

Inspira Crea Transforma

Sustentación taller final

**Manuela Guarnizo Sepulveda, Gregorio Pérez Bernal,
Luisa Toro Villegas**

Universidad EAFIT
Escuela de Ciencias
Departamento de Ciencias Matemáticas
Ingeniería Matemática

Contenido

Adams Bashforth

Adams Moulton

PVI

Condición de CFL

PVF ecuación de onda

Generalidades Adams Bashforth

- ▶ Método multipasos (3 pasos)
- ▶ Método explícito
- ▶ Orden del error $O(h^3)$
- ▶ Esquema discreto:

$$Y_{j+1} = Y_j + h\left(\frac{5}{12}Y_{j-2} - \frac{4}{3}Y_{j-1} + \frac{23}{12}Y_j\right)$$

- ▶ Es consistente

Generalidades Adams Bashforth

- ▶ Tiene el siguiente polinomio de estabilidad

$$P(\zeta) = \zeta^3 - \zeta^2 - h\lambda\left(\frac{5}{12} - \frac{4}{3}\zeta + \frac{23}{12}\zeta^2\right) = 0$$

- ▶ Es estable en la siguiente región:

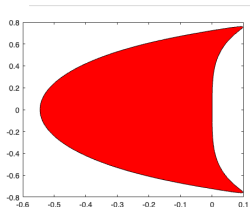


Figura: Región de estabilidad para Adams Bashforth 3 pasos

Proceso Adams Bashforth

Para deducir el método de tres pasos de Adams-Bashforth, se plantea el PVI más generico posible.

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

Generalidades Adams Moulton

- ▶ Método multipasos (4 pasos)
- ▶ Método implícito
- ▶ Orden del error $O(h^5)$
- ▶ Esquema discreto:

$$Y_{j+1} = Y_j + \frac{h}{720} (-19Y_{j-3} + 106Y_{j-2} - 264Y_{j-1} + 646Y_j + 251Y_{j+1})$$

- ▶ Es consistente

Generalidades Adams Moulton

- Tiene el siguiente polinomio de estabilidad:

$$P(\zeta) = \zeta^4 - \zeta^3 - \frac{h\lambda}{720}(-19Y + 106\zeta - 264\zeta^2 + 646\zeta^3 + 251\zeta^4) \\ = 0, \lambda \in \mathbb{C}$$

Generalidades Adams Moulton

- Es estable en la siguiente región:

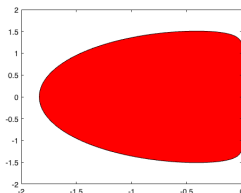


Figura: Región de estabilidad para Adams Moulton 4 pasos

Problema de valor inicial

Considere el siguiente PVI:

$$\begin{cases} y_1' = 9y_1 + 24y_2 + 5 \cos t - \frac{1}{3} \sin t & t \in [0, 1] \\ y_2' = -24y_1 - 51y_2 - 95 \cos t + \frac{1}{3} \sin t & t \in [0, 1] \\ y_1(0) = \frac{4}{3}, \quad y_2(0) = \frac{2}{3} \end{cases}$$

con la siguiente solución:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= 2e^{-3t} - e^{-39t} + \frac{1}{3} \cos t \\ y_2(t) &= -e^{-3t} + 2e^{-39t} - \frac{1}{3} \cos t \end{aligned}$$

Aproximaciones con Euler explícito

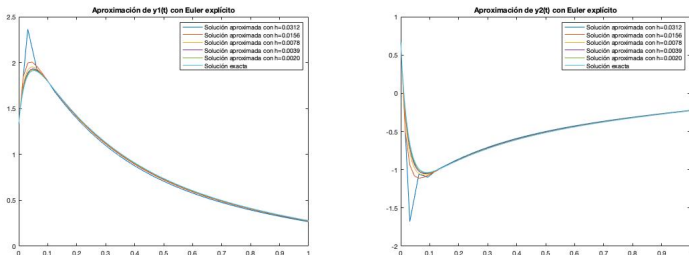


Figura: Aproximación y solución exacta del PVI usando Euler explícito

Aproximaciones con Euler implícito

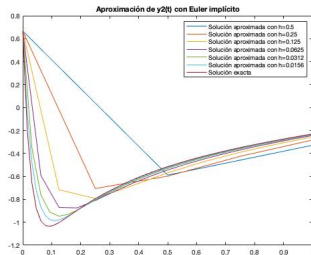
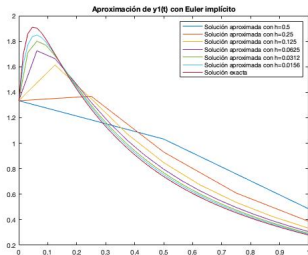


Figura: Aproximación y solución exacta del PVI usando Euler implícito

Aproximaciones con Crank Nicolson

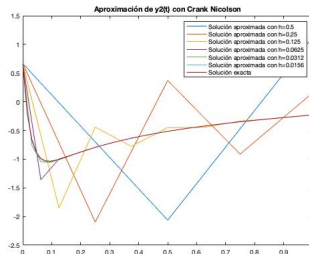
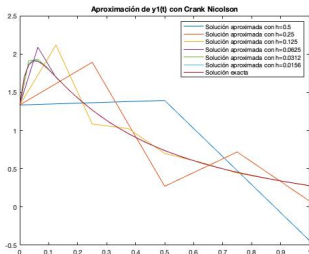


