## Bài tập chương Kiến thức chuẩn bị

## 1. Chứng minh công thức De Morgan dạng tổng quát

**a.**  $A \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (A \setminus A_i)$ 

Theo định nghĩa hai tập hợp bằng nhau, để chứng minh X = Y, ta phải chứng minh:  $X \subset Y$  và  $Y \subset X$ . Nghĩa là:  $\forall x \in X \to x \in Y$  và ngược lại  $\forall y \in Y \to y \in X$ .

- $(\clubsuit) \ \forall \ x \in A \setminus \bigcup_{i \in I} A_i \ \rightarrow \ x \in A \ va \ x \notin \bigcup_{i \in I} A_i \ \rightarrow \ x \in A \ va \ x \notin A_i \ \forall i \in I \ \rightarrow \\ x \in A \setminus A_i \ \forall i \in I \ \rightarrow \ x \in \bigcap_{i \in I} (A \setminus A_i) \ . \ Vay \ A \setminus \bigcup_{i \in I} A_i \subset \bigcap_{i \in I} (A \setminus A_i).$
- $(\clubsuit) \ \forall \ x \in \bigcap_{i \in I} (A \setminus A_i) \quad \rightarrow \quad x \in A \setminus A_i \ \forall i \in I \quad \rightarrow \quad x \in A \ v \grave{a} \ x \not \in A_i \ \forall i \in I \quad \rightarrow \\ x \in A \ v \grave{a} \ x \not \in \bigcup_{i \in I} A_i \quad \rightarrow \ \forall \ x \in A \setminus \bigcup_{i \in I} A_i \ . \ V \hat{a} y \ \bigcap_{i \in I} (A \setminus A_i) \subset A \setminus \bigcup_{i \in I} A_i \ . \ (2)$   $T \grave{u} \ (1) \ v \grave{a} \ (2) \ suy \ ra \ dpcm.$
- **b.**  $A \setminus \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (A \setminus A_i)$
- $(\Rightarrow) \ \forall \ x \in A \setminus \bigcap_{i \in I} A_i \ \rightarrow \ x \in A \ va \ x \notin \bigcap_{i \in I} A_i \ \rightarrow \ x \in A \ va \ \exists \ j \in I : \ x \notin A_j \ \rightarrow$   $\exists \ j \in I : \ x \in A \setminus A_j \ \rightarrow \ x \in \bigcup_{i \in I} (A \setminus A_i) \ . \ \ Vay \ A \setminus \bigcap_{i \in I} A_i \ \subset \bigcup_{i \in I} (A \setminus A_i). \tag{1}$
- $(\clubsuit) \ \forall \ x \in U_{i \in I} \ (A \backslash A_i) \ \rightarrow \ \exists \ j \in I : \ x \in A \backslash A_j \ \rightarrow \ x \in A \ v \grave{a} \ \exists \ j \in I : \ x \not \in A_j \ \rightarrow \ x \in A \\ v \grave{a} \ x \not \in \bigcap_{i \in I} A_i \ \rightarrow \ x \in A \backslash \bigcap_{i \in I} A_i \ . \ V \hat{a} y \ U_{i \in I} \ (A \backslash A_i) \subseteq A \backslash \bigcap_{i \in I} A_i \ .$  (2)  $T \grave{u} \ (1) \ v \grave{a} \ (2) \ suy \ ra \ dpcm.$

### 2. Chứng minh các mệnh đề tập hợp

- a.  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \emptyset \iff A = B$   $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \emptyset \to A \setminus B = \emptyset \text{ và } B \setminus A = \emptyset \to A \subset B \text{ và } B \subset A \to A = B$   $\text{Ngược lại, nếu } A = B \to A \setminus B = \emptyset \text{ và } B \setminus A = \emptyset \to (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \emptyset.$
- **b.**  $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$  $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = (A \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B) = A.$
- c.  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = ((A \cup B) \setminus B) \cup ((B \cup A) \setminus A))$ De Morgan  $= (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
- **d**.  $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$  $(A \cap B) \setminus (A \cap C) \stackrel{De Morgan}{=} ((A \cap B) \setminus A) \cup ((A \cap B) \setminus C) = \emptyset \cup ((A \cap B) \setminus C) = (A \cap B) \setminus C = A \cap (B \setminus C)$ .
- **e**.  $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$

 $x \in A \cup (B \setminus A) \leftrightarrow x \in A \text{ hoặc } (x \in B \text{ và } x \notin A) \leftrightarrow x \in A \text{ hoặc } x \in B \leftrightarrow x \in A \cup B$ .

