Optimización II

Examen 2

Luisa Toro Villegas

PROFESOR : Christhian Montoya Zambrano

Universidad EAFIT

29 de julio de 2022

1. Método Simplex multiobjetivo

2.0 puntos. Considere el siguiente problema de programación lineal multiobjetivo

$$\begin{aligned} &\max\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 \\ &\max\ x_3 \\ \text{sujeto a}\ & x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 12 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 12 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 12, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \geq (0,0,0) \end{aligned}$$

a) Describa de forma analítica el método simplex para el problema anterior. Cuál es la solución obtenida?.

b) Resuelva el problema de forma numérica (implementación del método simplex descrito anteriormente) usando un lenguaje de programación de preferencia (Python, Matlab, Scilab, Excel, Fenix, etc).

Se tiene el problema de optimización multiobjetivo (MOLP) siguiente 1 :

$$\text{máx}\{Cx : Ax = b, x \geq 0\} \tag{1}$$

donde:

- $x \in \mathbb{R}^n$ las variables de decisión
- C_x el conjunto de funciones objetivo, con $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$
- $Ax = b$ las restricciones, con $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$ y conjunto factible en el espacio de decisión 2:

$$Y = \{Cx : x \in X\} \tag{2}$$

Sean $\hat{x} \in X$ una solución factible del problema multiobjetivo y sea $\hat{y} = C\hat{x}$,

- $\hat{x}$ tiene eficiencia débil si no existe $x \in X$ tal que $Cx < C\hat{x}$, y $\hat{y} = C\hat{x}$ se denomina dominado débilmente.
- $\hat{x}$ es eficiente si no existe $x \in X$ tal que $Cx \leq C\hat{x}$, y $\hat{y} = C\hat{x}$ se denomina no dominado.
- $\hat{x}$ tiene eficiencia propia si no existe $x \in X$ tal que $Cx < C\hat{x}$, y $\hat{y} = C\hat{x}$ se denomina dominado débilmente.

Para resolver los problemas multiobjetivos, se busca un problema mono-objetivo. A continuación se describen diferentes maneras de ajustarlo. [4] El método de sumas ponderadas le asigna un valor λ a cada función objetivo, como se muestra en la ecuación 3:

$$LP(\lambda) = \text{máx} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i C_i x_i = \text{máx}\, \lambda^T Cx, \quad \lambda \geq 0 \tag{3}$$

$$\text{sujeto a } Ax = b, x \geq 0$$

Luego, $LP(\lambda)$ es un problema mono-objetivo que se puede resolver con el método Simplex. Su solución óptima es una solución eficiente del problema multiobjetivo. Además, se tiene que:

a) Si $\lambda > 0$ la solución óptima se dice propiamente eficiente.

b) Si $\lambda \geq 0$ la solución óptima se dice débilmente eficiente.

También es interesante considerar a λ como una suma convexa, es decir $\sum \lambda_i = 1$. Así, para el problema biobjetivo se tiene la expresión 4:

$$\text{máx}\, C\lambda x + C(1-\lambda)x \tag{4}$$

Luego, se consideran otras maneras de convertirlo a un problema mono-objetivo. Por un lado se tiene la suma de las funciones objetivo 5, lo cual es posible debido a que el problema es lineal y no se afecta el conjunto de soluciones eficientes.

$$\text{máx} \sum_{i=1}^{n} C_i x_i, x = [x_B, x_N] \tag{5}$$

Paso 0: Problema de programación lineal multiobjetivo

El problema multiobjetivo que se procede a resolver mediante el método simplex multiobjetivo se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 \\ \text{máx} \quad & x_3 \\ \text{sujeto a} \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 12 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 12 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 12, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \geq (0,0,0) \end{aligned} \tag{6}$$

Paso 1: Introducción de las variables de holgura

Para cada restricción de desigualdad se introduce una variable de holgura:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 \\ \text{máx} \quad & x_3 \\ \text{sujeto a} \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 12 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 12 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 12, \quad x \geq 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Paso 2: Tabla simplex base

A partir del problema se crea la siguiente tabla simplex:

$$\begin{array}{c} \\ C_j - Z_j \\ \\ \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \left[\begin{array}{cccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & z \\ \hline 6 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & & & & x_B \\ \hline 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 12 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 12 \end{array}\right] \tag{8}$$

Donde $C_j - Z_j$ en la tabla original corresponde a C y la columna z a los valores de la función objetivo. Así, $_B$ son los valores de las variables básicas y $_N$ los valores de las variables no básicas.

