Seminario 1 - Optimización 2

Gregorio Pérez Bernal, Luisa Toro Villegas

29 de julio de 2022

1. Punto 1

1. **1.5 puntos.** Considere el siguiente problema no lineal irrestricto

$$\min f(x_1, x_2) = 8x_1^2 + 6x_2^2 + 4(x_1 - 1)(x_2 - 2).$$

Haga 10 iteraciones usando los métodos de Newton y gradiente descendiente a partir del punto $(0.5, 1.5)$. Compare los resultados.

1.1. Solución con el método del Gradiente

La Tabla 1, muestra los resultados obtenidos aplicando el método del gradiente con una tolerancia de $\varepsilon = 0{,}01$, el cual se demoró 0,46 segundos en correr.

Iteración	Valor de x_1	Valor de x_2	Valor de $f(x_1, x_2)$
1	0.5	1.5	16.5
2	0.103	0.442	6.846
3	0.458	0.309	5.917
4	0.421	0.206	5.828
5	0.455	0.194	5.819
6	0.451	0.184	5.818
7	0.455	0.183	5.818
8	0.454	0.182	5.818
9	0.455	0.182	5.818
10	0.455	0.182	5.818

Tabla 1. Iteraciones del método del gradiente en $f(x_1, x_2)$.

Es importante recalcar que para la tolerancia elegida, el método converge a un valor en la **Iteración 8**, y se puede ver que desde entonces, el valor de la función no cambia con tres cifras significativas

1.2. Solución con el método de Newton

La Tabla 1, muestra los resultados obtenidos aplicando el método Newton con una tolerancia de $\epsilon = 0{,}01$, el cual se demoró 0,021 segundos en correr.

Iteración	Valor de X	Valor de Y	Valor de $f(x_1, x_2)$
1	0.5	1.5	16.5
2	0.455	0.182	5.818
3	0.455	0.182	5.818
4	0.455	0.182	5.818
5	0.455	0.182	5.818
6	0.455	0.182	5.818
7	0.455	0.182	5.818
8	0.455	0.182	5.818
9	0.455	0.182	5.818
10	0.455	0.182	5.818

Tabla 2. Iteraciones del método de Newton en $f(x_1, x_2)$.

Es importante recalcar que para la tolerancia elegida, el método converge a un valor en la **Iteración 2**, y se puede ver que desde entonces, el valor de los puntos y de la función no cambia con tres cifras significativas

1.3. Comparación de los métodos

Como evidencia la tabla, el método de Newton muestra una convergencia más rápida en menor tiempo de ejecución. El tiempo de ejecución no siempre será mejor con Newton, solo que en este caso, como la función es cuadrática, al tener una matríz Hessiana Constante, se ahorra mucho tiempo al no tener que computar la matríz Hessiana en cada iteración. Además, es importante recalcar que el método de Newton funcionará para funciónes de tipo C^2, o más, ya que se necesita una segunda derivada. Tomando todo esto en cuenta, se puede concluir que para la función propuesta, el mejor método iterativo será el de Newton.

2. Punto 2

2. **1.5 puntos.** Considere el problema

$$\min f(x, y) = 5x^2 + 5y^2 - xy - 11x + 11y + 11.$$

a) Encuentre un punto que satisfaga las condiciones necesarias de primer orden para una solución.

b) El punto determinado es mínimo global?. Justifique su respuesta.

c) Aplique el método de descenso visto en clase para resolver este problema, en las siguiente version: Regla de Armijo para búsqueda de tamaño de paso. Newton para búsqueda de descenso.

2.1. Condiciones de Optimalidad

Para hallar las condiciones necesarias de primer orden, se propuso hallar el gradiente de la función, e igualar a cero para poder encontrar los puntos críticos. Al resolver el sistema de ecuaciones, se llegó a un posible punto crítico, $\mathbf{x = 1,\ y = -1}$. Ahora bien, para ver que este es un mínimo es necesario aplicar el criterio de la segunda derivada, para descartar la existencia de un punto de silla.

Para ver que este es un mínimo global, se debe ver que la función es convexa en todo su dominio. Para ver esto, se procedió a graficarla, la cual se muestra en la figura 1.

