

Práctica: Especies en competencia

Luisa Toro Villegas
Universidad EAFIT
Medellín, Colombia
ltorov@eafit.edu.co

Maria Alejandra Moncada Agudelo
Universidad EAFIT
Medellín, Colombia
mamoncadaa@eafit.edu.co

29 de julio de 2022

1) *Introducción*

La competencia entre especies o competencia interespecífica habla de la interacción poblacional que se produce cuando distintas especies compiten por los mismos recursos en un ecosistema, como el alimento, el agua o el territorio. Esta puede presentarse de tres maneras: competencia por interferencia, competencia por explotación y competencia aparente. La primera habla de cuando los individuos compiten directamente por los recursos escasos, mediante agresión o impidiendo que la otra especie entre al lugar donde se encuentra el recurso presente. Aquí, características como fuerza o tamaño determinan quien gana la competencia. La segunda habla de cuando el uso de un recurso por parte de una especie agota el mismo, lo cual no implica una interacción directa entre las especies. En esta, la especie que encuentre primero el recurso tendrá ventaja, y los seres con menor tamaño usualmente tienen mayor capacidad de forrajeo. La tercera habla de cuando dos especies tienen un depredador en común, en donde se observa que cuando un depredador atrapa a mayor cantidad de presa de una especie, se aumenta el tamaño de la población del depredador y así, se aumenta la depredación de ambas especies, Lang & Benbow (2013).

Esta competencia puede tener muchos efectos en tanto la posible evolución de cierta especie o en el comportamiento de los individuos de esta, todo con el fin de evitarla. Esta afecta negativamente al tamaño de ambas especies presentes, ya que ambas tendrían mayor tasa de supervivencia y reproducción si la otra no estuviera. Usualmente, una especie demostrará una capacidad superior de explotar el recurso limitado, por lo que el competidor con menor capacidad mostrará una disminución en su población que lo llevará a cambiar su forma de explotar el recurso, a buscar un nuevo recurso o a extinguirse localmente. Debido a esto, se puede alterar completamente la cadena del ecosistema, ya que la supervivencia de otra especie puede estar basada en la depredación de esta. Por esto, estudiar la red de interacciones que se produce por la competencia interespecífica puede ser muy complejo y único para cada lugar Lang & Benbow (2013).

Los efectos que se producen por esta competencia son explicados por un modelo conocido como ecuaciones de Lotka–Volterra para la competencia, desarrollado por Lotka (1920) y

Volterra (1939). Este es un modelo con un bajo nivel de complejidad, por lo que se toman ciertas suposiciones como tasas de crecimiento de especies, tasas de competencia, capacidades de carga como parámetros constantes lo cual puede llevar a discrepancias entre los resultados y la realidad. El modelo proporciona principalmente una base para entender el comportamiento de las especies más que el verdadero tamaño de ambas poblaciones en el tiempo.

El objetivo fue investigar mediante metodologías propias de la modelación y simulación el modelo de ecuaciones de Lotka-Volterra para la competencia entre especies, bajo diferentes escenarios experimentales planteados. Además, se plantean diferentes hipótesis sobre el comportamiento esperado del modelo, como:

- Si la tasa de ingreso poblacional (entrada) es constante, ¿cuál es el comportamiento esperado del ecosistema? Se espera que para una entrada constante positiva, crezca la población de la especie x , incluso hasta el punto de la extinción de la otra especie, dependiendo de su magnitud. Con entrada constante negativa se espera lo contrario, es decir, que la especie a a la que se le aplique la entrada sea la que se extinga.
- Si hay un retardo en la tasa de ingreso poblacional (entradas escalón), ¿cuál es el comportamiento esperado del ecosistema? Para entrada escalón se espera un comportamiento similar a con entrada constante, excepto que tendrá un retraso el comportamiento. Hasta el tiempo del retraso, el sistema se comportará como si no tuviera entrada.
- Si la tasas de ingreso poblacional se comportan de forma pulso, ¿cuál es el comportamiento esperado del ecosistema? Se espera que el sistema responda acorde a esos pulsos, es decir, en ese momento la población de la especie a a la que se le aplica crezca, pero vuelva a retomar su estado después de cierto tiempo, y este comportamiento se repita en cada pulso aplicado. A la otra especie también se debe afectar ya que un pulso representa una presencia de individuos de la otra especie de la nada y esto representa competencia para la otra, lo cual se mostrará como una disminución. Depende del período de los pulsos el sistema tendrá tiempo de estabilizarse o no.
- Si la tasas de ingreso poblacional se comportan de forma sinusoidal (entradas tipo seno que representan ingresos y/o egresos), ¿cuál es el comportamiento esperado del ecosistema? Se espera que el sistema permanezca en un estado oscilatorio, pero la curva a largo plazo se conserve similar a como se comportaría con una entrada constante, donde en vez de ser una curva suave, se presenten picos cuya amplitud y periodo dependen de los valores que se le ingresan a la entrada.
- Debido a que la mayoría de la teoría desarrollado en el tema del modelamiento de sistemas se ha realizado en torno a sistemas lineales, para comprender mejor sistemas lineales surge la necesidad de linealizarlo. Primero se tiene como objetivo realizar diferentes simulaciones y encontrar el tiempo final en el que se logre estabilidad, para luego realizar una aproximación lineal en torno a él. Se espera que el punto en el que los estados se estabilicen corresponda con el punto de equilibrio planteado teóricamente. Se espera que al escoger el punto de equilibrio como el punto inicial en el sistema lineal,

el comportamiento no cambie bajo diferentes entradas dentro del rango de linealidad, mientras que se espera que si cambie fuera de este.

- Un sistema SISO es una abstracción del sistema que se usa para analizar la respuesta de un sistema a una entrada en específico. Se espera encontrar la función de transferencia la cual representa la relación entre la entrada y la salida en el dominio de la frecuencia. Al hallarla, el sistema queda completamente definido y se puede emplear para un ambiente de simulación.
- Se espera encontrar una configuración de un sistema MIMO tal que, dada una perturbación en el sistema se evite una desestabilización de las variables de estado. Sin embargo, dado que el sistema planteado tiene un punto de bifurcación, se espera que con una perturbación suficientemente alta el sistema de control sea incapaz de controlar y volver al estado inicial.
- Se busca realizar un análisis de sensibilidad al modelo no lineal y al modelo de control MIMO. Dado que este análisis es una cuantificación de la incertidumbre, se espera observar el mismo comportamiento que se tenía en el filtro de Montecarlo, donde se desglosaba qué tanto afectaban los cambios de un parámetro al comportamiento general. Se espera que dada una perturbación en el sistema, el efecto que tengan los parámetros cambie, en especial si esta perturbación disturbe el estado de equilibrio.

2) Metodología

En la presente sección se detallan los diferentes métodos propuestos para el desarrollo del trabajo. Se describe el modelo matemático junto a su implementación, además de diferentes métodos de validación, y un análisis de incertidumbre.

2.a. Modelo: *Especies en competencia*

Sean $x(t)$ y $y(t)$, las variables de estado que describen las poblaciones de la especie x y la especie y respectivamente, las cuales se encuentran en competencia en el tiempo t . Así, se tienen las siguientes ecuaciones (1):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t)(a - bx(t) - my(t)), & x(t_0) = x_0 \\ \dot{y}(t) = y(t)(c - dy(t) - nx(t)), & y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

donde a y c son las tasas per capita de cambio en ausencia uno de otro, b y d las tasas de intercambios de interacción, m la medida del grado en que la especie y interfiere con la especie x , n la medida del grado en que la especie x interfiere con la especie y . Los valores de esas constantes dependerán entonces de cada modelo en específico.

Ahora, consideremos el mismo modelo pero con entradas, (2):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t)(a - bx(t) - my(t)) + u(t), & x(t_0) = x_0 \\ \dot{y}(t) = y(t)(c - dy(t) - nx(t)), & y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (2)$$

donde $u(t)$ representa una tasa de incremento o una disminución de la población de la especie x . Una posible interpretación de esta entrada, si se considera negativa, puede ser la cacería de la especie x por parte de los humanos. En el caso de las cacerías estacionarias, las entradas pueden ser funciones periódicas como las funciones sinusoidales.

En este estudio, las variables de salida de interés serán las poblaciones de las dos especies, es decir $x(t)$ y $y(t)$.

2.b. Validación

Se propone una sección de validación para comprobar que el comportamiento del modelo corresponda con lo esperado. Además, de que esté bien planteado y de que sea correspondiente a la literatura.

2.b.a Análisis dimensional

Esta parte de la validación tiene objetivo verificar los significados físicos de las variables y parámetros que hacen parte del modelo, además de verificar que las unidades de las entradas y las salidas sean consistentes con las ecuaciones diferenciales planeadas. Aquí, se diferencia entre estados, tasas y otras.

2.b.b Validación bibliográfica

En esta sección se revisa un caso de aplicación encontrado en la literatura y se compara el comportamiento del modelo usando los mismos valores de los parámetros con el presentado.

2.b.c Validación matemática

Aquí se revisa el valor teórico al que el modelo debe converger y se compara con el valor real, es decir se valida analizando los puntos críticos y la estabilidad.

2.b.d Retrato de fase

Un retrato de fase representa las trayectorias de un sistema dinámico. Se debe complementar este análisis con los puntos de equilibrio, ya que muestra el comportamiento cuando el sistema tiende a uno de estos.

2.c. Análisis de incertidumbre

El análisis de incertidumbre es la evaluación gráfica de la propagación de la incertidumbre. En esta sección se explora los cambios en el comportamiento del modelo, en particular de

las poblaciones en el tiempo, según diferentes combinaciones de valores de los parámetros a analizar. Para el propósito de este estudio, se realizó este análisis para todas las variables, es decir a , b , c , d , m , n , x_0 , y y_0 . Se estudiaron variaciones del 20 % del valor nominal, cuyos rangos se presentan en el Cuadro 1.

Parámetros	Rango		Nominal
a	0.2069	0.3103	0.2586
b	0.0162	0.0244	0.0203
c	0.0459	0.0689	0.0574
d	0.0078	0.0117	0.0097
m	0.0457	0.0685	0.0571
n	0.0038	0.0058	0.0048
x_0	0.3347	0.5021	0.4184
y_0	0.5052	0.7578	0.6315

Cuadro 1: Rangos de los parámetros para el análisis de incertidumbre

Los valores de los rangos presentados en la tabla definen el espacio de los factores que luego se explorará mediante una matriz de diseño experimental que producirá así N muestras, las cuales serán simuladas para entender su comportamiento.

2.d. Puntos de equilibrio

Para encontrar los puntos de equilibrio del modelo se resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x(a - bx - my) = 0 \\ y(c - dy - nx) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

2.e. Control

2.e.a Control SISO

El control se define como maneras de alterar el comportamiento de un sistema para obtener cierto comportamiento deseado. Con este fin, se encuentra el sistema SISO con la siguiente metodología.

La función de transferencia SISO es:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B \quad (4)$$

donde A es la matriz jacobiana de las ecuaciones de estado respecto a las variables de estado, B es un vector columna que representa a qué estados afecta la entrada u o la matriz jacobiana según u , y C es la identidad.

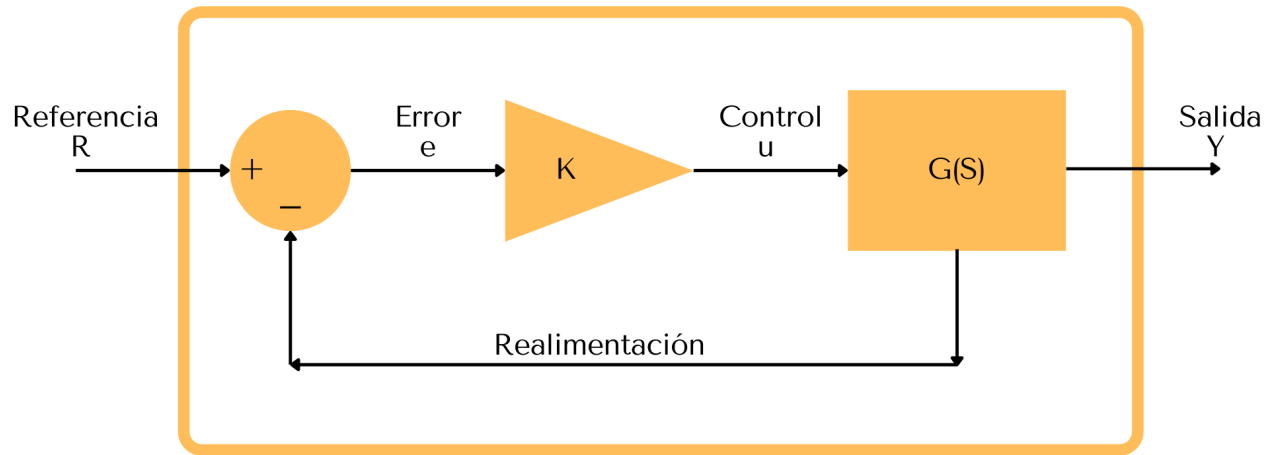


Figura 1: Forma básica de un sistema de control SISO

Luego, la función de transferencia del sistema de control se muestra en la ecuación (5):

$$H(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)} = \frac{KP_n(s)}{P_d(s) + KP_n(s)} \quad (5)$$

Donde K es una constante desconocida, para la cuál se encontrará su rango aplicando el método de *Routh-Hurwitz*. Al hallarla, se utilizará para implementar el sistema de control.

2.e.b Control en espacio de estado o control MIMO

Un sistema se define como controlable si a través de una entrada podemos llevar su estado desde un punto inicial a uno deseado en un tiempo finito.

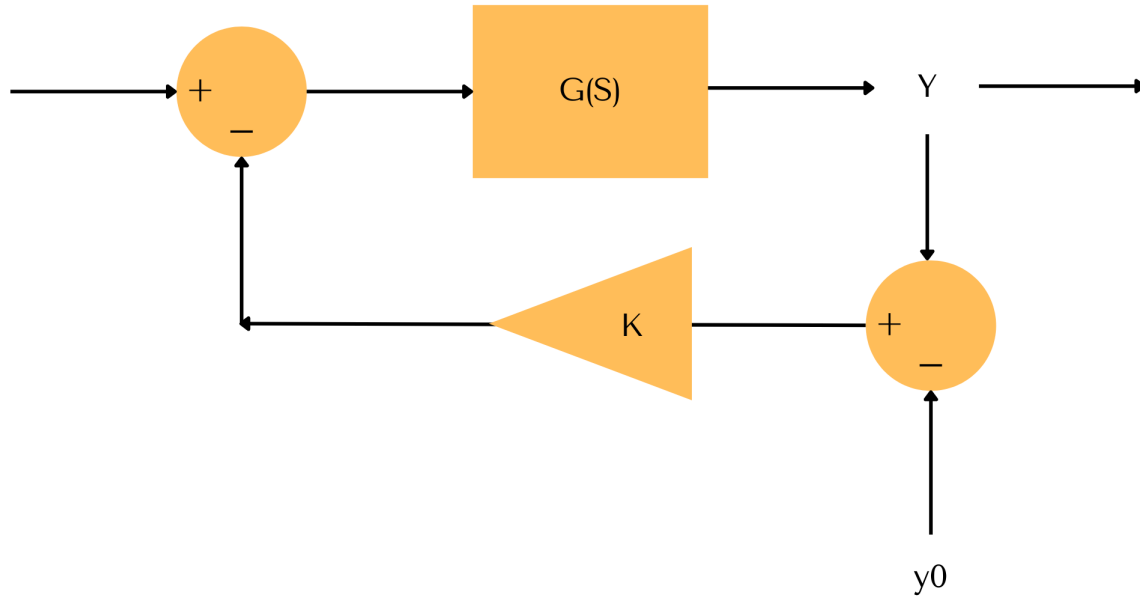


Figura 2: Forma básica de un sistema de control MIMO

La Figura 2 muestra el diagrama general de cómo se estructura un control MIMO. Se define la matriz de controlabilidad (M_c) como se muestra en la ecuación (6):

$$M_c = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (6)$$

El sistema es controlable cuando el rango de M_c es n , donde n es el número de variables de estado. Cuando el sistema es controlable, esto quiere decir que podemos seleccionar K de tal forma que los polos del sistema quedan ubicados donde se desee. Luego, se transforma el espacio de estado para obtener el espacio de estado controlable, para el cual se usan sus autovalores para controlarlo. Se encuentra además la forma canónica controlable (FCC) con la que se realizará el control.

$$\begin{cases} \dot{x}^* = Ix^* + B^*u \\ y = C^*x^* \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \dot{x}^* = QAQ^{-1}x^* + B^*u \\ y = C^*(QAQ^{-1}x^* + B^*u) \end{cases} \quad (8)$$

donde

$$Qx = x^*, \quad CQ^{-1} = C^*, \quad QB = B^*$$

Luego, se halla la matriz de transformación T tal que:

$$\begin{bmatrix} q \\ qA \\ \vdots \\ qA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (9)$$

donde q corresponde a la última fila de M_c^{-1} y n es el número de variables de estado.

2.f. Análisis de sensibilidad

El análisis de sensibilidad es el estudio de la contribución o la relevancia de cada parámetro a la propagación de la incertidumbre. Permite medir el cambio en un resultado, dado un cambio en un conjunto de variables, tanto en términos relativos, como en términos absolutos. Nos dice que si un parámetro es muy sensible este determinará entonces el comportamiento del sistema. Este se divide en local y global.