Figura: Aproximación y solución exacta del PVI usando Crank Nicolson

Aproximaciones con Runge-Kutta-Fehlberg

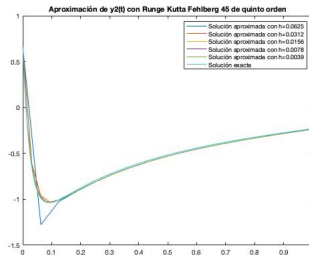
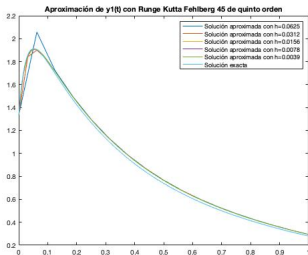


Figura: Aproximación y solución exacta del PVI usando Runge-Kutta-Fehlberg 45 de quinto orden

Aproximaciones con Adams Bashforth

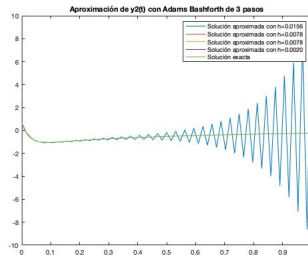
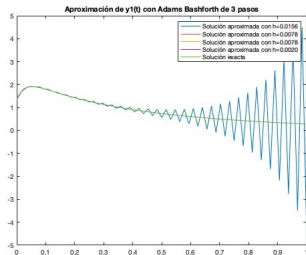


Figura: Aproximación y solución exacta del PVI usando Adams Bashforth de tres pasos

PVF

Considere el PVF

$$\epsilon u'' - u' = -1, 0 < x < 1$$

$$u(0) = 1, \quad u(1) = 3$$

con solución dada por

$$u(x) = 1 + x + \frac{e^{\frac{x}{\epsilon}} - 1}{e^{\frac{1}{\epsilon}} - 1}$$

Se usa el siguiente esquema para las diferencias centradas:

$$U'_j = \frac{U_{j+1} - U_{j-1}}{2 * h} + O(h^2), U''_j = \frac{U_{j+1} - 2 * U_j + U_{j-1}}{h^2} + O(h^2)$$

¿Por qué un PVF?

Como se tiene una ecuación diferencial de segundo orden, con $0 < x < 1$, y se tienen los valores (las condiciones) en las fronteras.

¿Cómo se llega al esquema?

$$u'' - \frac{1}{\epsilon} u' = -\frac{1}{\epsilon}; \epsilon \neq 0$$

Se reemplaza y se factoriza

$$(1 - \frac{h}{2\epsilon})U_{j+1} - 2U_j + (1 + \frac{h}{2\epsilon})U_{j-1} = -\frac{h^2}{\epsilon}; \epsilon \neq 0$$

Se evalúa en $j = 1$ y $j = n - 1$

¿Cómo se llega al esquema?

Así se tiene el siguiente sistema de $n - 1$ ecuaciones y $n - 1$ incógnitas:

$$l_{j,j-1} = (1 + \frac{h}{2\epsilon}), l_{j,j} = -2, l_{j,j+1} = (1 - \frac{h}{2\epsilon})$$

Esquema para el PVF

$$\begin{pmatrix} -2 & (1 - \frac{h}{2\epsilon}) & & & \\ (1 + \frac{h}{2\epsilon}) & -2 & (1 - \frac{h}{2\epsilon}) & & \\ & (1 + \frac{h}{2\epsilon}) & -2 & (1 - \frac{h}{2\epsilon}) & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & (1 + \frac{h}{2\epsilon}) & -2 & (1 - \frac{h}{2\epsilon}) \\ & & & & (1 + \frac{h}{2\epsilon}) & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{n-2} \\ U_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{h^2}{\epsilon} - (1 + \frac{h}{2\epsilon}) \\ -\frac{h^2}{\epsilon} \\ \vdots \\ -\frac{h^2}{\epsilon} \\ -\frac{h^2}{\epsilon} - 3(1 - \frac{h}{2\epsilon}) \end{pmatrix}$$

Errores

$$E_h := \left(\int_0^1 |u(x) - U_h(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Se utiliza el polinomio interpolante de Lagrange para encontrar a través de los puntos aproximados una función de aproximación, para así encontrar después el Error.

Se observa que mientras más pequeño sea ϵ hay más errores porque se trata con divisiones de números muy pequeños y eso lleva al overflow, hay muchos errores.

Orden de convergencia experimental

$$\alpha_j^h = \frac{\ln \frac{E_{j+1}^h}{E_j^h}}{\ln \frac{h_{j+1}}{h_j}}, j = 1, \dots, n-1$$

Condición de CFL

El método de diferencias finitas aplicado a la ecuación de onda con velocidad $c > 0$ es estable si $\sigma = ck/h \leq 1$.

PVF ecuación de onda

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} = 16u_{xx} \\ u(x, 0) = \sin \pi x \text{ for } 0 \leq x \leq 1 \\ u_t(x, 0) = 0 \text{ for } 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) = 0 \text{ for } 0 \leq t \leq 1 \\ u(1, t) = 0 \text{ for } 0 \leq t \leq 1 \end{array} \right.$$

Como $u(x, t) = \sin(\pi x) \cos(4\pi t)$

Aproximaciones con diferencias finitas

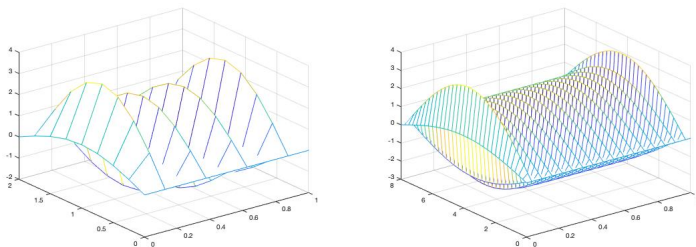


Figura: Aproximaciones con diferencias finitas