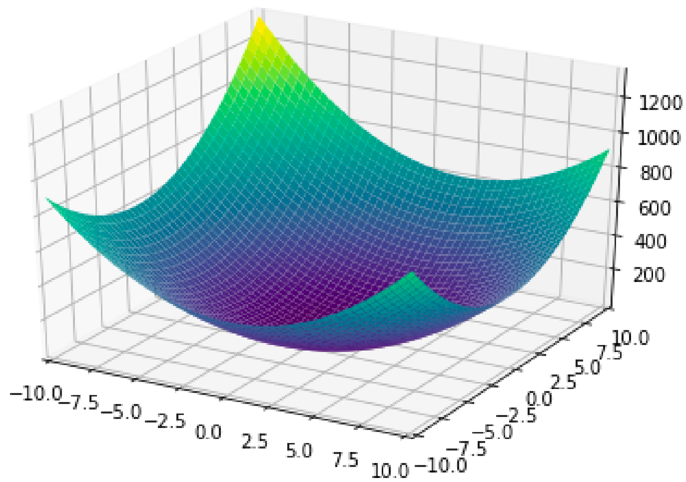

Figura 1: gráfica de $f(x, y)$

Como se puede observar en la imagen, la función muestra una estructura convexa, lo cual podría afirmar que **x = 1, y = -1** es un mínimo global. Sin embargo, se procede a demostrar con mayor certeza que esta función es convexa.

Ahora bien, para poder afirmar que esta función es convexa, se necesita garantizar que la Hessiana inversa de la función (que se muestra a continuación) es semidefiniva positiva.

$$\begin{bmatrix} 10/99 & 1/99 \\ 1/99 & 10/99 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Figura 2: Matriz Hessiana inversa

Para hacer esto, se hallaron los autovalores de esta y se verificó que estos fueran no negativos. Se encontró que estos son **1/9, 1/11**. Teniendo estos resultados, se confirma que la función sí es convexa, por tanto, el mínimo hallado es global.

2.2. Regla de Armijo

Se planteó la regla de Armijo, en la cual se se propuso actualizar el parametro t, usando una reducción $\gamma = 0{,}7$, la cual se eligió tomando en cuenta una revisión literaria. En el caso particular de optimizar la función planteada, se encontró que el método de Newton converge con parametro de reducción 1 en la segunda iteración, así que, no fue necesario realizar la actualización que sigue la regla Armijo.

La implementación del algorítmo de Armijo converge para un $t_0 \in (0, 1]$, sin embargo sería interesante como trabajo futuro, poder utilizar cualquier $t > 0$ que converja.

2.3. Resultados

La iteración 1 usa los puntos (1, 1) con un valor de 20. El método converge con mínimo de 0 con ε o tolerancia de 0.01 con los puntos $(1, -1)$.

El algoritmo se demoró 0.008987 segundos en converger. Esta rápida convergencia se debe a que la matríz Hessiana de la función es constante, razón por la que no se debe calcular en cada iteración. Ver que esta variación del método de Newton tarda en converger un tiempo muy similar al método de Newton clásico.

Iteración	Valor de X	Valor de Y	Valor de $f(x, y)$
1	1	1	20
2	1	-1	0

Tabla 3. Iteraciones del método de Newton con regla de Armijo en $f(x, y)$.

3. Punto 3

3. **2.0 puntos.** Considerar el siguiente problema:

$$\min\ 9 - 8x_1 - 6x_2 - 4x_3 + 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$$

$$\text{sujeto a}\ \ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 3, \quad x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3.$$

Estrategía:

- Usar método quasi–Newton para resolver problemas sin restricciones.
- Usar el algoritmo Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno (BFGS) para resolver problemas no lineales. Aquí es usado para actualizar las aproximaciones a la matriz hessiana.
- En este ejercicio, penalizaciones barrera logarítmica pueden generar puntos infactibles. Cambiar el término de penalización por:

$$\tilde{\phi}(g) = \phi(\tilde{g})\ \text{ donde }\ \tilde{g} = \min\{g, -\varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Teniendo en cuenta las notas de clase (ver método de penalización interior, diapositiva 14), mostrar 10 iteraciones de penalización tipo logarítmica. Comparar los resultados obtenidos con aquellos vistos en clase para penalización inversa.

3.1. Penalización Interna y método QuasiNewton

Para resolver este problema, se planteó el método de QuasinNewton, aplicando la actualización de la inversa de la matríz Hessiana de BFGS, el cual converge correctamente para funciones convexas. Ahora bien, al aplicar la función de penalización e intentar hallar los valores de $x1, x2, x3$, se hallaron puntos cercanos al valor real, sin embargo, un trabajo futuro sería mejorar estas aproximaciones, pues aún se encuentran lejos del valor esperado.

3.2. Resultados

Se usa parámetro de tolerancia ε de

Iteración	μ	Valor de x_1	Valor de x_2	Valor de x_3	Valor de $f(x_1, x_2)$
1	10^{-1}	0.1	0.1	0.1	7.290
2	10^{-2}	1.23	0.90	0.57	0.065
3	10^{-3}	1.21	0.93	0.65	0.044
4	10^{-4}	1.21	0.93	0.65	0.043
5	10^{-5}	1.21	0.93	0.66	0.043

Tabla 4. Iteraciones del método de penalización interna con QuasiNewton en $f(x_1, x_2, x_3)$.

4. Código

El código será adjuntado como *.py* y el link del colab es el siguiente: colab.