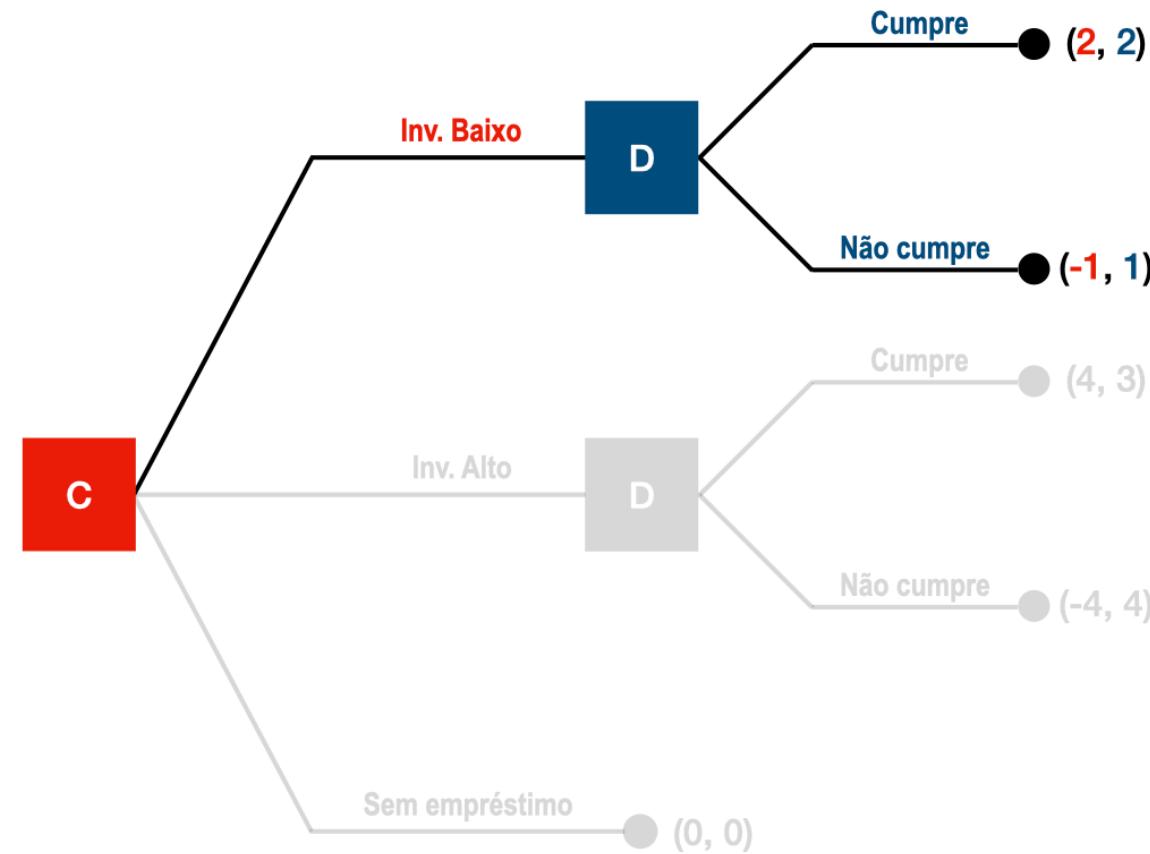


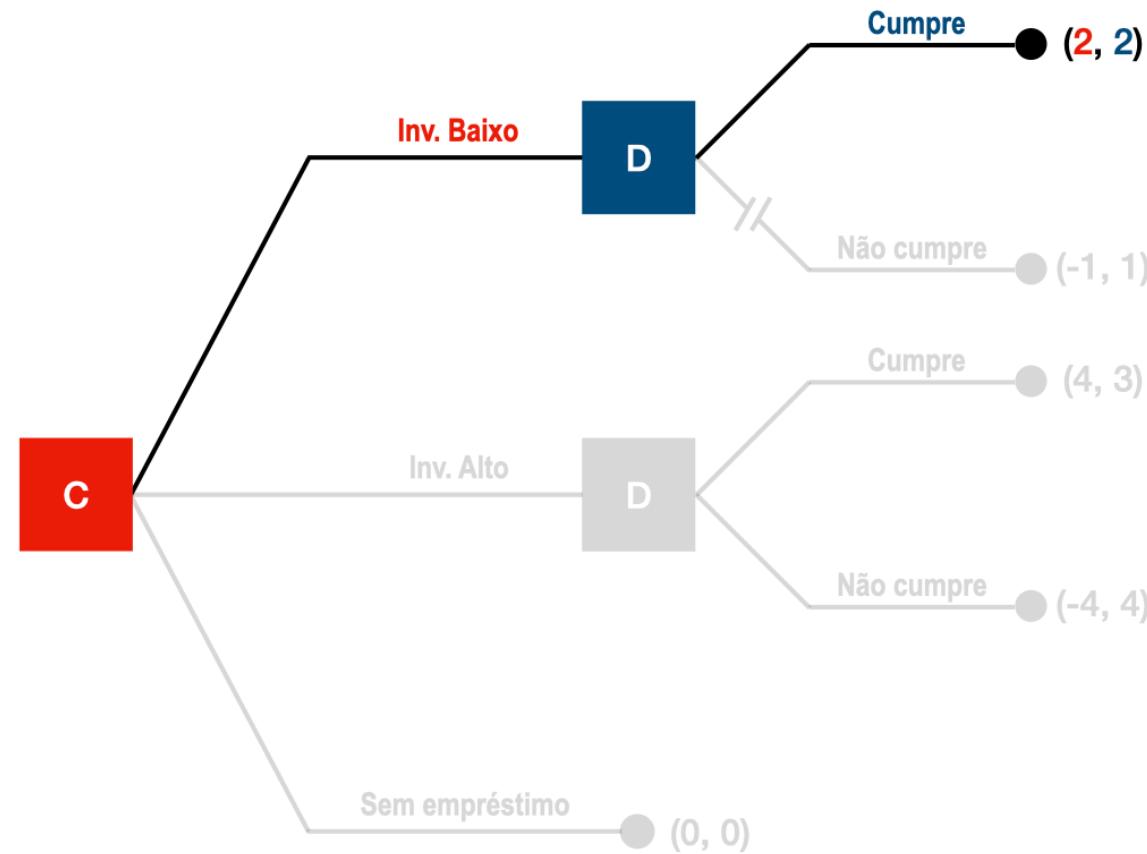
Jogo da proposição com voto parcial