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & \begin{bmatrix} C_B C_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} \\ \text{sujeto a} \quad & A \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{9}$$

Luego, se tiene $z = (0,0)$ y tiene solución asociada $x = (0,0,0,12,12,12)$. Verifiquemos las siguientes condiciones:

- $C_N \leq 0$

$$C_N = \left[\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline 6 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \geq 0 \tag{10}$$

- $\exists C_j < 0$

$$C_N = \left[\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline 6 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \nexists C_j < 0 \tag{11}$$

- $\sum_j C_j < 0$

$$C_N = \left[\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline 6 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \sum_j C_j = [15, 1] > 0 \tag{12}$$

Como no se cumplen ninguna de las condiciones, se procede a reformular el problema simplex multiobjetivo como un problema mono-objetivo:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & (C_1 + C_2)x \\ \text{sujeto a} \quad & Ax = b \\ & Cx \geq C^i \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{13}$$

Es decir:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & 6x_1 + 4x_2 + 6x_3 \\ \text{sujeto a} \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 12 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 12 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 12, \quad x \geq 0 \end{aligned} \tag{14}$$

Paso 3: Reformulación de la Tabla Simplex

$$\begin{array}{c} \\ c_j - z_j \\ C_j - Z_j \\ \\ \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \left[\begin{array}{cccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & z \\ \hline 6 & 4 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 6 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & & & & x_B \\ \hline 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 12 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 12 \end{array}\right] \tag{15}$$

La tabla anterior tiene solución asociada de $x = (0, 0, 0, 12, 12, 12)$

Paso 4: Operaciones elementales

Se escoge x_3 como variable que entra a la base. Se dividen los valores de la base de la columna de la base que entra, x_3, y se divide por su valor en la columna z. Luego se escoge el menor valor y su fila correspondiente será la variable que sale x_4.

$$\begin{array}{c} \\ c_j - z_j \\ C_j - Z_j \\ \\ \\ x_3 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \left[\begin{array}{cccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & z \\ \hline 3 & 1 & 0 & -3 & 0 & 0 & -36 \\ \hline 7/2 & 3/2 & 0 & -5/2 & 0 & 0 & -30 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & -6 \\ \hline & & & & & & x_B \\ \hline 1/2 & 1/2 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 3/2 & 0 & -1/2 & 1 & 0 & 6 \\ 3/2 & 1/2 & 0 & -1/2 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right] \tag{16}$$

La anterior tabla tiene solución asociada de $x = (0, 0, 6, 0, 6, 6)$.

Esa solución es eficiente para el problema original, es decir el multiobjetivo (6), debido a que todos los valores de una función objetivo son negativos. Sin embargo, esto no se cumple para el problema modificado de un objetivo.

Se procede a realizar otra iteración, en esta entre x_2 y sale x_6.

$$\begin{array}{c} \\ c_j - z_j \\ C_j - Z_j \\ \\ \\ x_3 \\ x_5 \\ x_1 \end{array}
\left[\begin{array}{cccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & z \\
\hline
0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & -48 \\
\hline
0 & 1/3 & 0 & -4/3 & 0 & -7/3 & -44 \\
0 & -1/3 & 0 & -2/3 & 0 & 1/3 & -4 \\
\hline
 & & & & & & x_B \\
\hline
0 & 1/3 & 1 & 2/3 & 0 & -1/3 & 4 \\
0 & 4/3 & 0 & -1/3 & 1 & -1/3 & 4 \\
1 & 1/3 & 0 & -1/3 & 0 & 2/3 & 4
\end{array}\right] \tag{17}$$

La anterior tabla tiene solución asociada de $x = (4, 0, 4, 0, 4, 0)$.

