**Bài tập chương Kiến thức chuẩn bị**

**1. Chứng minh công thức De Morgan dạng tổng quát**

**a.** $A \setminus \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} (A \setminus A_i)$

Theo định nghĩa hai tập hợp bằng nhau, để chứng minh X = Y, ta phải chứng minh: $X \subset Y$ và $Y \subset X$. Nghĩa là: $\forall x \in X \rightarrow x \in Y$ và ngược lại $\forall y \in Y \rightarrow y \in X$.

($\Rightarrow$) $\forall x \in A \setminus \bigcup_{i\in I} A_i \rightarrow x \in A$ và $x \notin \bigcup_{i\in I} A_i \rightarrow x \in A$ và $x \notin A_i\ \forall i \in I \rightarrow$ $x \in A \setminus A_i\ \forall i \in I \rightarrow x \in \bigcap_{i\in I} (A \setminus A_i)$. Vậy $A \setminus \bigcup_{i\in I} A_i \subset \bigcap_{i\in I} (A \setminus A_i)$. (1)

($\Leftarrow$) $\forall x \in \bigcap_{i\in I} (A \setminus A_i) \rightarrow x \in A \setminus A_i\ \forall i \in I \rightarrow x \in A$ và $x \notin A_i\ \forall i \in I \rightarrow$ $x \in A$ và $x \notin \bigcup_{i\in I} A_i \rightarrow \forall x \in A \setminus \bigcup_{i\in I} A_i$. Vậy $\bigcap_{i\in I} (A \setminus A_i) \subset A \setminus \bigcup_{i\in I} A_i$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

**b.** $A \setminus \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} (A \setminus A_i)$

($\Rightarrow$) $\forall x \in A \setminus \bigcap_{i\in I} A_i \rightarrow x \in A$ và $x \notin \bigcap_{i\in I} A_i \rightarrow x \in A$ và $\exists j \in I : x \notin A_j \rightarrow$ $\exists j \in I : x \in A \setminus A_j \rightarrow x \in \bigcup_{i\in I} (A \setminus A_i)$. Vậy $A \setminus \bigcap_{i\in I} A_i \subset \bigcup_{i\in I} (A \setminus A_i)$. (1)

($\Leftarrow$) $\forall x \in \bigcup_{i\in I} (A \setminus A_i) \rightarrow \exists j \in I : x \in A \setminus A_j \rightarrow x \in A$ và $\exists j \in I : x \notin A_j \rightarrow x \in A$ và $x \notin \bigcap_{i\in I} A_i \rightarrow x \in A \setminus \bigcap_{i\in I} A_i$. Vậy $\bigcup_{i\in I} (A \setminus A_i) \subset A \setminus \bigcap_{i\in I} A_i$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

**2. Chứng minh các mệnh đề tập hợp**

**a.** $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \emptyset \Leftrightarrow A = B$

$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \emptyset \rightarrow A \setminus B = \emptyset$ và $B \setminus A = \emptyset \rightarrow A \subset B$ và $B \subset A \rightarrow A = B$

Ngược lại, nếu $A = B \rightarrow A \setminus B = \emptyset$ và $B \setminus A = \emptyset \rightarrow (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \emptyset$.

**b.** $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$

$(A \setminus B) \cup (A \cap B) = (A \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B) = A$.

**c.** $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = ((A \cup B) \setminus B) \cup ((B \cup A) \setminus A)) \overset{\text{De Morgan}}{=} (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

**d.** $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$

$(A \cap B) \setminus (A \cap C) \overset{\text{De Morgan}}{=} ((A \cap B) \setminus A) \cup ((A \cap B) \setminus C) = \emptyset \cup ((A \cap B) \setminus C) =$ $(A \cap B) \setminus C = A \cap (B \setminus C)$.

**e.** $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$

$x \in A \cup (B \setminus A) \leftrightarrow x \in A$ hoặc ($x \in B$ và $x \notin A$) $\leftrightarrow x \in A$ hoặc $x \in B \leftrightarrow x \in A \cup B$ .

**f**. $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$

$x \in A \setminus (A \setminus B) \leftrightarrow x \in A$ và $x \notin (A \setminus B) \leftrightarrow x \in A$ và $x \in B \leftrightarrow x \in A \cap B$ .

**3. Chứng minh**

**a.** $(A \times B) \cap (B \times A) \neq \emptyset \leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset$

$(A \times B) \cap (B \times A) \neq \emptyset \leftrightarrow \exists x \in A, \exists y \in B$: $(x, y) \in A \times B$ và $(x, y) \in B \times A$.