2.f.a Análisis de sensibilidad para comportamiento global

Este es el estudio de la varianza mediante descomposición por parámetros, donde S_i es el índice de sensibilidad global de primer orden el i -ésimo parámetro, y S_{Ti} es el índice de sensibilidad global de orden total, estos se muestran en la ecuación (10):

$$S_i = \frac{V_{xi}[E_{x \sim i}(Y|X_i)]}{V(Y)}, \quad S_{Ti} = \frac{E_{x \sim i}(V_{xi}(Y|X_i))}{V(Y)} \quad (10)$$

Este análisis se realizará para el sistema no lineal y el sistema de control MIMO.

3) Resultados

3.a. Implementación del modelo

La implementación del modelo fue realizada en el entorno de programación visual/gráfica Simulink R2021b, que es un Add-On de MatlabR2021b versión 9.11. A continuación, se muestra en la Figura 3 el diagrama del sistema y en la Figura 4 el diagrama del subsistema enmascarado con la interfaz gráfica de los parámetros de entrada. Además, se usa el *toolbox* GSUA-CSB, Rojas Díaz & Vélez Sánchez (2019) para realizar ciertos análisis.

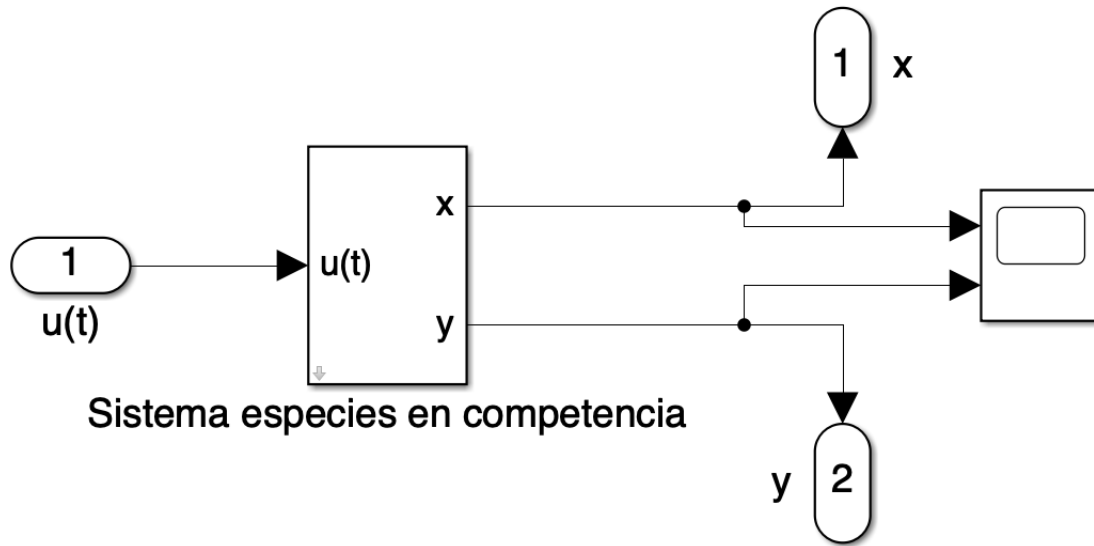


Figura 3: Diagrama de bloques del modelo matemático implementado en Simulink.

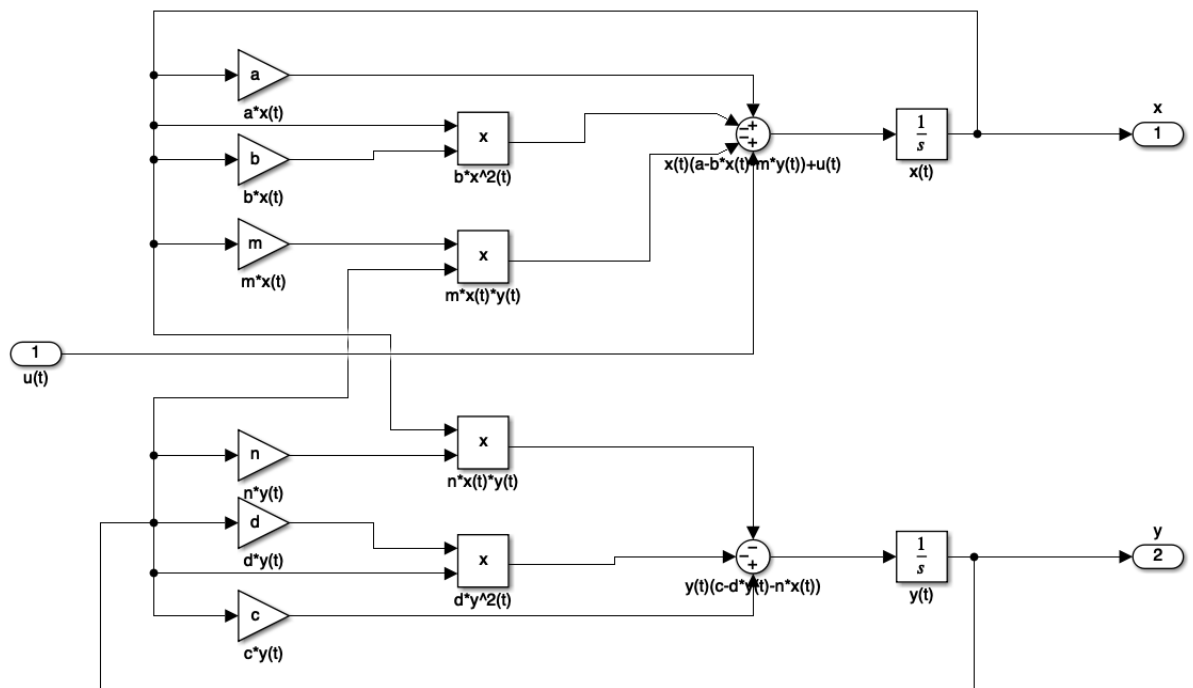


Figura 4: Diagrama de bloques de la máscara del modelo matemático implementado en Simulink.

3.b. Validación

3.b.a Análisis dimensional

Por la definición de las variables, se tiene que sus unidades son:

$$\begin{aligned}[x] &= [\text{especie 1}] \\[y] &= [\text{especie 2}] \\[\dot{x}] &= [\text{especie 1} / \text{tiempo}] \\[\dot{y}] &= [\text{especie 2} / \text{tiempo}]\end{aligned}$$

Haciendo el análisis de dimensionalidad del modelo a considerar, es decir las ecuaciones Lotka-Volterra para competencia de especie con entradas, se deducen las siguientes unidades:

$$\begin{aligned}[a] &= [1 / \text{tiempo}] \\[b] &= [1 / (\text{tiempo} * \text{especie 1})] \\[c] &= [1 / \text{tiempo}] \\[d] &= [1 / (\text{tiempo} * \text{especie 2})] \\[m] &= [1 / (\text{tiempo} * \text{especie 2})] \\[n] &= [1 / (\text{tiempo} * \text{especie 1})] \\[u] &= [\text{especie 1} / \text{tiempo}]\end{aligned}$$

Así, se concluye que el modelo planteado es consistente dimensionalmente, y por tanto se prueba su validez en este aspecto.

3.b.b Validación bibliográfica

En esta sección nos enfocaremos en validar el modelo respecto a resultados previos de la literatura, específicamente los del modelo planteado por Navas Ureña (2002), donde trabajan con dos poblaciones de levadura de la cerveza, *Saccharomyces cerevisiae* y *Schizosaccharomyces Kephir*. En el Cuadro 2 se ven los parámetros utilizados en la simulación y en la ecuación (11) el modelo de Lotka-Volterra respectivo.

Parámetros	Valores
a	0.2586
b	0.0203
c	0.0574
d	0.00976
m	0.0571
n	0.00480

Cuadro 2: Parámetros para poblaciones de levadura de la cerveza

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 0.2586x(t) - 0.0203x^2(t) - 0.0571x(t)y(t), & x(0) = 0.4184 \\ \dot{y}(t) = 0.0574y(t) - 0.00976y^2(t) - 0.00480x(t)y(t), & y(0) = 0.6315 \end{cases} \quad (11)$$

En la Figura 5 se muestra el comportamiento del modelo implementado por Navas Ureña (2002), y nuestros resultados para los mismos parámetros, hasta $t = 50$.

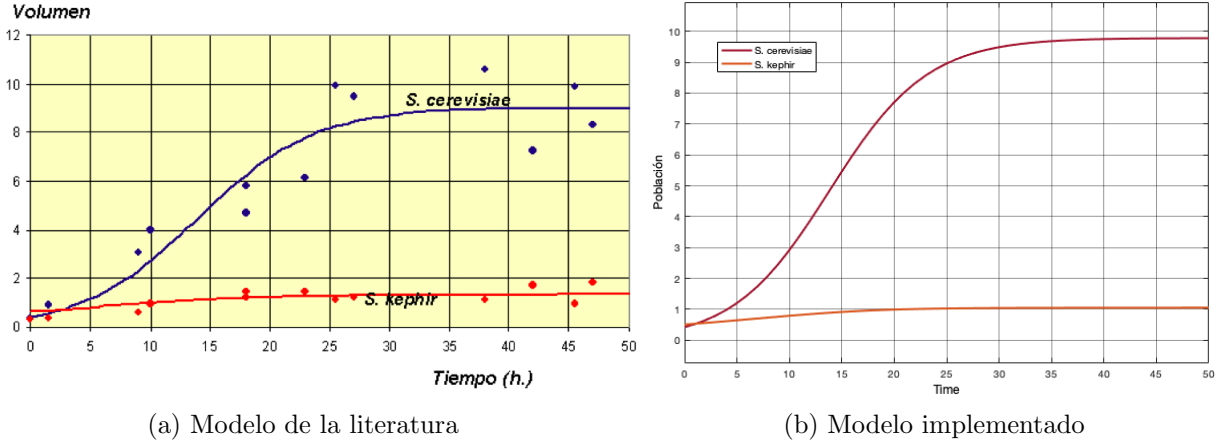


Figura 5: Poblaciones de dos tipos de levadura de la cerveza, *Saccharomyces cerevisiae* y *Schizosaccharommyces Kephir*.

En estas se muestra que el comportamiento del sistema implementado en este trabajo concuerda con el resultado del autor, lo cuál le otorga validez al modelo.

3.b.c Validación matemática

Al resolver los sistemas planteados en la ecuación (3) se tiene por solución los siguientes puntos:

$$P_1 = (0, 0), \quad P_2 = \left(0, \frac{c}{d}\right), \quad P_3 = \left(\frac{a}{b}, 0\right)$$

los cuales son el punto de equilibrio trivial y los deducidos cuando un estado tiene valor de cero, y estos suponen la desaparición de al menos una de las dos especies. Para encontrar el otro punto no trivial se halla el punto de corte de las rectas $r_1 = a - bx - my$ y $r_2 = c - dy - nx$, lo cual nos lleva al punto:

$$P_4 = \left(\frac{cm - ad}{nm - bd}, \frac{na - bc}{nm - bd}\right)$$

Para hallar los puntos de equilibrio del modelo con entrada se resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x(a - bx - my) + u = 0 \\ y(c - dy - nx) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

$$P_1 = (-u, 0), \quad P_2 = \left(-u, \frac{c}{d}\right), \quad P_3 = \left(-\frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4bu}}{2b}, 0\right)$$

los cuales son los puntos de equilibrio triviales. Para encontrar el punto no trivial se halla el punto de corte de las rectas $r_1 = a - bx - my + u$ y $r_2 = c - dy - nx$, lo cual nos lleva al punto:

$$P_4 = \left(\frac{-cm + ad \pm \sqrt{(cm - ad)^2 + 4du(db - mn)}}{2(db - mn)}, -\frac{cmm + dna \pm n\sqrt{4du(-nm + db) + (cm - ab)^2 - 2cdb}}{2d(db - nm)} \right)$$

Para los parámetros de la literatura, expuestos en el Cuadro 2, se encuentran los punto de equilibrio sin entradas:

$$P_1 = (0, 0), \quad P_2 = (0, 5.88), \quad P_3 = (12.74, 0), \quad P_4 = (10.37, 0.8469)$$

De forma aproximada se tiene que, para $t = 50$, $x(50) = 8.9701$ y $y(50) = 1.3459$, lo cuál sugiere que se están acercando al punto de coexistencia entre especies, es decir, cuando ambas especies sobreviven. Sin embargo, en un mayor horizonte de tiempo, es decir $t = 500$, se tiene que la especie *S. kephir* eliminará a la *S. cerevisiae*, con valores de $x(500) = 0.0088$ y $y(500) = 5.8415$, y se puede observar en la Figura 6.

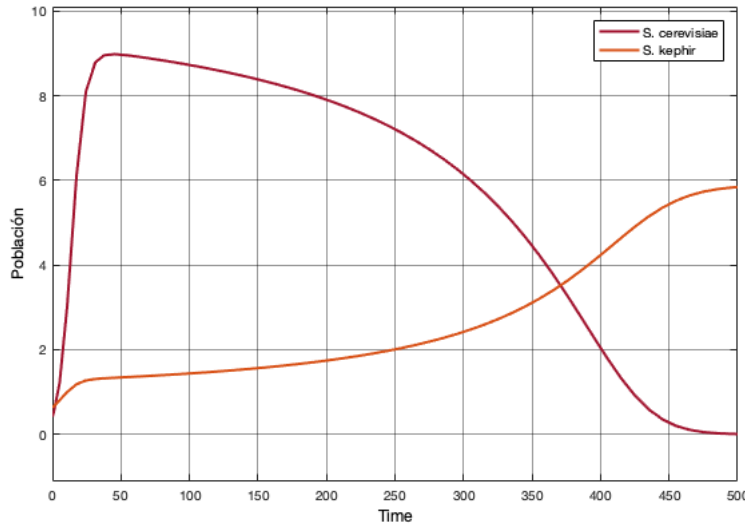


Figura 6: Poblaciones de dos tipos de levadura de la cerveza hasta $t = 500$.

Este fenómeno se conoce como exclusión competitiva, en donde el sistema converge al punto donde sólo una especie sobrevive. Para determinar estabilidad, se revisarán los autovalores de los jacobianos de los puntos de equilibrio.

$$Jacobian_{P_1} = \begin{bmatrix} 0.2586 & 0 \\ 0 & 0.0574 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = 0.0574, \quad \lambda_2 = 0.2586 \quad (13)$$

$$Jacobian_{P_2} = \begin{bmatrix} -0.0793 & 0 \\ -0.0284 & -0.0574 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = -0.0574, \quad \lambda_2 = -0.2586 \quad (14)$$

$$Jacobian_{P_3} = \begin{bmatrix} -0.2586 & -0.7274 \\ 0 & -0.0037 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = -0.2586, \quad \lambda_2 = -0.0037 \quad (15)$$

$$Jacobian_{P_4} = \begin{bmatrix} -0.2023 & -0.5691 \\ -0.0047 & -0.0096 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = -0.2154, \quad \lambda_2 = 0.0035 \quad (16)$$

De lo anterior se observa que son estables los puntos P_2 y P_3 por las ecuaciones (14) y (15), mientras que los puntos P_1 y P_4 son inestables por las ecuaciones (13) y (16).

3.b.d Retrato de fase

En la Figura 7 se muestra este análisis realizado para el problema planteado, con diferentes puntos iniciales.

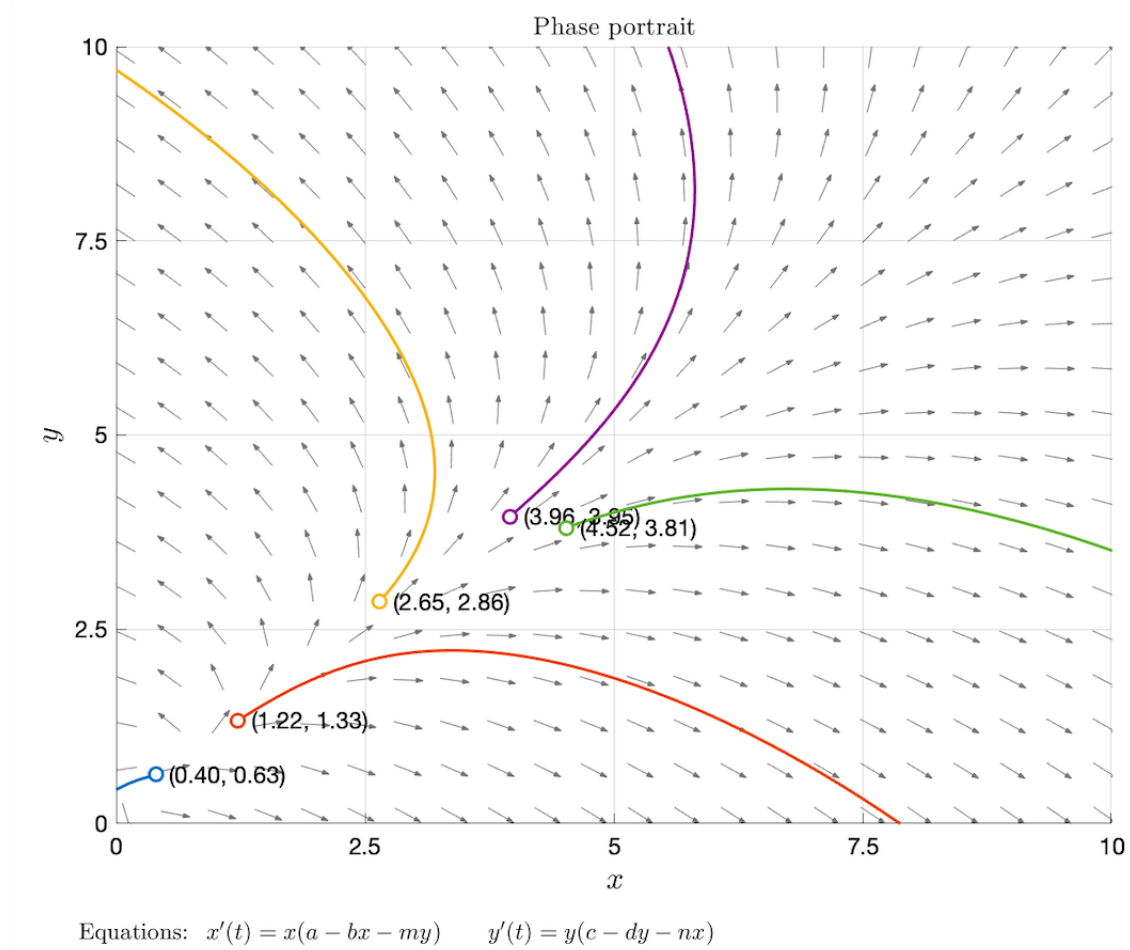


Figura 7: Retrato de fase

Se puede observar que para pequeñas diferencias en el punto inicial, se tienen grandes cambios en el comportamiento del sistema. Además, se observa que el comportamiento de exclusión competitiva ocurre en todos los casos planteados. Para lograr coexistencia con los parámetros actuales se tendría que escoger muy cuidadosamente el punto inicial.