Esta solución es eficiente para una fila de los problemas multiobjetivos y para la fila de un objetivo. Sin embargo, se busca sacar la variable de holgura.

$$\begin{array}{c} \\ c_j - z_j \\ C_j - Z_j \\ \\ \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{array}
\left[\begin{array}{cccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & z \\
\hline
0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & -48 \\
\hline
0 & 0 & 0 & -5/4 & -1/4 & -9/4 & -45 \\
0 & 0 & 0 & -3/4 & 1/4 & 1/4 & -3 \\
\hline
 & & & & & & x_B \\
\hline
0 & 0 & 1 & 3/4 & -1/4 & -1/4 & 3 \\
0 & 1 & 0 & -1/4 & 3/4 & -1/4 & 3 \\
1 & 0 & 0 & -1/4 & -1/4 & 3/4 & 3
\end{array}\right] \tag{18}$$

La tabla anterior tiene solución asociada de $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (3, 3, 3, 0, 0, 0)$.

Esta es eficiente para el problema multiobjetivo.

Se detiene el método debido a que se cumple la condición de parada.

Luego se verificó la solución del problema mono-objetivo con el software PHP Simplex http://www.phpsimplex.com/simplex/simplex.htm?l=es

2. Métodos TOPSIS y ELECTRE

1.5 puntos. Suponga que hay tres candidatos para ocupar un determinado cargo y debemos seleccionar uno de ellos. Con tal fin, a cada uno de ellos se la han realizado dos cuestionarios para su evaluación. Cada uno de los cuestionarios tiene el mismo peso $w_1 = w_2 = 0.5$.
Sean los tres candidatos A_1, A_2 y A_3, los que obtuvieron en cada evaluación las valoraciones que se presentan en la siguiente tabla, las que provienen de una escala numérica 0,1,2,3,4,5, donde 5 es la mejor puntuación y 1 la menor puntuación.

	C_1	**C_2**
A_1	1	5
A_2	4	2
A_3	3	3
Pesos	**0,5**	**0,5**

Realizar un procedimiento manual e implementativo de los siguientes problemas:

a) Resuelva el problema usando el método TOPSIS para normas ℓ_p, con $p = 1, 2$ y $p = +\infty$. Comparar los resultados.

b) Resuelva el problema usando el método ELECTRE.

Ambos métodos fueron implementados en Python, y el código se adjuntará aparte como un *.py*. También se puede

encontrar en el siguiente google colab: https://colab.research.google.com/drive/1x3dbNQYDgtF1jtxtQ1Q-n1avVeCG8r
usp=sharing

a) Método TOPSIS

- Norma l_1

Paso 1: Matriz de decisión

El método TOPSIS evalúa una matriz con m alternativas A_i, las cuales son evaluadas según n criterios C_j, y el decisor le asigna un peso W_j a cada uno de los criterios.

Alternativas	C1	C2
A1	1	5
A2	4	2
A3	3	3
Pesos	0.5	0.5

Paso 2: Matriz de decisión Normalizada

En este caso, se utilizará la norma l_1, mostrada a continuación:

$$||\vec{x}||_{l_1} = |x_1| + |x_2| + ... + |x_n| \tag{19}$$

Así cada posición de la matriz de decisión normalizada (v_{ij}) corresponderá a:

$$v_{ij} = \frac{r_{ij}}{||\vec{r_j}||_{l_1}} \tag{20}$$

	C1	C2
Norma l_1	8	10

Alternativas	C1	C2
A1	0.125	0.5
A2	0.5	0.2
A3	0.375	0.3
Pesos	0.5	0.5

Paso 3: Matriz de decisión Normalizada Ponderada

Cada posición de la matriz ponderada corresponde al producto entre v_{ij} y w_j, es decir:

