Виконав: Щедровський Іван КНТ-113сп

Індивідуальне домашнє завдання №1

Варіант №28

1 Завдання

1.1. За ознаками збіжності дослідити збіжність рядів

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \sin\frac{\pi}{n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^{2n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2n+1}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{arcctg^3(n)}{1+n^2}$

1.2. Дослідити збіжність заданих знакозмінних рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n^4+1}}{n^2+3}$$

1.3. Знайти інтервал збіжності та дослідити поведінку степеневого ряду на кінцях інтервалу збіжності

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n n}{(n+1)4^n}$$

1.4. Розвинути функції у ряд по степенях x, використовуючи готові розвинення у ряд елементарних функцій

$$f(x) = x^2 arctg(x)$$

1.5. Розвинути в ряд Фур'є задані функції

Функцію $f(x) = 2x - 3$ на інтервалі $[-\pi, \pi]$

1.6. Обчислити інтеграл з похибкою до 0.001

$$\int_0^1 \cos\left(\frac{9x}{4}\right)^2 \, dx$$

1.7. Знайти перші чотири члени розвинення в ряд (до x^3) розв'язку диференційного рівняння за умовою y(0)=y'(0)=1

$$y`` = x^2\cos(y) - 4y`$$

2 Виконання

1) За ознаками збіжності дослідити збіжність рядів

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \sin\frac{\pi}{n}$; $a_n = \sin\frac{\pi}{n}$;

Перевіримо на обов'язкову умову збіжності:

$$\lim_{n\to\infty} \sin\frac{\pi}{n} = \lim_{n\to\infty} \sin\frac{\pi}{\infty} = 0 - \text{цей ряд МОЖЕ бути збіжним}$$

Використаємо ознаку порівняння:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \sin\frac{\pi}{n} \text{ та } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} - \text{розбіжний}, a_n = \sin\frac{\pi}{n}, b_n = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n\sin\frac{\pi}{n} = \pi \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = \pi > 0.$$

Виходячи з того, що $\pi > 0$ та ряд B — розбіжний, ряд А — також розбіжний

Відповідь: Ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \sin\frac{\pi}{n}$ — розбіжний

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^{2n}$; $a_n = \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^{2n}$

Використаємо ознаку Коші

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{(n+1)^2}{(2n-1)^2}\right)^{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n-1)^2} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{4n^2-4n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^2}+\frac{2n}{n^2}+\frac{1}{n^2}}{\frac{4n^2}{n^2}-\frac{4n}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{4-\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{\infty}+\frac{1}{\infty^2}}{4-\frac{4}{\infty}+\frac{1}{\infty^2}} = \frac{1}{4} < 1,\text{отже ряд збіжний}$$

Відповідь: Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^{2n}$ збіжний за однакою Коші

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2n+1}$; $a_n = \frac{n!}{2n+1}$; $a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{2(n+1)+1}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{2(n+1)+1} * \frac{2n+1}{n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\,(2n+1)}{(2(n+1)+1) * n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!\,(n+1)(2n+1)}{(2(n+1)+1) * n!}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{(2(n+1)+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n+2n+1}{2n+2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n+1}{2n+3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n^2}{n^2}+\frac{3n}{n^2}+\frac{1}{n^2}}{\frac{2n}{n^2}+\frac{3}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2+0+0}{0+0} = \infty > 1,\text{тому ряд розбігається}$$

Відповідь: Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2n+1}$ розбіжний

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{arcctg^3(n)}{1+n^2}$; $a_n = \frac{arcctg^3(n)}{1+n^2}$; $f(x) = \frac{arcctg^3(x)}{1+x^2}$;

$$\int_1^{\infty}\frac{arcctg^3(x)}{1+x^2}dx = \lim_{a\to\infty}\int_1^{a}\frac{arcctg^3(x)}{1+x^2}dx \quad \begin{bmatrix} u = arcctg(x) \\ -du = \frac{1}{1+x^2}dx \end{bmatrix}$$

$$= \lim_{a\to\infty} -\int_1^a u^3du = \lim_{a\to\infty}\left(-\frac{u^4}{4}\right)\Bigg|_1^a = \lim_{a\to\infty}\left(-\frac{arcctg^4(x)}{4}\right)\Bigg|_1^a =$$

$$= \lim_{a\to\infty} -\frac{arcctg^4(a)}{4} - \left(-\frac{arcctg^4(1)}{4}\right) = \lim_{a\to\infty} -\frac{arcctg^4(a)}{4} + \frac{\pi^4}{4^5}$$

$$= \lim_{a\to\infty}\frac{\pi^4}{1024} - \frac{arcctg^4(\infty)}{4} = \frac{\pi^4}{1024} \text{ => ряд збіжний}$$

