

# Optimización de mallas

**Luisa Toro Villegas**  
Universidad EAFIT  
Medellín, Colombia  
ltorov@eafit.edu.co

**Gregorio Pérez Bernal**  
Universidad EAFIT  
Medellín, Colombia  
gperezb1@eafit.edu.co

**Andrés Gómez Arango**  
Universidad EAFIT  
Medellín, Colombia  
agomeza10@eafit.edu.co

29 de julio de 2022

## 1) Introducción

Este proyecto tiene como objetivo construir o generar una malla usando optimización. El método parte con la topología de la red (malla) conocida como proyección (la proyección de la red o malla de la superficie sobre el plano  $XY$ ). Se busca aproximar la siguiente superficie:

$$z = f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2 + 1}, \quad (x, y) \in [0, 3] \times [0, 3]$$

## 2) Objetivo

La triangulación de la superficie debe minimizar la desviación típica o la varianza de las áreas del triángulo. Por tanto, se busca una red que presenta la mayor similitud en términos de las áreas del triángulo. En otras palabras, se minimiza la función:

$$\sum_{i=1}^n \frac{(a(i) - \bar{a})^2}{n}$$

sujeto a las restricciones frontera, donde  $a(i)$  es el área del triángulo  $i$ ,  $\bar{a}$  es la media correspondiente, y  $n$  es el número de triángulos.

## 3) Metodología

### 3.a. Creación de los nodos y triangulación

La forma en la que se plantea el siguiente problema de nodos es mediante la creación de nodos equidistantes. De esta manera, se propone la siguiente configuración: crear una distribución uniforme de nodos, de manera que para cada punto en  $y$  para los que existen nodos, existe el mismo número de nodos. La **Figura. 1** ilustra la manera en la que se crearon dichos nodos. Los nodos están definidos de la siguiente manera:

$$Nodo = (x_i, y_j), \forall i = 0, 1, 2, \dots, n; j = 0, 1, 2, \dots, n$$

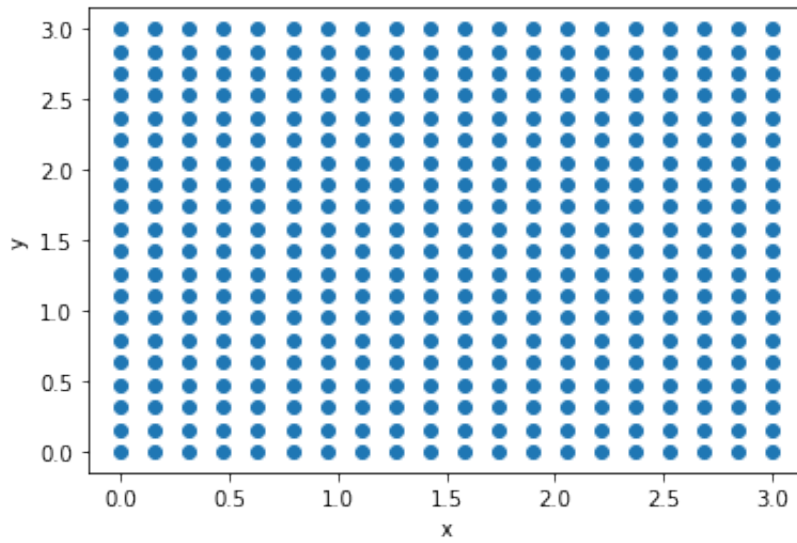


Figura 1: Distribución de  $20 \times 20$  nodos en  $[0, 3] \times [0, 3]$

Ahora, tomando en cuenta la definición de los nodos utilizada, es necesario realizar una triangulación, es decir, cubrir la superficie uniendo cada nodo mediante vértices, así formando triángulos. Existen diferentes maneras que pueden ser usadas para afrontar este problema. La manera en la que se crearon estos triángulos se muestra a continuación, usando  $N_{i,j}$  para definir el nodo encontrado en la posición  $(x_i, y_j)$ .

$$triag = (N_{i,j}, N_{i+1,j}, N_{i,j+1}) = ((x_i, y_j), (x_{i+1}, y_j), (x_i, y_{j+1}))$$

$$triag = (N_{i+1,j}, N_{i,j+1}, N_{i+1,j+1}) = ((x_{i+1}, y_j), (x_i, y_{j+1}), (x_{i+1}, y_{j+1}))$$

La triangulación implementada se ilustra en la **Figura. 2**.