$$V_{ij} = v_{ij} * w_j \tag{21}$$

Alternativas	C1	C2
A1	0.0625	0.25
A2	0.25	0.1
A3	0.1875	0.15

Paso 4: Alternativas ideal y anti-ideal

Los valores ideales positivos y negativos son los siguientes:

$$\vec{A^+} = \{(\max_i \vec{v_{ij}}, j \in J)(\min_i \vec{v_{ij}}, j \in J^{'})\}, i = 1, 2, ..., m \tag{22}$$

$$\vec{A^-} = \{(\min_i \vec{v_{ij}}, j \in J)(\max_i \vec{v_{ij}}, j \in J^{'})\}, i = 1, 2, ..., m \tag{23}$$

Alternativas	C1	C2
Alternativa ideal	0.25	0.25
Alternativa anti-ideal	0.0625	0.1

Paso 5: Medidas de distancia

En este caso se considerará la norma l_1 mencionada anteriormente para calcularla, como se muestra a continuación:

$$\vec{d_i^+} = ||(\vec{v_{ij}} - \vec{A_j^+}||_{l_1} \tag{24}$$

$$\vec{d_i^+} = ||(\vec{v_{ij}} - \vec{A_j^-}||_{l_1} \tag{25}$$

Alternativas	Alternativa ideal	Alternativa anti-ideal
A1	0.1875	0.15
A2	0.15	0.1875
A3	0.1625	0.1750

Paso 6: Proximidad relativa a la alternativa ideal

El ratio de similaridad $\vec{RS}_i$ es:

$$\vec{RS}_i = \frac{d_i^-}{d_i^+ + d_i^-} \tag{26}$$

Alternativas	Proximidad Relativa
A1	0.44444
A2	0.55555
A3	0.51852

Paso 7: Ranking

Para concluir el método, se organizan las alternativas de menor a mayor proximidad relativa:

Ranking
A2
A3
A1

- Norma l_2

Paso 1: Matriz de decisión

Alternativas	C1	C2
A1	1	5
A2	4	2
A3	3	3
Pesos	0.5	0.5

Paso 2: Matriz de decisión Normalizada

En este caso, se utilizará la norma l_2, mostrada a continuación:

$$||\vec{x}||_{l_2} = \sqrt{(x_1)^+(x_2)^+ ... + (x_n)^2} \tag{27}$$

Así cada posición de la matriz de decisión normalizada (v_{ij}) corresponderá a:

$$v_{ij} = \frac{r_{ij}}{||\vec{r_j}||_{l_2}} \tag{28}$$

	C1	C2
Norma l_2	5.09902	6.16441

Alternativas	C1	C2
A1	0.19612	0.81111
A2	0.78446	0.32444
A3	0.58835	0.48666
Pesos	0.5	0.5

Paso 3: Matriz de decisión Normalizada Ponderada

Alternativas	C1	C2
A1	0.09806	0.40555
A2	0.39223	0.16222
A3	0.29417	0.24333

Paso 4: Alternativas ideal y anti-ideal

Alternativas	C1	C2
Alternativa ideal	0.39223	0.40555
Alternativa anti-ideal	0.09806	0.16222

Paso 5: Medidas de distancia

En este caso se considerará la norma l_2:

$$\vec{d_i^+} = ||(\vec{v_{ij}} - \vec{A_j^+}||_{l_2} \tag{29}$$

$$\vec{d_i^+} = ||(\vec{v_{ij}} - \vec{A_j^-}||_{l_2} \tag{30}$$

Alternativas	Alternativa ideal	Alternativa anti-ideal
A1	0.29417	0.24333
A2	0.24333	0.29417
A3	0.18956	0.21223

