Taller final

Luisa Toro Villegas
Universidad EAFIT
Medellín, Colombia
ltorov@eafit.edu.co

July 29, 2022

1) *Pregunta 1*

Considere $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$, una secuencia de variables aleatorias independientes y esperanza finita y sea $S_n = \sum_{i=1}^{n} \zeta_i$.

Fije n. Muestre que

$$M_m = S_{n-m}/(n-m)$$

para $0 \leq m < n$ es una martingala con respecto a M_m

Demostración

Veamos que MI_m es una martingala. Debemos probar que $E(|M_m|) < \infty$ y que $E(M_{m+1} - M_m \mid M_m = m_{n,\ldots,} M_0 = m_0) = 0$:

i. $E(|M_m|) < \infty$.

Sea

$$\begin{aligned} E(|M_m|) &= E(|S_{n-m}/(n-m)|) \\ &= \frac{1}{n-m} E(|S_{n-m}|) = \frac{1}{n-m} E\left(\sum_{i=1}^{n-m} \zeta_i \mid\right) \\ &= \frac{1}{n-m}\left(E(|\zeta_1|) + \ldots + E(|\zeta_{n-m}|)\right) \end{aligned}$$

Se sabe que ζ_i tiene esperanza finita, es decir, $E(\zeta_i) = \mu < \infty$. Así, $E(|M_m|) < \infty$

ii. $E(M_{m+1} - M_m \mid M_m = m_{n,\ldots,} M_0 = m_0) = 0$.

Veamos

$$
\begin{aligned}
M_{m+1} - M_m =& \frac{S_{n-m-1}}{(n-m-1)} - \frac{S_{n-m}}{(n-m)} \\
=& \frac{1}{n-m-1} \sum_{i=1}^{n-m-1} \zeta_i - \frac{1}{n-m} \sum_{i=1}^{n-m} \zeta_i \\
=& \frac{1}{n-m-1} \left(\zeta_1 + \ldots + \zeta_{n-m-1}\right) - \frac{1}{n-m} \left(\zeta_1 + \ldots + \zeta_{n-m}\right) \\
=& \left(\zeta_1 + \ldots + \zeta_{n-m-1}\right) \left(\frac{1}{n-m-1} - \frac{1}{n-m} \right) - \frac{\zeta_{n-m}}{n-m} \\
=& \left(\zeta_1 + \ldots + \zeta_{n-m-1}\right) \left(\frac{1}{(n-m-1)(n-m)} \right) - \frac{\zeta_{n-m}}{n-m}
\end{aligned}
$$

Luego, por definición se tiene

$$
\begin{aligned}
E\left(M_{m+1} - M_m \mid M_m = m_n, \ldots, M_0 = m_0\right) &= E\left(\frac{S_{n-m-1}}{(n-m-1)} - \frac{S_{n-m}}{(n-m)} \mid M_m = m_n, \ldots, M_0 = m_0 \right) \\
&= E\left(\left(\zeta_1 + \ldots + \zeta_{n-m-1}\right) \frac{1}{(n-m-1)(n-m)} - \frac{\zeta_{n-m}}{n-m} \mid M_m = m_n, \ldots, M_0 = m_0 \right)
\end{aligned}
$$

- $E\left(\left(\zeta_1 + \ldots + \zeta_{n-m-1}\right) \frac{1}{(n-m-1)(n-m)} \mid M_m = m_n, \ldots, M_0 = m_0 \right)$

$$
= \frac{1}{(n-m-1)(n-m)} E\left(\left(\zeta_1 + \ldots + \zeta_{n-m-1}\right) \mid M_m = m_n, \ldots, M_0 = m_0\right)
$$

$$
= \frac{1}{(n-m-1)(n-m)} \left(E\left(\zeta_1 \mid H_m = m_n, \ldots, M_0 = m_0\right) + \ldots + E\left(\zeta_{m-n-1} \mid M_m = m_n, \ldots, M_0 = m_0\right)\right)
$$

Se tiene que $E\left(\zeta_1\right) = \mu < \infty$, así:

$$
\frac{\mu(m-n-1)}{(m-n-1)(m-n)} = \frac{\mu}{m-n}
$$

- $E\left(-\frac{\zeta_{n-m}}{n-m} \mid M_m = m_n, \ldots, M_0 = m_0 \right)$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{m-n} E\left(\zeta_{n-m} \mid MI_m = m_{n,\ldots,} M_0 = m_0\right) \\
&= \frac{-\mu}{m-n}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, se tiene:

$$
\begin{aligned}
&= E\left(\left(\zeta_1 + \ldots + \zeta_{n-m-1}\right) \frac{1}{(n-m-1)(n-m)} - \frac{\zeta_{n-m}}{n-m} \mid M_m = m_{n,\ldots,} M_0 = m_0 \right) \\
&= \frac{\mu}{m-n} - \frac{\mu}{n-m} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$\therefore$ Queda demostrado que $M_m = S_{n-m}/(n-m)$ es una martingala.

2) Pregunta 2

Suponga que en una elección el candidato A obtiene a votos mientras el candidato B obtiene b votos. Suponiendo que el candidato A gana ($a > b$). Lo que se desea probar es que la probabilidad de que A siempre lidere durante el recuento de votos es $(a-b)/n$, donde $n = a+b$ es el total de votantes.