**f**.  $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$ 

 $x \in A \setminus (A \setminus B) \leftrightarrow x \in A \text{ và } x \notin (A \setminus B) \leftrightarrow x \in A \text{ và } x \in B \leftrightarrow x \in A \cap B$ .

#### 3. Chứng minh

**a.**  $(A \times B) \cap (B \times A) \neq \emptyset \leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset$ 

 $(A \times B) \cap (B \times A) \neq \emptyset \iff \exists \ x \in A, \exists \ y \in B \colon (x, y) \in A \times B \ \ v\grave{a} \ (x, y) \in B \times A.$ 

 $(x, y) \in B \times A \rightarrow x \in B, y \in A \rightarrow x \in A \cap B, y \in A \cap B \text{ hay } A \cap B \neq \emptyset.$ 

**b.**  $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$ 

 $(x, y) \in (A \times C) \cap (B \times D) \leftrightarrow x \in A \text{ và } x \in B \text{ dồng thời } y \in C \text{ và } y \in D \leftrightarrow x \in (A \cap B), y \in (C \cap D) \text{ hay } (x, y) \in (A \cap B) \times (C \cap D) \text{ dpcm.}$ 

#### 4. Với ánh xạ $f: X \to Y$ và A, B $\subset X$ . Chứng minh :

**a.**  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ 

 $y \in f(A \cup B) \rightarrow \exists \ x \in (A \cup B) : f(x) = y$ . Mà  $x \in (A \cup B) \rightarrow x \in A$  hoặc  $x \in B$  kéo theo  $f(x) \in f(A)$  hoặc  $f(x) \in f(B)$  hay  $y \in f(A) \cup f(B)$ . Cm tương tự cho chiều ngược lại.

**b.**  $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ 

 $y \in f(A \cap B) \rightarrow \exists x \in (A \cap B) : f(x) = y$ . Mà  $x \in (A \cap B) \rightarrow x \in A$  và  $x \in B$  kéo theo  $f(x) \in f(A)$  và  $f(x) \in f(B)$  hay  $y \in f(A) \cap f(B)$ . Cm tương tự cho chiều ngược lai.

c.  $f(A \setminus B) \supset f(A) \setminus f(B)$ 

 $y \in f(A \setminus B) \to \exists x \in (A \setminus B) : f(x) = y$ . Mà  $x \in (A \setminus B) \to x \in A$  và  $x \notin B$  kéo theo  $f(x) \in f(A)$  và  $f(x) \notin f(B)$  hay  $y \in f(A) \setminus f(B)$ . Cm tương tự cho chiều ngược lại.

\* Phản ví dụ chứng tỏ không thể có dấu bằng ở b. và c. :

Lấy 
$$X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$
,  $A = \{-2, -1, 0\}$ ,  $B = \{0, 1, 2\}$  và  $f(x) = |x|$ 

Ta có  $f(A \cap B) = \{0\}$ ,  $f(A) \cap f(B) = \{2, 1, 0\} \cap \{0, 1, 2\} = \{0, 1, 2\}$ .

$$f(A \setminus B) = \{2, 1\}, \quad f(A) \setminus f(B) = \emptyset.$$

## 5. Với ánh xạ $f: X \to Y$ và A, B $\subset Y$ . Chứng minh :

**a**.  $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ 

 $x \in f^{-1}(A \cup B) \leftrightarrow f(x) \in A \cup B \leftrightarrow f(x) \in A \text{ hoặc } f(x) \in B \leftrightarrow x \in f^{-1}(A)$ hoặc  $x \in f^{-1}(B) \leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ .

**b**. 
$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

 $x \in f^{-1}(A \cap B) \leftrightarrow f(x) \in A \cap B \leftrightarrow f(x) \in A \text{ và } f(x) \in B \leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \text{ và } x$  $\in f^{-1}(B) \leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ .

**c**.  $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$ 

 $x \in f^{-1}(A \setminus B) \leftrightarrow f(x) \in A \setminus B \leftrightarrow f(x) \in A \text{ và } f(x) \notin B \leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \text{ và } x \notin f^{-1}(B) \leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$ .

# 6. Với $f: X \to Y$ và $g: Y \to Z$ . Chứng minh :

- **a.** Mênh đề 2.8
  - f, g là đơn ánh → g∘f là đơn ánh
    ∀ x ≠ x' ∈ X, do f là đơn ánh → f(x) ≠ f(x'). Lại do g là đơn ánh: →
    g(f(x)) ≠ g(f(x')) hay g∘f(x) ≠ g∘f(x') đpcm.
  - f, g là toàn ánh  $\rightarrow g \circ f$  là toàn ánh  $\forall$   $z \in Z$ , do g là toàn ánh  $\rightarrow$   $\exists$   $y \in Y$ : g(y) = z. Lại do f là toàn ánh:  $\rightarrow$   $\exists$   $x \in X$ : f(x) = y. Vây  $\exists$   $x \in X$  để g(f(x)) = z hay  $g \circ f(x) = z$  đợcm.
  - f, g là song ánh → g∘f là song ánh
    Theo định nghĩa, ánh xạ h là song ánh nếu nó vừa là đơn ánh, vừa là toàn ánh. Nên điều phải chứng minh ở đây là hệ quả của 2 điều vừa chứng minh ở trên.

#### **b.** Mênh đề 2.9

- Nếu gof là đơn ánh thì f là đơn ánh.

Giả sử f không phải là đơn ánh  $\rightarrow \exists x \neq x' : f(x) = f(x') \rightarrow g(f(x)) = g(f(x'))$  hay  $g \circ f(x) = g \circ f(x') \rightarrow g \circ f$  không phải là đơn ánh, trái giả thiết. Vậy thì f phải là đơn ánh.

- Nếu  $g \circ f$  là toàn ánh thì g là toàn ánh.

Giả sử g không phải là toàn ánh  $\to \exists z \in Z$  mà  $z \neq g(y)$ ,  $\forall y \in Y \to \exists z \in Z$  mà  $z \neq g(f(x))$ ,  $\forall x \in X$  hay  $\exists z \in Z$ :  $z \neq g \circ f(x)$ ,  $\forall x \in X$  nghĩa là  $g \circ f$  không phải là toàn ánh, trái giả thiết. Vậy g phải là toàn ánh.

**7.** Với  $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  xác định bởi  $f(x) = x^2 - 3x + 2$ . Hỏi f có phải là một đơn ánh? Toàn ánh? Tìm  $f(\mathbb{R})$ , f(0),  $f^{-1}(0)$ , f([0, 5]),  $f^{-1}([0, 5])$ .

Dễ thấy  $x^2 - 3x + 2 = 0$  có nghiệm là 1 và  $2 \rightarrow f(1) = f(2) = 0$ . f không phải là đơn ánh. f cũng không phải là toàn ánh. Các câu hỏi còn lại là dễ.

8. A là tập hợp đúng n phần tử. Chứng minh rằng số lượng các tập hợp con của A có đúng 2<sup>n</sup> phần tử.

Chú ý công thức khai triển nhị thức Niu tơn:  $(1+1)^n$ .

12. Lập bảng cộng và bảng nhân của vành  $\mathbb{Z}_n$  với n=12 và n=15. Tìm các phần tử khả nghịch đối với phép nhân trong hai vành đó.