3.c. Análisis de incertidumbre

En la Figura 8 se puede observar como varía el comportamiento de las poblaciones a través del tiempo según diferentes valores de los parámetros. Se puede notar que la extinción de cada especie depende de estos fuertemente, ya que en algunos casos se extingue y en otros no.

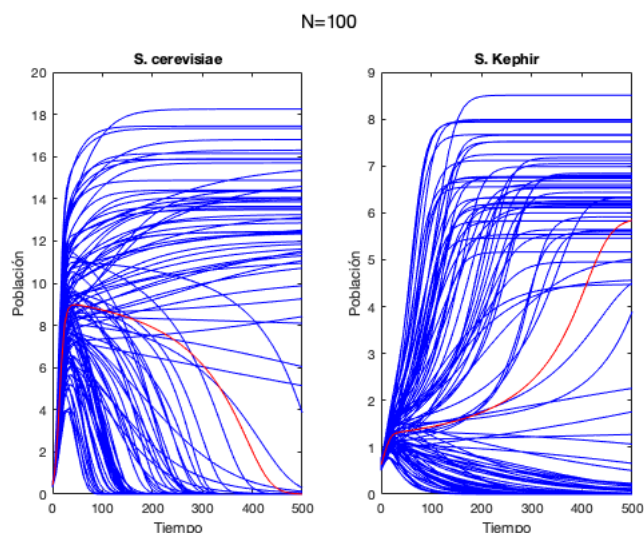


Figura 8: Análisis de incertidumbre

En la Figura 9 se muestra el análisis de incertidumbre para la variable x , y se interpreta considerando que tan desviadas están las líneas amarillas y rojas de las líneas azules en cada parámetro, lo cuál representa su efecto al alterarlos en los valores de las variables.

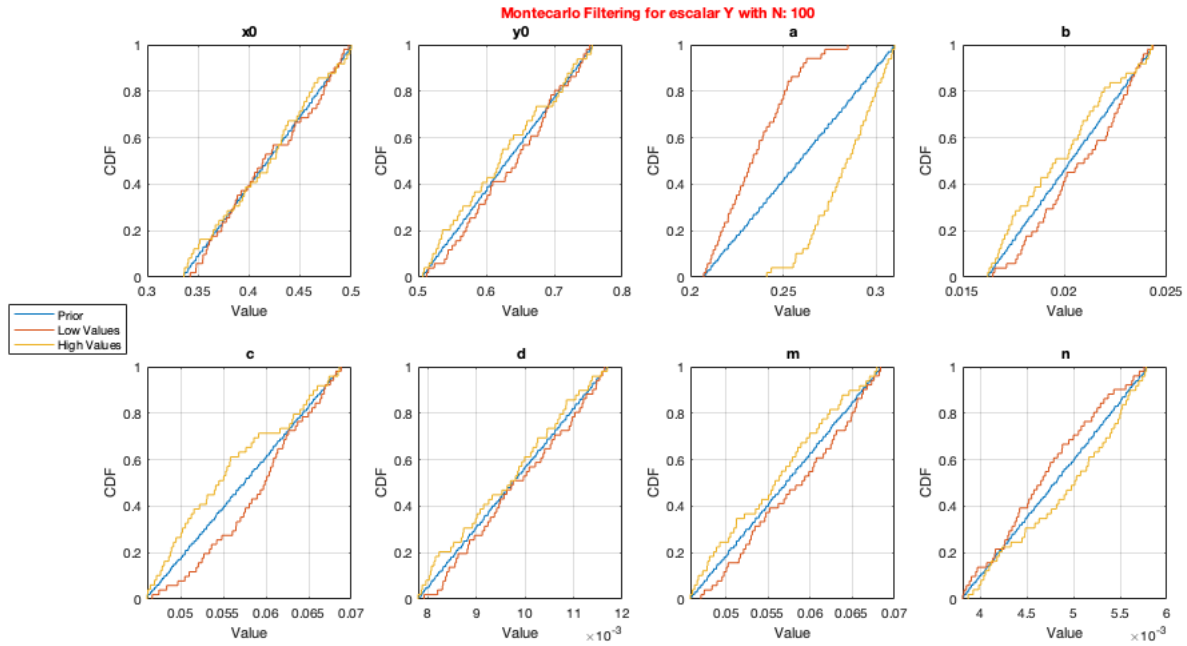


Figura 9: Filtro de Montecarlo para *S. cerevisiae*.

En la Figura 10 se muestra el análisis de incertidumbre para la variable y , y se interpreta de la misma manera que el anterior.

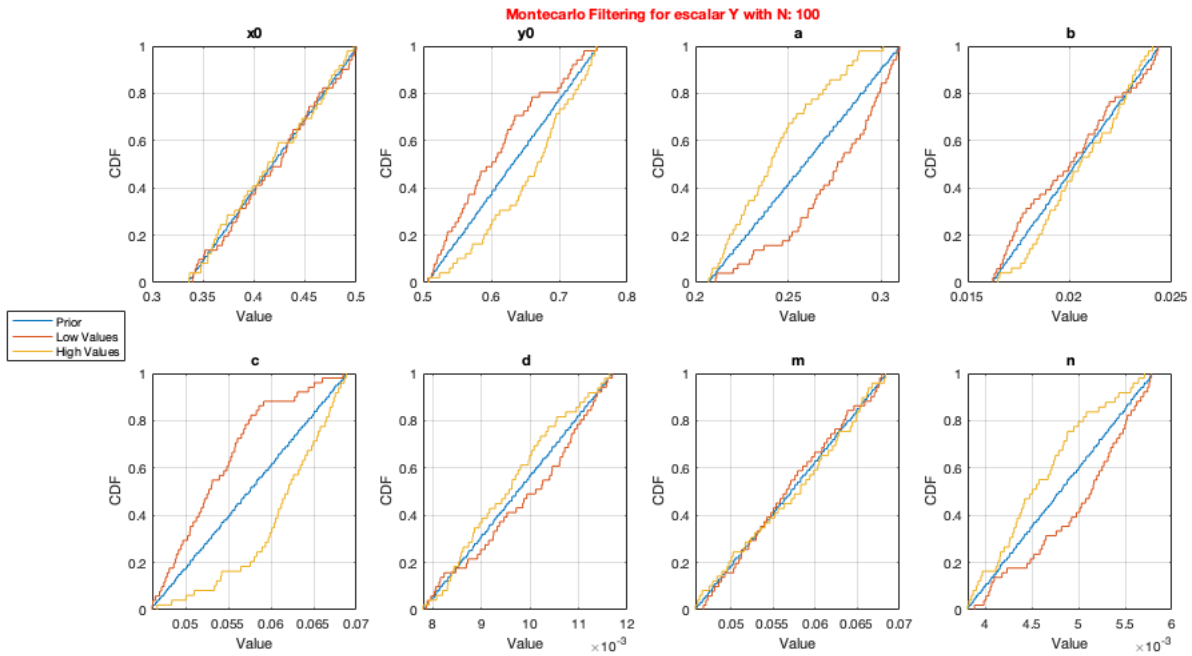
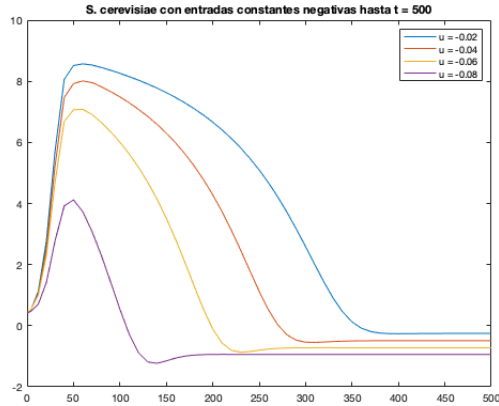


Figura 10: Filtro de Montecarlo para *S. Kephir*.

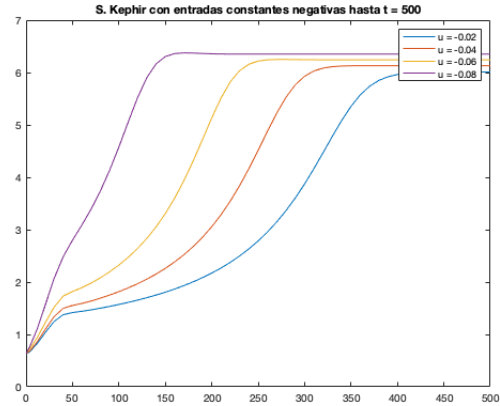
En la siguiente sección se presentarán los resultados de simulación para diferentes tipos de entrada: constante, escalón, pulso y seno.

3.d. Entradas tipo constante

En la Figura 11 se presentan los resultados dando a $u(t)$ valores constantes negativos entre -0.02 y -0.08 .



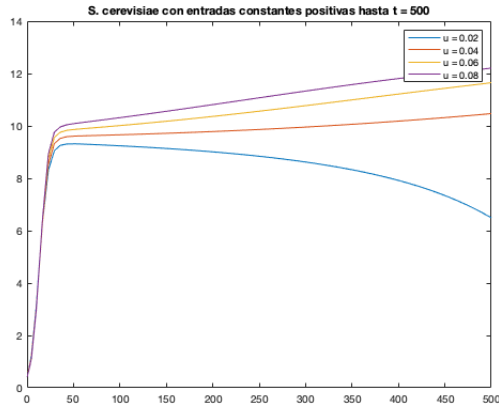
(a) *Saccharomyces cerevisiae* vs tiempo



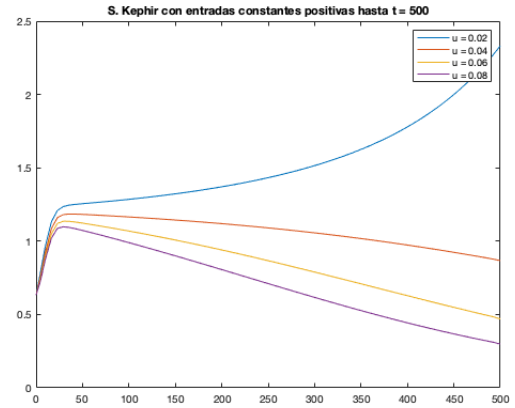
(b) *Schizosaccharommyces Kephir* vs tiempo

Figura 11: Poblaciones de *Saccharomyces cerevisiae* y *Schizosaccharommyces Kephir* afectadas por entradas constantes negativas.

En la Figura 12 se presentan los resultados dando a $u(t)$ valores constantes positivos entre 0.02 y 0.08 .



(a) *Saccharomyces cerevisiae* vs tiempo



(b) *Schizosaccharommyces Kephir* vs tiempo

Figura 12: Poblaciones de *Saccharomyces cerevisiae* y *Schizosaccharommyces Kephir* afectadas por entradas constantes positivas.

3.e. Entradas tipo escalón

Para las entradas tipo escalón, se dejan los valores predeterminados de la tasa de ingreso inicial y en tiempo de paso, se considera de 100 horas. El valor final de la tasa de ingreso se define como $u(t)$. Es decir nuestra entrada sigue la siguiente ecuación:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 100 \text{ horas} \\ u(t), & \text{si } t \geq 100 \text{ horas} \end{cases} \quad (17)$$

En la Figura 13 se observa una entrada del tipo escalón para $u = 0.08$, las otras entradas se comportan similarmente.

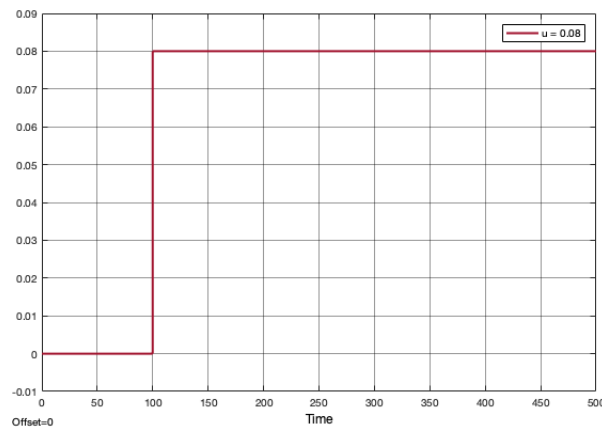
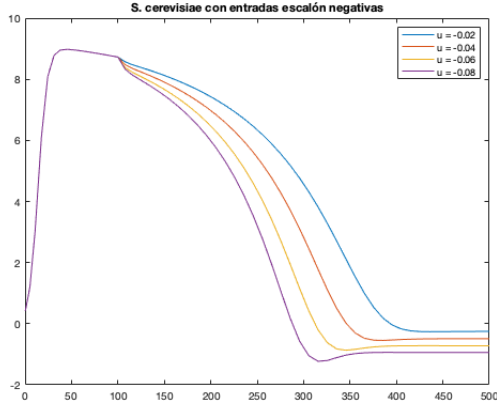
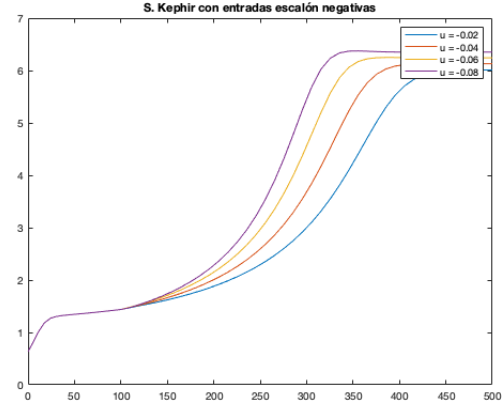


Figura 13: Entrada tipo escalón

En la Figura 14 se presentan los resultados dando a $u(t)$ valores tipo escalón negativos entre -0.02 y -0.08 .



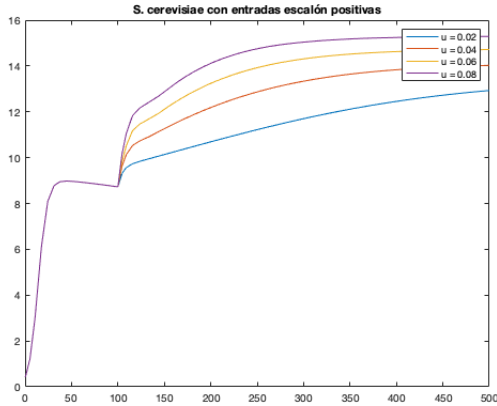
(a) *Saccharomyces cerevisiae* vs tiempo



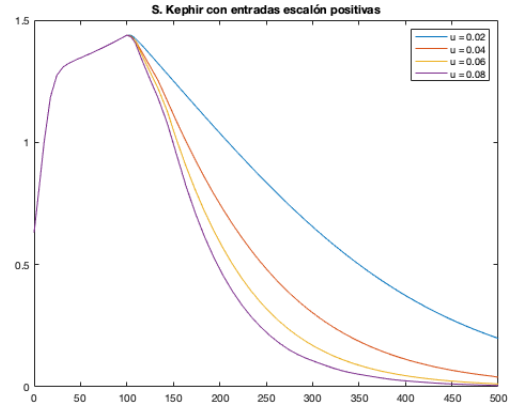
(b) *Schizosaccharommyces Kephir* vs tiempo

Figura 14: Poblaciones de *Saccharomyces cerevisiae* y *Schizosaccharommyces Kephir* afectadas por entradas tipo escalón negativas.

En la Figura 15 se presentan los resultados dando a $u(t)$ valores tipo escalón positivos entre 0.02 y 0.08 .



(a) *Saccharomyces cerevisiae* vs tiempo



(b) *Schizosaccharommyces Kephir* vs tiempo

Figura 15: Poblaciones de *Saccharomyces cerevisiae* y *Schizosaccharommyces Kephir* afectadas por entradas tipo escalón positivas.

