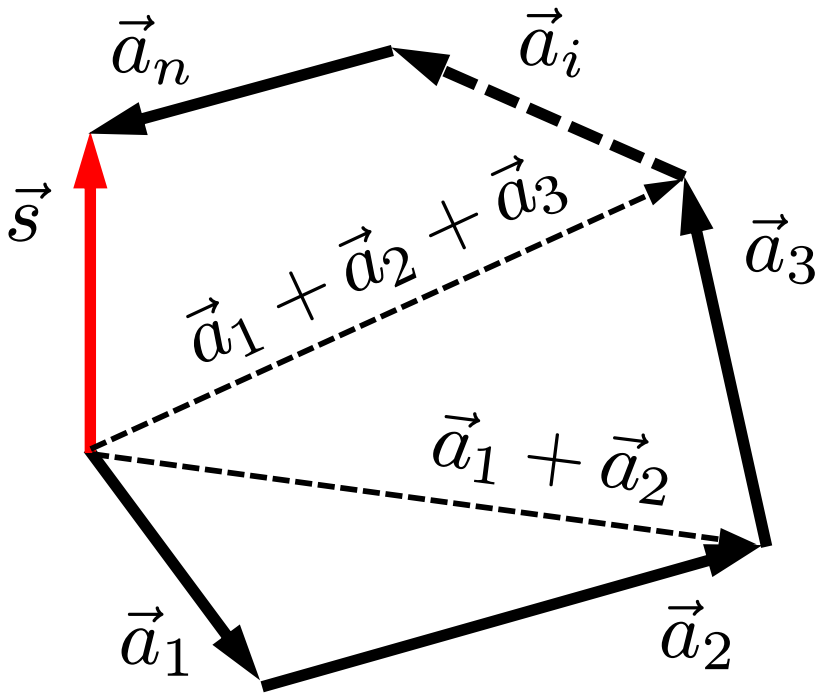
Mathematik I

- Vorlesungsnotizen -



Version 2.1

U. Teschke

Inhaltsverzeichnis

1 Mengen **1-I**
1.1 Mengen und Teilmengen 1-1
1.1.1 Zahlenmengen 1-1
1.1.2 Teilmengen 1-3
1.2 Mengenoperationen 1-4
1.3 Produktmengen 1-4
1.4 Beweismethoden 1-5
1.4.1 Einführung 1-5
1.4.2 Formale Schreibweisen 1-7
1.4.3 Vollständige Induktion 1-8
1.5 Binomischer Satz 1-9
1.5.1 Binomialkoeffizient 1-9
1.5.2 Eigenschaften 1-10
1.5.3 Anwendungen des Binomischen Satzes 1-12
1.5.4 Beweis des binomischen Lehrsatzes (Ergänzung) 1-13
1.6 Hinweise 1-14
1.7 Aufgaben zu Kapitel 1 - Mengen 1-17
1.7.1 Logarithmen, Summenzeichen, quadratische Gleichung 1-17
1.7.2 Mengen 1-18
1.7.3 Vollständige Induktion 1-18
1.7.4 Binomischer Lehrsatz 1-19

2 Vektorrechnung und Vektorräume **2-I**
2.1 Vektoren 2-1
2.1.1 Einführung 2-1
2.1.2 Skalare 2-1
2.1.3 Vektoren 2-1
2.1.3.1 Gleichheit und Parallelität von Vektoren 2-3
2.1.3.2 Komponentendarstellung 2-3
2.1.4 Vektoroperationen 2-5
2.1.4.1 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar 2-5
2.1.4.2 Addition von Vektoren 2-6
2.1.4.3 Subtraktion von Vektoren 2-7
2.1.4.4 Skalarprodukt 2-8
2.1.4.5 Vektorprodukt 2-9

2.1.4.6 Spatprodukt . . . 2-11
2.1.5 Ausblick Tensoren . . . 2-12
2.2 Vektorräume . . . 2-13
2.2.1 Definition . . . 2-13
2.2.2 Beispiele . . . 2-14
2.2.2.1 Vektorraum R^n . . . 2-14
2.2.2.2 Lösungsmenge eines homogenen Gleichungssystems . . . 2-14
2.2.2.3 Komplexe Zahlen . . . 2-14
2.2.2.4 Funktionen . . . 2-14
2.2.2.5 Matrizen . . . 2-14
2.2.3 Lineare Abhängigkeit . . . 2-14
2.2.3.1 Einführung . . . 2-14
2.2.3.2 Sätze über Lineare Abhängigkeit . . . 2-15
2.2.3.3 Basis und Dimension . . . 2-16
2.2.3.4 Beispiele . . . 2-16
2.3 Anwendungen in der Geometrie . . . 2-17
2.3.1 Vektorielle Darstellung einer Geraden . . . 2-17
2.3.1.1 Punkt-Richtungs-Form . . . 2-17
2.3.1.2 Zwei-Punkte-Form . . . 2-17
2.3.2 Abstand eines Punktes von einer Geraden . . . 2-17
2.3.3 Abstand zweier paralleler Geraden . . . 2-18
2.3.4 Abstand zweier windschiefer Geraden . . . 2-18
2.3.5 Schnittpunkt und Schnittwinkel zweier Geraden . . . 2-19
2.3.6 Vektorielle Darstellung einer Ebene . . . 2-19
2.3.6.1 Punkt-Richtungs-Form . . . 2-19
2.3.6.2 Drei-Punkte-Form . . . 2-20
2.3.7 Ebene senkrecht zu einem Vektor . . . 2-20
2.3.8 Abstand eines Punktes von einer Ebene . . . 2-20
2.3.9 Abstand einer Geraden von einer Ebene . . . 2-21
2.3.10 Abstand zweier paralleler Ebenen . . . 2-21
2.3.11 Schnittpunkt und Schnittwinkel einer Geraden mit einer Ebene . . . 2-22
2.3.12 Schnittwinkel zweier Ebenen () . . . 2-22
2.4 Aufgaben zu Kapitel 2 . . . 2-23
2.4.1 Einführung . . . 2-23
2.4.2 Skalarprodukt . . . 2-23
2.4.3 Vektorprodukt . . . 2-23
2.4.4 Spatprodukt . . . 2-24
2.4.5 Anwendungen in der Geometrie . . . 2-24
2.4.6 Vektorräume . . . 2-24
2.4.7 Lineare Abhängigkeit . . . 2-25
2.4.8 Basis und Dimension . . . 2-25