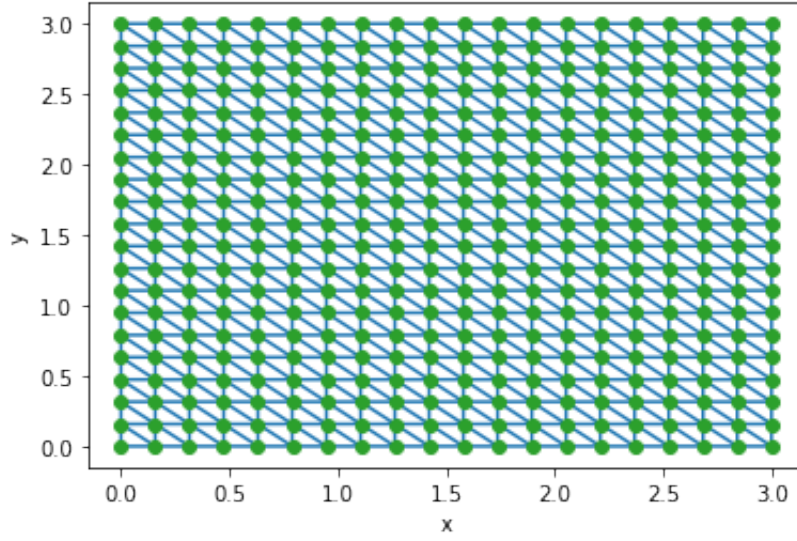


Figura 2: Malla en  $[0, 3] \times [0, 3]$  de  $20 \times 20$  nodos.

Ahora, teniendo esta triangulación, es necesario extenderla a  $\mathbb{R}^3$ , para poder comparar esto con la **Eq. 2**. Se propone así, la siguiente expresión, la cual define los nodos en  $3D$ .

$$Nodo3d = (x_i, y_j, f(x_i, y_j)) = (x_i, y_j, z_{i,j}), \forall i = 0, 1, 2, \dots, n; j = 0, 1, 2, \dots, n$$

Ahora, al evaluar cada nodo en la función, considerando que cada nodo hace parte de ciertos triángulos, se conserva esta triangulación, con el objetivo de llegar a una aproximación de  $f(x)$ . En la **Figura. 3**, se puede ver dicha aproximación.

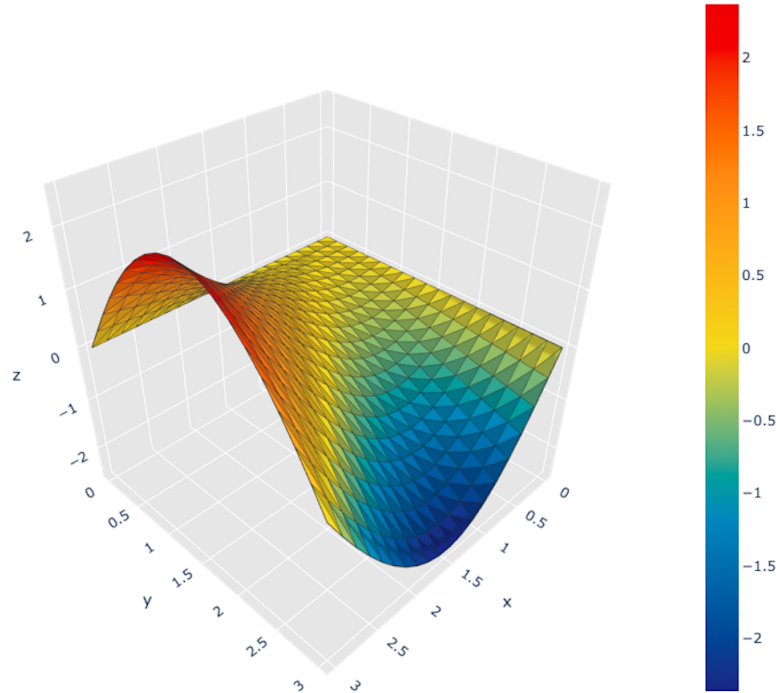


Figura 3: Aproximación de la función  $f(x, y)$  en  $[0, 3] \times [0, 3]$  con una malla de  $20 \times 20$  nodos.

### 3.1.1. Área de cada triángulo

Ahora, como se puede ver, es claro que los triángulos resultantes están ubicados en el espacio, de manera que la manera en la que se encuentra el área de dichos triángulos es diferente a la convencional. Se propone aplicar una metodología diferente, aplicando el producto cruz.