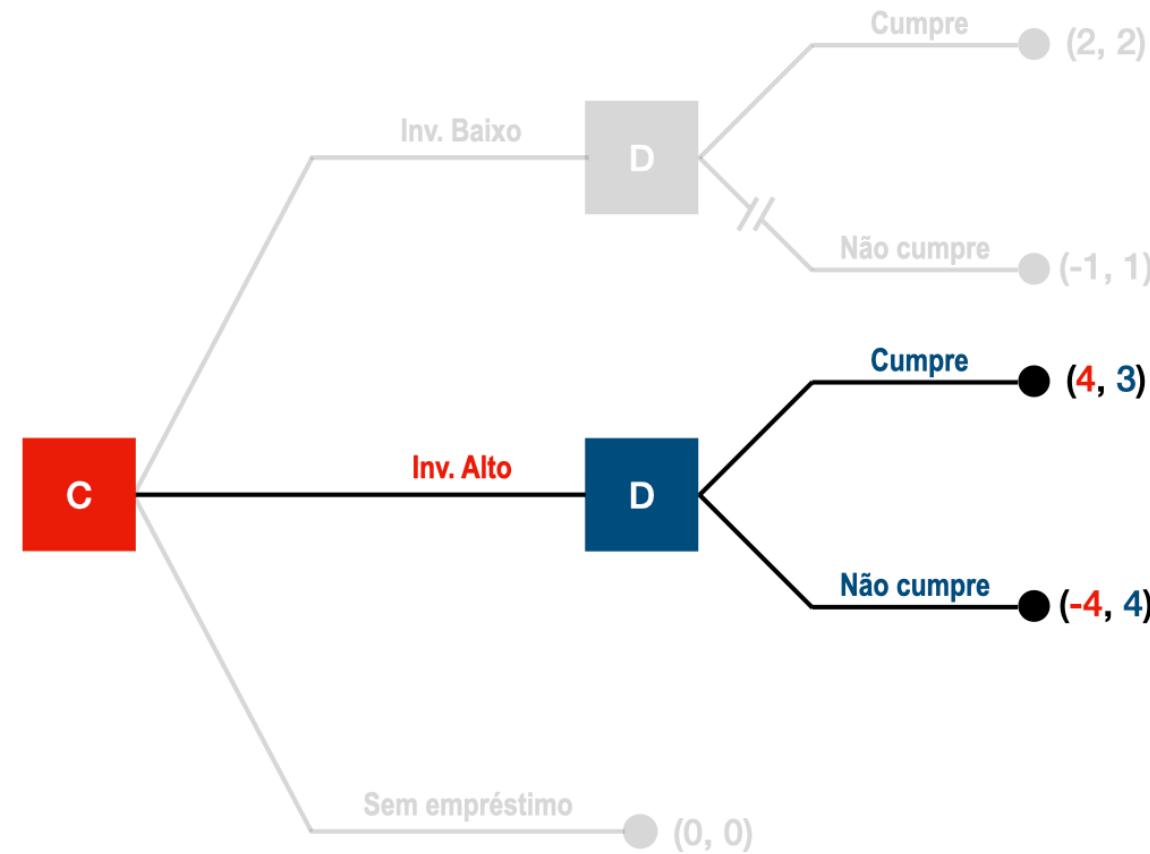
- Solução: { **(A, Veto), (Sem proposta)** }
- Antecipando que a proposição A + B resultaria em um voto parcial do Presidente, agora o Congresso prefere enviar proposta que contém apenas a proposição A (e que será vetada) ou não enviar proposta nenhuma.