Paso 6: Proximidad relativa a la alternativa ideal

Alternativas	Proximidad Relativa
A1	0.45271
A2	0.54729
A3	0.52821

Paso 7: Ranking

Ranking
A2
A3
A1

- Norma $l_{+\infty}$

Paso 1: Matriz de decisión

Alternativas	C1	C2
A1	1	5
A2	4	2
A3	3	3
Pesos	0.5	0.5

Paso 2: Matriz de decisión Normalizada

En este caso, se utilizará la norma $l_{+\infty}$, mostrada a continuación:

$$||\vec{x}||_{l_{+\infty}} = max\{(x_1), (x_2), ..., (x_n)\} \tag{31}$$

Así cada posición de la matriz de decisión normalizada (v_{ij}) corresponderá a:

$$v_{ij} = \frac{r_{ij}}{||\vec{r_j}||_{l_{+\infty}}} \tag{32}$$

	C1	C2
Norma $l_{+\infty}$	4	5

Alternativas	C1	C2
A1	0.25	1
A2	1	0.4
A3	0.75	0.6
Pesos	0.5	0.5

Paso 3: Matriz de decisión Normalizada Ponderada

Alternativas	C1	C2
A1	0.125	0.5
A2	0.5	0.2
A3	0.375	0.3

Paso 4: Alternativas ideal y anti-ideal

Alternativas	C1	C2
Alternativa ideal	0.5	0.5
Alternativa anti-ideal	0.125	0.2

Paso 5: Medidas de distancia

En este caso se considerará la norma $l_{+\infty}$:

$$\vec{d_i^+} = ||(\vec{v_{ij}} - \vec{A_j^+}||_{l_{+\infty}} \tag{33}$$

$$\vec{d_i^+} = ||(\vec{v_{ij}} - \vec{A_j^-}||_{l_{+\infty}} \tag{34}$$

Alternativas	Alternativa ideal	Alternativa anti-ideal
A1	0.375	0.3
A2	0.3	0.375
A3	0.2	0.25

Paso 6: Proximidad relativa a la alternativa ideal

Alternativas	Proximidad Relativa
A1	0.44444
A2	0.55555
A3	0.55555

Paso 7: Ranking

Ranking
A2
A3
A1

- Comparación entre diferentes normas

Ranking l_1	Ranking l_2	Ranking $l_{+\infty}$
A2	A2	A2
A3	A3	A3
A1	A1	A1

Es claro que según el método TOPSIS usando las normas $l_p, p = 1, 2, +\infty$ la mejor alternativa es A2. Sin embargo, si se miran los valores en las proximidades relativas para cada una se puede observar que estas son muy similares entre sí, por lo que no se establece una dominancia tan fuerte de A2 sobre los demás.

b) Método ELECTRE

Paso 1: Matriz de decisión

El método ELECTRE evalúa una matriz con m alternativas A_i, las cuales son evalúadas según n criterios C_j, y el decisor le asigna un peso W_j a cada uno de los criterios.

Alternativas	C1	C2
A1	1	5
A2	4	2
A3	3	3
Pesos	0.5	0.5

Paso 2: Matriz de decisión Normalizada

Para realizar la normalización se utilizará la proporción del rango descrita a continuación:
Si se desea minimizar:

$$v_i = \frac{maxr_i - r_i}{maxr_i - minr_i} \tag{35}$$

Si se desea maximizar:

$$v_i = \frac{r_i - minr_i}{maxr_i - minr_i} \tag{36}$$

	C1	C2
Norma l_1	8	10

Alternativas	C1	C2
A1	0	1
A2	1	0
A3	0.66667	0.33333
Pesos	0.5	0.5

Paso 3: Matriz de decisión Normalizada Ponderada

Cada posición de la matriz ponderada corresponde al producto entre v_{ij} y w_j, es decir:

$$V_{ij} = v_{ij} * w_j \tag{37}$$

Alternativas	C1	C2
A1	0	0.5
A2	0.5	0
A3	0.33333	0.16667

Paso 4: Matriz de concordancia

La concordancia indica el grado de dominancia de una alternativa. La matriz de concordancia C consiste en los índices de concordancia entre cada par de alternativas A_i y A_k.

$$C(i,k) = \sum_{j/r_j(i)>r_j(k)} w_j + 0{,}5 \sum_{j/r_j(i)=r_j(k)} w_j \tag{38}$$

