Examen 3

Luisa Toro Villegas
Universidad EAFIT
Medellín, Colombia
ltorov@eafit.edu.co

July 29, 2022

1. 1.25 puntos. Demostrar que si el usuario es neutral frente al riesgo, entonces $u(x)$ es una función tanto convexa como concáva.

   Dem. [1]

   Sea $L = r_1, r_2, ..., r_N; p_1, p_2, ..., p_N$ una lotería cualquier de L^* , su esperanza $\bar{r} = E(l)$ sería:

$$\bar{r} = E(l) = \sum_{k=1}^{N} p_k * r_k,$$

   $E(L) = K$ sii

$$u(K) = \sum_{k=1}^{N} p_k * u(r_k),$$

   Luego,

$$E(u(l)) = u(K) = \sum_{k=1}^{N} p_k * u(r_k) = u(\sum_{k=1}^{N} p_k * r_k),$$

   Así, se puede considerar a u como una línea recta, ya que $r_1, r_2, ..., r_N; p_1, p_2, ..., p_N$ son arbitrarias.

   Por otro lado, u es estrictamente creciente en virtud del axioma de no saciedad, es decir: Dadas dos recompensas r_1 y r_2, tales que r_1¿ r_2, el decisor siempre preferirá r_1 a r_2. .

   Como u es una línea recta, es decir, $u = a * x + b, a > 0$, entonces

$$u(\bar{r}) = u(E(l)) = \sum_{k=1}^{N} p_k * u(r_k)$$

   y

$$K = \bar{r}$$

Por definición de convexidad, u es convexa cuando $E(U(l)) \geq U(E(l))$ (ya que es una combinación convexa, la suma de las probabilidades es igual a 1, es decir, es suma convexa), y por definición de concavidad, $E(U(l)) \leq U(E(l))$. Para que u sea neutral al riesgo se necesita tener convexidad y concavidad, es decir $E(U(l)) = U(E(l))$. Así, u es neutral al riesgo.

Luego, se considera la prima del riesgo, es decir

$$PR(L) = E(L) - E(U(L))$$

En el caso de u $PR(L) = 0$, es decir el decisor es neutro al riesgo.

2. 1.25 puntos. Aaron y Casia son dos vendedores de fresas. Aaron cree que el precio del kilo de fresas de Casia es una variable aleatoria continua uniforme que puede tomar valores entre US\$3 y US\$5. Gracias a los históricos, sabemos que si Aaron cobra un precio de p_A y Casia cobra un precio p_C, Aaron venderá $8 + 4\,(p_C - p_A)$ kilos de fresas. Como a Aaron el kilo de fresa le cuesta US\$1, está pensando en cobrar de US\$2 a US\$6 por kilo.

   Paso 0: Se formula la tabla de recompensas.

	3	4	5
2	12	16	20
3	16	24	32
4	12	24	36
5	0	16	32
6	-20	0	20

   (a) Usando el criterio maximin, determinar el precio de Aaron.

   Paso 1: Se hallan los valores mínimos para cada alternativa.

	Valor mínimo
2	12
3	16
4	12
5	0
6	-20

   Paso 2: Se hallan el valor máximo de los mínimos, y esa será .

	Valor mínimo
2	12
3	16
4	12
5	0
6	-20

   $\therefore$ Se escoge la alternativa de 3 pesos.

(b) Usando el criterio de Laplace, determinar el precio de Aaron.

Paso 1: Se determina la probabilidad para cada estado, la cual en el problema dado es 1/3.

Paso 2: Se encuentra el valor esperado.

$$VE_i = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} V_{ij}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{VE}_1 &= \tfrac{1}{3}(12+16+20) = 16\\
\mathrm{VE}_2 &= \tfrac{1}{3}(16+24+32) = 24\\
\mathrm{VE}_3 &= \tfrac{1}{3}(12+24+36) = 24\\
\mathrm{VE}_4 &= \tfrac{1}{3}(0+16+32) = 16\\
\mathrm{VE}_5 &= \tfrac{1}{3}(-20+0+20) = 0
\end{aligned}$$