Utilizando simulación muestre que es verdad.

El código está en el siguiente Link.

Votos	Simulaciones	Probabilidad Teórica	Probabilidad Real	Error L2
100	1000	0.0880	0.0904	6.1417×10^{-6}
	10000	0.0811	0.0869	3.3639×10^{-5}
	100000	0.0778	0.0863	7.2250×10^{-5}
500	1000	0.0340	0.0345	2.5000×10^{-7}
	10000	0.0358	0.0372	1.9599×10^{-6}
	100000	0.0356	0.0371	2.2500×10^{-6}
1000	1000	0.0250	0.0258	6.3999×10^{-7}
	10000	0.0253	0.0265	1.4399×10^{-6}
	100000	0.0251	0.0258	4.8999×10^{-7}

Table 1: Simulación de una votación modelada según una martingala con diferentes números de votos y de simulaciones.

3) Pregunta 3

Utilizando el teorema de parada opcional muestre que la probabilidad de que A siempre lidere durante el recuento de votos es $(a-b)/n$

Pista: Considere S_n con renovaciones $\zeta_i = 0$ con probabilidad $1/2$ por un voto para el candidato A y $\zeta_i = 2$ con probabilidad $1/2$ por un voto del candidato B.

Demostración

Sea $a > b$ y $n = a+b$, con S_k el número de votos con los cuales el candidato A está liderando, después de que se hayan contado k votos. Luego, sea $S_n = a-b$ y $X_k = \frac{S_{n-k}}{n-k}$ para $0 \leq k \leq n-1$. Para mostrar que X_k es una martingala tenemos que encontrar (1):

$$E\left[X_k \mid X_0, \ldots, X_{k-1}\right] = E\left[\frac{S_{n-k}}{n-k} \mid S_n, \ldots, S_{n-k+1}\right] \tag{1}$$

Sea a_k el número de votos para A después de que se hayan contando k votos, y b_k el número de votos para B después de que se hayan contando k votos. Se tiene que (2):

$$\begin{aligned} a_{n-k+1} &= \frac{n-k+1+S_{n-k+1}}{2} \\ b_{n-k+1} &= \frac{n-k+1-S_{n-k+1}}{2} \end{aligned} \tag{2}$$

y además (3):

$$S_{n-k} = \begin{cases} S_{n-k+1} + 1 & \text{if n} - \text{k} + 1 \text{ vote is for B} \\ S_{n-k+1} - 1 & \text{if n} - \text{k} + 1 \text{ vote is for A} \end{cases} \tag{3}$$

Lo cual lleva a que (4):

$$\begin{gathered} E\left[S_{n-k} \mid S_{n-k+1}\right] = \left(S_{n-k+1} + 1\right) \frac{a_{n-k+1}}{(n-k+1)} + \left(S_{n-k+1} - 1\right) \frac{b_{n-k+1}}{(n-k+1)} \\ E\left[S_{n-k} \mid S_{n-k+1}\right] = S_{n-k+1} \frac{n-k}{n-k+1} \end{gathered} \tag{4}$$

De lo que se llega a que (5):

$$E\left[X_k \mid X_0, \ldots, X_{k-1}\right] = E\left[\frac{S_{n-k}}{n-k} \mid S_n, \ldots, S_{n-k+1}\right] = \frac{S_{n-k+1}}{n-k+1} = X_{k-1} \tag{5}$$

$\therefore$ Y así tenemos que X_k es una martingala. Por el teorema de parada se tiene que:

$$E\left[X_T\right] = E\left[X_0\right] = \frac{E\left[S_n\right]}{n} = \frac{a-b}{a+b} \tag{6}$$

4) Pregunta 4

Considere el evento

$$G = \{S_j < j, \text{ para todo } j\}$$

¿G es realmente equivalente al evento $\{A$ lidera siempre el conteo de votos $\}$?

Solución

Sea $S_j = \sum_{i=0}^{j} \zeta_i$ donde ζ_i puede ser 0 con probabilidad de $1/2$ en el caso de que el voto sea para A, y puede ser 2 con probabilidad $1/2$ cuando el voto sea para B. Si B está ganando o hay empate, para el voto j, se tiene que $S_j \leq j$. Así, el conjunto de eventos donde A lidera las elecciones es el mismo conjunto de eventos donde B va perdiendo las elecciones para todos los votos j. Es decir, los conjuntos son equivalentes.

5) Pregunta 5

Utilizando el resultado de la **Pregunta 1** defina una martingala M_n y
$T = min\{m : M_m = 1 \; o \; m = n-1\}$.
Finalmente, utilice el teorema de parada opcional para mostrar

$$P(G) = (a+b)/n$$

Demostración

Por el teorema de parada opcional tenemos $E(M_T) = E(M_0)$. Como $M_0 = \frac{2b}{a+b}$ y
$E(M_T) = 0 \times P(G) + 1 \times P(G^C)$, se tiene

$$\begin{gathered}
0 \times P(G) + 1 \times P(G^C) = \tfrac{2b}{a+b} \\
1 - P(G) = \tfrac{2b}{a+b} \\
P(G) = 1 - \tfrac{2b}{a+b} \\
= \tfrac{a-b}{a+b} \\
\therefore P(G) = \tfrac{a-b}{n}
\end{gathered} \tag{7}$$