3 Lineare Algebra **3-I**
3.1 Lineare Gleichungssysteme . . . 3-1
3.1.1 Vorbemerkungen . . . 3-1
3.1.2 System von linearen Gleichungen . . . 3-2
3.1.3 Transfomation auf Trapezform (speziell Dreicksform) . . . 3-4
3.1.4 Beschreibung der Lösungsmenge . . . 3-7
3.1.5 Homogene Gleichungssysteme . . . 3-12
3.2 Matrizen . . . 3-13
3.2.1 Grundbegriffe . . . 3-13
3.2.2 Addition . . . 3-14
3.2.3 Vielfachenbildung . . . 3-14
3.2.4 Multiplikation . . . 3-16
3.2.4.1 Einführende Beispiele und Festlegungen . . . 3-16
3.2.4.2 Eigenschaften . . . 3-20
3.3 Inverse Matrix, Determinanten . . . 3-21
3.3.1 Inverse Matrix . . . 3-21
3.3.2 Determinanten zweiter Ordnung . . . 3-22
3.3.3 Determinanten dritter Ordnung . . . 3-24
3.3.4 Determinanten n-ter Ordnung . . . 3-25
3.3.4.1 Definition . . . 3-25
3.3.4.2 Rechenregeln . . . 3-26
3.3.4.3 Strategie für die Berechnung . . . 3-28
3.3.4.4 Weitere Rechenregeln . . . 3-29
3.3.5 Cramersche Regel . . . 3-30
3.4 Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystem . . . 3-33
3.4.1 Schreibweisen . . . 3-33
3.4.2 Rang eines Linearen Gleichungssystems . . . 3-34
3.4.3 Struktur der Lösungsmenge . . . 3-35
3.4.3.1 Homogene lineare Gleichungssysteme . . . 3-35
3.4.3.2 Inhomogene lineare Gleichungssysteme . . . 3-35
3.4.3.3 Beliebige lineare Gleichungssysysteme . . . 3-36
3.5 Spezielle Matrizen und Eigenwerte . . . 3-36
3.5.1 Orthogonale Matrix . . . 3-37
3.5.2 Diagonalmatrix . . . 3-38
3.5.3 Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix . . . 3-38
3.6 Aufgaben zu Kapitel 3 . . . 3-42

4 Komplexe Zahlen **4-I**
4.1 Hankelsches Permanenzprinzip . . . 4-1
4.2 Operationen für komplexe Zahlen . . . 4-4
4.2.1 Einführung der Operationen . . . 4-4
4.2.2 Regeln für die Operationen . . . 4-6
4.3 Gaußsche Zahlenebene . . . 4-7
4.4 Trigonometrische Form . . . 4-9
4.4.1 Einführung . . . 4-9

4.4.2 Multiplikation und Division in trigonometrischer Form 4-11
4.4.3 Potenzieren 4-11
4.4.4 Satz von Moivre - Spezielle Additionstheoreme 4-12
4.5 Exponentialform 4-14
4.6 Reine Gleichungen 4-16
4.7 Lösbarkeit algebraischer Gleichungen 4-17
4.7.1 Quadratische Gleichungen 4-17
4.7.2 Algebraische Gleichungen n-ten Grades 4-17
4.8 Aufgaben zu Kapitel 4 4-20