3.f. Entradas tipo pulso

En la Figura 16 se observan dos entradas del tipo pulso para $amplitud = 2, 4$ y $periodo = 10$, las otras entradas se comportan similarmente.

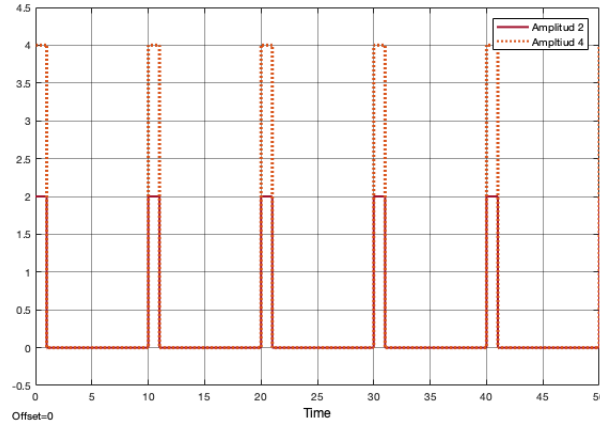
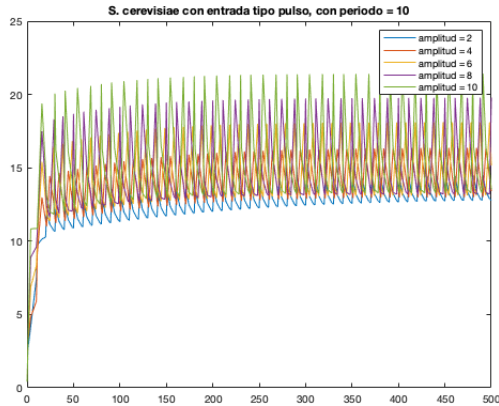
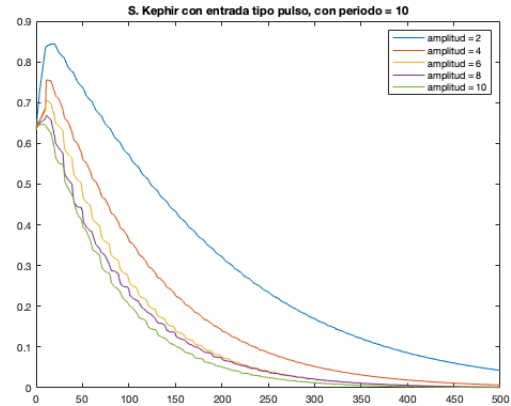


Figura 16: Entrada tipo pulso

En la Figura 17 se presentan los resultados dando a $u(t)$ valores tipo pulso con periodo de 10 horas, variando la amplitud entre 2 y 10.



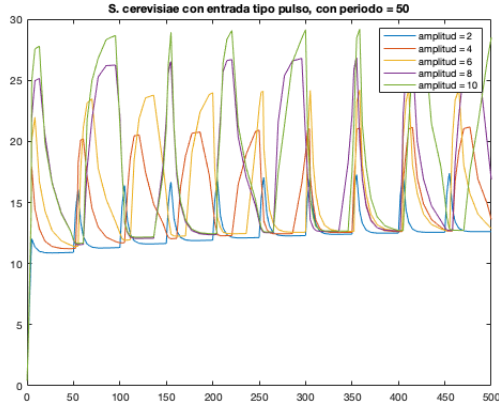
(a) *Saccharomyces cerevisiae* vs tiempo



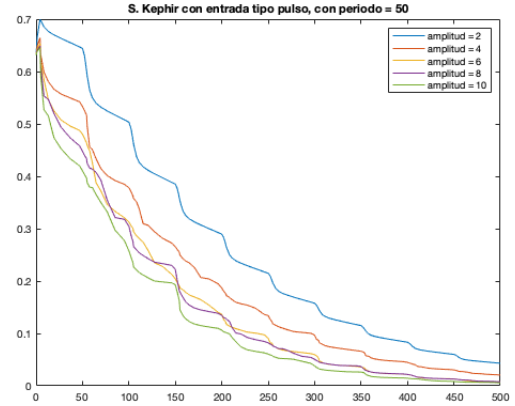
(b) *Schizosaccharommyces Kephir* vs tiempo

Figura 17: Poblaciones de *Saccharomyces cerevisiae* y *Schizosaccharommyces Kephir* afectadas por entradas tipo pulso con periodo 10 horas.

En la Figura 18 se presentan los resultados dando a $u(t)$ valores tipo pulso con periodo de 50 horas, variando la amplitud entre 2 y 10.



(a) *Saccharomyces cerevisiae* vs tiempo



(b) *Schizosaccharommyces Kephir* vs tiempo

Figura 18: Poblaciones de *Saccharomyces cerevisiae* y *Schizosaccharommyces Kephir* afectadas por entradas tipo pulso con periodo 50 horas.

3.g. Entradas tipo sinusoidal

Para las entradas tipo sinusoidales, se usan los valores predeterminados por Simulink para los parámetros fase y sesgo. Para la frecuencia se utilizó $\frac{\pi}{25} \frac{rad}{horas}$. Por último la amplitud se deja en términos de u . Obtenemos las entradas de la forma:

$$u(t) = u * \sin\left(\frac{\pi}{25}t\right) \quad (18)$$

Algunos ejemplos de entrada se presentan en la Figura 19, para $u = 1$ y $u = -1$.

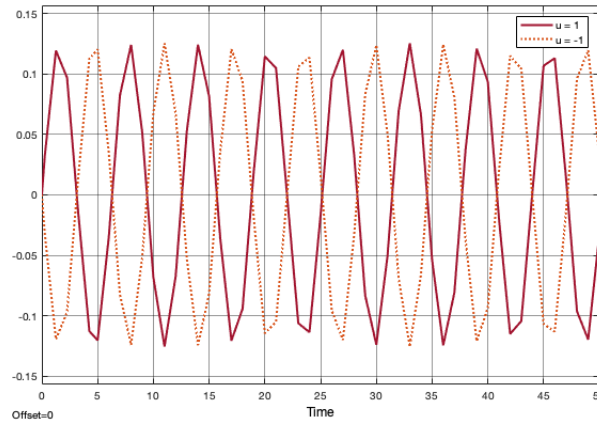
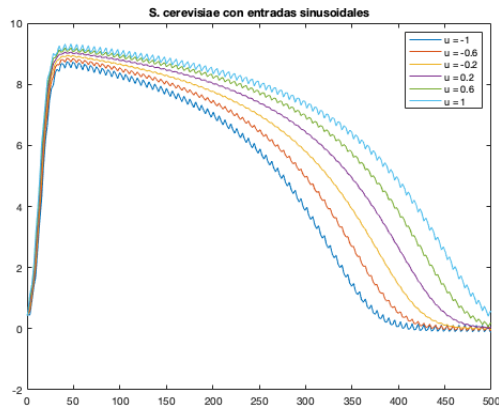
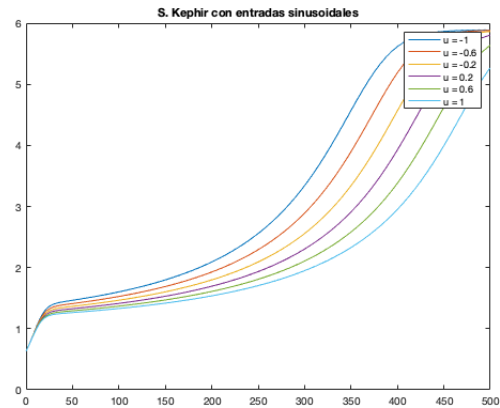


Figura 19: Entrada tipo sinusoidal

En la Figura 20 se presentan los resultados dando a $u(t)$ valores tipo pulso con periodo de 50 horas, variando la amplitud entre entre -1 y 1 .



(a) *Saccharomyces cerevisiae* vs tiempo



(b) *Schizosaccharommyces Kephir* vs tiempo

Figura 20: Poblaciones de *Saccharomyces cerevisiae* y *S. Kephir* por entradas tipo pulso con periodo 10.

4) Linealización

En esta sección se presentan el proceso y los resultados de linealizar el modelo planteado.

4.a. Curva de linealidad

En primer lugar, se realizaron diferentes simulaciones para los dos estados, la población de *S. cerevisiae* y la población de *S. Kephir*, utilizando diferentes valores de entradas. Se intentó simularlo hasta el tiempo $t = 500$, pero se observaba que no era suficiente tiempo para estabilizarse, esto se muestra en la Figura 21:

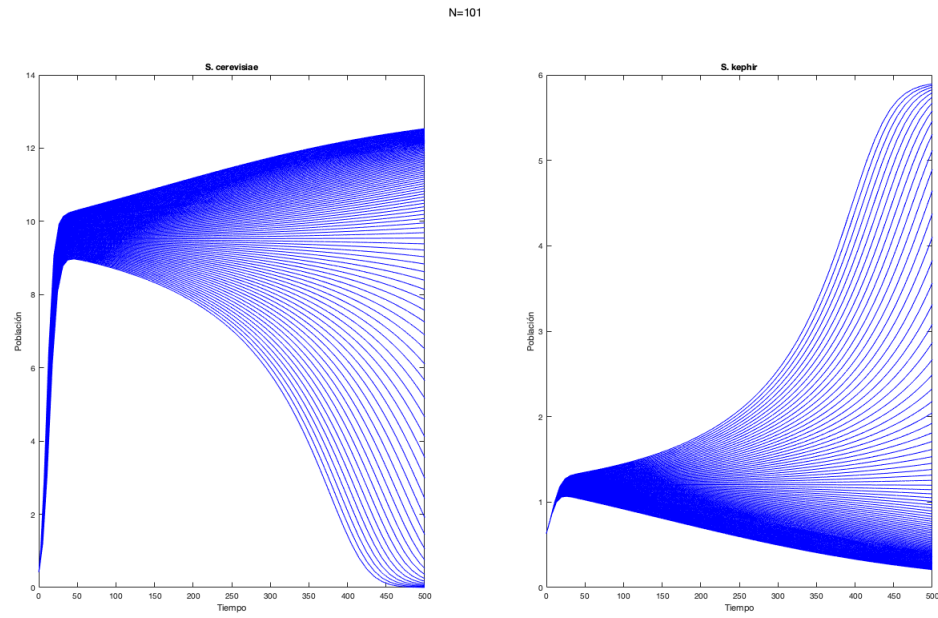


Figura 21: Simulaciones con diferentes valores de la entrada u , para $t = 1000$

Luego, se amplió el horizonte de tiempo hasta $t = 10000$, y esto se observa en la siguiente Figura 22:

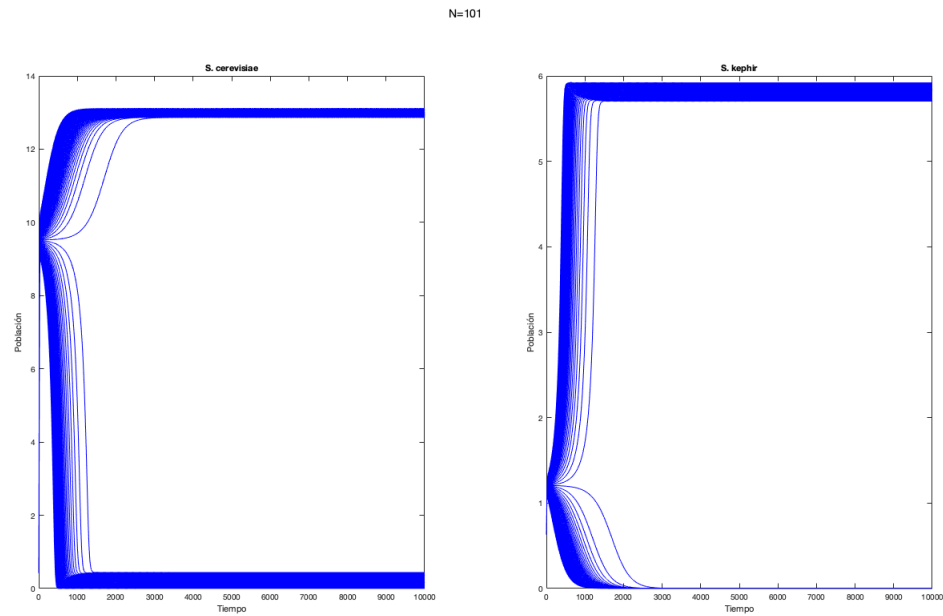


Figura 22: Simulaciones con diferentes valores de la entrada u , para $t = 10000$

Dado que se logra estabilidad, se procede a analizar la curva de linealidad, en donde se puede observar como ciertos valores de u afectan la estabilidad, esto corresponde a la Figura 23:

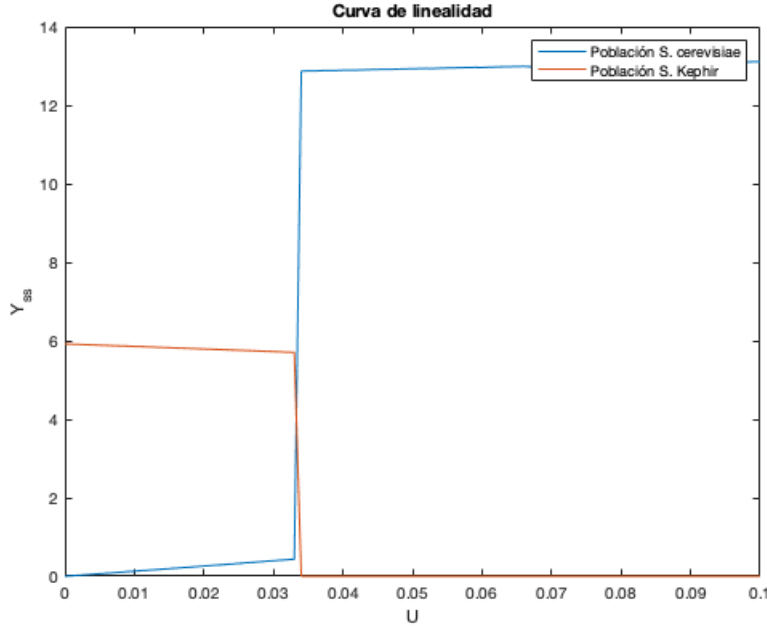


Figura 23: Curva de linealidad

De esta gráfica se puede observar un rango de linealidad en $u = [0, 0.03]$ y otro en $u = [0.04, 0.1]$ y para el propósito de este proyecto, se analizarán $u = 0.02$ y $u = 0.05$ ya que se encuentran en los rangos mencionados anteriormente.

4.b. Punto de equilibrio

El punto de equilibrio hace referencia adonde el sistema deja de cambiar. Para la coordenada en x del sistema no lineal se tiene la ecuación (19):

$$\begin{pmatrix} \frac{a-\sigma_3}{2b} & , & 0 \\ \frac{a+\sigma_3}{2b} & , & 0 \\ c + \frac{\sigma_1 - 2bcd + adn + cmn}{\sigma_2} & , & -\frac{\sigma_1 - 2bcd + adn + cmn}{2d(bd - mn)} \\ c - \frac{\sigma_1 + 2bcd - adn - cmn}{\sigma_2} & , & \frac{\sigma_1 + 2bcd - adn - cmn}{2d(bd - mn)} \end{pmatrix} \quad (19)$$

donde

$$\sigma_1 = n\sqrt{a^2d^2 - 2acdm + c^2m^2 + 4bud^2 - 4nudem}$$

$$\sigma_2 = 2(bd - mn)$$

$$\sigma_3 = \sqrt{a^2 + 4bu}$$

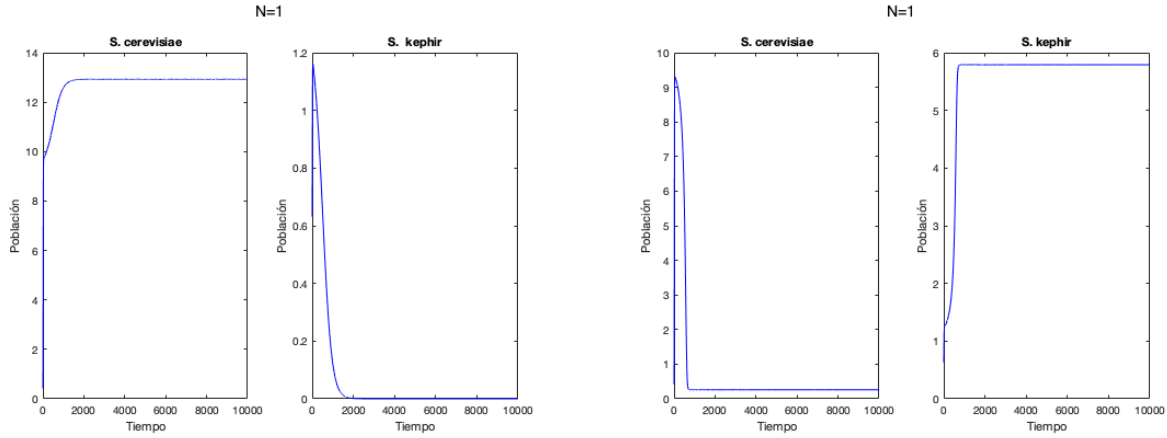
Luego, escogen los siguientes puntos de equilibrio estables:

$$P_{s1} = \left(\frac{a + \sigma_3}{2b}, 0 \right) \quad P_{s2} = \left(\frac{c + \frac{\sigma_1 - 2bcd + adn + cmn}{\sigma_2}}{n}, -\frac{\sigma_1 - 2bcd + adn + cmn}{2d(bd - mn)} \right) \quad (20)$$

Luego, se soluciona el sistema y se reemplazan los parámetros, y se seleccionan $u = 0.05$ y $u = 0.02$ de donde se tienen los siguientes punto de equilibrio:

$$P_{s1} = (12.8158, 0) \quad P_{s2} = (0.2095, 5.7898)$$

En la Figura 24 se gráfica con ambas u para verificar que converjan a esos puntos.