Alternativas	A1	A2	A3
A1		0.5	0.5
A2	0.5		0.5
A3	0.5	0.5	

Paso 5: Matriz de discordancia

La discordancia indica hasta que punto A_i es dominado por A_k.

$$D(i,k) = \frac{\max_{(i,k)/\vec{v_j}_i < \vec{v_j}_k} \vec{v_j}_k - \vec{v_j}_i}{\max_{\forall(i,k)} |\vec{v_j}_k - \vec{v_j}_i|} \tag{39}$$

Alternativas	A1	A2	A3
A1		1	1
A2	1		1
A3	1	1	

Paso 6: Matriz de Dominancia Concordante

Cuando el elemento en la matriz de concordancia es mayor al umbral de concordancia, se le asigna el valor de 1, de lo contrario 0.

Alternativas	A1	A2	A3
A1		0	0
A2	0		0
A3	0	0	

Paso 7: Matriz de Dominancia Discordante

Cuando el elemento en la matriz de discordancia es menor al umbral de concordancia, se le asigna el valor de 1, de lo contrario 0.

Alternativas	A1	A2	A3
A1		0	0
A2	0		0
A3	0	0	

Paso 8: Matriz de Dominancia Agregada

Se multiplican los elementos de la matriz de dominancia concordante y discordante. Cuando el valor es 1, la alternativa A_i sobrecalifica a la A_k, de lo contrario, no la sobrecalifica.

Alternativas	A1	A2	A3
A1		0	0
A2	0		0
A3	0	0	

Se concluye que no hay ninguna alternativa que domina a las otras según el método ELECTRE, por lo que no se puede tomar una decisión según este método o matriz de decisión. Se podría considerar cambiar los pesos, ya que con equiponderación no se llega a ninguna conclusión.

Este método fue implementado en Python, y el código se adjuntará aparte. También se puede encontrar en el siguiente google colab: `https://colab.research.google.com/drive/1x3dbNQYDgtF1jtxtQ1Q-n1avVeCG8rBz?usp=sharing`

3. Métodos Promethee

1.5 puntos. El problema es la elección del dispositivo móvil que se adapta mejor a las preferencias de un grupo de personas, teniendo en cuenta los dispositivos de gama más alta de las principales firmas del mercado en Diciembre de 2014. Los criterios seleccionados fueron:
C1: Tamaño del dispositivo/pantalla
C2: Cámara (calidad, nitidez, video)
C3: Precio
Las alternativas posibles fueron:
A1: Apple iPhone 6 A2: Sony Xperia Z3 A3: Motorola Moto X A4: Samsung Galaxy 55

La tabla de decisión muestra las preferencias procesadas del grupo de personas seleccionadas, los valores están en el rango de 1 a 9, siendo en todos los casos el 9 el mejor y el 1 el peor. También se reflejan los pesos asignados a cada criterio.

	Tamaño	Cámara	Precio
Apple I. 66	6	9	1
Sony E. Z3	8	8	6
Motorola M. X	8	8	7
Samsung G. S5	7	9	7
Pesos	0.35	0.35	0.30

a) Describa los pasos principales del método Promethee.

b) La función de preferencia usada en todos los criterios es:

$$p(x) = \begin{cases} 0 & x \leq s \\ (x-s)/r & s < x \leq s+r \\ 1 & x > s+r \end{cases}$$

con $s = 0$ y r la mitad de diferencia entre el máximo y mínimo en cada criterio.

Se obtuvó la siguiente matriz que expresa el ídice de preferencia multicriterio π para las diferentes alternativas, salvo algunos valores que faltaron

	Apple	Sony	Moto	Samsung
Apple		0.35	0.35	0
Sony	0.65		0	
Motorola	0.65			0.35
Samsung		0.45	0.35	

Complete la tabla anterior justificando manualmente cómo obtuvo los valores que faltan.

c) Culmine el procedimiento con Promethee II, dando el orden de las alternativas. Mencioné los resultados finales de cada paso, trabajando con 4 cifras significativas.