Sean tres puntos  $P1, P2, P3$ , definidos de la siguiente manera.

$$P1 = \langle x_1, y_1, z_1 \rangle$$

$$P2 = \langle x_2, y_2, z_2 \rangle$$

$$P3 = \langle x_3, y_3, z_3 \rangle$$

Para encontrar el área del triángulo formado por los tres puntos, se propone seguir la siguiente metodología, usando la estrategia del producto cruz. Ahora bien, como el producto vectorial es una operación netamente vectorial, se crean dos vectores usando diferencia de puntos. Sean  $u, v$  tal que:

$$u = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$

$$v = \langle x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1 \rangle$$

Por definición, la norma del producto cruz, representa el área del paralelogramo asociado a estos vectores. Ahora bien, el área del triángulo dado está dado de la siguiente manera.

$$A = \frac{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|}{2}$$

### 3.1.2. Área de la superficie

Es fundamental conocer el área de la superficie real, la cual se puede encontrar mediante una integral de superficie. Considere el siguiente planteamiento.

$$A_s = \int \int_R dS$$

Ahora bien, para hallar el área de la superficie, se plantea hallar la norma del producto cruz entre las derivadas parciales de la función.

$$A_s = \int \int_R \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2} \, dA$$

Aplicándolo en la función original, resulta la siguiente integral.

$$A_s = \int_0^3 \int_0^3 \sqrt{1 + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2 + 1} \right)^2 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2 + 1} \right)^2} \, dx dy$$

$$A_s = 17,4632u^2$$

## 4) Teselación centroidal de Voronoi (CVT) y método Quasi-Newton

Ahora bien, para poder optimizar el área de los triángulos encontrada anteriormente, es decir, minimizar la varianza entre el área entre ellos, es fundamental escribir el problema en términos de una función. Así, nacen las Teselaciones centroidales de Voronoi (CVT). [3]

Un CVT se define como un conjunto, el cual tiene la propiedad que cada elemento de este conjunto es a la vez el centroide de la celda de Voronoi a la cual pertenece. En otras palabras, en un CVT, se tiene un conjunto de nodos, en el cual cada nodo hace referencia al centro de masa de la figura asociada a dicho nodo. Un ejemplo gráfico de esto se encuentra en la **Figura. 4**.

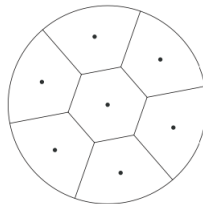


Figura 4: CVT genérico

Ahora, se procede a definir de una manera matemática un CVT. Sea  $x$  un conjunto ordenado de  $n$  elementos conectados en una. región  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . La región de Voronoi de cada  $x_i$  está dada por la siguiente expresión:

$$\Omega_i = \{x \in \Omega \mid \|x - x_i\| \leq \|x - x_j\|, j \neq i\}$$

Para mantener la generalidad, se tiene que  $\|\cdot\|$  se refiere a la norma euclidiana en  $\mathbb{R}^n$ . Ahora, es fundamental notar que cada elemento  $\Omega_i$  tiene una función  $\rho > 0$ , la cual se refiere a una función de densidad. [1] Así, cada centroide está definido por:

$$c_i = \frac{\int_{\Omega_i} \rho(x) x d\sigma}{\int_{\Omega_i} \rho(x) d\sigma}$$

Ahora, para lograr optimizar un CVT, es necesario definir una función característica de este, de manera que dicha función pueda ser optimizada con un algoritmo clásico. Así, se define  $F(x)$ :

$$F(x) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_i} \rho(x) \|x - x_i\|^2 d\sigma$$

Esta es la función que se planea optimizar. Ahora bien, el método elegido para optimizar dicha función es el método de Quasi-Newton. Este método exige únicamente un cálculo de la primera derivada, o gradiente. Notar que el gradiente de  $F(x)$  está dado por:

$$F_{x_i} = 2 \int_{\Omega_i} \rho(x) d\sigma (x_i - c_i)$$

Se prefiere aplicar un método Quasi-Newton sobre el método de Newton justamente porque se tiene un gradiente definido, sin embargo, el cálculo de una segunda derivada presenta ciertos inconvenientes para el método de Newton, pues esta matriz no siempre será semi-definida positiva, de manera que se prefiere la aplicación de un método Quasi-Newton, aplicando el método de Limited memory BFGS como preferencia. Notar que el CVT en cuestión, por definición está dado por los puntos críticos de  $F(x)$ .

