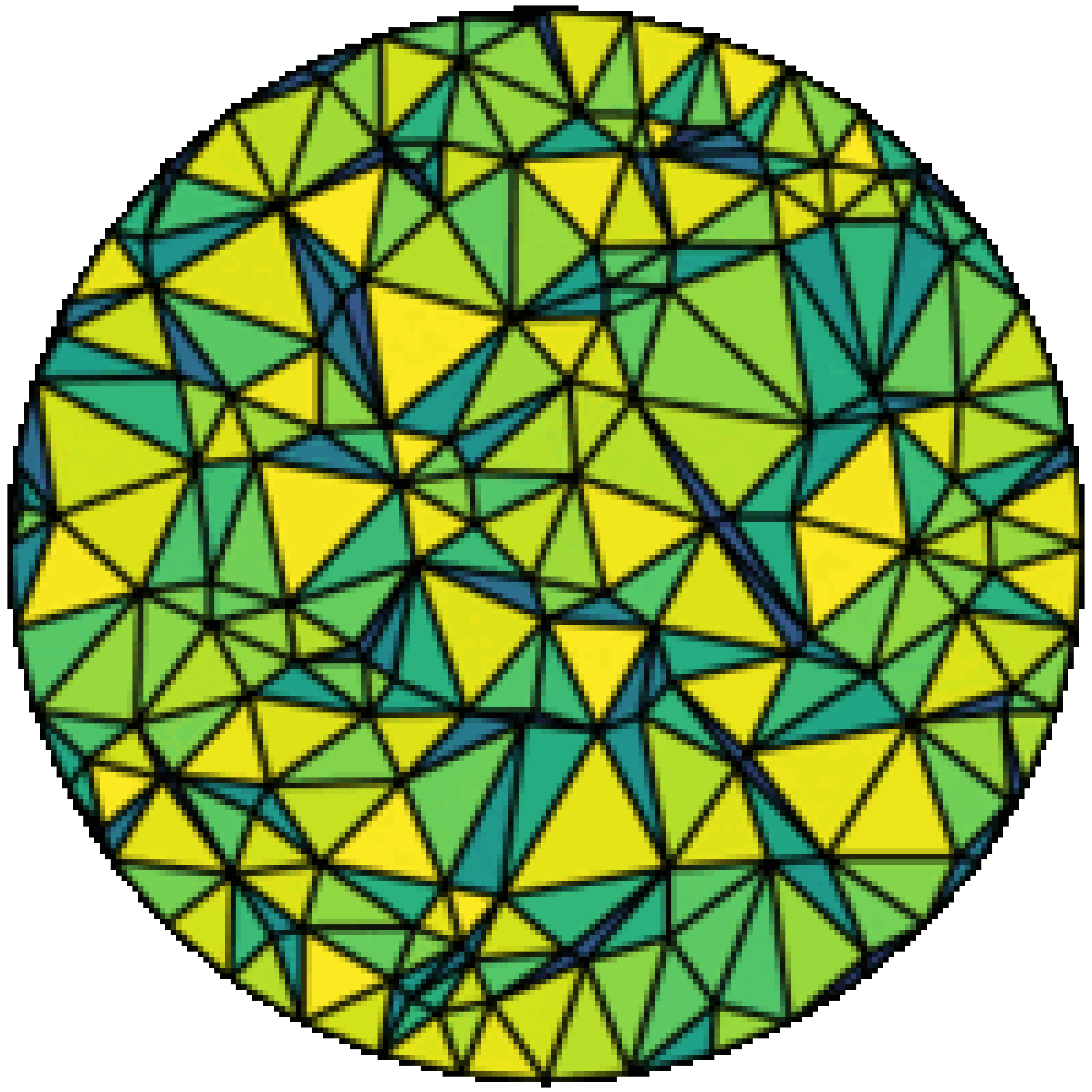


Optimización de mallas

Andrés Gómez Arango
Gregorio Pérez Bernal
Luisa Toro Villegas

Problema

Aproximar la superficie f(x,y) mediante mallas triangulares.

$$f(x,y) = \frac{xy\left(x^2 - y^2\right)}{x^2 + y^2 + 1}, \qquad (x,y) \in [0,3] \times [0,3]$$