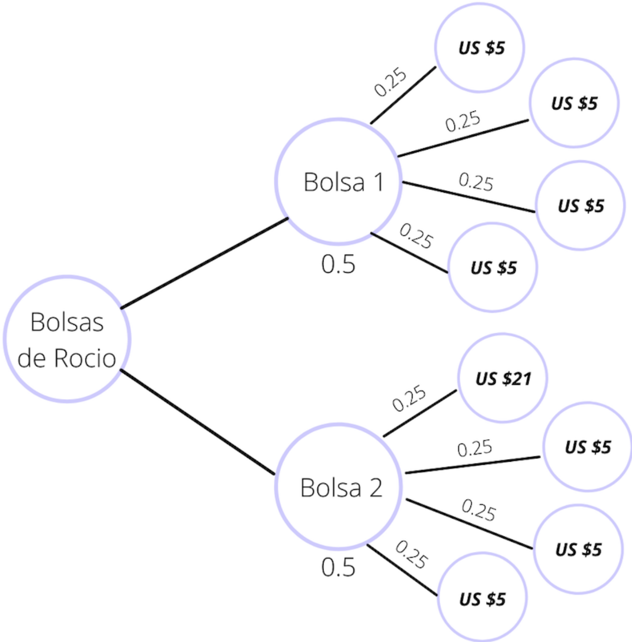
	Valor esperado
2	16
3	24
4	24
5	16
6	0

$\therefore$ Como el criterio deseado es maximizar la utilidad del negocio de fresas, se buscan aquellas alternativas que ofrezcan el mayor valor esperado, así se escoge cobrar 3 o 4 pesos.

3. 1.25 puntos. Rocio tiene dos bolsas, una roja y otra azul. Una de ellas contiene cuatro vales de US\$5, la otra contiene un vale de US\$21 y tres de US\$5. Podemos escoger la bolsa que queramos y nos quedamos con los vales que hayan en ella. Antes de decidirnos, podemos pagarle a Rocio US\$4 para que saque un vale al azar (cada uno de los ocho vales tiene igual probabilidad de ser seleccionado) y que nos diga su valor antes de retornarlo a la bolsa de donde lo sacó. Por ejemplo, Rocio nos puede decir que sacó un vale de US\$5 de la bolsa azul.

   Sea la bolsa 1 la que contiene los cuatro vales de US\$5 y la bolsa 2 la que contiene un vale de US\$21 y tres de US\$5.

   El grafo a continuación muestra el problema inicial:



(a) Hallar las probabilidades a priori (no condicional) y posteriori (condicional) para el problema.

Probabilidades a priori :

i. Probabilidad de sacar la bolsa 1: $P(b = 1) = 1/2 = 0.5$

ii. Probabilidad de sacar la bolsa 2: $P(b = 2) = 1/2 = 0.5$

iii. Probabilidad de sacar un vale de $US\$5$: $P(\$5) = 7/8 = 0.875$

iv. Probabilidad de sacar un vale de $US\$21$: $P(\$21) = 1/8 = 0.125$

Probabilidades a posteriori :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

i. Probabilidad de sacar la bolsa 1 dado que sacó un vale de $US\$5$:

$$P(b = 1|\$5) = \frac{P(1 \cap \$5)}{P(\$5)} = \frac{4(\frac{1}{8})}{\frac{7}{8}} = \frac{4}{7} = 0.5714$$

ii. Probabilidad de sacar la bolsa 1 dado que sacó un vale de $US\$21$:

$$P(b = 1|\$5) = \frac{0}{P(\$21)} = \frac{0}{\frac{1}{8}} = 0$$

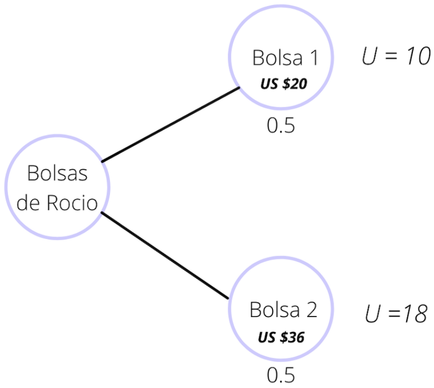
iii. Probabilidad de sacar la bolsa 2 dado que sacó un vale de $US\$5$:

$$P(b = 2|\$5) = \frac{P(2 \cap \$5)}{P(\$5)} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{7}{8}} = \frac{3}{7} = 0.4285$$

iv. Probabilidad de sacar la bolsa 1 dado que sacó un vale de $US\$21$:
$P = 1$

(b) Dibujar el árbol de decisiones, indicando las recompensas en cada rama terminal, las probabilidades en cada rama de un nodo de evento, e indicar en el árbol la secuencia óptima de decisiones. En caso de empate en un nodo de decisión, escoja libremente la rama que desee.

