2. Equilíbrios em estratégias mistas

		Ímpar	
		0	1
Par	0	(1, 0)	(0, 1)
	1	(0, 1)	(1, 0)

Introdução ao conceito de estratégias mistas

- Como jogar par ou ímpar?
- Por que não devemos sempre jogar 0 ou sempre jogar 1.
- Seria desejável jogar 1 em 75% dos casos? Por que?

Estratégias mistas

- **Par ou ímpar**: nenhum jogador deve utilizar uma estratégia com mais frequência que a outra (mais de 50% das vezes).
  - A situação em que cada jogador utiliza cada estratégia em 50% dos casos é considerada um equilíbrio de Nash.
  - Cada jogador, nesse caso, está dando sua melhor resposta ao outro.
    - Qualquer mudança nas distribuições seria instável pois os jogadores teriam incentivos para mudar suas estratégias.
  - Chamamos esse tipo de equilíbrio de **"estratégias mistas"** pois cada jogador não usa apenas uma estratégia. Mais de uma estratégia é usada, cada uma em uma certa proporção de casos (distribuição de probabilidades).

Estratégias mistas

- Nem sempre a distribuição de probabilidades será 50% para cada jogador.
    - Como calcular o equilíbrio em estratégias mistas em casos menos triviais que o jogo de par ou ímpar? (...)
- Jogos podem possuir simultaneamente equilíbrios em estratégias puras e equilíbrios em estratégias mistas.
    - Exemplo: o jogo da galinha também possui um equilíbrio em estratégias mistas.

Agora vamos aprender a calcular o equilíbrio em estratégias mistas

IMPORTANTE

Respire fundo e tenha brio!

- Esse é o conceito de solução mais sofisticado que teremos no curso.
- O John Nash é um gênio mesmo??
  - Resposta: **SIM!**

FGV DIREITO RIO

Jogo "Run or Pass" (futebol americano)

Defesa

Ataque		Defende o Passe	Defende a Corrida
	Passe	(2, -2)	(17, -17)
	Corrida	(6, -6)	(1, -1)

Jogo "Run or Pass" (futebol americano)

Defesa

		Defende o Passe	Defende a Corrida
Ataque	Passe	(2, -2)	(17, -17)
	Corrida	(6, -6)	(1, -1)

FGV DIREITO RIO

Jogo "Run or Pass" (futebol americano)

Defesa

		Defende o Passe	Defende a Corrida
Ataque	Passe	(2, -2)	(17, -17)
	Corrida	(6, -6)	(1, -1)

Jogo "Run or Pass" (futebol americano)

Defesa

Ataque

	Defende o Passe	Defende a Corrida
Passe	(2, -2)	(17, -17)
Corrida	(6, -6)	(1, -1)

Jogo "Run or Pass" (futebol americano)

Defesa

Ataque

	Defende o Passe	Defende a Corrida
Passe	(2, -2)	(17, -17)
Corrida	(6, -6)	(1, -1)

Jogo "Run or Pass" (futebol americano)

Defesa

Ataque

	Defende o Passe	Defende a Corrida
Passe	(2, -2)	(17, -17)
Corrida	(6, -6)	(1, -1)

FGV DIREITO RIO

Jogo "Run or Pass" (futebol americano)

Defesa

Ataque

	Defende o Passe	**Defende a Corrida**
Passe	(2, <u>-2</u>)	(<u>17</u>, -17)
Corrida	(<u>6</u>, -6)	(1, <u>-1</u>)

Não há solução em estratégias puras

Como jogar esse jogo?

- O ataque pode sempre optar pela jogada com o maior potencial de ganho (passe)?
  - Não, pois o ataque, nesse caso, vai sempre defender o passe, garantindo que o ataque avance apenas 2 jardas.
- O ataque deve defender o passe, aleatoriamente, em 50% dos casos? Que tal em 60% dos casos?
  - Como analisar as estratégias da defesa nesse caso?

Análise do valor esperado

- Precisamos calcular o valor esperado de cada resposta da defesa, sabendo que o ataque opta pelo passe em 50% dos casos e pela corrida nos outros 50%.
- $E_{dp} = (0,5)(-2) + (0,5)(-6) = -4$
- $E_{dc} = (0,5)(-17) + (0,5)(-1) = -9$
- $E_{dp} > E_{dc}$
- Defesa sempre prefere defender o passe, e o ataque ganha em média apenas 4 jardas!

FGV DIREITO RIO

Como evitar que o outro jogador antecipe nossa jogada?

- Devemos escolher as probabilidades das estratégias de forma que a outra parte, em cada jogo, seja indiferente entre qual resposta adotar.
    - **Ataque**: probabilidade de passar e de correr que iguala o valor esperado de defender o passe ou a corrida.
    - **Defesa**: probabilidade de defender o passe e de defender a corrida que iguala o valor esperado de passar ou correr.