5 Funktionen **5-I**
5.1 Relationen und Funktionen 5-1
5.2 Spezielle Eigenschaften von Funktionen 5-3
5.2.1 Monotonie 5-3
5.2.2 Beschränktheit 5-3
5.2.3 Symmetrie 5-4
5.2.4 Periodizität 5-4
5.2.5 Umkehrung 5-5
5.3 Elementare Funktionen 5-7
5.3.1 Rationale Funktionen 5-7
5.3.2 Horner Schema 5-9
5.3.3 Gebrochenrationale Funktionen 5-11
5.3.4 Kegelschnitte 5-13
5.3.4.1 Einführung 5-13
5.3.4.2 Kreis 5-14
5.3.4.3 Parabel 5-14
5.3.5 Potenz- und Wurzelfunktionen 5-15
5.3.5.1 Potenzfunktionen 5-15
5.3.5.2 Wurzelfunktionen 5-16
5.3.6 Potenzen und Logarithmen 5-17
5.3.6.1 Potenzgesetze 5-17
5.3.6.2 Logarithmen und Logarithmengesetze 5-17
5.3.6.3 Logarithmensysteme 5-18
5.3.6.4 Basiswechsel - Umrechnung in andere Logarithmensysteme . 5-18
5.3.7 Exponential- und Logarithmusfunktionen 5-19
5.3.7.1 Exponentialfunktion 5-19
5.3.7.2 Logarithmusfunktion 5-19
5.3.8 Trigonometrische Funktionen 5-20
5.3.8.1 Sinusfunktion 5-22
5.3.8.2 Kosinusfunktion 5-22
5.3.8.3 Tangensfunktion 5-22
5.3.8.4 Kotangensfunktion 5-22
5.3.8.5 Wertetafel besonderer Funktionswerte 5-23
5.3.8.6 Beziehungen zwischen den Funktionen 5-23
5.3.8.7 Zusammenhang der Funktionswerte 5-23

5.3.9 Arkusfunktionen . . . 5-24
5.3.9.1 Arkusinusfunktion . . . 5-24
5.3.9.2 Arkuskosinusfunktion . . . 5-24
5.3.9.3 Arkustangensfunktion . . . 5-24
5.3.9.4 Arkuskotangensfunktion . . . 5-24
5.3.9.5 Wertetafel besonderer Funktionswerte . . . 5-25
5.3.9.6 Zusammenhang der Funktionswerte . . . 5-26
5.3.9.7 Umkehrung . . . 5-26
5.3.10 Hyperbelfunktionen . . . 5-27
5.3.11 Areafunktionen . . . 5-29
5.4 Operationen für Funktionen . . . 5-31
5.4.1 Grundlegende Operationen . . . 5-31
5.4.2 Verkettung . . . 5-31
5.4.3 Definitionsbereiche . . . 5-31
5.5 Funktionen in Parameterdarstellung . . . 5-32
5.5.1 Kreis . . . 5-32
5.5.2 Ellipse . . . 5-33
5.5.3 Zykloide . . . 5-34
5.5.4 Schiefer Wurf . . . 5-34
5.6 Aufgaben zu Kapitel 5 . . . 5-36
5.6.1 Eigenschaften von Funktionen . . . 5-36
5.6.2 Linearfaktoren . . . 5-36
5.6.3 Umkehrfunktion . . . 5-36
5.6.4 Polynomdivison . . . 5-37
5.6.5 Horner Schema . . . 5-37
5.6.6 Pol und Lücke . . . 5-37
5.6.7 Trigonometrische Funktionen . . . 5-38
5.6.8 Hyperbelfunktionen . . . 5-39
5.6.9 Areafunktionen . . . 5-39
5.6.10 Normalparabel . . . 5-40
5.6.11 Exponential- und logarithmische Gleichungen . . . 5-41

6 Zahlenfolgen und Stetigkeit 6-I
6.1 Zahlenfolgen . . . 6-1
6.2 Arithmetische und geometrische Folgen . . . 6-4
6.2.1 Einführung . . . 6-4
6.2.2 Beispiele . . . 6-5
6.2.2.1 Zinseszinsformel . . . 6-5
6.2.2.2 Achilles und die Schildkröte . . . 6-6
6.3 Grenzwert einer Funktion . . . 6-7
6.3.1 Einführung . . . 6-7
6.3.2 Grenzwertsatz für Funktionen . . . 6-10
6.4 Stetigkeit . . . 6-11
6.4.1 Stetigkeit an einer Stelle x_0 . . . 6-11
6.4.2 Stetigkeit in einem Intervall . . . 6-11

6.5 Eigenschaften stetiger Funktionen 6-12
6.6 Aufgaben zu Kapitel 6 6-13
6.6.1 Zahlenfolgen 6-13
6.6.2 Monotonie und Schranken 6-13
6.6.3 Bildungsgesetze 6-14
6.6.4 Stetigkeit und Grenzwerte 6-16