(a) Población de *S. cerevisiae* y *S. Kephir* con $u = 0.05$ (b) Población de *S. cerevisiae* y *S. Kephir* con $u = 0.02$

Figura 24: Comportamiento de las poblaciones al tiempo $t = 10000$ para u .

4.c. Sistema linealizado

La linealización es hacer una aproximación lineal de un modelo no lineal. Es decir, se va a convertir el sistema no lineal que describe al sistema en un sistema de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (21)$$

donde A es la matriz jacobiana, B es la matriz jacobiana según u , C es la identidad y D es un vector columna de ceros. Es decir:

$$A = \begin{pmatrix} a - 2bx - my & -mx \\ -ny & c - 2dy - nx \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para el punto P_{s1} se tiene:

$$A = \begin{pmatrix} -0.2617 & -0.7318 \\ 0 & -0.0041 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (22)$$

Para el punto P_{s2} se tiene:

$$A = \begin{pmatrix} -0.0876 & -0.03 \\ 0 & -0.0041 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (23)$$

Para comprobar la estabilidad del modelo, se obtienen los autovalores de las matrices A :

$$\lambda_{s1} = \begin{pmatrix} -0.2694 \\ -0.0050 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{s2} = \begin{pmatrix} -0.1072 \\ -0.0346 \end{pmatrix}$$

Como todos son negativos, se confirma la estabilidad para ambos puntos de equilibrio.

Luego, se introduce el componente lineal al esquema de la simulación, y este se muestra en la Figura 25:

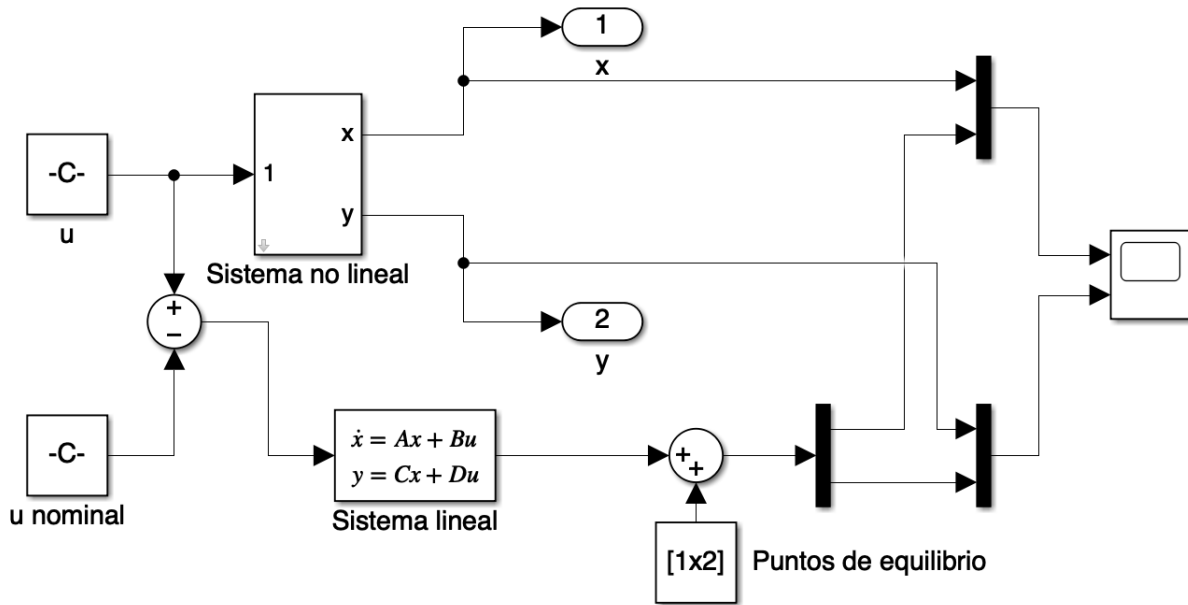


Figura 25: Sistema lineal

Luego, se comprueba que las dos simulaciones correspondan, es decir que se comporten iguales, para un valor de u dentro del rango de linealidad establecido, es decir $u = 0.05$. Estas se muestran en la Figura 26:

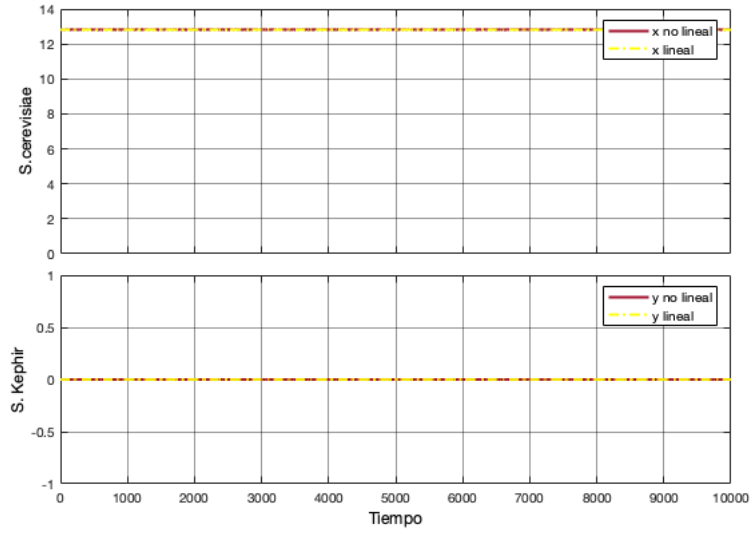


Figura 26: Sistema linealizado versus sistema no linealizado para $u = 0.05$, para el sistema lineal P_{s1}

En la Figura 27 se puede observar el comportamiento de la simulación con u dentro del otro rango de linealidad, es decir $u = 0.02$

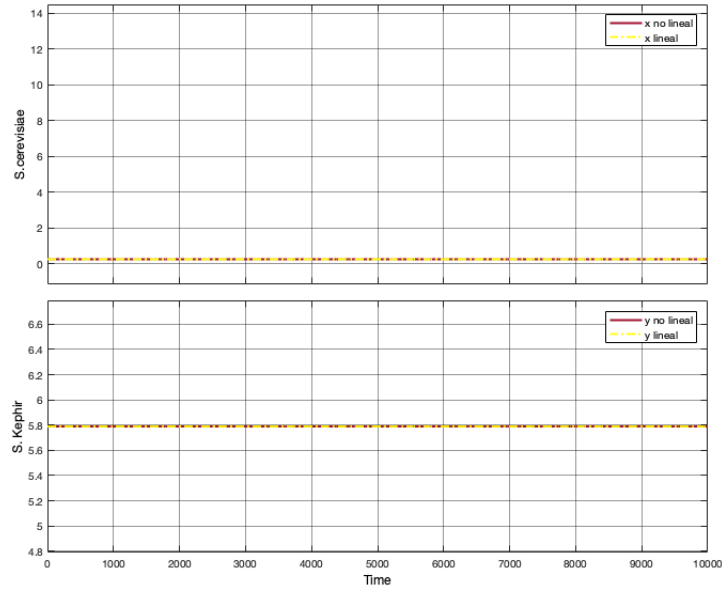


Figura 27: Sistema linealizado versus sistema no linealizado para $u = 0.02$, para el sistema lineal P_{s2}

Además, se verifica que para valores fuera de este rango, las soluciones no correspondan. Para esto se simula con $u = 1$ para el sistema lineal P_{s1} , y se muestra en la Figura 28:

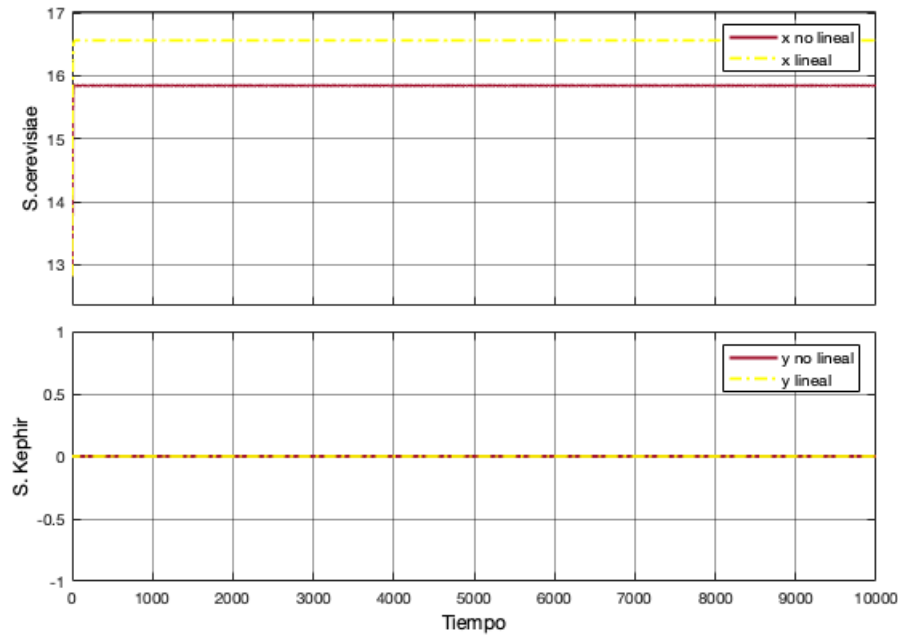


Figura 28: Sistema linealizado versus sistema no linealizado en puntos de equilibrio

En las Figuras 26 y 28 se puede ver el modelo linealizado, comparado con el modelo no lineal. Se ve que que la primera gráfica, donde se escogió un u de acuerdo al rango de linealidad trabajado, el modelo linealizar se comporta de manera muy similar al no linealizado. Sin embargo, cuando miramos la segunda gráfica, donde se trabajo con un u por fuera de $[0, 0.03]$, la linealización del sistema no es precisa sobretodo en la variable x , que es la directamente afectada por la entrada.

5) Control

5.a. Control SISO

En esta sección se muestran el proceso y los resultados del control SISO para el modelo planteado.

5.a.a Routh-Hurwitz

La función de transferencia SISO $G(S)$ si se toma sólo una entrada u y una salida (la población de *S. cerevisiae*) es:

$$G(S) = \frac{18014398509481984}{18014398509481984S + 4714749082162565} \quad (24)$$

Se lo que se tiene que el polinomio característico es:

$$P_{ch} = 18014398509481984S + 18014398509481984K + 4714749082162565$$

Luego, se usa el método de Routh-Hurwitz para hallar el intervalo en el que la constante K haga estable al sistema:

$$\begin{bmatrix} S^1 & 18014398509481984 \\ S^0 & 18014398509481984K + 4714749082162565 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Por lo que $18014398509481984K + 4714749082162565 > 0$, es decir

$$K > \frac{-4714749082162565}{18014398509481984} \approx -0.2617$$

5.a.b Implementación del control SISO

A continuación se muestra en la Figura 29 el diagrama de sistema de control SISO

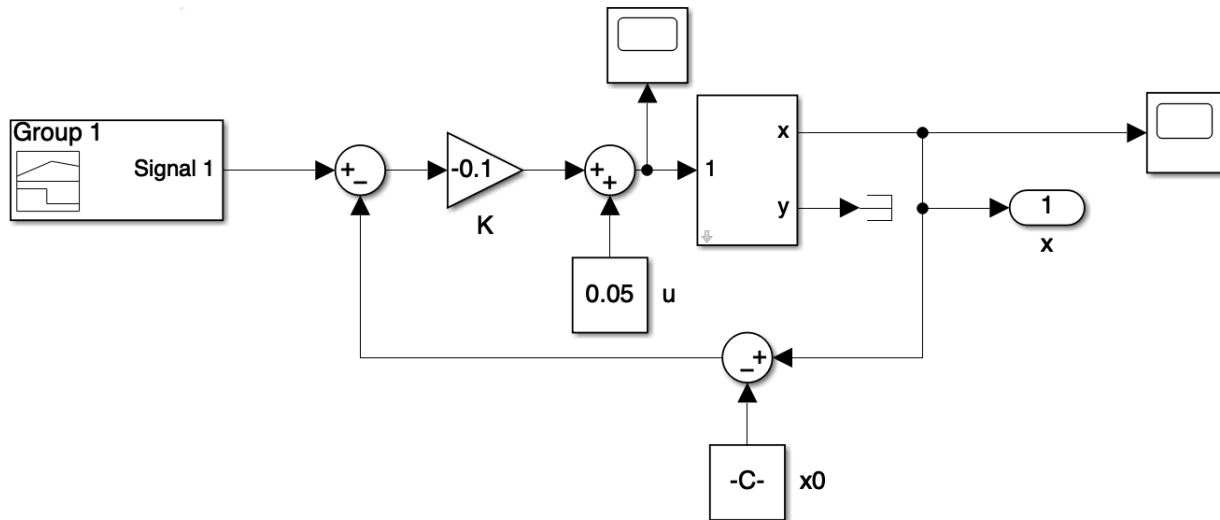


Figura 29: Implementación control SISO en SimuLink

Estamos usando control proporcional, donde hay una retroalimentación en el control que depende directamente del error, que no permite que se establezca el sistema dado cierto nivel de perturbación. Para probar que el control sea efectivo, se procede a añadir diferentes perturbaciones al sistema. En la Figura 30 se muestra el comportamiento del sistema ante una señal tipo escalón unitario.

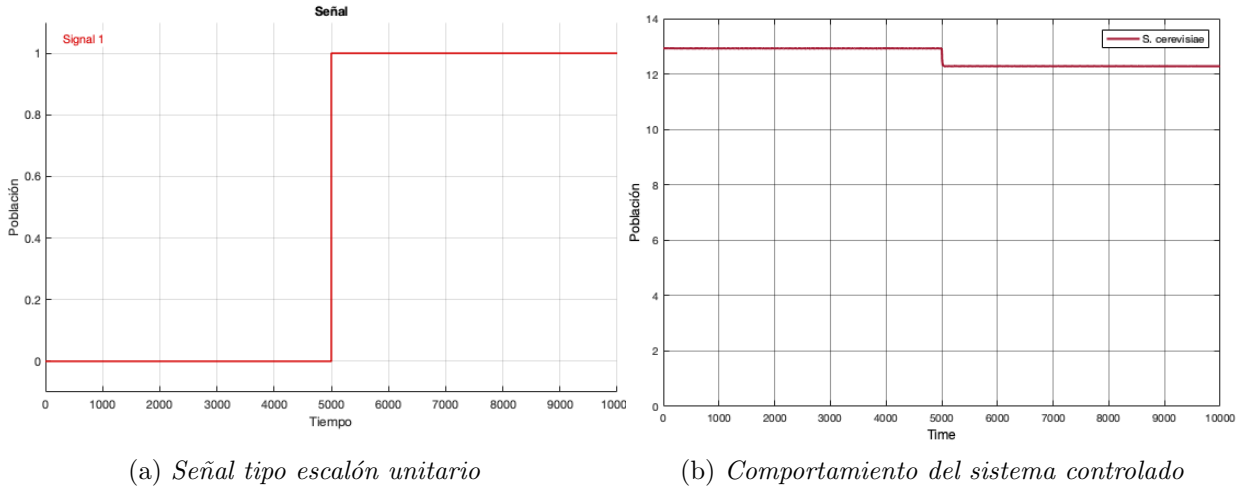


Figura 30: Comportamiento del sistema controlado ante una señal escalón unitario

En la figura 31 se muestra el comportamiento del sistema ante una señal diseñada, la cual cuenta con una pendiente de 0 hasta que el tiempo es 5000, donde pasa a tener una pendiente mayor a 0.