Objetivo

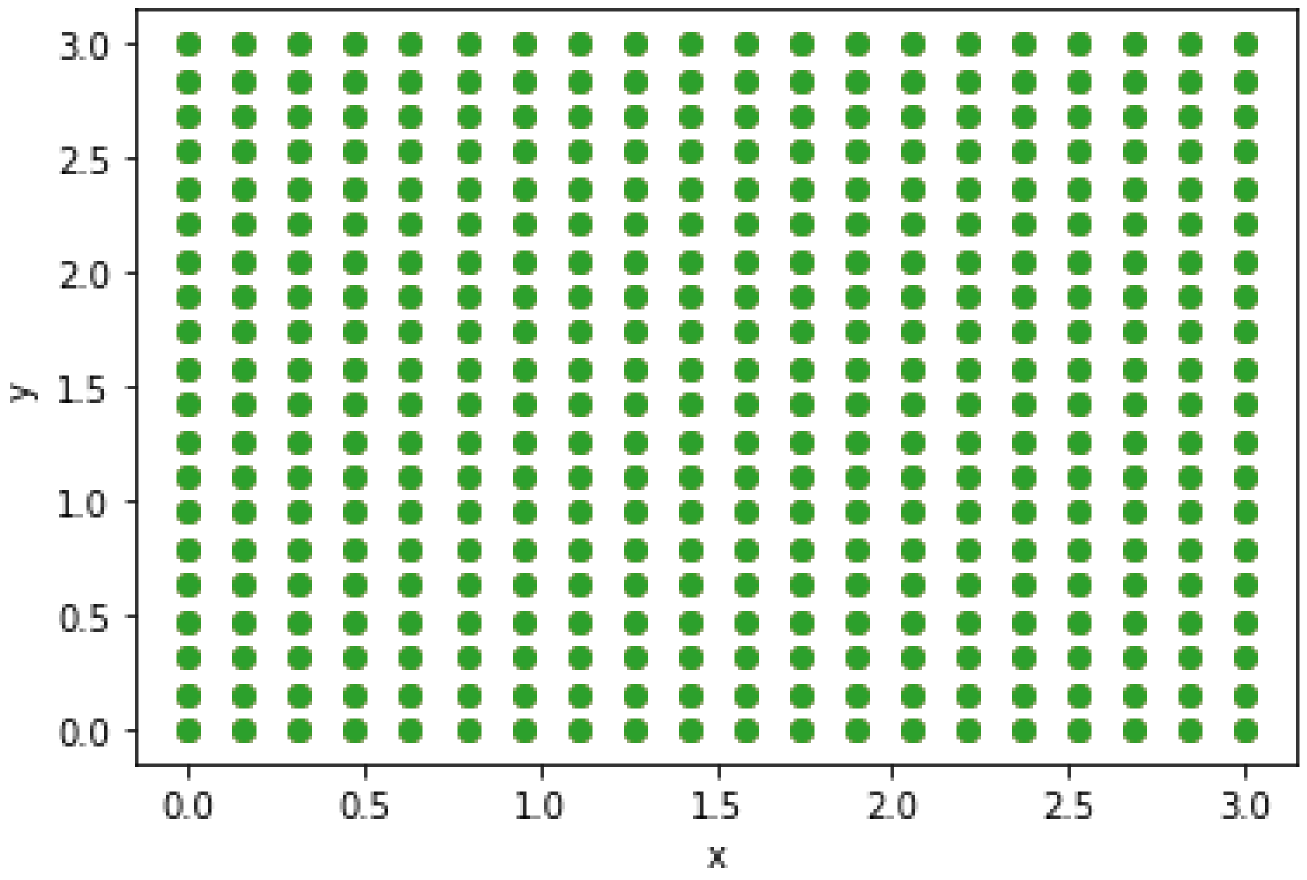
Reducir la varianza del área de los triángulos.

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{(a(i) - \bar{a})^2}{m}$$

Metodología

Creación de los nodos

Se crean n*n nodos equidistantes en la región [0,3]x[0,3].