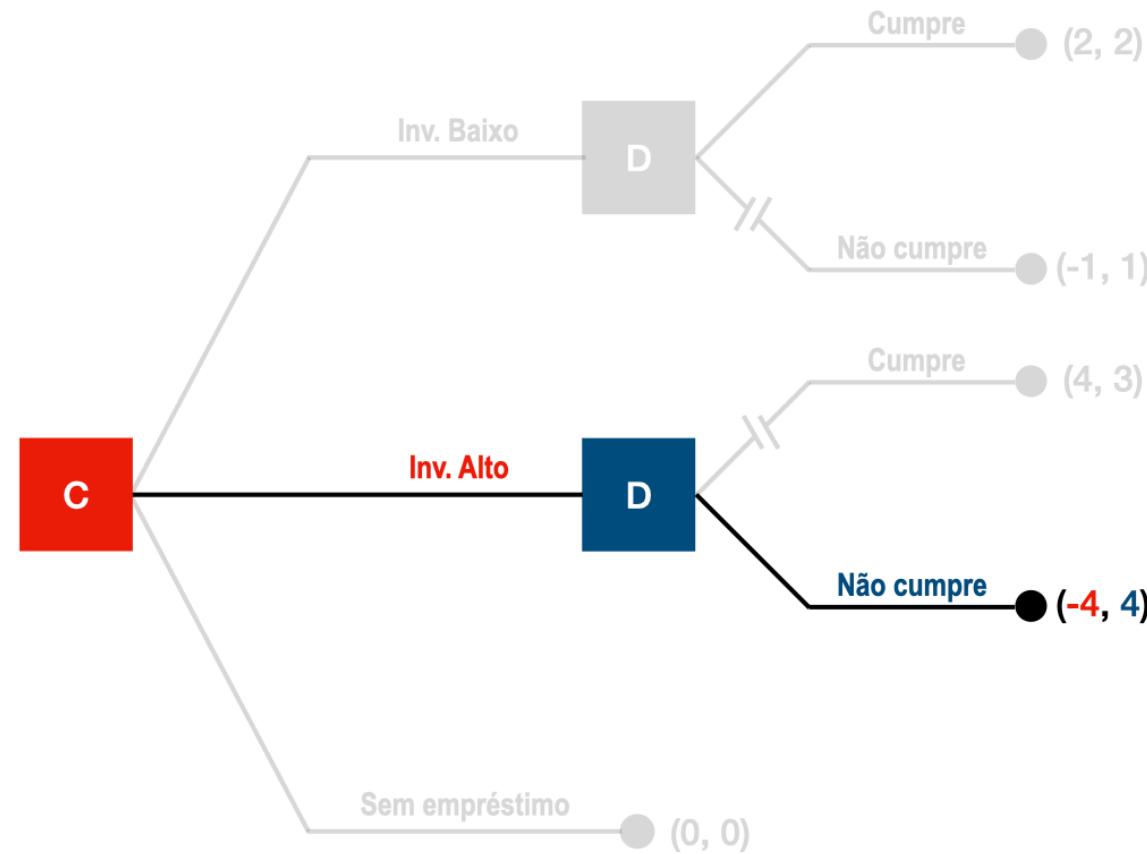


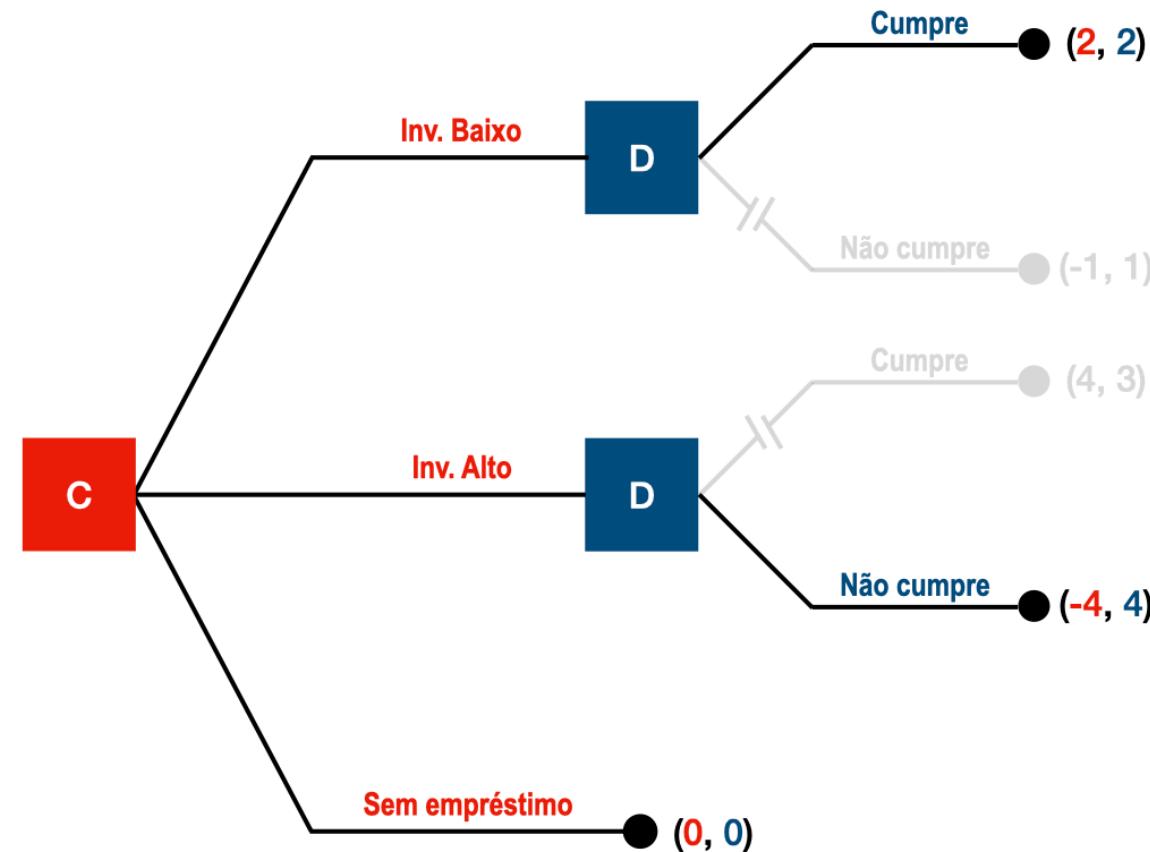


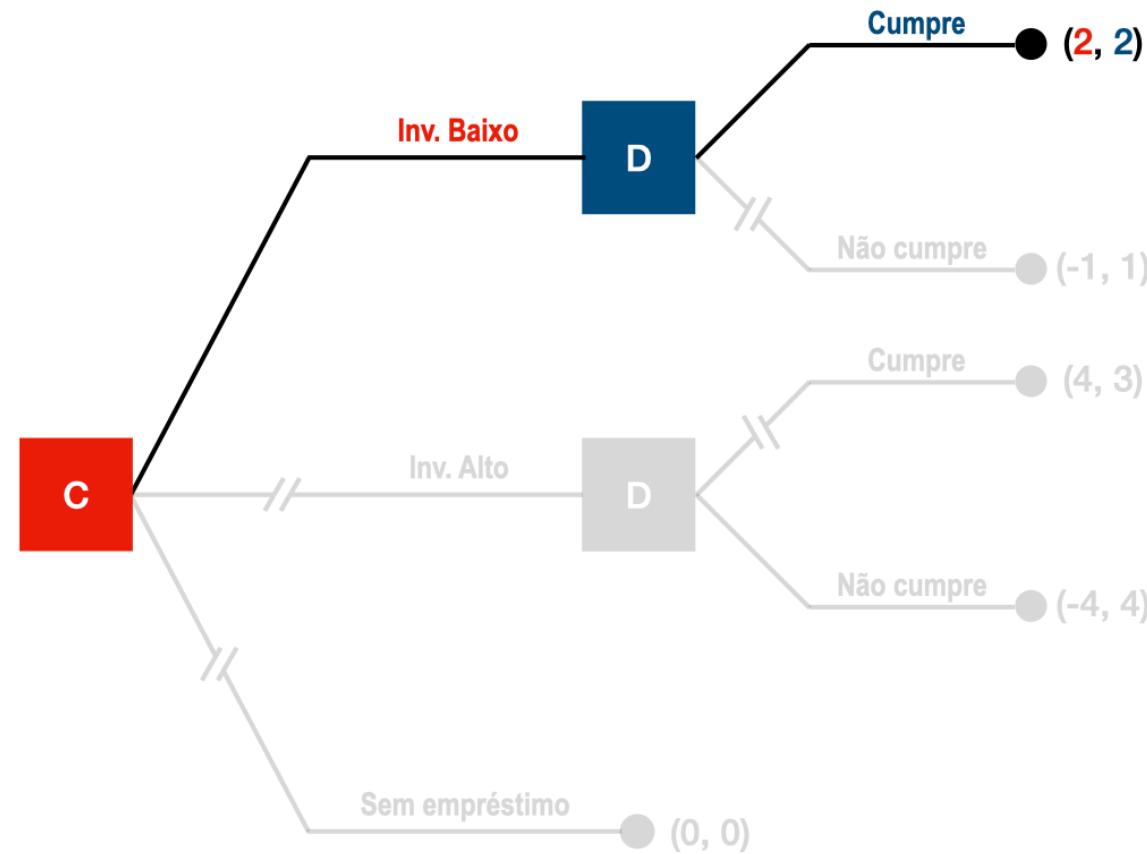


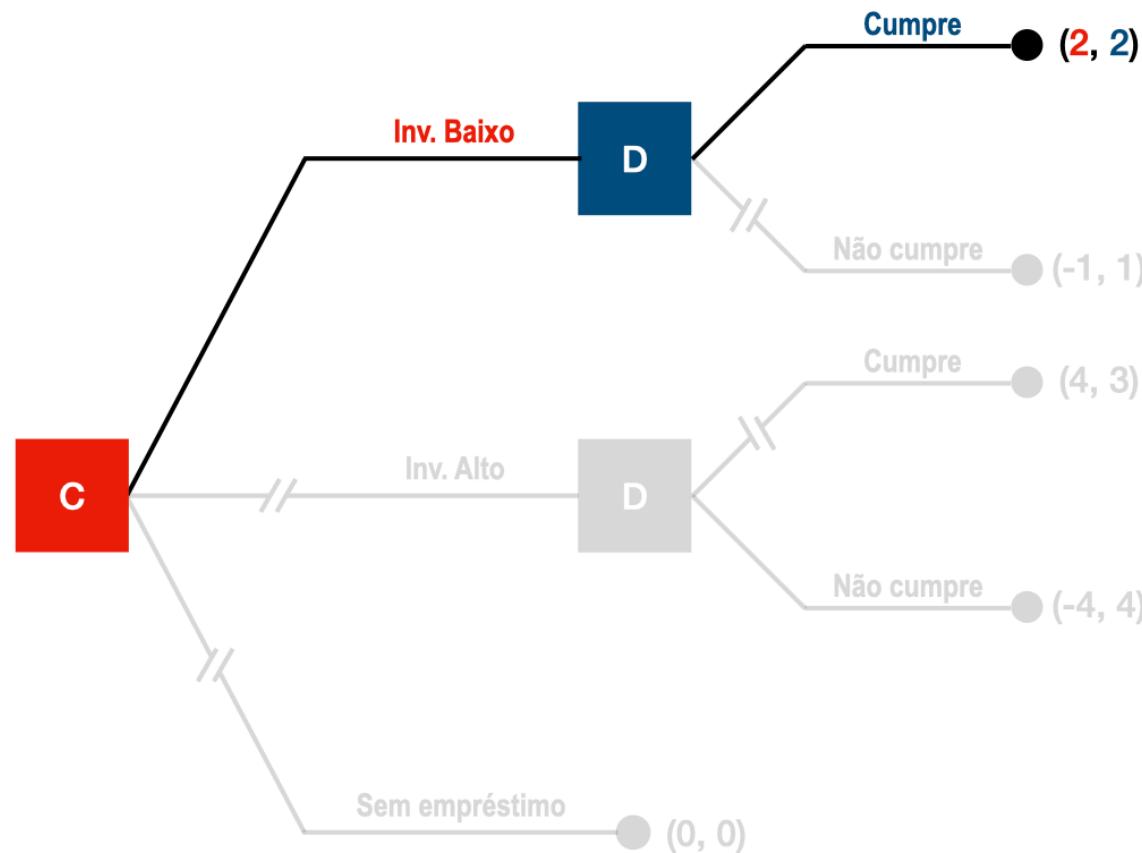








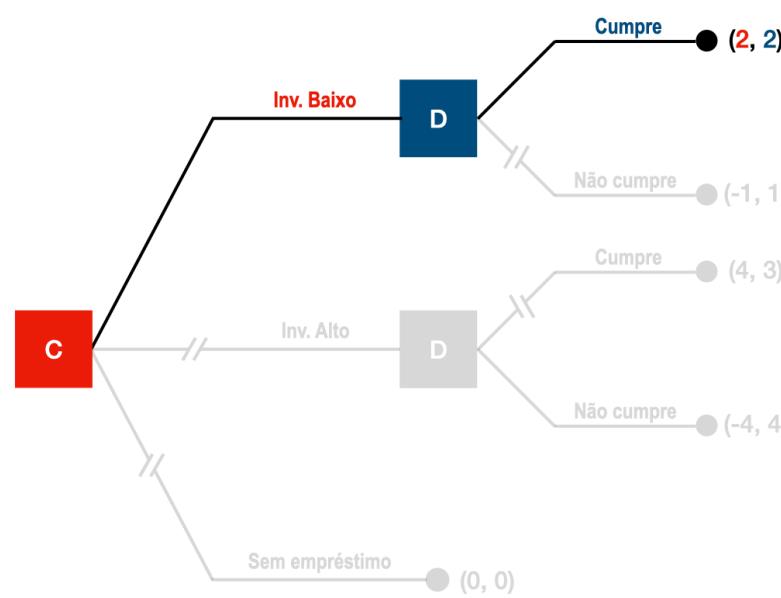




Solução do Jogo

- (Investe Baixo, Cumpre)
- É o ótimo de pareto?
 - Não! (2, 2) X (4, 3)

Que problema é esse?



- O J1 quer incubar o J2 de uma responsabilidade, mas teme que os incentivos de J2 o levem a desviar da solução mutuamente benéfica.