El método Promethee, o método de clasificación de preferencias para evalúaciones de enriquecimiento por sus siglas en inglés, es un método de outranking usado en el análisis multiobjetivo. Debido a que en la mayoría de los casos no existe una alternativa que optimice a todos los problemas, se utiliza una estructura de preferencia, que, en el caso del método Promethee, realiza comparaciones de a pares con una función de preferencia. Luego se define el índice de preferencia agregada, el cuál es seguido por los flujos de sobrecalificación negativos y positivos sobre los cuales se establece el *ranking* o la preferencia de una alternativa sobre las otras. [3][2]

El algoritmo se describirá a continuación [1]:

Paso 1: Matriz de decisión

El método Promethee evalúa una matriz con m alternativas A_i, las cuales son evalúadas según n criterios C_j, y el decisor le asigna un peso W_j a cada uno de los criterios.

Alternativas	Tamaño	Cámara	Precio
Apple I. 66	6	9	1
Sony E. Z3	8	8	6
Motorola M. X	8	8	7
Samsung G. S5	7	8	7
Pesos	0.35	0.35	0.3

Paso 2: Matriz de decisión normalizada

Para realizar la normalización se puede utilizar la proporción del rango descrita previamente en el método ELECTRE o se puede considerar una norma l_p, más comunmente la norma l_2.

Sin embargo, este paso no fue utilizado.

Paso 3: Matrices de diferencias

Para cada criterio se construye una matriz D de alternativas contra alternativas, en donde cada D_{ij} corresponde a la diferencia entre las alternativas.

Tamaño

	Apple I. 66	Sony E. Z3	Motorola M. X	Samsung G. S5
Apple I. 66	0	-2	-2	-1
Sony E. Z3	2	0	0	1
Motorola M. X	2	0	0	1
Samsung G. S5	1	-1	-1	0

Cámara

	Apple I. 66	Sony E. Z3	Motorola M. X	Samsung G. S5
Apple I. 66	0	1	1	0
Sony E. Z3	-1	0	0	-1
Motorola M. X	-1	0	0	-1
Samsung G. S5	0	1	1	0

Precio

	Apple I. 66	Sony E. Z3	Motorola M. X	Samsung G. S5
Apple I. 66	0	-5	-6	-6
Sony E. Z3	5	0	-1	-1
Motorola M. X	6	1	0	0
Samsung G. S5	6	1	0	0

Paso 4: Matrices de preferencias

Para cada criterio se construye una matriz P de alternativas contra alternativas, en donde se evalúa la matriz de diferencias correspondiente según la función de preferencia.

$$p(x) = \begin{cases} 0 & x \leq s \\ \frac{x-s}{r} & s \leq x \leq s+r \\ 1 & x > s+r \end{cases} \tag{40}$$

$s = 0$ y r la mitad de diferencia entre el máximo y mínimo en cada criterio

Tamaño

	Apple I. 66	Sony E. Z3	Motorola M. X	Samsung G. S5
Apple I. 66	0	0	0	0
Sony E. Z3	1	0	0	0.5
Motorola M. X	1	0	0	0.5
Samsung G. S5	0.5	0	0	0

Cámara

	Apple I. 66	Sony E. Z3	Motorola M. X	Samsung G. S5
Apple I. 66	0	1	1	0
Sony E. Z3	0	0	0	0
Motorola M. X	0	0	0	0
Samsung G. S5	0	1	1	0

Precio

	Apple I. 66	Sony E. Z3	Motorola M. X	Samsung G. S5
Apple I. 66	0	0	0	0
Sony E. Z3	0.83333	0	0	0
Motorola M. X	1	0.16667	0	0
Samsung G. S5	1	0.16667	0	0

Paso 5: Matriz de índices de Preferencia Agregados

El índice de preferencia agregado expresa el grado de preferencia con que A_i supera a A_k

$$\Pi(A_i, A_k) = \sum_{j=1}^{n} P_j(A_i, A_k) * W_j \tag{41}$$

Cuando $\Pi(A_i, A_k) \approx 0$ se indica una preferencia global débil de A_i sobre A_k. Cuando $\Pi(A_i, A_k) \approx 1$ se indica una preferencia global fuerte de A_i sobre A_k.