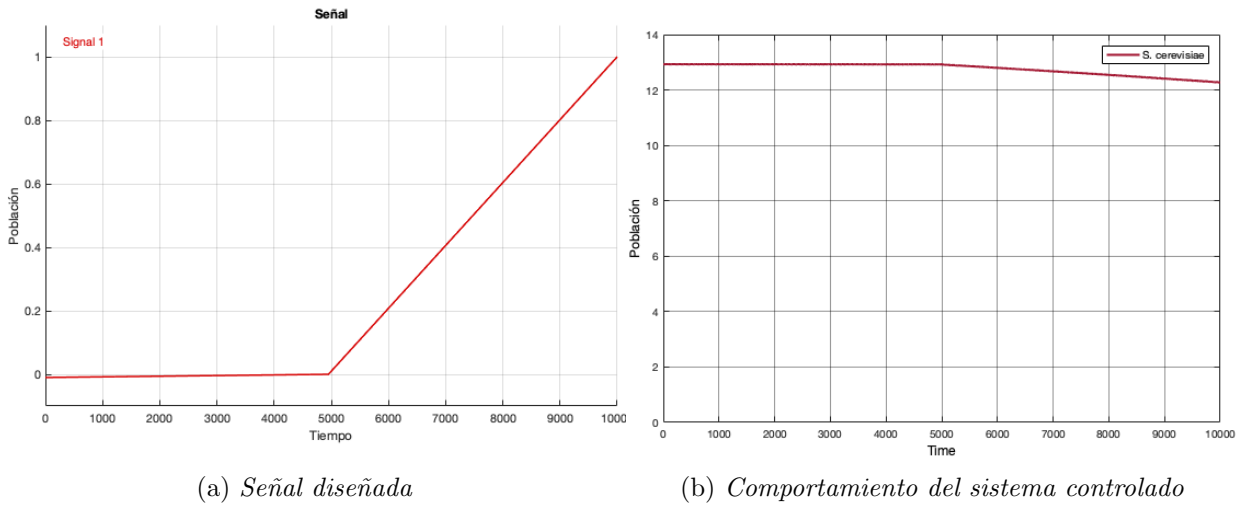


Figura 31: Comportamiento del sistema controlado ante una señal diseñado

En la Figura 32 se muestra el comportamiento del sistema ante una señal tipo pulso que comienza en $t = 4000$ y termina en $t = 6000$ con una altura de 1.

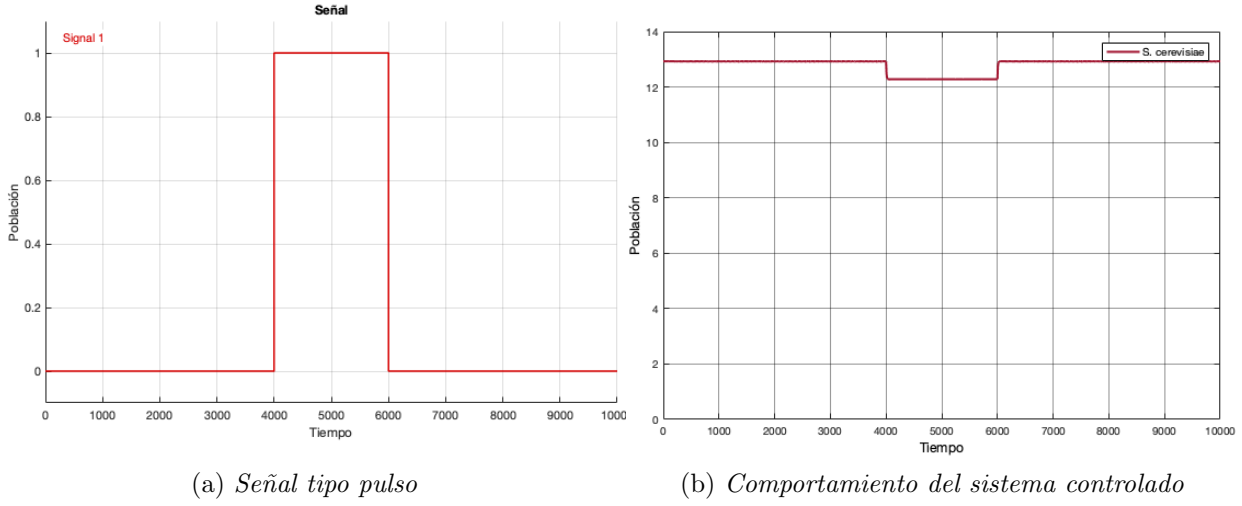


Figura 32: Comportamiento del sistema controlado ante una señal tipo pulso

5.b. Control en el espacio de estado

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cu\end{aligned}\tag{26}$$

Si se toma la entrada $u = -KX$, se tendría:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A - B * K)X \\ y &= CX\end{aligned}\tag{27}$$

De la ecuación 27, se usan los autovalores de $(A - BK)$ para controlarlo.
Se halla la matriz de controlabilidad:

$$M_c = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & -0.0876 \\ 0 & -0.0268 \end{bmatrix}\tag{28}$$

y su inversa

$$M_c^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3.2687 \\ 0 & -37.3134 \end{bmatrix}\tag{29}$$

Como la matriz de controlabilidad es invertible se tiene que el sistema es controlable.
Luego, la matriz de transformación T es:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -37.3134 \\ 1 & 2.0224 \end{bmatrix}\tag{30}$$

5.b.a Implementación del control en el espacio de estado

Se escogen ciertos autovalores cerca a los autovalores de la matriz A , y se usa la función de Matlab *place* para determinar los valores de K . Primero, se intentó usar el sistema con A expuesto en la ecuación (22). Sin embargo, se obtiene que el sistema es casi incontrolable, por lo que se procede a hacer el mismo análisis para el sistema en la ecuación (23). En la Figura 33 se muestra la configuración del sistema de control MIMO en Simulink.

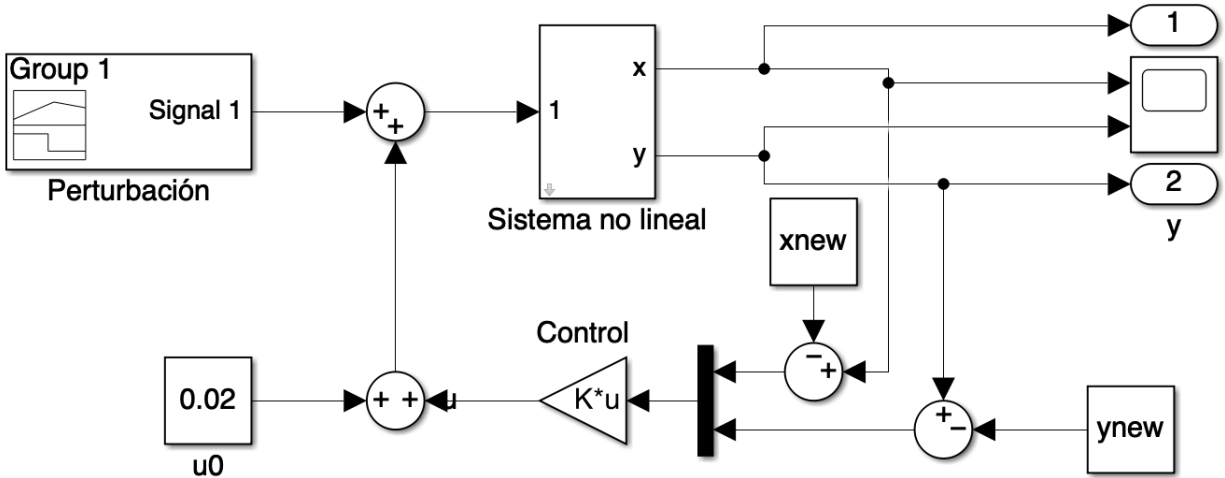
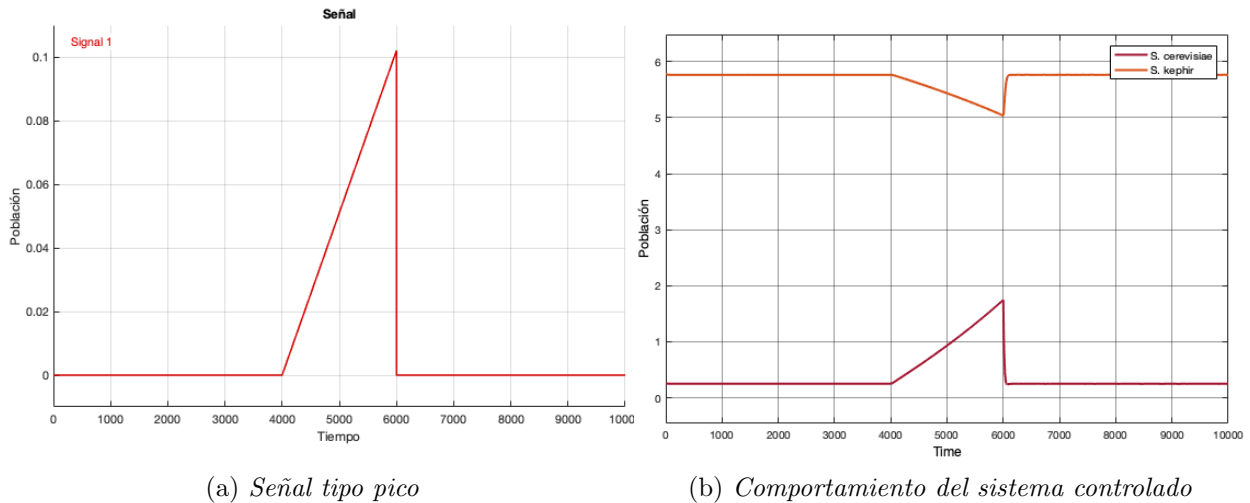


Figura 33: Implementación control MIMO en SimuLink

Para la Figura 34 se tiene una señal tipo pico con valor máximo de 0.1, y el comportamiento de las dos variables de estado del sistema a esta.

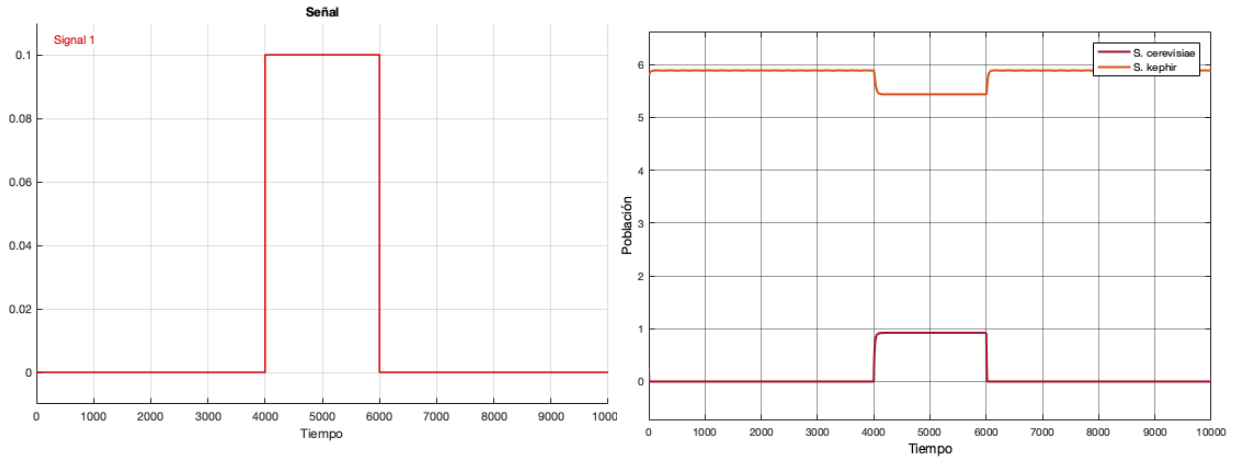


(a) Señal tipo pico

(b) Comportamiento del sistema controlado

Figura 34: Comportamiento del sistema MIMO controlado ante una señal tipo pico

Para la Figura 35 tiene una señal tipo pulso con valor máximo de 0.1, y el comportamiento de las dos variables de estado del sistema a esta.

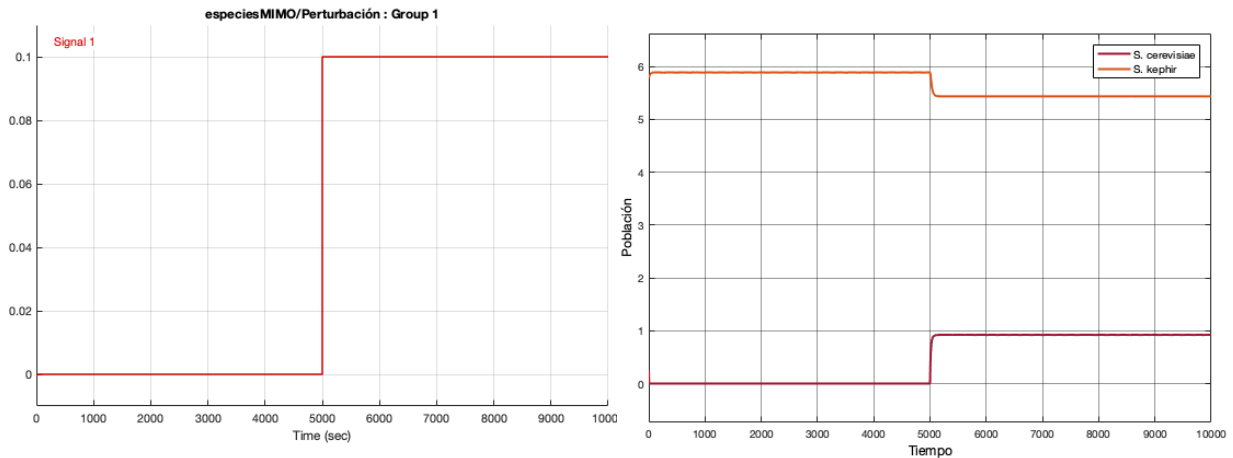


(a) Señal tipo pulso

(b) Comportamiento del sistema controlado

Figura 35: Comportamiento del sistema MIMO controlado ante una señal tipo pulso

Para la Figura 36 se tiene una señal tipo escalón con valor máximo de 0.1, y el comportamiento de las dos variables de estado del sistema a esta.



(a) Señal tipo escalón

(b) Comportamiento del sistema controlado

Figura 36: Comportamiento del sistema MIMO controlado ante una señal escalón unitario

Para la Figura 37 se tiene una señal tipo pulso con valor máximo de 1, y el comportamiento de las dos variables de estado del sistema a esta.

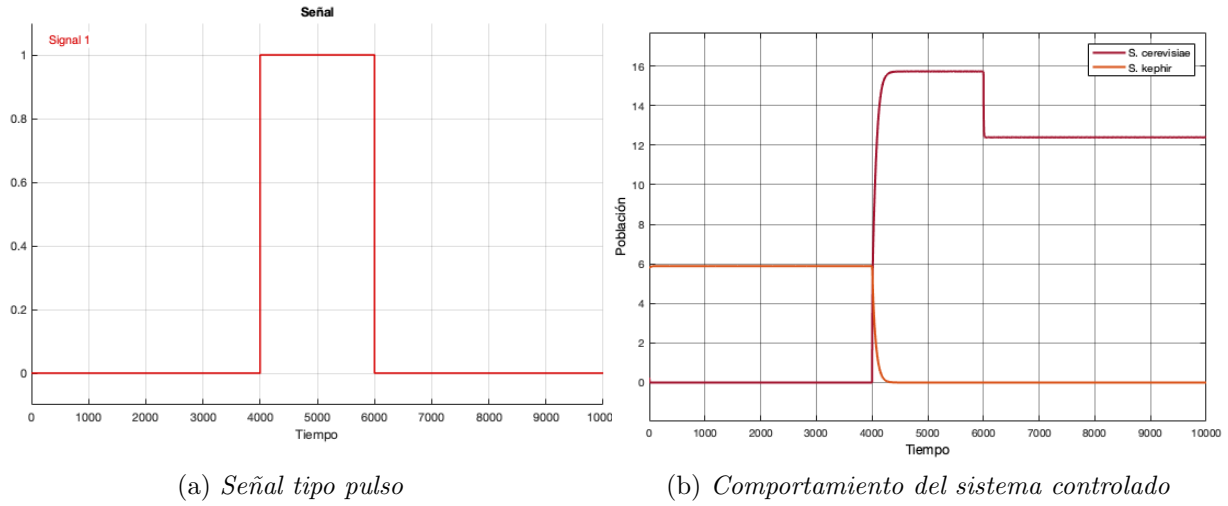


Figura 37: Comportamiento del sistema MIMO controlado ante una señal tipo pulso

5.c. Análisis de incertidumbre para el sistema de control MIMO

Se realizó el análisis de incertidumbre para el control MIMO usando el toolbox de GSUA-CSB donde se creaba una tabla con diferentes rangos para los valores nominales de los parámetros, y en la Figura 38

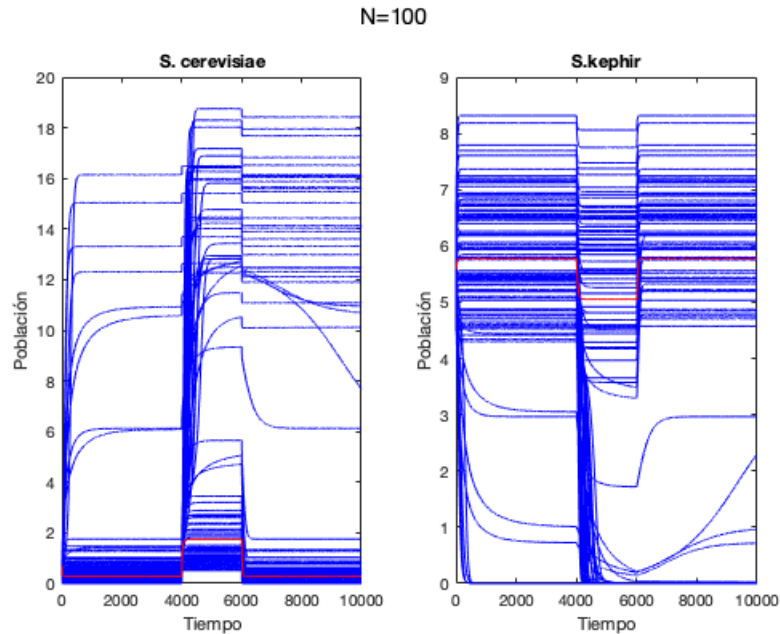


Figura 38: Análisis de incertidumbre con señal tipo pulso

En la figura 39 se muestra en análisis de incertidumbre para la variable x .