- J2 gostaria de convencer J1 a confiar em sua conduta, mas seus próprios incentivos estão em conflito com os interesses de J1.
- Esse problema espelha um conhecido conceito da AED. Que conceito é esse?
- **RISCO MORAL**

Jogo do empréstimo e o problema do Risco Moral

- Relações de investimento e empréstimo (papel fundamental para a Economia).
- Relações do tipo Principal x Agente.
- Muitas aplicações jurídicas:
 - Seguros e previdência,
 - Direito Societário,
 - Licitações,
 - Representação política e funções estatais,
 - Etc.

Jogo do empréstimo e o problema do Risco Moral

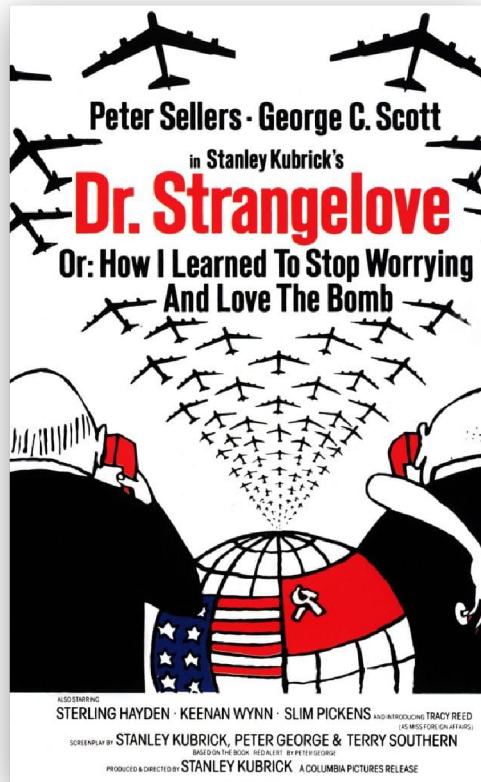
- Soluções possíveis?
 - Solução normativa (regulação).
 - Monitoramento e controle.
 - Redimensionamento dos payoffs (incentive design).
 - Garantias (commitment strategies).

Garantias e comprometimento (commitment strategies)



- Episódios de “queima de navios” (William na invasão da Normandia, Hernán Cortéz na invasão do novo mundo).
- Tentativa de exclusão voluntária de cursos de ação possíveis.
 - Novamente, ter menos opções de ação pode ser uma vantagem estratégica, como vimos com o jogo dos porquinhos.

Garantias e comprometimento (commitment strategies)



- Dr Strangelove (Dr. Fantástico): a máquina do fim do mundo (doomsday machine) soviética tinha uma falha.
- É preciso que a outra parte saiba. Sem o conhecimento da outra parte, não há nenhum sentido.
- Obs: em jogos com informação limitada, comprometimento pode ser utilizado como mecanismo de sinalização.