Este cumple las siguientes propiedades:

- $\Pi(A_i, A_i) = 0$
- $0 \leq \Pi(A_i, A_k) \leq 1$
- $0 \leq \Pi(A_i, A_k) + \Pi(A_k, A_i) \leq 1$

	Apple I. 66	Sony E. Z3	Motorola M. X	Samsung G. S5	Suma
Apple I. 66	0	0.35	0.35	0	0.7
Sony E. Z3	0.6	0	0	0.4	0.775
Motorola M. X	0.65	0.5	0	0.175	0.875
Samsung G. S5	0.475	0.4	0.35	0	1.225
Suma	1.725	0.8	0.7	0.35	

Comparando la matriz encontrada con la matriz planteada en la instrucción, se ven algunas diferencias. Estas son explicadas debido a que en la realización de esta, no se ponderó la matriz de decisión antes de generar las matrices de diferencias.

Paso 6: Flujos de sobrecalificación

- Flujo de sobrecalificación positivo
  Expresa como una alternativa supera a todas las otras.
  El mayor de los $\phi^+(A_i)$ es la mejor alternativa.

$$\phi^+(A_i) = \frac{\sum \Pi(A_i, A_k)}{m-1}, k = 1, 2, ..., m \tag{42}$$

- Flujo de sobrecalificación negativo
  Expresa como una alternativa es superada por todas las otras.
  El menor de los $\phi^-(A_i)$ es la mejor alternativa.

$$\phi^-(A_i) = \frac{\sum \Pi(A_k, A_i)}{m-1}, k = 1, 2, ..., m \tag{43}$$

	Flujo Positivo	Flujo Negativo
Apple I. 66	0.23333	0.57500
Sony E. Z3	0.25833	0.26667
Motorola M. X	0.29167	0.23333
Samsung G. S5	0.40833	0.11667

Ranking según el flujo positivo	Ranking según el flujo negativo
Samsung G. S5	Samsung G. S5
Motorola M. X	Motorola M. X
Sony E. Z3	Sony E. Z3
Apple I. 66	Apple I. 66

Paso 7: Flujo neto de sobrecalificación

Para Promethee II se usa un ranking completo para lo que se considera el flujo neto de sobrecalificación ($\phi(A_i)$):

$$\phi(A_i) = \phi^+(A_i) - \phi^-(A_i) \tag{44}$$

La alternativa de mayor $\phi(A_i)$ será clasificada como la mejor alternativa.

Este cumple las siguientes propiedades:

- $-1 \leq \phi(A_i) \leq 1$
- $\sum_{A_i \in A} \phi(A_i) = 0$

	Flujo Positivo	Flujo Negativo	Flujo Neto
Apple I. 66	0.23333	0.57500	-0.34167
Sony E. Z3	0.25833	0.26667	-0.00833
Motorola M. X	0.29167	0.23333	0.05833
Samsung G. S5	0.40833	0.11667	0.29167

Ranking según el flujo neto
Samsung G. S5
Motorola M. X
Sony E. Z3
Apple I. 66

Se concluye que la mejor alternativa según el método Promethee II es Samsung G. S5.

Referencias

[1] Mariana Arburua. Método de decisión multicriterio: Promethee, 2017.

[2] Jean-Pierre Brans and Bertrand Mareschal. *Promethee Methods*, pages 163–186. Springer New York, New York, NY, 2005.

[3] J.P. Brans, Ph. Vincke, and B. Mareschal. How to select and how to rank projects: The promethee method. *European Journal of Operational Research*, 24(2):228–238, 1986.

[4] Matthias Ehrgott. International doctoral school algorithmic decision theory: Mcda and moo. lecture 2: Multiobjective linear programming, September 2007.