Відповідь: Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{arcctg^3(n)}{1+n^2}$ збіжний

2) Дослідити збіжність заданих знакозмінних рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n^4+1}}{n^2+3} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,a_n;\;\; a_n = \frac{\sqrt{n^4+1}}{n^2+3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^4+1}}{n^2+3} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^4+1}{(n^2+3)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^4+1}{n^4+6n^3+9} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^4}{n^4}+\frac{1}{n^4}}{\frac{n^4}{n^4}+\frac{6n^3}{n^4}+\frac{9}{n^4}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n^4}}{1+\frac{6}{n}+\frac{9}{n^4}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{\infty}}{1+\frac{6}{\infty}+\frac{9}{\infty}} = 1$$

$1 \neq 0$ Оскільки одна із умов ознаки Лейбніца не задовільнена

– ряд розбіжний

Відповідь: Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n^4+1}}{n^2+3}$ розбіжний

3) Знайти інтервал збіжності та дослідити поведінку степеневого ряду на кінцях інтервалу збіжності

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n n}{(n+1)4^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(x+3)^n a_n;\;\; a_n = \frac{n}{(n+1)4^n};\;\; a_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1+1)4^{n+1}};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)4^n}*\frac{(n+1+1)4^{n+1}}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n n4(n+2)}{4^n(n+1)(n+1)}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+8n}{n^2+2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4n^2}{n^2}+\frac{8n}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{2n}{n^2}+\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{8n}{n^2}}{1+\frac{2n}{n^2}+\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+0}{1+0+0}=4$$

$R=4;\;\; x_0=-3;\qquad (-3-4;-3+4);\qquad (-7;1)$

$$\boldsymbol{x=-7};\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4^n n}{(n+1)4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-n}{(n+1)4^n};\ a_n=\frac{-n}{(n+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)}=-1\ \neq 0,\text{тому ряд розбіжний}$$

$$\boldsymbol{x=1};\ \ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n n}{(n+1)4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)};\ \ a_n=\frac{n}{(n+1)};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)}=1\ \neq 0,\text{тому ряд розбіжний}$$

$x\epsilon(-7;1)$

Відповідь: $(-7;1)$

1.4. Розвинути функції у ряд по степенях x, використовуючи готові розвинення у ряд елементарних функцій

$f(x)=x^2arctg(x);$

Готовий ряд розвинення: $\qquad arctg(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$

$f(x)=x^2arctg(x);$

$$x^2arctg(x)=x^2\left[x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots\right];$$

$$x^2arctg(x)=\ x^3-\frac{x^5}{3}+\frac{x^7}{5}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+3}}{2n+1}+\cdots$$

Відповідь: $x^2arctg(x) = \ x^3 - \frac{x^5}{3} + \frac{x^7}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+3}}{2n+1} + \cdots$

1.5. Розвинути в ряд Фур'є задані функції

Функцію $f(x) = 2x - 3$ на інтервалі $[-\pi, \pi]$

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum a_n * \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) + b_n * \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)$ на $[-l; l]$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx$$

$f(x) = 2x - 3; \ \ [-\pi; \pi]$

$$\boldsymbol{a_0} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2x-3)dx = \frac{1}{\pi} * \left(2\int_{-\pi}^{\pi} x dx - 3\int_{-\pi}^{\pi} dx\right) = \frac{1}{\pi} * (x^2 - 3x)|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$\frac{1}{\pi} * \left(\pi^2 - 3\pi - \left((-\pi)^2 - 3(-\pi)\right)\right) = \frac{1}{\pi}(\pi^2 - 3\pi - \pi^2 - 3\pi) = \frac{-6\pi}{\pi} = -6$$

$$\boldsymbol{a_n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2x-3)\cos\left(\frac{\pi n x}{\pi}\right)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2x-3)\cos(nx)\,dx$$

$$\begin{bmatrix} u = 2x - 3 & dv = \cos(nx) \\ du = 2 & v = \dfrac{\sin(nx)}{n} \end{bmatrix}; \ \frac{1}{\pi}\left(\frac{(2x-3)\sin(nx)}{n} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{2\sin(nx)}{n}dx\right) =$$

$$\frac{1}{\pi} * \left(\frac{(2x-3)\sin(nx)}{n} + \frac{2\cos(nx)}{n^2}\right)_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{(2\pi - 3)\sin(n\pi)}{n} + \frac{2\cos(n\pi)}{n^2} - \left(\frac{(-2\pi - 3)\sin(-n\pi)}{n} + \frac{2\cos(-n\pi)}{n^2}\right)\right)$$