FGV DIREITO RIO

Análise da estratégia do ataque

- Escolhe a probabilidade de passar (q_p) de forma que, para a defesa, o valor esperado de defender o passe (E_{dp}) seja igual ao valor esperado de defender a corrida (E_{dc}).
- $(1 - q_p) = \text{probabilidade de correr}$

- $E_{dp} = (q_p)(-2) + (1 - q_p)(-6) = 4q_p - 6$
- $E_{dc} = (q_p)(-17) + (1 - q_p)(-1) = -16q_p - 1$
- $E_{dp} = E_{dc} \implies 4q_p - 6 = -16q_p - 1 \implies q_p = \frac{5}{20} = 25\%$

Análise da estratégia da defesa

- Escolhe a probabilidade de defender o passe (q_{dp}) de forma que, para o ataque, o valor esperado de passar (E_p) seja igual ao valor esperado de correr (E_c).
- $(1 - q_{dp}) = \text{probabilidade de defender a corrida}$
- $E_p = (q_{dp})(2) + (1 - q_{dp})(17) = -15q_{dp} + 17$
- $E_c = (q_{dp})(6) + (1 - q_{dp})(1) = 5q_{dp} + 1$
- $E_p = E_c \implies -15q_{dp} + 17 = 5q_{dp} + 1 \implies q_{dp} = \frac{16}{20} = 80\%$

FGV DIREITO RIO

Solução do jogo "Run or Pass"

Defesa

Ataque		Defende o Passe	Defende a Corrida
	Passe	(2, -2)	(17, -17)
	Corrida	(6, -6)	(1, -1)

Ataque passa em 25% dos casos e corre em 75% dos casos,
Defesa defende o passe em 80% dos casos e a corrida em 20% dos casos.

FGV DIREITO RIO

Voltando ao jogo da galinha...

Predador 2

Predador 1		Agressivo (Hawk)	Passivo (Dove)
	Agressivo (Hawk)	(-3, -3)	(4, 0)
	Passivo (Dove)	(0, 4)	(2, 2)

Voltando ao jogo da galinha...

Predador 2

Predador 1		Agressivo (Hawk)	Passivo (Dove)
	Agressivo (Hawk)	(-3, -3)	(4, 0)
	Passivo (Dove)	(0, 4)	(2, 2)

FGV DIREITO RIO

Voltando ao jogo da galinha...

Predador 2

Predador 1

	Agressivo (Hawk)	Passivo (Dove)
Agressivo (Hawk)	(-3, -3)	(4, 0)
Passivo (Dove)	(0, 4)	(2, 2)

Voltando ao jogo da galinha...

Predador 2

Predador 1

	Agressivo (Hawk)	Passivo (Dove)
Agressivo (Hawk)	(-3, -3)	(4, 0)
Passivo (Dove)	(0, 4)	(2, 2)

Voltando ao jogo da galinha...

Predador 2

Predador 1

	Agressivo (Hawk)	Passivo (Dove)
Agressivo (Hawk)	(-3, **-3**)	(<u>4</u>, <u>**0**</u>)
Passivo (Dove)	(<u>0</u>, 4)	(2, 2)

FGV DIREITO RIO

Voltando ao jogo da galinha...

Predador 2

Predador 1

	Agressivo (Hawk)	Passivo (Dove)
Agressivo (Hawk)	(-3, -3)	(4, 0)
Passivo (Dove)	(0, 4)	(2, 2)

FGV DIREITO RIO

Voltando ao jogo da galinha...

Predador 2

Predador 1

	Agressivo (Hawk)	Passivo (Dove)
Agressivo (Hawk)	(-3, -3)	(4, 0)
Passivo (Dove)	(0, 4)	(2, 2)

Solução (estratégias puras): { (Hawk, Dove), (Dove, Hawk) }

FGV DIREITO RIO

Qual seria o equilíbrio desse jogo em estratégias mistas?

- Cada predador escolhe a probabilidade de ser agressivo (q_a) de forma que, para o outro, o valor esperado de ser agressivo (E_a) seja igual ao de ser passivo (E_p).
- $(1 - q_a) = \text{probabilidade de ser passivo}$
- $E_a = (q_a)(-3) + (1 - q_a)(4) = 4 - 7q_a$
- $E_p = (q_a)(0) + (1 - q_a)(2) = 2 - 2q_a$
- $E_a = E_p \implies 4 - 7q_a = 2 - 2q_a \implies q_a = \frac{2}{5} = 40\%$

Equilíbrio representa a tendência de equilíbrio da população

- Se mais indivíduos se tornam hawks, há um excesso de encontro entre agressivos, gerando prejuízos para ambos (-3, -3).
- Se mais indivíduos se tornam doves, há uma maior oportunidade para hawks ganharem mais (4, 0).