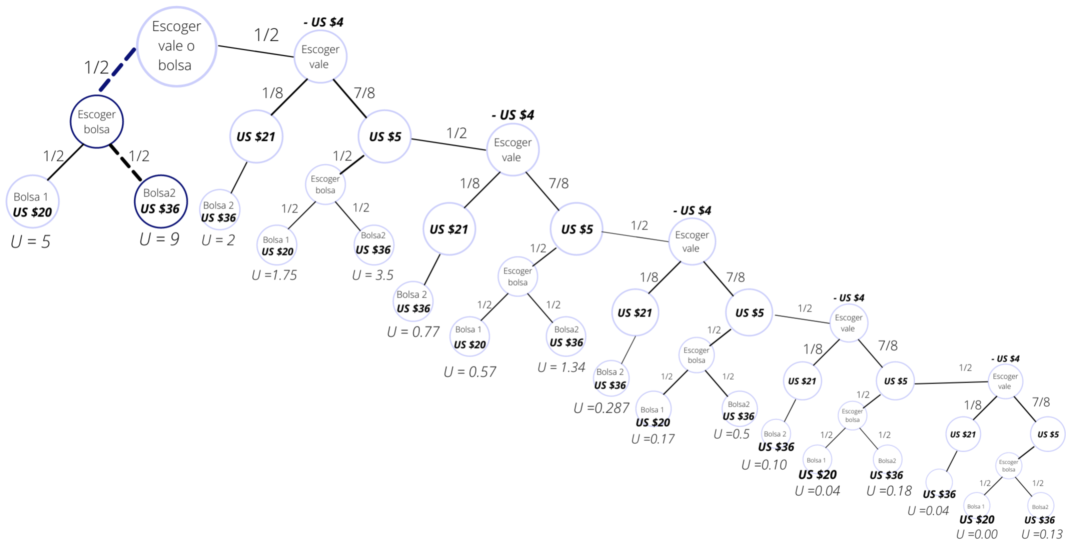
Se muestra el árbol *a priori* del problema planteado:



Para realizar el árbol de decisiones, se toman los siguientes supuestos:

- La probabilidad de sacar de cierta bolsa, la bolsa 1 o bolsa 2, son de P(b) = 1/2.
- Las probabilidades de sacar de una bolsa o de pagar vale son de P(b) = 1/2.
- Si cuando Rocio saca vale, saca el de $US\$21$, se escoge esa bolsa.
- Se pueden pagar vales hasta que se llega a $utilidad = 0$.

Se muestra el árbol *a posteriori*, con la secuencia óptima de decisiones marcada con azul oscuro.



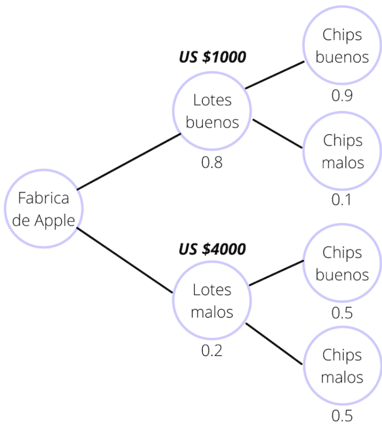
(c) ¿Cuánto es lo máximo que estamos dispuestos a pagarle a Rocio para que saque un vale?

Lo máximo sería 5 vales, es decir $US\$20$, ya que a partir de ahí la utilidad sería negativa (habrían pérdidas).

4. 1.25 puntos. Apple fabrica lotes de diez chips cada uno. De acuerdo con sus históricos, el 80% de los lotes tiene un 10% de chips defectuosos (lotes buenos) y el 20% de los lotes tiene un 50% de chips defectuosos (lotes malos). Si el lote es bueno, la siguiente etapa de producción tendrá un costo de US$1000, en cambio, si el lote es malo, la siguiente etapa de producción tendrá un costo de US$4000.

Apple tiene la opción de reprocesar el lote para asegurarse que sea bueno luego del reproceso, a un costo de US$1000. También tiene la opción de probar un SOLO CHIP por US$1000 para tratar de determinar si el lote es bueno o malo.

Determinar la secuencia óptima de decisiones que lleve a Apple a minimizar costos, y el valor esperado de la información.