7 Differentialrechnung 7-I
7.1 Ableitungen 7-1
7.1.1 Das Geschwindigkeitsproblem 7-1
7.1.2 Das Tangentenproblem 7-2
7.1.3 Definition der ersten Ableitung 7-2
7.1.3.1 Erste Ableitung an einer Stelle x_0 7-2
7.1.3.2 Erste Ableitung auf einem Intervall 7-3
7.2 Technik des Differenzierens 7-4
7.2.1 Ableitungsregeln 7-4
7.2.1.1 Summenregel 7-4
7.2.1.2 Ableitung von Funktionen mit konstantem Faktor 7-4
7.2.1.3 Produktregel 7-5
7.2.1.4 Quotientenregel 7-5
7.2.1.5 Kettenregel 7-6
7.2.1.6 Ableitung der Umkehrfunktion 7-6
7.3 Ableitung elementarer Funktionen 7-7
7.3.1 Natürliche Logarithmusfunktion 7-7
7.3.2 Exponentialfunktion 7-7
7.3.3 Allgemeine Exponentialfunktion 7-8
7.3.4 Allgemeine Logarithmusfunktion 7-8
7.3.5 Trigonometrische Funktionen 7-9
7.3.6 Arcus-Funktionen 7-10
7.3.7 Hyperbel- und Areafunktionen 7-11
7.3.8 Allgemeine Potenzfunktion 7-13
7.4 Übersicht elementarer Ableitungen 7-14
7.5 Logarithmische Differentation 7-15
7.6 Höhere Ableitungen 7-16
7.7 Physikalische Anwendungen 7-17
7.7.1 Geschwindigkeit und Beschleunigung 7-17
7.7.2 Weitere Anwendungen 7-17
7.8 Regeln für Ableitungen höherer Ordnung 7-18
7.9 Eigenschaften differenzierbarer Funktionen 7-19
7.9.1 Sekantengleichung 7-19
7.9.2 Differenzierbarkeit und Stetigkeit 7-20
7.9.3 Sätze von Fermat und Rolle 7-20
7.9.4 Mittelwertsatz der Differentialrechnung 7-21
7.10 Funktionsuntersuchung bzw. Kurvendiskussion 7-23
7.10.1 Monotonie 7-23

7.10.2 Extremstellen . . . 7-24
7.10.3 Krümmungsverhalten und Wendestellen . . . 7-27
7.10.4 Übersicht . . . 7-29
7.11 Regeln von l'Hospital . . . 7-30
7.12 Extremwertaufgaben . . . 7-34
7.13 Parameterdarstellung und impliziter Form . . . 7-35
7.13.1 Parameterdarstellung . . . 7-35
7.13.2 Funktionen in impliziter Darstellung . . . 7-35
7.14 Aufgaben zu Kapitel 7 . . . 7-36
7.14.1 Einführung in die Differentialrechnung . . . 7-36
7.14.2 Logarithmische Differentation . . . 7-37
7.14.3 Höhere Ableitungen . . . 7-38
7.14.4 Funktionsuntersuchung und Kurvendiskussion . . . 7-38
7.14.5 Regeln von Bernoulli l'Hospital . . . 7-39
7.14.6 Extremwertaufgaben . . . 7-40

8 Integralrechnung 8-I
8.1 Das unbestimmte Integral . . . 8-1
8.1.1 Integrationsregeln . . . 8-1
8.1.1.1 Stammfunktionen und unbestimmte Integrale . . . 8-1
8.1.1.2 Unbestimmte Integrale elementarer Funktionen . . . 8-2
8.1.1.3 Allgemeine Integrationsregeln für unbestimmte Integrale . . . 8-3
8.1.1.4 Partielle Integration . . . 8-4
8.1.1.5 Substitutionsmethode bei unbestimmten Integralen . . . 8-6
8.1.1.6 Grenzen beim Integrieren . . . 8-7
8.2 Das bestimmte Integral . . . 8-8
8.2.1 Definition, Existenz und Eigenschaften . . . 8-8
8.2.1.1 Integralsummen und das bestimmte Integral . . . 8-8
8.2.1.2 Integrierbare Funktionen . . . 8-9
8.2.1.3 Eigenschaften des bestimmten Integrals . . . 8-10
8.2.1.4 Mittelwertsatz der Integralrechnung . . . 8-12
8.2.2 Berechnung bestimmter Integrale . . . 8-13
8.2.2.1 Bestimmte Integrale mit variabler oberer Grenze . . . 8-13
8.2.2.2 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung . . . 8-15
8.2.2.3 Anwendungen des bestimmten Integrals in der Geometrie . . . 8-15
8.2.2.4 Hinweis zur Flächenberechnung . . . 8-16
8.3 Anwendungen der Integralrechnung in der Mechanik . . . 8-17
8.3.1 Statisches Moment . . . 8-17
8.3.1.1 Statisches Moment eines Massepunktes . . . 8-17
8.3.1.2 Statisches Moment einer ebenen homogenen Fläche . . . 8-17
8.3.2 Schwerpunktberechnung . . . 8-18
8.3.2.1 Allgemeine Überlegungen . . . 8-18
8.3.2.2 Schwerpunktkoordinaten mit Hilfe des Statischen Momentes 8-19
8.3.2.3 Flächenschwerpunkt von durch zwei Kurven begrenzten Flächen . . . 8-20