## 5) Resultados

La tabla 1 nos muestra las varianzas de las áreas de los triángulos en la malla en  $\mathbb{R}^3$ , según cada método de optimización de la librería *optimesh* comparándolas con el mismo parámetro de la malla original, es decir, antes de ser optimizada. Para esto se utiliza una tolerancia de  $1 * 10^{-10}$  y 1000 como número máximo de iteraciones. [2]

Método	Malla original	CVT Quasi-Newton	CPT Quasi-Newton	ODT BFGS
Varianza de las áreas	$7.3769 * 10^{-5}$	$5.2502 * 10^{-6}$	$3.5617 * 10^{-5}$	$2.8480 * 10^{-5}$

Cuadro 1: Varianza de las áreas según diferentes métodos de la librería *optimesh*

Es claro que, según el objetivo planteado, el mejor método de los expuestos es CVT Quasi-Newton debido a que tiene la menor varianza de las áreas de los triángulos, por esto se decide utilizar este método.

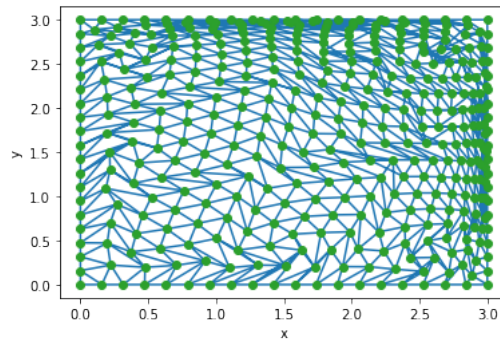


Figura 5: Malla optimizada en  $\mathbb{R}^2$  con Quasi-Newton CVT

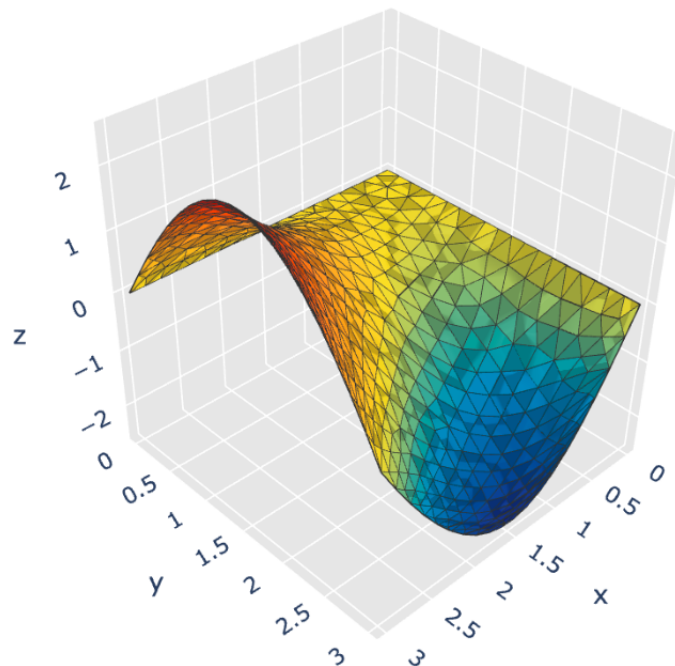


Figura 6: Malla optimizada en  $\mathbb{R}^3$  con Quasi-Newton CVT

Se puede ver que la malla en cuestión muestra coherencia en el tamaño de sus triángulos, y es similar a la función original a optimizar. Todo esto es indicio de que los resultados son confiables y se pueden aplicar en un futuro.

Se muestra un cuadro comparativo con la malla optimizada en  $\mathbb{R}^2$  y la malla original en  $\mathbb{R}^2$ , para comparar y contrastar los resultados.

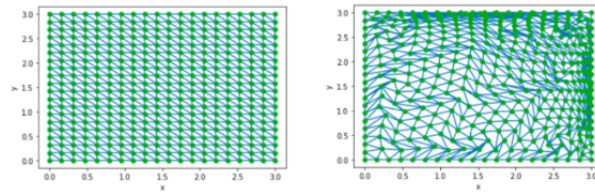


Figura 7: Malla optimizada vs malla no optimizada

## 6) Conclusiones

Se comprendieron las aplicaciones en el mundo real que estos temas, los cuales sirven para temas como renderización, aplicaciones en topografía y diseño 3D.

Se aplicaron conceptos de teoría de conjuntos y cálculo vectorial para modelar el mallado.

Se plantea un trabajo futuro en el que se busque minimizar la diferencia entre la superficie real y la superficie aproximada.

## Referencias

- [1] Vance Faber and Max Gunzburger. Centroidal voronoi tessellations: Applications and algorithms. *Siam Review - SIAM REV*, 41:637–676, 12 1999.
- [2] Python Software Foundation. Optimesh - pypi. septiembre 2021.
- [3] Yang Liu, Wenping Wang, Bruno Lévy, Feng Sun, Dong-Ming Yan, Lin Lu, and Chenglei Yang. On centroidal voronoi tessellation–energy smoothness and fast computation, Dec 2010.