$$\begin{bmatrix} \sin(n\pi) = 0 \\ \cos(n\pi) = (-1)^n \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{2(-1)^n}{n^2} - \left(\frac{2(-1)^n}{n^2}\right)\right) = 0$$

$$\boldsymbol{b_n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2x - 3)\sin\left(\frac{\pi n x}{\pi}\right)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2x - 3)\sin(nx)\,dx$$

$$\begin{bmatrix} u = 2x - 3 & dv = \sin(nx) \\ du = 2 & v = -\dfrac{\cos(nx)}{n} \end{bmatrix};\ = \frac{1}{\pi}\left(\frac{(2x - 3)\cos(nx)}{n} + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{2\cos(nx)}{n}dx\right) =$$

$$\frac{1}{\pi}\left(-\frac{(2x - 3)\cos(nx)}{n} + \frac{2\sin(nx)}{n^2}\right)_{-\pi}^{\pi} =$$

$$\frac{1}{\pi}\left(-\frac{(2\pi - 3)\cos(n\pi)}{n} + \frac{2\sin(n\pi)}{n^2} - \left(-\frac{(2(-\pi) - 3)\cos(n\pi)}{n} + \frac{2\sin(n\pi)}{n^2}\right)\right)$$

$$\begin{bmatrix} \sin(n\pi) = 0 \\ \cos(n\pi) = (-1)^n \end{bmatrix} \quad = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{(2\pi-3)(-1)^n}{n} - \left(-\frac{(2(-\pi)-3)(-1)^n}{n}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{3(-1)^n}{n} - \frac{2\pi(-1)^n}{n} - \left(\frac{3(-1)^n}{n} + \frac{2\pi(-1)^n}{n}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{3(-1)^n}{n} - \frac{2\pi(-1)^n}{n} - \frac{3(-1)^n}{n} - \frac{2\pi(-1)^n}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{4\pi(-1)^n}{n}\right) = -\frac{4(-1)^n}{n}$$

$$2x - 3 = -3 + \sum -\frac{4(-1)^n}{n} * \sin(nx)$$

$$\text{Відповідь: } 2x - 3 = -3 + \sum -\frac{4(-1)^n}{n} * \sin(nx)$$

1.6. Обчислити інтеграл з похибкою до 0.001

$$\int_0^1 \cos\left(\frac{9x}{4}\right)^2 \, dx$$

$$\int_0^1 \cos\left(\frac{9x}{4}\right)^2 \, dx \begin{bmatrix} u = \frac{9x}{4} & x = \frac{4u}{9} \\ & dx = \frac{4}{9}du \end{bmatrix} = \int_0^1 \frac{4\cos(u)^2}{9} \, du = \frac{4}{9}\int_0^1 \frac{1+\cos(2u)}{2} \, du$$

$$= \frac{4}{18}\left(\int_0^1 \, du + \int_0^1 \cos(2u)\,du\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{9}\left(u + \frac{1}{2}\sin(2u)\right)\Big|_0^1 = \left(\frac{2}{9}u + \frac{1}{9}\sin(2u)\right)_0^1$$

$$= \left(\frac{2}{9} * \frac{9x}{4} + \frac{1}{9}\sin\left(\frac{2*9x}{4}\right)\right)_0^1 = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{9}\sin\left(\frac{9x}{2}\right)\right)_0^1$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{9}\sin\left(\frac{9}{2}\right) - \left(\frac{0}{2} + \frac{1}{9}\sin\left(\frac{9*0}{2}\right)\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{9}\sin\left(\frac{9}{2}\right) = 0.391385542482$$

Оскільки в цьому інтегралі можна знайти фактичне значення,

похибка буде стримитись до 0 та

точно буде меньшою, ніж 0.001, яке було по завданню

1.7. Знайти перші чотири члени розвинення в ряд (до x^3) розв'язку диференційного рівняння за умовою y(0)=y'(0)=1

$x_0 = 0;\ \ f(0) = 1;\ \ f^{`}(0) = 1;$

$y^{``} = x^2\cos(y) - 4y^{`};\ \ \ f^{``}(0) = 0^2\cos\big(f(0)\big) - 4y^{`}(0) = -4$

$$y^{```} = -4y'' - x^2 sin(y)y' + 2xcos(y);\quad f^{```}(0) = -4(-4) - 0^2 sin(1)1 + 2*0*cos(1) = 16$$

$$y = f(0) + \frac{f^{`}(0)}{1!}x + \frac{f^{``}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{```}(0)}{3!}x^3$$

$$y = \left[1 + \frac{1}{1!}x - \frac{4}{2!}x^2 + \frac{16}{3!}x^3\right] = \left[1 + x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3\right]$$

Відповідь: $y = \left[1 + x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3\right]$