8.3.2.4 Teilschwerpunktsatz für Flächen 8-20
8.3.3 Momente zweiten Grades 8-21
8.3.3.1 Einführung 8-21
8.3.3.2 Moment zweiten Grades der Fläche unter einer Kurve 8-21
8.3.3.3 Satz von Steiner 8-22
8.3.4 Biegelinie 8-23
8.3.5 Guldinsche Regeln 8-23
8.3.5.1 Volumen 8-23
8.3.5.2 Oberfläche 8-23
8.3.6 Bogenlänge einer Kurve 8-24
8.4 Näherungsweise Berechnung bestimmter Integrale 8-25
8.4.1 Rechteckformel 8-25
8.4.2 Trapezformel 8-26
8.4.3 Keplersche Fassregel und Simpsonsche Regel 8-28
8.5 Uneigentliche Integrale 8-32
8.5.1 Unendliche Integrationsgrenzen 8-32
8.5.2 Unendlicher Integrand 8-33
8.6 Aufgaben zu Kapitel 8 8-34
8.6.1 Unbestimmte Integrale 8-34
8.6.2 Partielle Integration 8-34
8.6.3 Integration durch Substitution 8-34
8.6.4 Bestimmte Integrale 8-35
8.6.5 Integration nicht stetiger Funktionen 8-35
8.6.6 Uneigentliche Integrale 8-35
8.6.7 Länge eines Bogenstückes 8-35
8.6.8 Flächenbestimmung 8-35
8.6.9 Schwerpunktbestimmung 8-36
8.6.10 Flächenträgheitsmomente 8-37

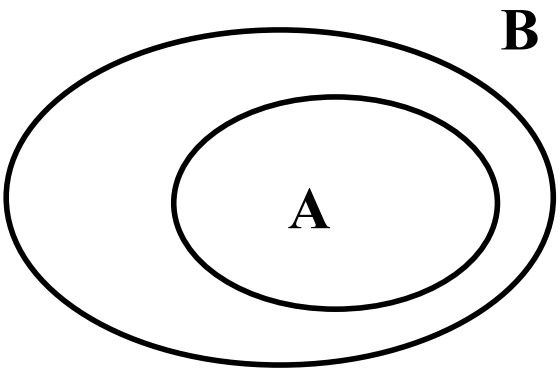
9 Unendliche Reihen 9-I
9.1 Allgemeine Eigenschaften 9-1
9.1.1 Einführung 9-1
9.1.2 Konvergenz und Divergenz 9-2
9.1.2.1 Einführung 9-2
9.1.2.2 Notwendiges Kriterium 9-3
9.1.2.3 Quotienten- und Wurzelkriterium 9-3
9.1.2.4 Kriterium von Leibniz 9-3
9.2 Potenzreihen 9-4
9.3 Taylorreihen 9-6
9.3.1 MacLaurinsche Reihe 9-6
9.3.2 Entwicklung elementarer Funktionen 9-7
9.3.2.1 Exponentialfunktionen 9-7
9.3.2.2 Trigonometrische Funktionen 9-7
9.3.2.3 Eulerformel 9-9
9.3.3 Taylorsche Reihe 9-10

9.4 Fourierreihen 9-11
9.4.1 Periodische Vorgänge in der Physik 9-11
9.4.2 Allgemeiner periodischer Vorgang 9-12
9.4.3 Berechnung der Koeffizienten 9-12
9.4.4 Eigenschaften von Fourierreihen 9-15
9.4.5 Fourierreihe eines Rechteckimpulses 9-16
9.5 Aufgaben zu Kapitel 9 - Unendliche Reihen 9-20
9.5.1 Konvergenz 9-20
9.5.2 Konvergenzradius und Konvergenzbereich 9-20
9.5.3 MacLaurinsche Reihe 9-20
9.5.4 Taylor-Reihe 9-20

Index **Ind-1**

Kapitel 1

Mengen



Kapitelinhalt

1.1 Mengen und Teilmengen 1-1
1.1.1 Zahlenmengen 1-1
1.1.2 Teilmengen 1-3
1.2 Mengenoperationen 1-4
1.3 Produktmengen 1-4
1.4 Beweismethoden 1-5
1.4.1 Einführung 1-5
1.4.2 Formale Schreibweisen 1-7
1.4.3 Vollständige Induktion 1-8
1.5 Binomischer Satz 1-9
1.5.1 Binomialkoeffizient 1-9
1.5.2 Eigenschaften 1-10
1.5.3 Anwendungen des Binomischen Satzes 1-12
1.5.4 Beweis des binomischen Lehrsatzes (Ergänzung) 1-13
1.6 Hinweise 1-14

1.7 Aufgaben zu Kapitel 1 - Mengen 1-17

1.7.1 Logarithmen, Summenzeichen, quadratische Gleichung 1-17

1.7.2 Mengen 1-18

1.7.3 Vollständige Induktion 1-18

1.7.4 Binomischer Lehrsatz 1-19

1.1 Mengen und Teilmengen

Die Grundlagen der Mengenlehre wurden von *Georg Cantor*[1] gelegt. Er gilt als der Begründer der Mengenlehre.

$x \in M, \;\; M = \{x, y, z, ...\}$ aufzählende Form, mit $\in$: Element von

1.1.1 Zahlenmengen

Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, ...\}$

Häufig wird die Menge der natürlichen Zahlen um die Zahl Null erweitert und als Mengenbezeichnung $\mathbb{N}_0$ verwendet.

Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} := \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$
Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q} := \left\{x | x = \frac{a}{b},\; a \in \mathbb{Z},\; b \in \mathbb{N}\right\}$

Beschreibende Form, z.B. $-\frac{7}{3} \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, entspricht Lösung der Gleichung $x^2 - 2 = 0$.

Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$:= umfasst rationale und irrationale Zahlen
$\varnothing$: leere Menge

Die Menge der reellen Zahlen kann nicht so einfach dargestellt werden. Eine detaillierte Betrachtung würde an dieser Stelle zu weit führen. Die nicht in $\mathbb{Q}$ liegenden Zahlen von $\mathbb{R}$ heißen irrationalen Zahlen. Beispiele sind $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π, e oder die Lösung der Gleichung $10^x = 5$ bzw. $\log_{10} = 5$.

Hier kann die Frage gestellt werden, kann relativ einfach gezeigt werden, dass es irrationale Zahlen gibt? Ein Beweis stammt von Euklid[2], ca. 320 Jahre vor unserer Zeitrechnung.

[1] deutscher Mathematiker, geb. 1845 St. Petersburg, gest. 1918 Halle/Saale
[2] Euklid von Alexandria, geb. um 365 v.C., gest. um 300 v.C. in Alexandria?

Beweis, dass $\sqrt{2}$ irrational ist:

Ausführlicher Beweis durch Widerspruch![3]

Es werden folgende Aussagen benötigt:

(1) Wird eine beliebige ganze Zahl mit 2 multipliziert, so ist das Ergebnis eine gerade Zahl.

(2) Ist das Quadrat einer Zahl gerade, so ist die Zahl selber auch gerade.

(3) Brüche können gekürzt werden. Allerdings ist es unmöglich, Brüche unendlich oft zu kürzen.

Annahme $\sqrt{2}$ ist rational. Dann Darstellung als Bruch, also als rationale Zahl möglich, wobei a und b ganze Zahlen darstellen,

$$\sqrt{2} = \tfrac{p}{q}\ , \quad \text{quadrieren ergibt} \quad 2 = \tfrac{p^2}{q^2}\ , \quad \text{umformen liefert} \quad 2 \cdot q^2 = p^2\ .$$

Damit muss p^2 nach (1) gerade sein und wegen Punkt (2) auch p. Es lässt sich folglich nach Einführung einer ganzen Zahl m schreiben $p = 2 \cdot m$ und somit

$$2 \cdot q^2 = (2 \cdot m)^2 = 4 \cdot m^2\ .$$

Teilung des Ausdrucks durch 2 führt auf

$$q^2 = 2 \cdot m^2\ .$$

Nach (1) folgt nun, dass auch q^2 gerade sein muss, da eine Darstellung aus dem Doppelten einer ganzen Zahl erfolgt. Nach (2) folgt somit, dass q ebenfalls gerade ist, da q^2 gerade ist. Folglich kann q als das Doppelte einer ganzen Zahl n dargestellt werden. Damit gilt

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} = \frac{2m}{2n}\ .$$

Kürzen mit 2 ergibt

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

und damit einen einfacheren Bruch als $\frac{p}{q}$. Nun kann $\frac{m}{n}$ wieder durch o.g. Prozedur vereinfacht werden. Das Ergebnis dieses Schrittes kann genauso vereinfacht werden und so fort. Aus Punkt (3) wissen wir aber, dass ein Bruch nicht unendlich oft vereinfacht werden kann. Damit hat sich ein Widerspruch ergeben und es folgt, dass $\sqrt{2}$ irrational ist.

q.e.d.[4]

[3] Siehe z.B. Singh, S. (2004) Fermats letzter Satz, Deutscher Taschenbuch Verlag, 9. Auflage, München

[4] Die Abkürzung q.e.d. steht für quod erat demonstrandum, lateinisch für was zu beweisen war. In Deutsch schreibt man abgekürzt w.z.b.w.

1.1.2 Teilmengen

$A \subseteqq B, \quad \text{echteTeilmenge} : A \subset B$

$A \nsubseteqq B, \ \text{Negation, A ist nicht Teilmenge von B}$

aus $A \subseteqq B$ und $B \subseteqq A$ folgt $A = B$.

Der Begriff der Negation stammt aus dem Lateinischen (negare = verneinen) und bedeutet Ablehnung, Verneinung oder Aufhebung.

Darstellung im VENN-Diagramm[5] in den Bildern 1.1 und 1.2.