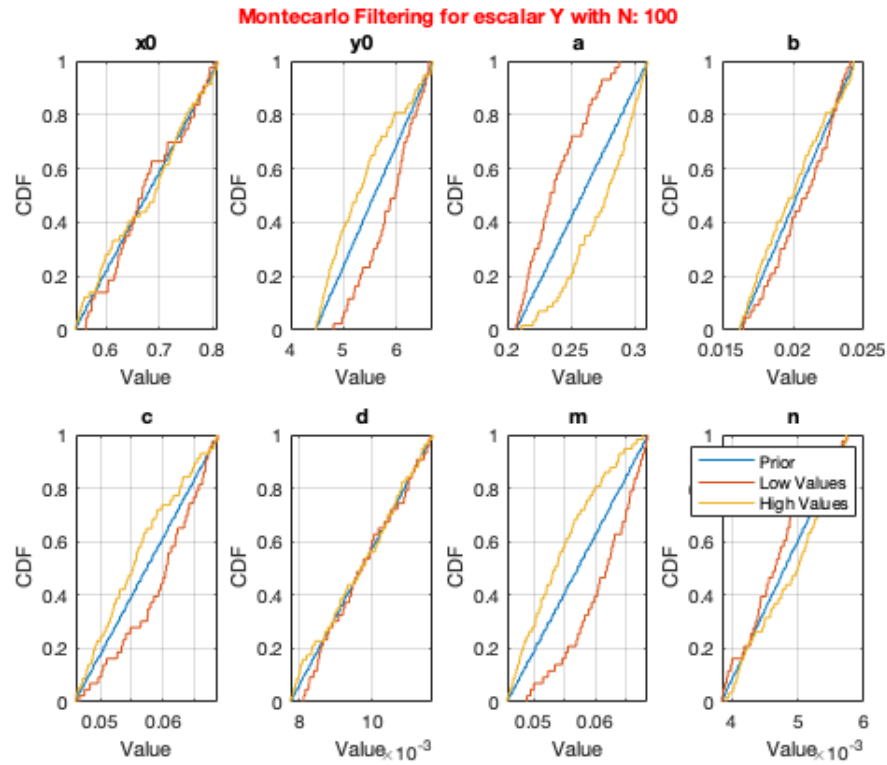


Figura 39: Filtros de montecarlo para el sistema de control MIMO con una señal tipo pulso para la población de *S. cerevisiae*

En la figura 40 se muestra en análisis de incertidumbre para la variable y .

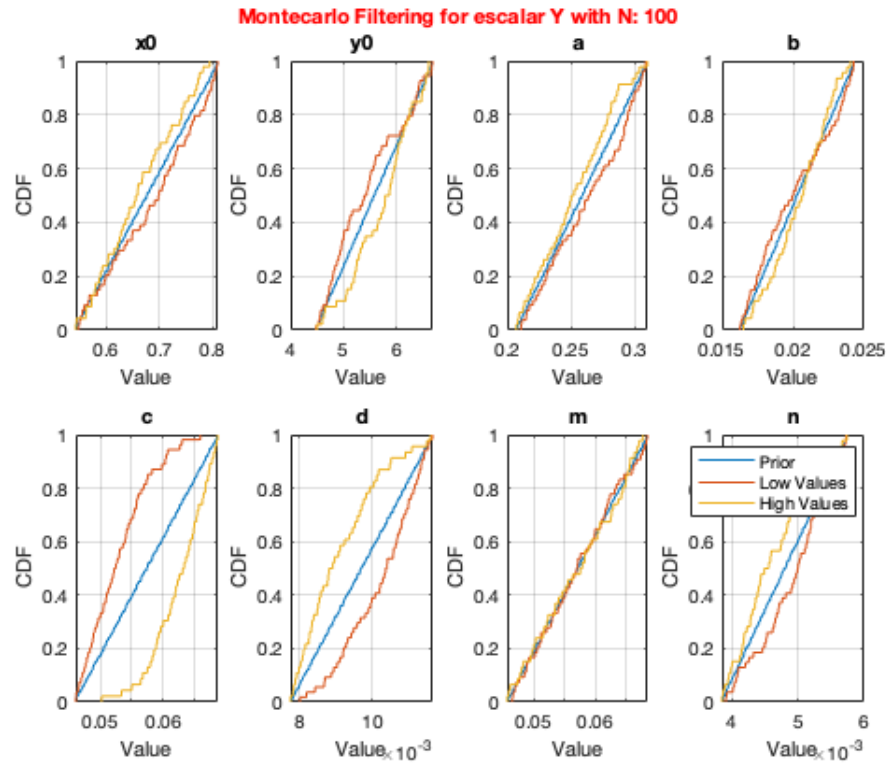


Figura 40: Filtros de montecarlo para el sistema de control MIMO con una señal tipo pulso para la población de *S. kephir*

5.d. Análisis de sensibilidad

En esta sección se presentan los resultados del análisis de sensibilidad tanto para el sistema no lineal como para el sistema de control MIMO.

5.d.a Análisis de sensibilidad para el sistema no lineal

Primero, se realiza el análisis para variación en el rango del 10%, es decir se genera la tabla:

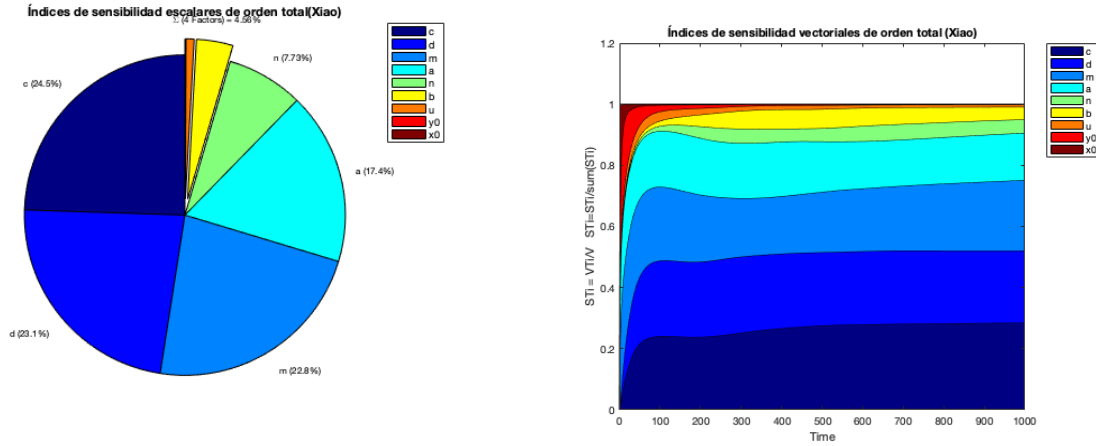
Parámetros	Rango		Nominal
a	0.2327	0.2845	0.2586
b	0.0183	0.0223	0.0203
c	0.00517	0.00631	0.0574
d	0.0087	0.0107	0.0097
m	0.0514	0.0628	0.0571
n	0.0043	0.0053	0.0048
$x0$	0.6089	0.7442	0.6765
$y0$	5.0245	6.1410	5.5828
u	0.0180	0.0220	0.0200

Cuadro 3: Rangos de los parámetros variando el 10 %

Para verificar la confiabilidad del análisis se encuentra, para $N = 500$:

$$= \frac{\sum_i S_i}{\sum_i |S_i|} = 0.5 \leq 0.65 \quad (31)$$

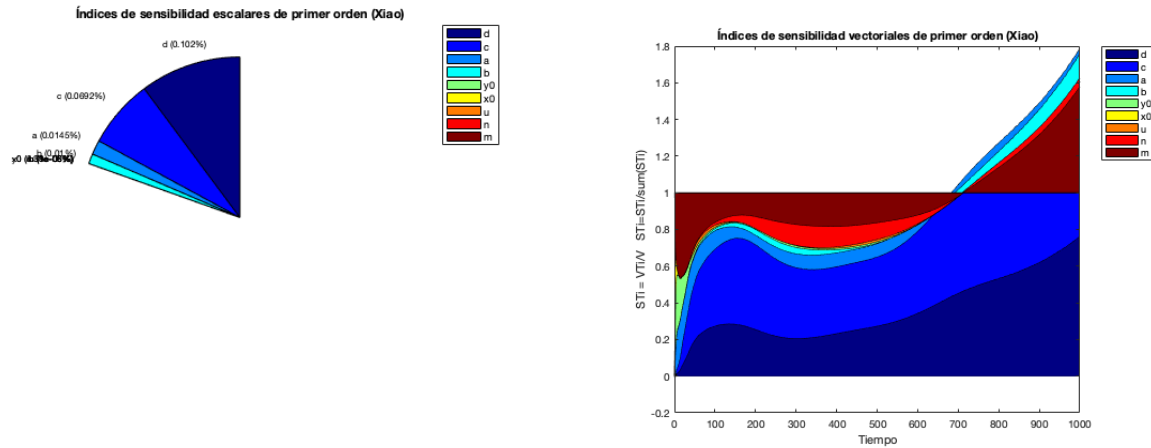
En la Figura 41 se presentan los resultado del análisis de sensibilidad de orden total, con índices de sensibilidad escalares e índices de sensibilidad vectoriales para una variación del rango del 10 %.



(a) Índices de sensibilidad escalares de orden total (b) Índices de sensibilidad vectoriales de orden total

Figura 41: Índices de sensibilidad de orden total para variación del rango del 10 %

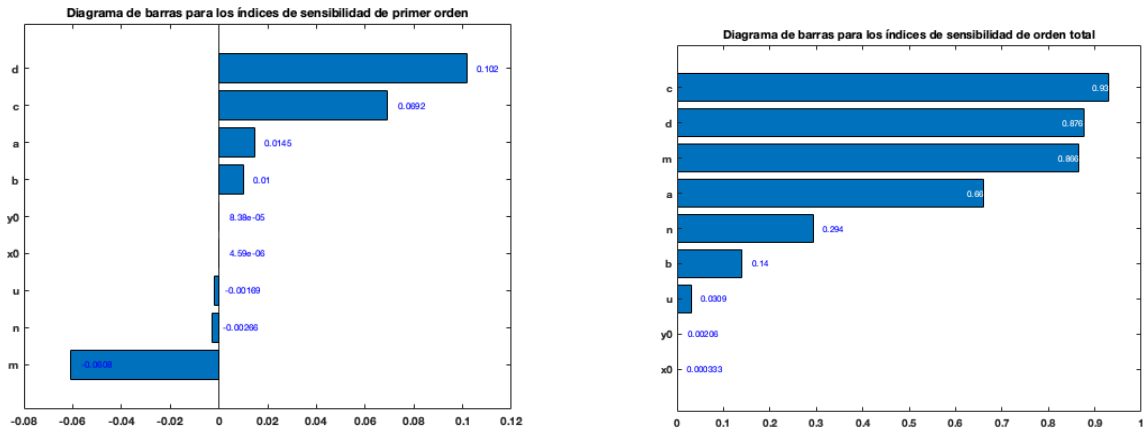
En la Figura 42 se presentan los resultado del análisis de sensibilidad de primer orden, con índices de sensibilidad escalares e índices de sensibilidad vectoriales para una variación del rango del 10 %.



(a) *Índices de sensibilidad escalares de primer orden* (b) *Índices de sensibilidad vectoriales de primer orden*

Figura 42: Índices de sensibilidad de primer orden para variación del rango del 10 %

En la Figura 43 se presentan los resultado del análisis de sensibilidad de primer orden, con índices de sensibilidad escalares e índices de sensibilidad vectoriales para una variación del rango del 10 % presentado en diagrama de barras .



(a) *Diagrama de barras de los índices de sensibilidad escalares de primer orden* (b) *Diagrama de barras de los índices de sensibilidad escalares de orden total*

Figura 43: Índices de sensibilidad para variación del rango del 10 %

Luego, se realiza el análisis para una variación del rango del 20 %.

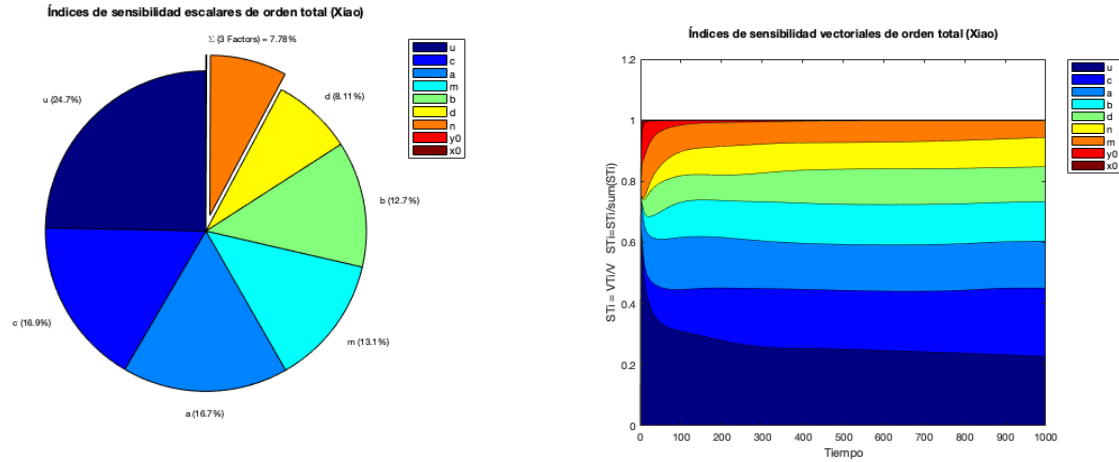
Parámetros	Rango		Nominal
a	0.2069	0.3103	0.2586
b	0.0162	0.0244	0.0203
c	0.0459	0.0689	0.0574
d	0.0078	0.0117	0.0097
m	0.0457	0.0685	0.0571
n	0.0038	0.0058	0.0048
x_0	0.5412	0.8118	0.6765
y_0	4.4662	6.6993	5.5828
u	0.0160	0.0240	0.2000

Cuadro 4: Rangos de los parámetros para el análisis de incertidumbre

Para verificar la validez del análisis, para $N = 100$ se encuentra:

$$= \frac{\sum_i S_i}{\sum_i |S_i|} = 0.9997 \geq 0.65 \quad (32)$$

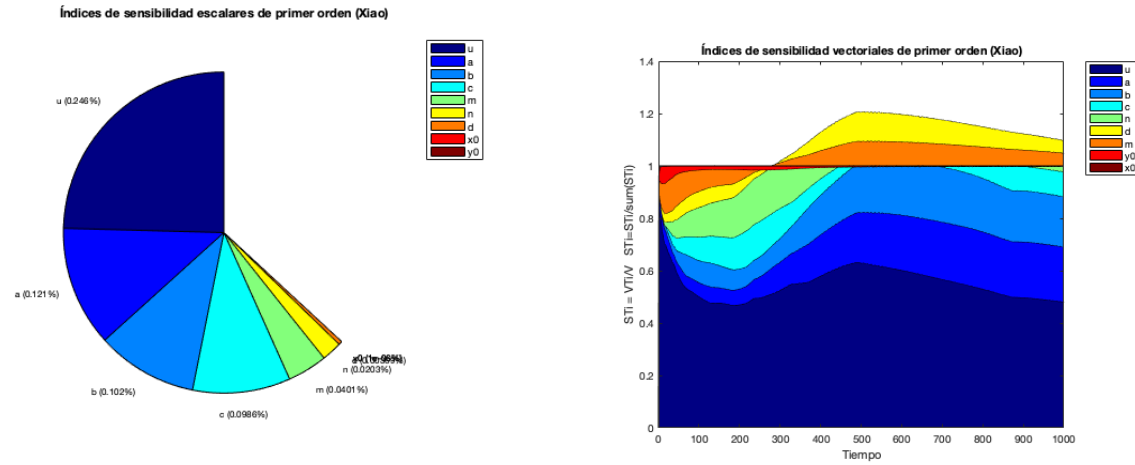
En la Figura 44 se presentan los resultado del análisis de sensibilidad de orden total, con índices de sensibilidad escalares e índices de sensibilidad vectoriales para una variación del rango del 20 %.



(a) Índices de sensibilidad escalares de orden total (b) Índices de sensibilidad vectoriales de orden total

Figura 44: Índices de sensibilidad de orden total para variación del rango del 20 %

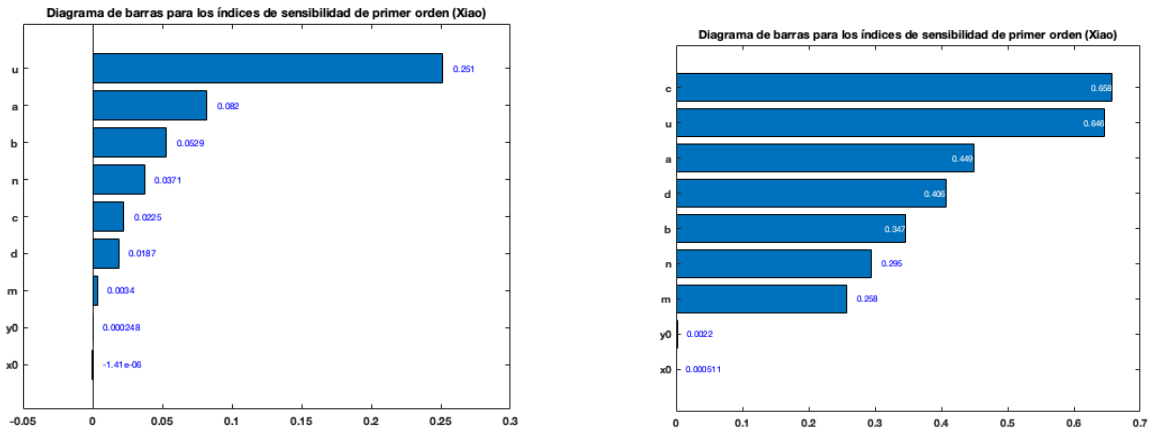
En la Figura 45 se presentan los resultado del análisis de sensibilidad de primer orden, con índices de sensibilidad escalares e índices de sensibilidad vectoriales para una variación del rango del 20 %.