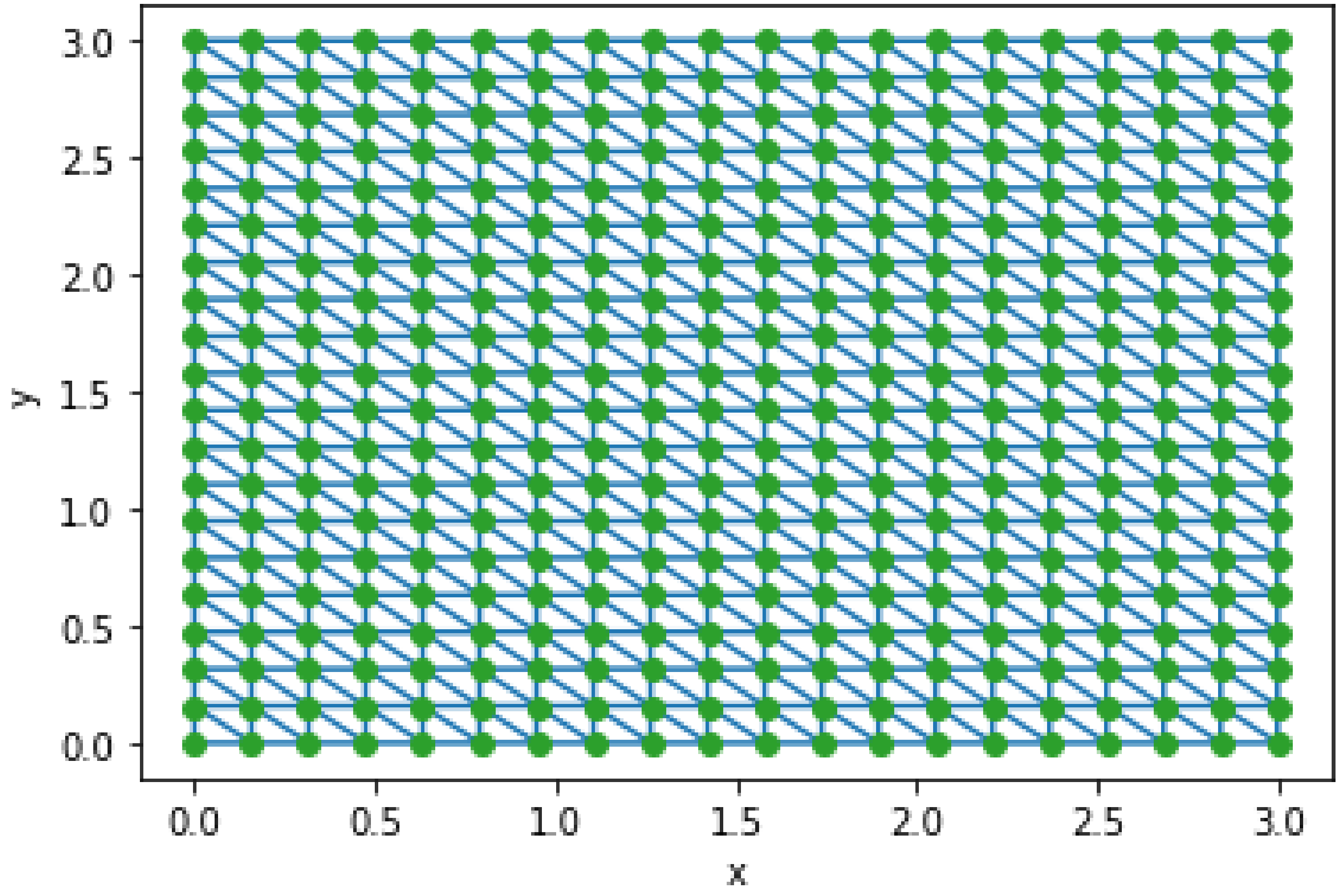


Triangulación

Se realiza la siguiente triangulación:

$$triag = (N_{i,j}, N_{i+1,j}, N_{i,j+1}) = ((x_i, y_j), (x_{i+1}, y_j), (x_i, y_{j+1}))$$