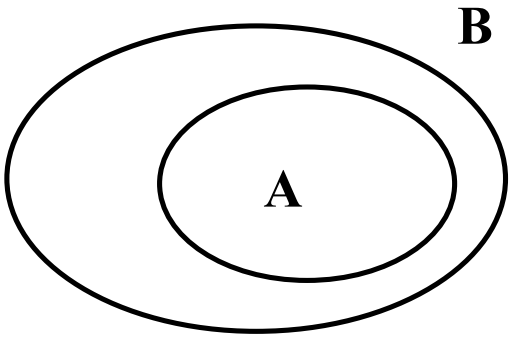


Bild 1.1: *Echte Teilmenge*

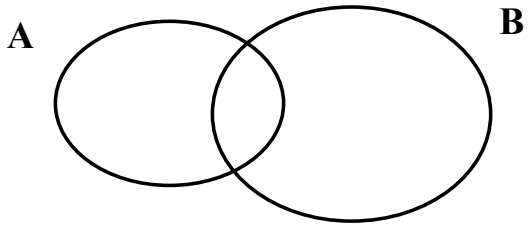


Bild 1.2: *Negation*

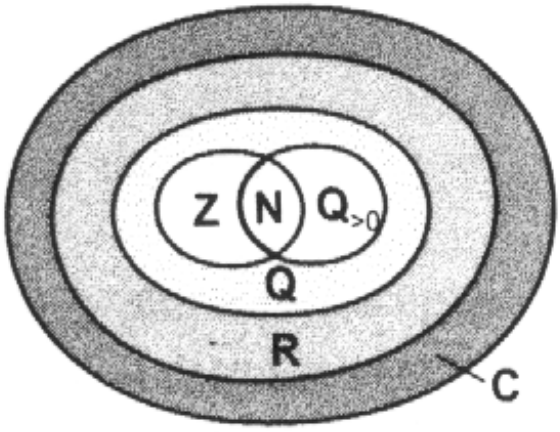


Bild 1.3: *Venn-Diagramm der Zahlenmengen aus Abschnitt 1.1.1 (mit komplexen Zahlen $\mathbb{C}$)*

[5] John Venn, engl. Mathematiker, geb. 4. August 1834 in Drypool, gest. 4. April 1923 in Cambridge

1.2 Mengenoperationen

Vereinigungsmenge $A \cup B := \{x |\ x \in A \text{ oder } x \in B\}$

Es gilt: $A \subseteqq (A \cup B)$, $B \subseteqq (A \cup B)$, $A \cup A = A$, $A \cup \varnothing = A$

Durchschnittsmenge $A \cap B := \{x |\ x \in A \text{ und } x \in B\}$

Es gilt: $(A \cap B) \subseteqq A$, $(A \cap B) \subseteqq B$, $(A \cap B) \subseteqq (A \cup B)$, $A \cap A = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$

Differenzmenge $A \setminus B := \{x |\ x \in A \text{ und } x \notin B\}$

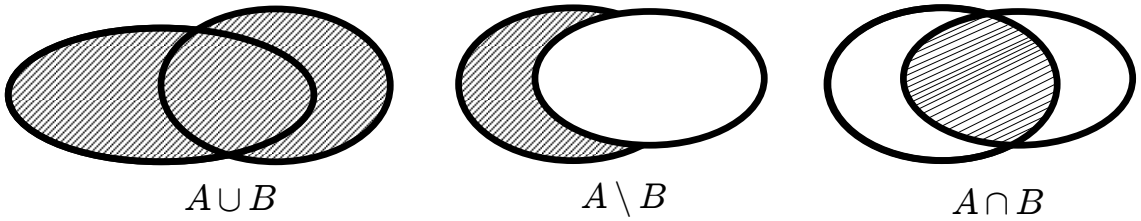


Bild 1.4: *Vereinigungsmenge $A \cup B$, Differenzmenge $A \setminus B$, Durchschnittsmenge $A \cap B$,*

1.3 Produktmengen

$A \times B := \{(a, b) \,|a \in A \text{ und } b \in B\}$ (a, b) geordnetes Paar

Beispiele:

A = {1,2}, B = {3,4} ⇒ A × B = {(1,3); (1,4); (2,3); (2,4)}

A = B = $\mathbb{R}$: Reelle Paare; die reellen Zahlen lassen sich auf einer Zahlengerade veranschaulichen

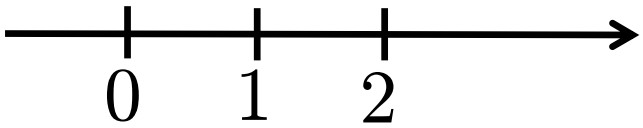


Bild 1.5: *Zahlengerade als Veranschaulichung der reellen Zahlen*

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, Darstellung im kartesischen Koordinatensystem

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$; Tripel

$\mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$; n-Tupel

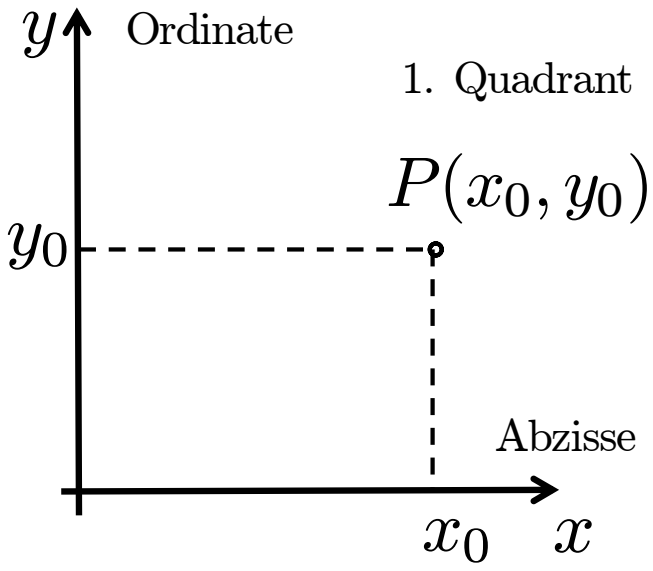


Bild 1.6: *Darstellung reeller Paare im kartesischen Koordinatensystem*

1.4 Beweismethoden

1.4.1 Einführung

a) Direkter Beweis

$$\underbrace{A}_{\text{Voraussetzung}} \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{Implikation}} \quad \underbrace{B}_{\text{Behauptung}}$$