Lời giải đối với n = 12 (n = 15 - làm tương tự)

0      0      1      2      3      4      5      6      7      8      9      10        1      1      2      3      4      5      6      7      8      9      10      11        2      2      3      4      5      6      7      8      9      10      11      0        3      3      4      5      6      7      8      9      10      11      0      1        4      4      5      6      7      8      9      10      11      0      1      2        5      5      6      7      8      9      10      11      0      1      2      3        6      6      7      8      9      10      11      0      1      2      3      4      5        8      8      9      10      11      0      1      2      3      4      5      6      7	2018			`			,118 (4)						
1      1      2      3      4      5      6      7      8      9      10      11        2      2      3      4      5      6      7      8      9      10      11      0        3      3      4      5      6      7      8      9      10      11      0      1      2        4      4      5      6      7      8      9      10      11      0      1      2        5      5      6      7      8      9      10      11      0      1      2      3        6      6      7      8      9      10      11      0      1      2      3      4      5        8      8      9      10      11      0      1      2      3      4      5      6      7      8        9      9      10      11      0      1      2      3      4      5      6	+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2    2    3    4    5    6    7    8    9    10    11    0      3    3    4    5    6    7    8    9    10    11    0    1      4    4    5    6    7    8    9    10    11    0    1    2      5    5    6    7    8    9    10    11    0    1    2    3      6    6    7    8    9    10    11    0    1    2    3    4      7    7    8    9    10    11    0    1    2    3    4    5      8    8    9    10    11    0    1    2    3    4    5    6    7      10    10    11    0    1    2    3    4    5    6    7    8    9      11    11    0    1    2    3    4    5    6    7    8	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3    3    4    5    6    7    8    9    10    11    0    1      4    4    5    6    7    8    9    10    11    0    1    2      5    5    6    7    8    9    10    11    0    1    2    3    4      7    7    8    9    10    11    0    1    2    3    4    5      8    8    9    10    11    0    1    2    3    4    5    6      9    9    10    11    0    1    2    3    4    5    6    7      10    10    11    0    1    2    3    4    5    6    7    8    9      11    11    0    1    2    3    4    5    6    7    8    9      10    0    1    2    3    4    5    6    7    8    9	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0
4    4    5    6    7    8    9    10    11    0    1    2      5    5    6    7    8    9    10    11    0    1    2    3      6    6    7    8    9    10    11    0    1    2    3    4    5      7    7    8    9    10    11    0    1    2    3    4    5    6      9    9    10    11    0    1    2    3    4    5    6    7      10    10    11    0    1    2    3    4    5    6    7    8    9      11    11    0    1    2    3    4    5    6    7    8    9    10      x    0    1    2    3    4    5    6    7    8    9    10      x    0    1    2    3    4    5    6    7	2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1
5      5      6      7      8      9      10      11      0      1      2      3        6      6      7      8      9      10      11      0      1      2      3      4        7      7      8      9      10      11      0      1      2      3      4      5        8      8      9      10      11      0      1      2      3      4      5      6      7        9      9      10      11      0      1      2      3      4      5      6      7      8      9        10      10      11      0      1      2      3      4      5      6      7      8      9        11      11      1      2      3      4      5      6      7      8      9      10        2      0      1      2      3      4      5      6      7      8      9	3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2