$(x, y) \in B \times A \rightarrow x \in B, y \in A \rightarrow x \in A \cap B$ , $y \in A \cap B$ hay $A \cap B \neq \emptyset$.

**b.** $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$

$(x, y) \in (A \times C) \cap (B \times D) \leftrightarrow x \in A$ và $x \in B$ đồng thời $y \in C$ và $y \in D \leftrightarrow$

$x \in (A \cap B)$ , $y \in (C \cap D)$ hay $(x, y) \in (A \cap B) \times (C \cap D)$ đpcm.

**4. Với ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ và $A, B \subset X$. Chứng minh** :

**a.** $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

$y \in f(A \cup B) \rightarrow \exists x \in (A \cup B)$ : $f(x) = y$ . Mà $x \in (A \cup B) \rightarrow x \in A$ hoặc $x \in B$ kéo theo $f(x) \in f(A)$ hoặc $f(x) \in f(B)$ hay $y \in f(A) \cup f(B)$ . Cm tương tự cho chiều ngược lại.

**b.** $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

$y \in f(A \cap B) \rightarrow \exists x \in (A \cap B)$ : $f(x) = y$ . Mà $x \in (A \cap B) \rightarrow x \in A$ và $x \in B$ kéo theo $f(x) \in f(A)$ và $f(x) \in f(B)$ hay $y \in f(A) \cap f(B)$ . Cm tương tự cho chiều ngược lại.

**c.** $f(A \setminus B) \supset f(A) \setminus f(B)$

$y \in f(A \setminus B) \rightarrow \exists x \in (A \setminus B)$ : $f(x) = y$ . Mà $x \in (A \setminus B) \rightarrow x \in A$ và $x \notin B$ kéo theo $f(x) \in f(A)$ và $f(x) \notin f(B)$ hay $y \in f(A) \setminus f(B)$ . Cm tương tự cho chiều ngược lại.

***** Phản ví dụ chứng tỏ không thể có dấu bằng ở b. và c. :

Lấy $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ , $A = \{-2, -1, 0\}$, $B = \{0, 1, 2\}$ và $f(x) = |x|$

Ta có $f(A \cap B) = \{0\}$ , $f(A) \cap f(B) = \{2, 1, 0\} \cap \{0, 1, 2\} = \{0, 1, 2\}$.

$f(A \setminus B) = \{2, 1\}$ , $f(A) \setminus f(B) = \emptyset$ .

**5. Với ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ và $A, B \subset Y$. Chứng minh** :

**a**. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

$x \in f^{-1}(A \cup B) \leftrightarrow f(x) \in A \cup B \leftrightarrow f(x) \in A$ hoặc $f(x) \in B \leftrightarrow x \in f^{-1}(A)$ hoặc $x \in f^{-1}(B) \leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ .

**b**. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

$x \in f^{-1}(A \cap B) \leftrightarrow f(x) \in A \cap B \leftrightarrow f(x) \in A$ và $f(x) \in B \leftrightarrow x \in f^{-1}(A)$ và $x \in f^{-1}(B) \leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ .

**c.** $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$

$x \in f^{-1}(A \setminus B) \leftrightarrow f(x) \in A \setminus B \leftrightarrow f(x) \in A$ và $f(x) \notin B \leftrightarrow x \in f^{-1}(A)$ và $x \notin f^{-1}(B) \leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$ .

**6. Với $f : X \to Y$ và $g : Y \to Z$. Chứng minh** :

**a.** Mệnh đề 2.8

- $f, g$ là đơn ánh $\to g \circ f$ là đơn ánh

  $\forall x \neq x' \in X$, do $f$ là đơn ánh $\to f(x) \neq f(x')$. Lại do $g$ là đơn ánh: $\to$

  $g(f(x)) \neq g(f(x'))$ hay $g \circ f(x) \neq g \circ f(x')$ đpcm.

- $f, g$ là toàn ánh $\to g \circ f$ là toàn ánh

  $\forall z \in Z$, do $g$ là toàn ánh $\to \exists y \in Y$: $g(y) = z$. Lại do $f$ là toàn ánh: $\to$

  $\exists x \in X : f(x) = y$ . Vậy $\exists x \in X$ để $g(f(x)) = z$ hay $g \circ f(x) = z$ đpcm.