(a) Índices de sensibilidad escalares de primer orden (b) Índices de sensibilidad vectoriales de primer orden

Figura 45: Índices de sensibilidad de primer orden para variación del rango del 20 %

En la Figura 46 se presentan los resultado del análisis de sensibilidad de primer orden, con índices de sensibilidad escalares e índices de sensibilidad vectoriales para una variación del rango del 20 % presentado en diagrama de barras .



(a) Diagrama de barras de los índices de sensibilidad escalares de primer orden (b) Diagrama de barras de los índices de sensibilidad escalares de orden total

Figura 46: Índices de sensibilidad para variación del rango del 20 %

5.d.b Análisis de sensibilidad para el sistema de control MIMO

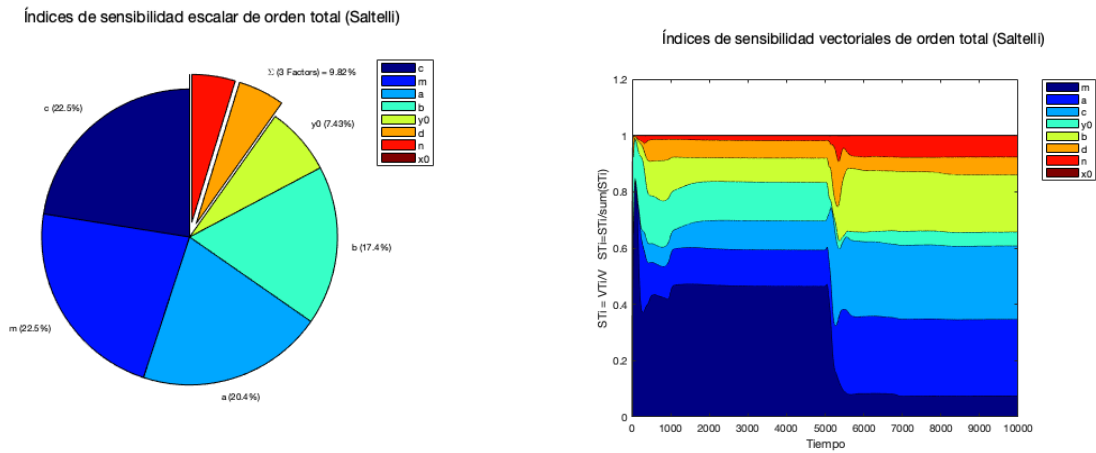
Este análisis es para la variable x , es decir, la población de *S. cerevisiae*. El parámetro m hace desaparecer a esta especie, pero cuando aumenta la población m ya no es tan relevante ya que proporcionalmente no hay gran efecto en su población. Para $N = 100$, se halla el

índice de confiabilidad que ser mayor a 0.95:

$$= \frac{\sum_i S_i}{\sum_i |S_i|} = 0.8487 \leq 0.95 \quad (33)$$

Como es menor a umbral requerido, significa que los resultados no son muy confiables, pero por cuestión de computación no se incrementa la N .

En la Figura 47 se presentan los resultado del análisis de sensibilidad de orden total, con índices de sensibilidad escalares e índices de sensibilidad vectoriales para una variación del rango del 20 %.

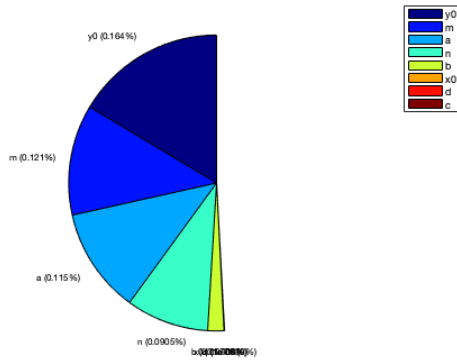


(a) Índices de sensibilidad escalares de orden total (b) Índices de sensibilidad vectoriales de orden total

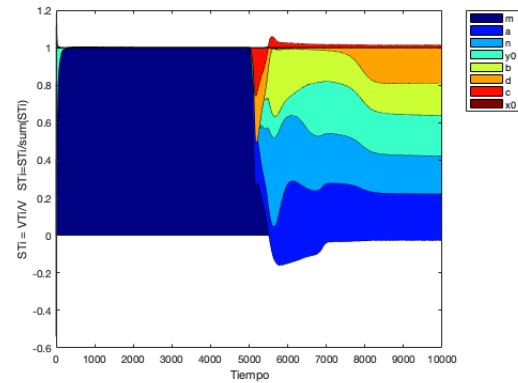
Figura 47: Índices de sensibilidad de orden total para variación del rango del 20 %

En la Figura 48 se presentan los resultado del análisis de sensibilidad de primer orden, con índices de sensibilidad escalares e índices de sensibilidad vectoriales para una variación del rango del 20 %.

Índices de sensibilidad escalar de primer orden (Saltelli)



Índices de sensibilidad vectoriales de primer orden (Saltelli)

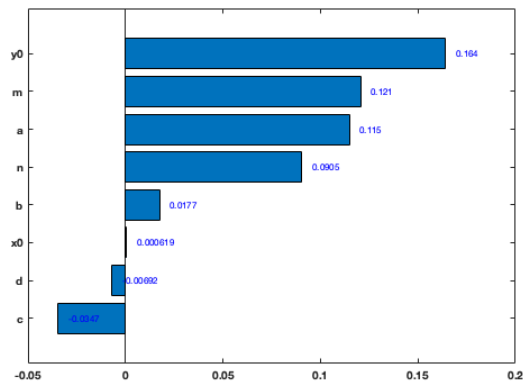


(a) Índices de sensibilidad escalares de primer orden (b) Índices de sensibilidad vectoriales de primer orden

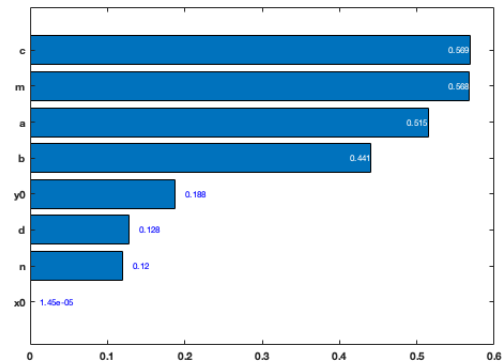
Figura 48: Índices de sensibilidad de primer orden para variación del rango del 20 %

En la Figura 49 se presentan los resultado del análisis de sensibilidad de primer orden, con índices de sensibilidad escalares e índices de sensibilidad vectoriales para una variación del rango del 20 % presentado en diagrama de barras .

Índices de sensibilidad escalar de primer orden (Saltelli)



Índices de sensibilidad escalar de orden total (Saltelli)



(a) Diagrama de barras de los índices de sensibilidad escalares de primer orden (b) Diagrama de barras de los índices de sensibilidad escalares de orden total

Figura 49: Índices de sensibilidad para variación del rango del 20 %

6) Discusión

6.a. Análisis de incertidumbre

En la Figura 9 se puede observar que el parámetro que más afecta a la población de *S. cerevisiae* es a , tasa per capita de cambio en ausencia de la especie *S. Kephir*, lo cual es esperable ya que comparado con la tasa de la población y es grande e impulsa a *S. cerevisiae* a crecer rápido en un principio. Por otro lado, es coherente que el parámetro c , que es el crecimiento de la otra especie, también lo afecte en gran medida ya que estas están en competencia. El parámetro m por otro lado parece no afectar mucho al modelo, lo que parece extraño porque este parámetro modela la competencia en sí. Sin embargo, el resultado se puede explicar ya que 50 unidades de tiempo aún no es observable el efecto de la *S. Kephir* en *S. cerevisiae*, como se ve en la Figura 6, donde *S. Kephir* crece considerablemente pero luego de aproximadamente 400 horas.

En la Figura 10 se puede ver que la variable y , correspondiente a *S. Kephir*, es considerablemente afectada por varias variables. Primero y_0 , el valor inicial de la población, que puede afectarlo ya que la variable c que está relacionada con la tasa de crecimiento de la población de *S. Kephir* es considerablemente pequeña, lo que causa que cualquier variación en la población inicial sea importante. La variable a también afecta el comportamiento de la segunda especie, lo cual se explica ya que esta variable esta asociada con el crecimiento de la otra especie de hongo, que la afecta porque aunque el parámetro n es pequeño comparado con su equivalente para la población x , esta ultima crece considerablemente más. Otra variable relevante es c , por su significad biológico que fue explicado previamente. Por último n que aunque no es un valor muy grande, como la población de *S. cerevisiae* crece considerablemente más rápido hace que este parámetro afecte la población y .

6.b. Comportamiento ante diferentes entradas

6.b.a Entradas constantes

Para entradas constantes se observa que cuando la constante es positiva afecta positivamente a la variable x y negativamente a la variable y , lo cuál es coherente ya que estas están en competencia. Lo mismo cuando la constante *Schizosaccharommyces Kephir* es negativa, esta afecta negativamente a la variable x y positivamente a la variable y . La magnitud de esta entrada decide que tanto se desvía este comportamiento del comportamiento sin entrada.

Cuando la entrada es constante negativa, podemos observar que la caída de la variable x es mucho más rápida que la del sistema sin ninguna entrada. Lo anterior se debe a que la entrada $u(t)$ negativa afecta solo a la población de *S. cerevisiae*, esta entrada permite que la diferencia en la velocidad de crecimiento de las poblaciones no sea tan pronunciada y que la extinción de la población *S. cerevisiae* sea más rápida.

Por otra parte cuando la entrada es positiva, ocurre lo contrario el decrecimiento de la población de *S. cerevisiae* se da mucho más lento y a la otra población de levadura, *S. Kephir*, le cuesta mucho más tiempo superar a x e incluso no lo logra en el horizonte de tiempo planteado para la simulación.

6.b.b Entradas tipo escalón

Al implementar un retraso en las tasas de ingreso o egreso poblacional, entradas tipo escalón, se da un comportamiento similar al de las entradas tipo constante, lo cual se esperaba según las hipótesis. Es decir, hasta el tiempo del escalón, $t = 100$ horas, el comportamiento es igual al original mostrado en la Figura 6, y desde $t = 100$ horas se presenta la misma afectación descrita anteriormente. Esto se puede observar en la Figura 15 para el caso de valores positivos y en la Figura 14 para los valores negativos.

6.b.c Entradas tipo pulso

Al implementar entradas de tipo pulso se muestra el comportamiento esperado, es decir, la población de la especie x crece y se tarda cierto tiempo en volver a retomar su curva sin entrada, y el comportamiento de la especie y es recíproco, es decir decrece, ya que tiene mayor competencia. En los períodos que se usaron, es decir 50 y 10, no hubo suficiente tiempo para retomar el comportamiento de la curva. Como sin entradas se tenía que en el tiempo $t = 500$ se extinguía la especie x y permanecía la especie y , aquí esto cambia y pasa el caso contrario.

6.b.d Entradas tipo sinusoidal

Al implementar entradas de tipo seno al sistema se había planteado la hipótesis de que el sistema oscilaría. A largo plazo, se esperaba que el sistema conservara su comportamiento, es decir que una especie se extinguiera (la especie x), y la otra especie sobreviviera (la especie y), lo cuál se cumplió para todas las entradas tipo seno. El efecto de estas se ve a menor escala donde las poblaciones oscilan según la amplitud y período, pero esto no tiene un gran efecto sobre el sistema.

6.c. Linealización

6.c.a Curva de linealidad

En la Figura 21 se observan las gráficas de las dos especie con los parámetros nominales descritos en el cuadro 2. Con diferentes valores para la entrada u , ambas simulaciones parecen tener una bifurcación, pero para un tiempo de 500 horas no es posible determinar si la poblaciones convergen a dos puntos distintos, o simplemente divergen. Sin embargo, en la Figura 22 con un horizonte de tiempo más amplio, podemos observar más claramente que ambas poblaciones efectivamente logran estabilidad en dos puntos distintos dependiendo de la u .

Comprobada la estabilidad, se observa en la Figura 23 que la u tiene rango de linealidad en el intervalo $[0, 03]$ a que en este punto se observa un cambio significativo y muy rápido con respecto al eje y .

6.c.b Punto de equilibrio

Se observa que el punto de equilibrio encontrado por la resolución del sistema de ecuaciones en la sección 4.2, concuerda con P_3 encontrado según el análisis previo de la sección 2.4, dicho punto tiene las siguientes coordenadas :

$$P = \left(-\frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4bu}}{2b}, 0 \right)$$

Reemplazando los valores de a, b y u por los nominales utilizados, se encuentra que este punto es $P = (12.8158, 0)$, el mismo encontrado en la Figura 4.2.

En la Figura 24 se observa que ambas poblaciones convergen al punto de equilibrio encontrado.

6.c.c Sistema linealizado

Se encuentra el sistema lineal por medio de la matriz jacobiana del modelo y por medio de *linmod*, y se llegó a lo mismo. Al encontrar los autovalores de la matriz A se comprobó que el sistema es estable. Además, se observa que cuando se simula el sistema no lineal con puntos iniciales en los puntos de equilibrio y se compara con el modelo linealizado, se tiene el mismo resultado.

6.d. Control

Se utilizan los autovalores de la matriz jacobiana para analizar un modelo de control SISO, con el que se halla el valor de K para el control con el método de Routh-Hurwitz. Una vez implementado el modelos de control se procede a observar el comportamiento de este con diferentes señales. En los tres casos implementado se puede evidenciar como la señal afecta al sistema, sin embargo no logra desestabilizarlo. La perturbación que se puede observar en el sistema afectado con las distintas señales, es decir cuando el sistema deja su punto inicial y no lo recupera, se debe a que el control implementado es proporcional, por lo que en estos casos, se podría implementar una acción integral para que vuelva el sistema al punto inicial. Esto significa que se podría ejecutar un control tipo PID.

Para implementar el modelo de control MIMO, primero hallamos la matriz de controlabilidad y su inversa para comprobar que es sistema es controlable. Luego se utiliza la función *place* para determinar los valores de K . Al igual que para el control SISO, se implementa su comportamiento con distintas señales, y ocurre lo mismo que sucede en el SISO, se observa una perturbación que no logra desestabilizar al sistema, pero es observable.

Para el análisis de incertidumbre realizado sobre este control con una señal tipo pulso, se puede ver que es muy similar al realizado sobre el modelo original(sin linealizar), esto se debe a que a pesar de que la señal afecta un poco al modelo no logra desestabilizarlo, por lo tanto los parámetros siguen un comportamiento muy similar.

6.e. Análisis de sensibilidad

6.e.a Sistema no lineal

En el análisis de sensibilidad de orden total para un rango de variación del 10 %, se puede observar que el comportamiento de los parámetros durante de toda la simulación es relativamente constante. Sin embargo, este análisis no es muy confiable dado que su índice de confiabilidad no es mayor a 95 %. Podemos ver en los índices de sensibilidad escalares que los parámetros más sensibles son a, c, d, m lo cual coincide con los resultado del análisis de incertidumbre. Por otra parte con una variación del 20 %, u que anteriormente tenía un porcentaje de sensibilidad muy bajo, pasa a ser el parámetro más sensible lo cual se puede dar ya que al ser el rango más amplio y llega al punto de bifurcación donde cambia de puntos de equilibrio.

6.e.b Sistema de control MIMO

Para el análisis de sensibilidad con un variación del 20 % se puede observar que durante el tiempo los parámetros no se comportan tan constantes como en el modelo no lineal. Sin embargo, los resultados de los índices escalares son muy similares, lo que quiere decir que el comportamiento de los parámetros con el modelo de control MIMO sí se asemeja al comportamiento original. Similarmente al caso del sistema no lineal, el modelo es muy sensible al valor de la entrada u , debido a que para ciertos valores se llega al punto de bifurcación donde el sistema cambia de puntos de equilibrio, lo cual el comportamiento drásticamente.

Referencias

- Lang, Jennifer M, & Benbow, M Eric. 2013. Species interactions and competition. *Nature Education Knowledge*, **4**(4), 8.
- Lotka, Alfred J. 1920. Analytical note on certain rhythmic relations in organic systems. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **6**(7), 410–415.
- Navas Ureña, Juan. 2002. *Laboratorio de modelos matemáticos en biología*.
- Rojas Díaz, Daniel, & Vélez Sánchez, Carlos Mario. 2019. *GSUA-CSB*.
- Volterra, Vito. 1939. The general equations of biological strife in the case of historical actions. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, **6**(1), 4–10.