6      6      7      8      9      10      11      0      1      2      3      4        7      7      8      9      10      11      0      1      2      3      4      5        8      8      9      10      11      0      1      2      3      4      5      6      7        9      9      10      11      0      1      2      3      4      5      6      7      8        10      10      11      0      1      2      3      4      5      6      7      8      9        11      11      0      1      2      3      4      5      6      7      8      9      10        2      0      1      2      3      4      5      6      7      8      9      10        2      0      2      4      6      8      10      0      2      4      6	4	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3
7      7      8      9      10      11      0      1      2      3      4      5        8      8      9      10      11      0      1      2      3      4      5      6        9      9      10      11      0      1      2      3      4      5      6      7      8        10      10      11      0      1      2      3      4      5      6      7      8      9        11      11      0      1      2      3      4      5      6      7      8      9        10      <	5	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4
8    8    9    10    11    0    1    2    3    4    5    6      9    9    10    11    0    1    2    3    4    5    6    7      10    10    11    0    1    2    3    4    5    6    7    8    9      11    11    0    1    2    3    4    5    6    7    8    9    10      0    0    1    2    3    4    5    6    7    8    9    10      0 <th>6</th> <th>6</th> <th>7</th> <th>8</th> <th>9</th> <th>10</th> <th>11</th> <th>0</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> <th>5</th>	6	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5
9      9      10      11      0      1      2      3      4      5      6      7        10      10      11      0      1      2      3      4      5      6      7      8      9        11      11      0      1      2      3      4      5      6      7      8      9      10        x      0      1      2      3      4      5      6      7      8      9      10        0      0      0      0      0      0      0      0      0      0      0      0        1      0      1      2      3      4      5      6      7      8      9      10        2      0      2      4      6      8      10      0      2      4      6      8        3      0      3      6      9      0      3      6      9      0      3      6 <t< th=""><th>7</th><th>7</th><th>8</th><th>9</th><th>10</th><th>11</th><th>0</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th></t<>	7	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6
10      10      11      0      1      2      3      4      5      6      7      8        11      11      0      1      2      3      4      5      6      7      8      9        X      0      1      2      3      4      5      6      7      8      9      10        0 </th <th>8</th> <th>8</th> <th>9</th> <th>10</th> <th>11</th> <th>0</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> <th>5</th> <th>6</th> <th>7</th>	8	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7
11      11      0      1      2      3      4      5      6      7      8      9        X      0      1      2      3      4      5      6      7      8      9      10        0      0      0      0      0      0      0      0      0      0        1      0      1      2      3      4      5      6      7      8      9      10        2      0      2      4      6      8      10      0      2      4      6      8        3      0      3      6      9      0      3      6      9      0      3      6        4      0      4      8      0      4      8      0      4      8      0      4        5      0      5      10      3      8      1      6      11      4      9      2        6      0      6      0      6<	9	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8
X      0      1      2      3      4      5      6      7      8      9      10        0	10	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0      0	11	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0      0		l _	l .	_	l _	_	_	_	l _	_	l _		