- $f, g$ là song ánh $\to g \circ f$ là song ánh

  Theo định nghĩa, ánh xạ h là song ánh nếu nó vừa là đơn ánh, vừa là toàn ánh. Nên điều phải chứng minh ở đây là hệ quả của 2 điều vừa chứng minh ở trên.

**b.** Mệnh đề 2.9

- Nếu $g \circ f$ là đơn ánh thì $f$ là đơn ánh.

  Giả sử $f$ không phải là đơn ánh $\to \exists x \neq x' : f(x) = f(x') \to g(f(x)) = g(f(x'))$ hay $g \circ f(x) = g \circ f(x') \to g \circ f$ không phải là đơn ánh, trái giả thiết. Vậy thì $f$ phải là đơn ánh.

- Nếu $g \circ f$ là toàn ánh thì $g$ là toàn ánh.

  Giả sử $g$ không phải là toàn ánh $\to \exists z \in Z$ mà $z \neq g(y), \forall y \in Y \to \exists z \in Z$ mà $z \neq g(f(x)), \forall x \in X$ hay $\exists z \in Z$: $z \neq g \circ f(x), \forall x \in X$ nghĩa là $g \circ f$ không phải là toàn ánh, trái giả thiết. Vậy $g$ phải là toàn ánh.

**7.** Với $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Hỏi $f$ có phải là một đơn ánh? Toàn ánh? Tìm $f(\mathbb{R})$ , $f(0)$, $f^{-1}(0)$, $f([0, 5])$, $f^{-1}([0,5])$.

Dễ thấy $x^2 - 3x + 2 = 0$ có nghiệm là 1 và 2 $\to f(1) = f(2) = 0$. $f$ không phải là đơn ánh. $f$ cũng không phải là toàn ánh. Các câu hỏi còn lại là dễ.

**8.** A là tập hợp đúng n phần tử. Chứng minh rằng số lượng các tập hợp con của A có đúng $2^n$ phần tử.

Chú ý công thức khai triển nhị thức Niu tơn: $(1+1)^n$.

**12.** Lập bảng cộng và bảng nhân của vành $\mathbb{Z}_n$ với n = 12 và n = 15. Tìm các phần tử khả nghịch đối với phép nhân trong hai vành đó.

Lời giải đối với n = 12 (n = 15 – làm tương tự)

| **+** | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| **1** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 0 |
| **2** | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 0 | 1 |
| **3** | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 0 | 1 | 2 |
| **4** | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| **5** | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| **6** | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| **7** | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| **8** | 8 | 9 | 10 | 11 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| **9** | 9 | 10 | 11 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| **10** | 10 | 11 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| **11** | 11 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |

| x | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **1** | 0 | **1** | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| **2** | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
| **3** | 0 | 3 | 6 | 9 | 0 | 3 | 6 | 9 | 0 | 3 | 6 | 9 |
| **4** | 0 | 4 | 8 | 0 | 4 | 8 | 0 | 4 | 8 | 0 | 4 | 8 |
| **5** | 0 | 5 | 10 | 3 | 8 | **1** | 6 | 11 | 4 | 9 | 2 | 7 |
| **6** | 0 | 6 | 0 | 6 | 0 | 6 | 0 | 6 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| **7** | 0 | 7 | 2 | 9 | 4 | 11 | 6 | **1** | 8 | 3 | 10 | 5 |
| **8** | 0 | 8 | 4 | 0 | 8 | 4 | 2 | 8 | 4 | 0 | 8 | 4 |
| **9** | 0 | 9 | 6 | 3 | 0 | 9 | 3 | 3 | 0 | 9 | 6 | 3 |
| **10** | 0 | 10 | 8 | 6 | 4 | 2 | 4 | 10 | 8 | 6 | 4 | 2 |
| **11** | 0 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 | 5 | 5 | 4 | 3 | 2 | **1** |

Các phần tử khả nghịch đối với phép nhân là: 1, 5, 7, 11, nghịch đảo của chúng là chính chúng.

**17.** Chứng minh tập hợp $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{ a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ lập nên 1 trường với phép toán cộng và nhân thông thường.