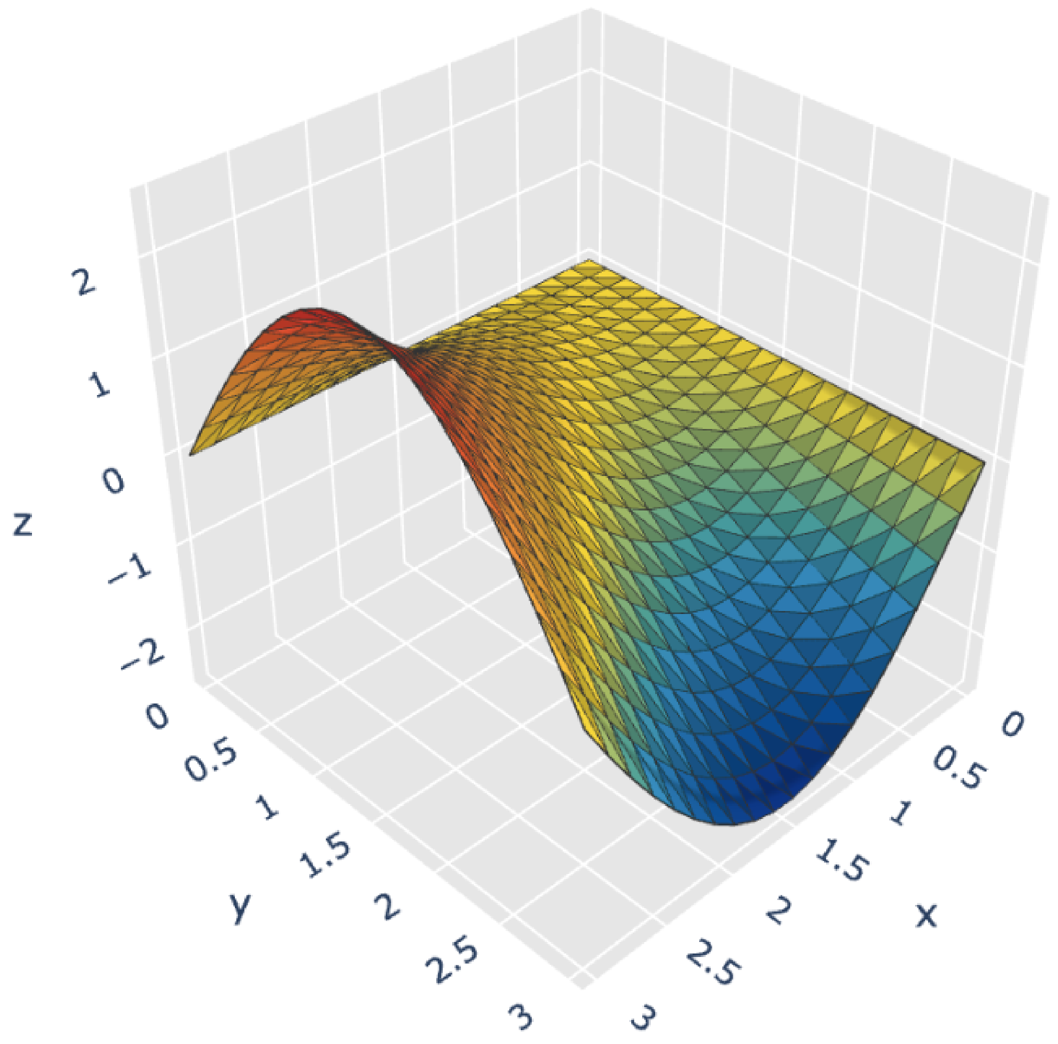
$$triag = (N_{i+1,j}, N_{i,j+1}, N_{i+1,j+1}) = ((x_{i+1}, y_j), (x_i, y_{j+1}), (x_{i+1}, y_{j+1}))$$



Malla en R3

La malla se crea utilizando la malla anterior y añadiéndole una tercera coordenada z.

$$Nodo3d = (x_i, y_j, f(x_i, y_j))$$



Área de cada triángulo

Para encontrar el área dentro de cada triángulo definido se usa la siguiente ecuación:

$$A = \frac{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|}{2}$$

Donde los vectores *u* y *v* se definen de la siguiente manera:

$$u =< x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 >$$

$$v =< x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1 >$$

Área de la superficie en la región

Se define de la siguiente manera:

$$S = \iint_R dS$$
$$= \iint_R \sqrt{1 + f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2 dA}$$

Es decir:

$$A_s = \int_0^3 \int_0^3 \sqrt{1 + (\frac{\partial}{\partial x}(\frac{xy\,(x^2-y^2)}{x^2+y^2+1}))^2 + (\frac{\partial}{\partial y}(\frac{xy\,(x^2-y^2)}{x^2+y^2+1}))^2 dxdy}$$