1      0      1      2      3      4      5      6      7      8      9      10        2      0      2      4      6      8      10      0      2      4      6      8        3      0      3      6      9      0      3      6      9      0      3      6        4      0      4      8      0      4      8      0      4      8      0      4        5      0      5      10      3      8      1      6      11      4      9      2        6      0      6      0      6      0      6      2      3      4        7      0      7      2      9      4      11      6      1      8      3      10        8      0      8      4      0      8      4      2      8      4      0      8        9      0      9      6      3 </th <th>X</th> <th>0</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> <th>5</th> <th>6</th> <th>7</th> <th>8</th> <th>9</th> <th>10</th> <th>11</th>	X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2    0    2    4    6    8    10    0    2    4    6    8      3    0    3    6    9    0    3    6    9    0    3    6      4    0    4    8    0    4    8    0    4    8    0    4      5    0    5    10    3    8    1    6    11    4    9    2      6    0    6    0    6    0    6    2    3    4      7    0    7    2    9    4    11    6    1    8    3    10      8    0    8    4    0    8    4    2    8    4    0    8      9    0    9    6    3    0    9    3    3    0    9    6      10    0    10    8    6    4    2    4    10    8    6    4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3    0    3    6    9    0    3    6    9    0    3    6      4    0    4    8    0    4    8    0    4    8    0    4      5    0    5    10    3    8    1    6    11    4    9    2      6    0    6    0    6    0    6    2    3    4      7    0    7    2    9    4    11    6    1    8    3    10      8    0    8    4    0    8    4    2    8    4    0    8      9    0    9    6    3    0    9    3    3    0    9    6      10    0    10    8    6    4    2    4    10    8    6    4	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
4    0    4    8    0    4    8    0    4    8    0    4      5    0    5    10    3    8    1    6    11    4    9    2      6    0    6    0    6    0    6    2    3    4      7    0    7    2    9    4    11    6    1    8    3    10      8    0    8    4    0    8    4    2    8    4    0    8      9    0    9    6    3    0    9    3    3    0    9    6      10    0    10    8    6    4    2    4    10    8    6    4	2	0			<b></b>			V					
5  0  5  10  3  8  1  6  11  4  9  2    6  0  6  0  6  0  6  2  3  4    7  0  7  2  9  4  11  6  1  8  3  10    8  0  8  4  0  8  4  2  8  4  0  8    9  0  9  6  3  0  9  3  3  0  9  6    10  0  10  8  6  4  2  4  10  8  6  4		U	2	4	6	8	10		2				10
6    0    6    0    6    0    6    2    3    4      7    0    7    2    9    4    11    6    1    8    3    10      8    0    8    4    0    8    4    2    8    4    0    8      9    0    9    6    3    0    9    3    3    0    9    6      10    0    10    8    6    4    2    4    10    8    6    4	3							0		4	6	8	10 9
7      0      7      2      9      4      11      6      1      8      3      10        8      0      8      4      0      8      4      2      8      4      0      8        9      0      9      6      3      0      9      3      3      0      9      6        10      0      10      8      6      4      2      4      10      8      6      4		0	3	6	9	0	3	0 6	9	4	6	8 6	
8  0  8  4  0  8  4  2  8  4  0  8    9  0  9  6  3  0  9  3  3  0  9  6    10  0  10  8  6  4  2  4  10  8  6  4	4	0	3 4	6 8	9	0 4	3 8	0 6 0	9 4	4 0 8	6 3 0	8 6 4	9
9  0  9  6  3  0  9  3  3  0  9  6    10  0  10  8  6  4  2  4  10  8  6  4	4 5	0 0 0	3 4 5	6 8 10	9 0 3	0 4 8	3 8 1	0 6 0 6	9 4 11	4 0 8 4	6 3 0 9	8 6 4 2	9 8
10  0  10  8  6  4  2  4  10  8  6  4	4 5 6	0 0 0 0	3 4 5 6	6 8 10 0	9 0 3 6	0 4 8 0	3 8 1 6	0 6 0 6	9 4 11 6	4 0 8 4 2	6 3 0 9 3	8 6 4 2 4	9 8 7
	4 5 6 7	0 0 0 0	3 4 5 6 7	6 8 10 0	9 0 3 6 9	0 4 8 0 4	3 8 1 6	0 6 0 6 0	9 4 11 6 1	4 0 8 4 2 8	6 3 0 9 3	8 6 4 2 4 10	9 8 7 5
<b>11</b> 0 11 10 9 8 7 5 5 4 3 2	4 5 6 7 8	0 0 0 0 0	3 4 5 6 7 8	6 8 10 0 2 4	9 0 3 6 9	0 4 8 0 4 8	3 8 1 6 11 4	0 6 0 6 0 6 2	9 4 11 6 1 8	4 0 8 4 2 8 4	6 3 0 9 3 3	8 6 4 2 4 10 8	9 8 7 5 5
	4 5 6 7 8 9	0 0 0 0 0 0	3 4 5 6 7 8 9	6 8 10 0 2 4 6	9 0 3 6 9 0 3	0 4 8 0 4 8	3 8 1 6 11 4 9	0 6 0 6 0 6 2 3	9 4 11 6 1 8 3	4 0 8 4 2 8 4 0	6 3 0 9 3 3 0	8 6 4 2 4 10 8 6	9 8 7 5 5 4

