Міністерство освіти і науки України

Національний університет «Запорізька політехніка»

кафедра програмних засобів

ЗВІТ

з завдання

з дисципліни «Комп'ютерна графіка та обробка зображень» на тему:

«РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧ З ВИКОРИСТАННЯМ АФІННИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ»

Виконав:

ст. гр. КНТ-113сп Іван ЩЕДРОВСЬКИЙ

Прийняв:

Доцент Анжеліка ПАРХОМЕНКО

2025

1 Завдання до лабораторної роботи

Розв'язати задачі

Задача 1. Знайти перетворену точку P, що отримана при обертанні точки з координатами (3, 5) відносно початку відліку на кут 60°

Задача 2. Побудуйте перетворення, яке точку з координатами (1, 2):

- Обертає на кут 45°
- Масштабує вздовж вісі X на 1.5, а вздовж вісі Y на -2
- Переміщує на вектор (3, 5)

Задача 3. Які матриці перетворення та в якому порядку мають бути застосовані для обертання точки (2,2) на площині xy на 30° проти годинникової стрілки відносно точки (3,4)? Обчислити координати точки після обертання шляхом застосування результуючої матриці перетворення до точки (2,2)

2 Виконання лабораторної роботи

Задача 1. Знайти перетворену точку P, що отримана при обертанні точки з координатами (3, 5) відносно початку відліку на кут 60°

Для виконання цього завдання потрібно застосувати матрицю обертання. Оскільки у нас є всього дві координати та потрібно виконати поворот відносно початку відліку, нам треба застосовувати матрицю повороту навколо осі Z

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Тоді, виконанням буде

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3\\5\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3\\5\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}*3-\frac{\sqrt{3}}{2}*5\\ \frac{\sqrt{3}}{2}*3+\frac{1}{2}*5\\ 1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1.5-2.5\sqrt{3}\\ \frac{3}{2}\sqrt{3}+2.5\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2.83\\5.098\\1\end{bmatrix}$$

Відповідь: P = (-2.83, 5.1)

Задача 2. Побудуйте перетворення, яке точку з координатами (1, 2):

- **Обертає на кут 45°**
- **Масштабує вздовж вісі X на 1.5, а вздовж вісі Y на -2**
- **Переміщує на вектор (3, 5)**

Для виконання цієї задачі потрібно розуміти, що множення матриць не є комутативним, тобто порядок в якому вони множаться має значення

Також при множенні матриць нам потрібно читати їх справа на ліво, оскільки найправіша матриця буде першою перемножуватись з даними, в нашому випадку з вектором

Для обертання точки буде використовуватись матриця обертання

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Для масштабування буде використовуватись матриця масштабування

$$\begin{bmatrix}Sx & 0 & 0\\ 0 & Sy & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

І для переміщення буде використовуватись матриця переміщення

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & \mathrm{Xm}\\ 0 & 1 & \mathrm{Ym}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Також важливий порядок операцій! Спочатку виконується масштабування, потім поворот, а потім переміщення

В результаті отримаємо наступну результуючу матрицю:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & Xm \\ 0 & 1 & Ym \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Sx & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1.5}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1.5}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left(simplify\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{4} & \sqrt{2} & 0 \\ \frac{3\sqrt{2}}{4} & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{4} & \sqrt{2} & 3 \\ \frac{3\sqrt{2}}{4} & -\sqrt{2} & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Тепер ми можемо обчислити результат

$$\begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{4} & \sqrt{2} & 3 \\ \frac{3\sqrt{2}}{4} & -\sqrt{2} & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{4} + 2\sqrt{2} + 3 \\ \frac{3\sqrt{2}}{4} - 2\sqrt{2} + 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{2} + 8\sqrt{2} + 12}{4} \\ \frac{3\sqrt{2} - 8\sqrt{2} + 20}{4} \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{11\sqrt{2} + 12}{4} \\ \frac{-5\sqrt{2} + 20}{4} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.889 \\ 3.232233 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.9 \\ 3.23 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Відповідь: P = (6.9, 3.23). Важливо зауважити, тільки якщо виконувати операції в правильному порядку. Правильний порядок, згідно книгою Learn OpenGL та іншими інтернет-ресурсами, це Scale – Rotate – Translate. Якщо ж виконувати операції в порядку, як вони написати по завданню, то результат буде інший

Задача 3. Які матриці перетворення та в якому порядку мають бути застосовані для обертання точки (2,2) на площині ху на 30° проти годинникової стрілки відносно точки (3,4)? Обчислити координати точки після обертання шляхом застосування результуючої матриці перетворення до точки (2,2)

Для виконання цього завдання потрібно реалізувати поворот по осі Z відносно точки (3, 4)

Щоб реалізувати поворот відносно точки потрібно спочатку перенести цю точку в початок координат, тобто перемістити на (-3,-4). Далі виконати поворот і перемістити назад

Множення в матрицях читається справа на ліво, тому результуюча матриця буде виглядати ось так:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & Xm1 \\ 0 & 1 & Ym1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} cos\,\theta & -sin\,\theta & 0 \\ sin\,\theta & cos\,\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & Xm2 \\ 0 & 1 & Ym2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Підставимо значення

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{4}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{3}{2} - 2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{4}{2}\right) + 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \left(-\frac{3}{2} - 2\sqrt{3}\right) + 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{-3\sqrt{3}+10}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-4\sqrt{3}+5}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Тепер можемо обчислити нову позицію точки

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{-3\sqrt{3}+10}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-4\sqrt{3}+5}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} * 2 - \frac{1}{2} * 2 + \frac{-3\sqrt{3}+10}{2} \\ \frac{1}{2} * 2 + \sqrt{3} + \frac{-4\sqrt{3}+5}{2} \\ 0 * 2 + 0 * 2 + 1 * 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-1\sqrt{3}+8}{2} \\ \frac{-2\sqrt{3}+7}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.1339 \\ 1.7679 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.13 \\ 1.77 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Відповідь: P = (3.13, 1.77)