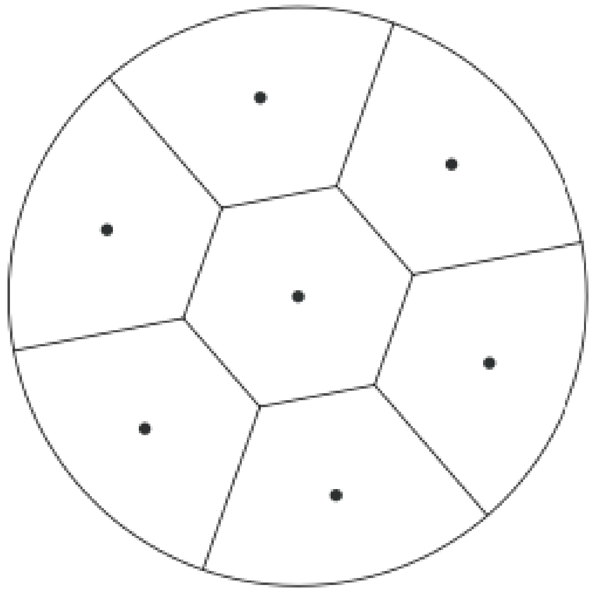
$$A_s = 17{,}4632$$

Teselación centroidal de Voronoi (CVT)

Centroide

Cada nodo representa el centro de masa de cada región de Voronoi.

$$c_i = \frac{\int_{\Omega_i} \rho(x) x \, d\sigma}{\int_{\Omega_i} \rho(x) \, d\sigma} \qquad \rho > 0$$



Región de Voronoi

$$\Omega_i = \{x \in \Omega \,|\, ||x - x_i|| \leq ||x - x_j||, j \neq i\}$$

Teselación centroidal de Voronoi (CVT)

Función a optimizar

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega_i} \rho(x) ||x - x_i||^2 d\sigma$$

Gradiente

$$F_{x_i} = 2 \int_{\Omega_i} \rho(x) d\sigma (x_i - c_i)$$

Quasi-Newton

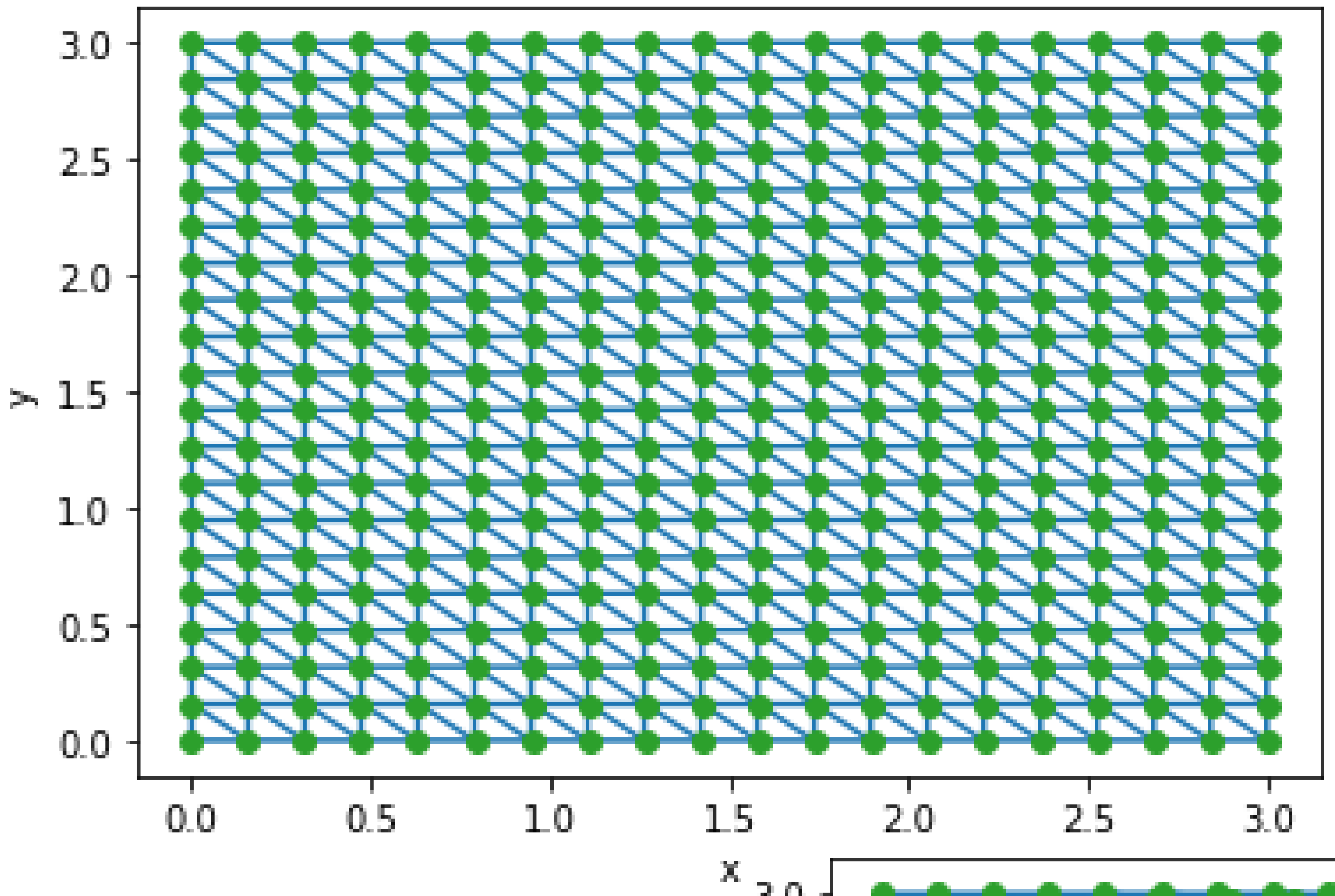
- Encuentran raíces, mínimos o máximos locales de ciertas funciones.
- Es una alternativa al método Newton tradicional, cuando el Jacobiano o la Hessiana presentan un costo computacional alto.
- En nuestro caso la Hessiana no siempre es semidefinida positiva.