Các phần tử khả nghịch đối với phép nhân là: 1, 5, 7, 11, nghịch đảo của chúng là chính chúng.

17. Chứng minh tập hợp  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{ a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q} \}$  lập nên 1 trường với phép toán cộng và nhân thông thường.

Trước hết ta làm rõ các phép toán cộng và nhân trong  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ .

- Phép cộng:  $(a + b\sqrt{2}) + (a' + b'\sqrt{2})$  là  $c + d\sqrt{2}$  với c = (a+a'), d = (b+b')
- Phép nhân:  $(a+b\sqrt{2})$ .  $(a'+b'\sqrt{2})$  là  $x+y\sqrt{2}$ Với x=aa'+2bb' y=ab'+a'b

Từ đó dễ kiểm tra được: phép cộng có tính kết hợp, giao hoán, phần tử không là:

$$0 = 0 + 0\sqrt{2}$$

Cũng dễ kiểm tra được phép nhân có tính giao hoán, kết hợp, phân phối về hai phía đối với phép cộng. Phần từ đơn vị là  $1 = 1 + 0\sqrt{2}$ .

Tìm phần tử nghịch đảo của  $a + b\sqrt{2} \neq 0$  (với a, b không đồng thời bằng 0). Theo định nghĩa, nó là  $(a' + b'\sqrt{2})$  thỏa mãn  $(a + b\sqrt{2})$ .  $(a' + b'\sqrt{2}) = 1 + 0\sqrt{2} \rightarrow$ 

$$aa' + 2bb' = 1$$
  $va ab' + a'b = 0$ .

- Nếu  $a \neq 0$ , ta có b' = -a'b /  $a \rightarrow aa' + 2b(-a'b/a) = 1 \rightarrow a' (a 2b^2/a) = 1 \rightarrow a' = a/(a^2-2b^2) \rightarrow b' = -b//(a^2-2b^2)$  (chú ý: vì a,  $b \in \mathbb{Q}$  nên  $a^2 2b^2 \neq 0$ ).
- Nếu a = 0 thì  $b \neq 0 \rightarrow a' = 0 \rightarrow b' = 1/(2b)$

Gộp lại ta có nghịch đảo của  $a + b\sqrt{2}$  là  $a/(a^2-2b^2) + [-b/(a^2-2b^2)]\sqrt{2}$ .

18. Chứng minh rằng nếu số phức  $z \notin \mathbb{R}$  thì trường các phần tử dang:

$$\mathbf{R}(z) = \{ a + bz \mid a, b \in \mathbb{R} \} \text{ trùng với trường số phức } \mathbb{C}.$$

Hiển nhiên mỗi phần tử a+bz với  $a,b\in\mathbb{R}$  là một số phức  $\to \mathbf{R}$  (z)  $\subset \mathbb{C}$  (1) Ngược lại, giả sử z=x+iy, ( $y\ne 0$ ).  $\forall \ z'=x'+iy'\in\mathbb{C}$ . Gọi a, b là các số thực thỏa mãn  $z'=a+bz=a+b(x+iy)=a+bx+iby \to a+bx=x'$ ,  $y'=by \to b=y'/y$ , a=x'-bx=x'-xy'/y=(x'y-xy')/y.

Tóm lại, 
$$\forall$$
  $z' = x' + iy' \in \mathbb{C}$  ta có  $z' = (x'y - xy') / y + (y'/y) z  $\rightarrow$   $z' \in \mathbb{R}$  (z). Vậy  $\mathbb{C} \subset \mathbb{R}$  (z) (2). Từ (1) và (2) suy ra  $\mathbb{R}$  (z)  $= \mathbb{C}$  .$ 

- 22. 23. Sinh viên tự làm vì dễ.
- 30. Sinh viên tự làm, gợi ý sử dụng biểu diễn dạng lượng giác của số phức.
- **31**. Sinh viên tự làm, gợi ý sử dụng biểu diễn dạng lượng giác của số phức. Các căn bậc n của 1 số phức là các điểm tại các đỉnh của 1 đa giác đều n cạnh. Giả sử tổng các căn bậc n của 1 số phức là một véc tơ từ tâm đến 1 điểm S nào đó. Véc tơ này là không đổi khi ta quay cả hệ đi 1 góc  $360^{\circ}$ /n. Điều này chỉ xảy ra khi véc tơ tổng =  $\theta$ .
- **32**. Phân tích các đa thức sau đây thành các nhân tử bất khả quy trên  $\mathbb{R}[X]$  và  $\mathbb{C}[X]$ .

a. 
$$X^3 + 3X^2 + 5X + 3$$

b. 
$$X^3 - X^2 - X - 2$$

Sinh viên tự làm. Gợi ý: Dễ nhận thấy các đa thức trên có 1 nghiệm thực. Vậy, chúng có thể phân tích thành  $(x-x_0)(ax^2+bx+c)$ . Nếu biệt thức của  $ax^2+bx+c$  âm thì phân tích trên là phân tích bất khả quy trên R[X]. Trên C, các đa thức trên luôn có đủ 3 nghiệm, nên sẽ phân tích được thành dạng  $(x-x_0)(x-z_1)(x-z_2)$ .