Trước hết ta làm rõ các phép toán cộng và nhân trong $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

- Phép cộng: $(a + b\sqrt{2}) + (a' + b'\sqrt{2})$ là $c + d\sqrt{2}$ với $c = (a+a')$, $d = (b+b')$
- Phép nhân: $(a + b\sqrt{2}) . (a' + b'\sqrt{2})$ là $x + y\sqrt{2}$

  Với $x = aa' + 2bb'$ $y = ab' + a'b$

Từ đó dễ kiểm tra được: phép cộng có tính kết hợp, giao hoán, phần tử không là: $0 = 0 + 0\sqrt{2}$

Cũng dễ kiểm tra được phép nhân có tính giao hoán, kết hợp, phân phối về hai phía đối với phép cộng. Phần từ đơn vị là $1 = 1 + 0\sqrt{2}$ .

Tìm phần tử nghịch đảo của $a + b\sqrt{2} \neq 0$ (với a, b không đồng thời bằng 0). Theo định nghĩa, nó là $(a' + b'\sqrt{2})$ thỏa mãn $(a + b\sqrt{2}) . (a' + b'\sqrt{2}) = 1 + 0\sqrt{2}$ $\rightarrow$

$aa' + 2bb' = 1$ và $ab' + a'b = 0$.

- Nếu $a \neq 0$, ta có $b' = -a'b / a$ $\rightarrow$ $aa' + 2b(-a'b/a) = 1$ $\rightarrow$ $a'(a - 2b^2/a) = 1$ $\rightarrow$ $a' = a/(a^2-2b^2)$ $\rightarrow$ $b' = -b//(a^2-2b^2)$ (chú ý: vì $a, b \in \mathbb{Q}$ nên $a^2 - 2b^2 \neq 0$).
- Nếu $a = 0$ thì $b\neq 0$ $\rightarrow$ $a' = 0$ $\rightarrow$ $b' = 1/(2b)$

Gộp lại ta có nghịch đảo của $a + b\sqrt{2}$ là $a/(a^2-2b^2) + [-b/(a^2-2b^2)]\sqrt{2}$ .

**18**. Chứng minh rằng nếu số phức $z \notin \mathbb{R}$ thì trường các phần tử dạng :

$$\mathbf{R}(z) = \{ a + bz \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$ trùng với trường số phức $\mathbb{C}$ .

Hiển nhiên mỗi phần tử $a + bz$ với $a, b \in \mathbb{R}$ là một số phức $\rightarrow$ $\mathbf{R}(z) \subset \mathbb{C}$ (1)
Ngược lại, giả sử $z = x + iy$, $(y\neq0)$. $\forall z' = x' + iy' \in\mathbb{C}$ . Gọi a , b là các số thực thỏa mãn $z' = a + bz = a + b(x+iy) = a+bx + iby$ $\rightarrow$ $a+bx = x'$, $y' = by$ $\rightarrow b = y'/y$ , $a = x' - bx = x' - xy'/y = (x'y - xy') / y$.
Tóm lại, $\forall z' = x' + iy' \in \mathbb{C}$ ta có $z' = (x'y - xy') / y + (y'/y) z$ $\rightarrow$ $z' \in\mathbf{R}(z)$. Vậy $\mathbb{C} \subset\mathbf{R}(z)$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $\mathbf{R}(z) = \mathbb{C}$ .

**22**. **23**. Sinh viên tự làm vì dễ.

**30**. Sinh viên tự làm, gợi ý sử dụng biểu diễn dạng lượng giác của số phức.

**31**. Sinh viên tự làm, gợi ý sử dụng biểu diễn dạng lượng giác của số phức. Các căn bậc n của 1 số phức là các điểm tại các đỉnh của 1 đa giác đều n cạnh. Giả sử tổng các căn bậc n của 1 số phức là một véc tơ từ tâm đến 1 điểm S nào đó. Véc tơ này là không đổi khi ta quay cả hệ đi 1 góc $360^o/n$. Điều này chỉ xảy ra khi véc tơ tổng = $\theta$.

**32**. Phân tích các đa thức sau đây thành các nhân tử bất khả quy trên $\mathbb{R}[X]$ và $\mathbb{C}[X]$ .

a. $X^3 + 3X^2 + 5X + 3$

b. $X^3 – X^2 – X - 2$

Sinh viên tự làm. Gợi ý : Dễ nhận thấy các đa thức trên có 1 nghiệm thực. Vậy, chúng có thể phân tích thành $(x – x_0)(ax^2 + bx + c)$. Nếu biệt thức của $ax^2 + bx + c$ âm thì phân tích trên là phân tích bất khả quy trên $\mathbb{R}[X]$. Trên $\mathbb{C}$, các đa thức trên luôn có đủ 3 nghiệm, nên sẽ phân tích được thành dạng $(x – x_0)(x – z_1)(x – z_2)$.