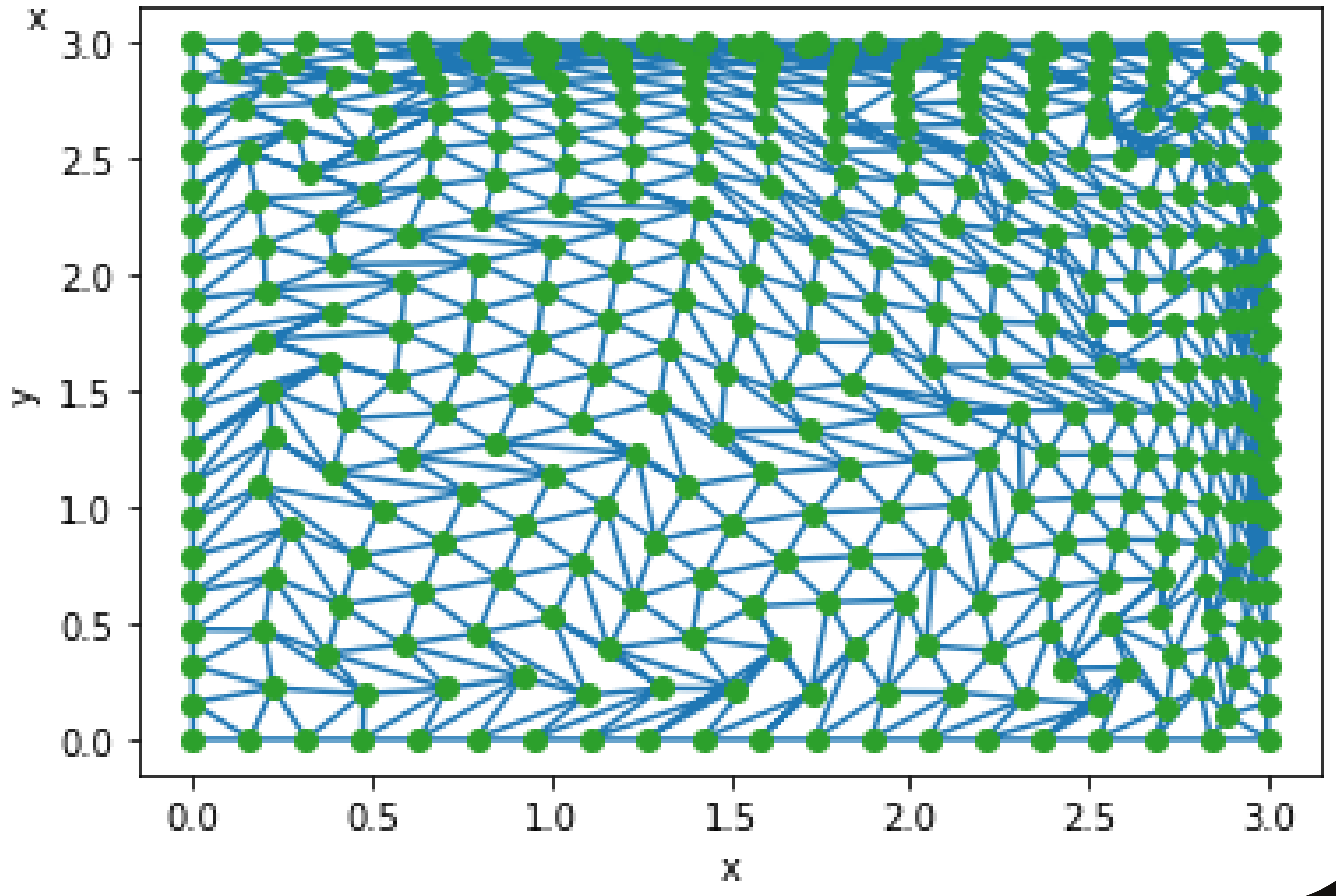
Resultados

Librería optimesh

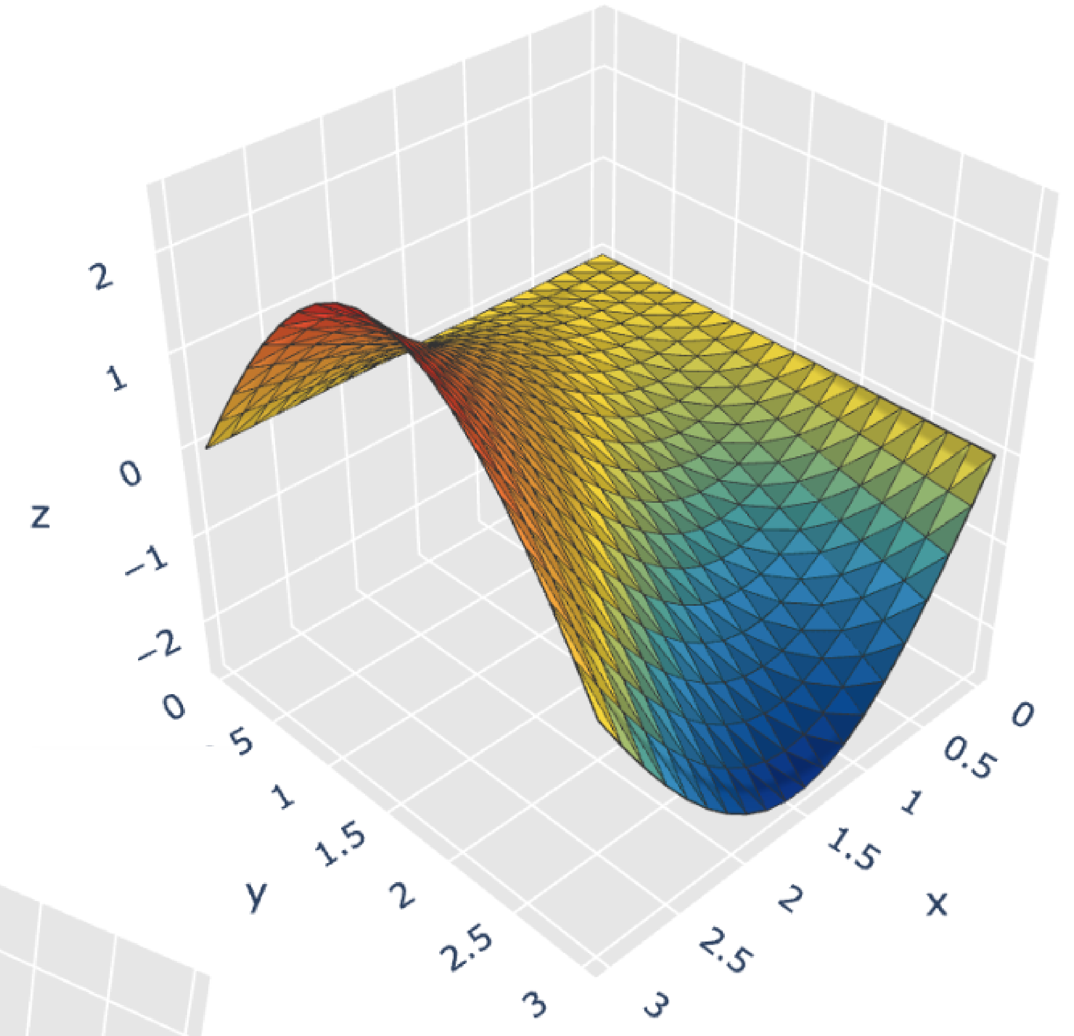
Método	Varianza de las áreas
Malla original	7.3769 *10^-5
CVT Quasi-Newton	5.2502 * 10^-6
CPT Quasi-Newton	3.5617*10^-5
ODT BFGS	2.8480*10^-5