Probabilidades a priori :

(a) Probabilidad de que el lote sea bueno:
$P(l = b) = 4/5 = 0.8$

(b) Probabilidad de que el lote sea malo:
$P(l = m) = 1/5 = 0.2$

Además, por el enunciado se tiene:

(c) Probabilidad de que el chip esté malo dado que el lote es bueno:
$P(c = m \cap l = b) = 0.1$

(d) Probabilidad de que el chip esté malo dado que el lote es malo:
$P(c = m \cap l = m) = 0.5$

(e) Probabilidad de que el chip esté bueno dado que el lote es bueno:
$P(c = b \cap l = b) = 0.9$

(f) Probabilidad de que el chip esté bueno dado que el lote es malo:
$P(c = b \cap l = m) = 0.5$

Luego, se calculan las probabilidad de que un chip esté malo o no:

(a) Probabilidad de que un chip sea bueno:
$P(c = b) = P(c = b \cap l = b) + P(c = b \cap l = m) = 0.08 + 0.1 = 0.18$

(b) Probabilidad de que un chip sea malo:
$P(c = m) = P(c = m \cap l = b) + P(c = m \cap l = m) = 0.72 + 0.1 = 0.82$

$Probabilidades\ a\ posteriori$:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

(a) Probabilidad de sacar un lote malo y de sacar un chip malo:

$$P(l = m|c = m) = \frac{P(c = m \cap l = m)}{P(c = m)} = \frac{0.1}{0.18} = \frac{5}{9} = 0.56$$

(b) Probabilidad de sacar un lote bueno y de sacar un chip malo:

$$P(l = b|c = m) = \frac{P(c = m \cap l = b)}{P(c = m)} = \frac{0.08}{0.18} = \frac{4}{9} = 0.44$$

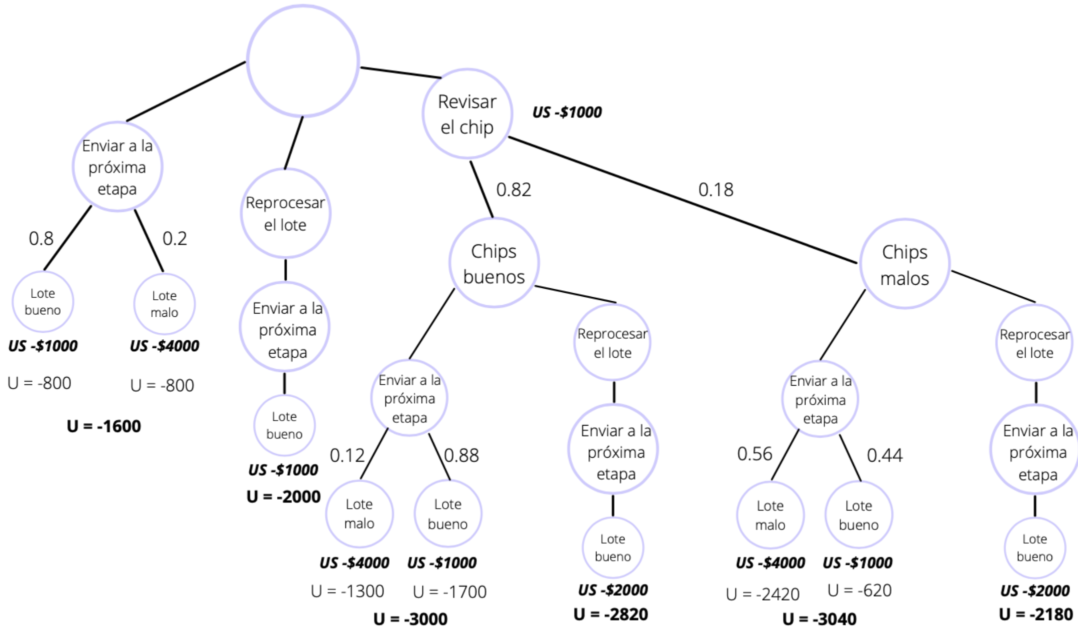
(c) Probabilidad de sacar un lote malo y de sacar un chip bueno:

$$P(l = m|c = b) = \frac{P(c = b \cap l = m)}{P(c = b)} = \frac{0.1}{0.82} = \frac{5}{41} = 0.12$$

(d) Probabilidad de sacar un lote bueno y de sacar sacó un chip bueno:

$$P(l = b|c = b) = \frac{P(c = b \cap l = b)}{P(c = b)} = \frac{0.72}{0.82} = \frac{36}{41} = 0.88$$

Con la información anterior se realiza el siguiente árbol de decisión:



Luego, para determinar la secuencia óptima de decisiones se escoge la utilidad máxima ($u = -1600$), es decir enviar a la próxima etapa inmediatamente.

El valor esperado será entonces las utilidades en cada nodo final.

References

[1] Carcamo, U. Los fundamentos matemáticos de la teoría de las finanzas (ii): incluyendo incertidumbre y riesgo. *Semestre económico, ISSN 0120-6346, Vol. 7, Nº. 13, 2004, pags. 123-158* (01 2004).