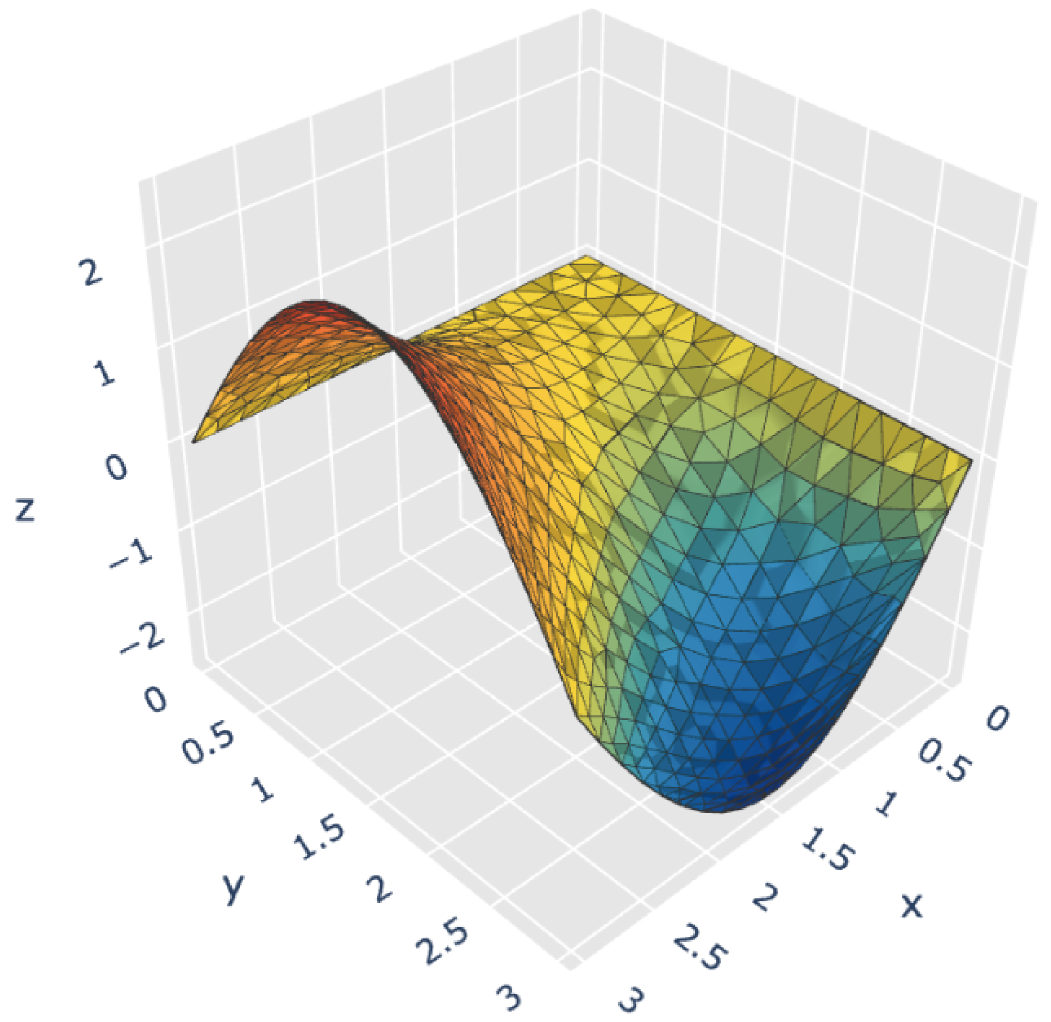
Malla optimizada





Superficie optimizada





Conclusiones

Conclusiones

- Se comprendieron las aplicaciones en el mundo real.
- Los resultados que se presentan son **coherentes.**
- Trabajo alternativo se plantea la minización del error entre la superficie aproximada y la real.

Referencias

Referencias

[1] Vance Faber and Max Gunzburger. Centroidal voronoi tessellations: Applications and algorithms. *Siam Review - SIAM REV*, 41:637–676, 12 1999.

[2] Python Software Foundation. Optimesh - pypi. septiembre 2021.

[3] Yang Liu, Wenping Wang, Bruno Lévy, Feng Sun, Dong-Ming Yan, Lin Lu, and Chenglei Yang. On centroidal voronoi tessellation–energy smoothness and fast computation, Dec 2010.