Implikation (von lat. implicare, „einwickeln“) bedeutet hier die Verknüpfung von Aussagen, z.B. die Verknüpfung der Aussagen a und b zu einer Aussage der Form „wenn a gilt oder richtig ist, so folgt für b ... “

b) Indirekter Beweis

Es wird das Gegenteil der Behauptung angenommen und ein Widerspruch konstruiert.

Beispiel *Primzahlen* Annahme: Es gibt endlich viele Primzahlen[6]. Dann erfolgt der Beweis, dass es unendlich viele Primzahlen gibt, dadurch, dass die Annahme wiederlegt wird.

Beweis: Angenommen es gibt *endlich* viele Primzahlen; Ordnung der Größe nach:

$P = \{p_1, p_2, p_3, ..., p_n\}$ mit p_n größte Primzahl

Man bilde: $m = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot ... \cdot p_n + 1$ (Beweisidee)

Damit ist m auf jeden Fall ungerade, da $p_1 = 2$ (kleinste Primzahl).

[6]Eine Primzahl ist eine Zahl, welche nur zwei Teiler hat, eins und sich selber, $P = \{2, 3, 5, 7, 11, ...\}$.

Fallunterscheidung: zwei Fälle

a) $m \in P \quad \Rightarrow \quad m > p_n$

b) $m \notin P \quad \Rightarrow \quad m$ keine Primzahl,

dann muss m eine Primzahl p_i als Teiler haben. Es gilt aber $p \neq p_i$ da bei Division durch p_i stets der Rest 1 bleibt.

Beide Fälle sind nicht mit der Annahme, dass es endlich viele Primzahlen gibt vereinbar!

$\Rightarrow p > p_n$ q.e.d.

Dieser Beweis gelang relativ einfach. Aber viel schwieriger ist zum Beispiel, gibt es auch unendlich viele Primzahlzwillinge $\{3, 5;\ 11, 13;\ 17, 19;\ 41, 43;\ ...\}$?

Beispiel: ***Großer Fermat:*** Gibt es Lösungen für $n > 2$

$$x^n + y^n = z^n , \qquad \text{mit } n, x, y, z \in \mathbb{N} \,? \tag{1.1}$$

Für $n = 2$ ergibt sich der bekannte Satz des Pythagoras $x^2 + y^2 = z^2$ für den es z.B. die Lösung $x = 3$, $y = 4$ und $z = 5$ gibt. Der Beweis, dass es für den großen Fermat[7] keine weitere Lösung gibt, gelang nach zahlreichen erfolglosen Versuchen erst 1994 durch Andrew Wiles.[8]

1.4.2 Formale Schreibweisen

Summenzeichen

Zur Abkürzung von Summen wird eingeführt

$$\sum_{i=1}^{4} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \quad \text{bzw.} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} + x_n \; . \tag{1.2}$$

Produktzeichen

Sinngemäß wird zur Abkürzung von Produkten eingeführt

$$\prod_{i=1}^{4} x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \quad \text{bzw.} \quad \prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_{n-1} \cdot x_n \; . \tag{1.3}$$

[7] Pierre Fermat, geb. 1601 Beaumont de Lomange, gest. 1665 in Toulouse
[8] Britischer Mathematiker, geb. 1953, Cambridge)

1.4.3 Vollständige Induktion

Das Beweisverfahren der Vollständigen Induktion ist eine Form des direkten Beweises. Unter *Induktion* ist dabei das Schließen vom Speziellen auf das Allgemeine zu verstehen.[9]

Mit der Beweismethode der vollständigen Induktion werden Zusammenhänge für natürliche Zahlen bewiesen. Das Prinzip lautet: Eine Aussage ist für eine natürliche Zahl n_0 gültig. Folgt aus der Wahrheit der Aussage für eine natürliche Zahl $n \geq n_0$ die Wahrheit der Aussage für $n+1$, so ist die Aussage für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ gültig.[10]

Der Beweis erfolgt in folgenden Schritten:

1) **Induktionsanfang:** Die Aussage wird für $n = n_0$ gezeigt. Oft kann $n_0 = 1$ gewählt werden.

2) **Induktionsvoraussetzung oder -annahme:** Die Aussage ist für n wahr. Dabei wird häufig $n = 1$ gewählt, weil damit mit Gültigkeit des Induktionsanfangs auch die Induktionsvoraussetzung erfüllt ist.

3) **Induktionsbehauptung:** Die Aussage ist für $n+1$ wahr.

4) **Induktionsschluss:** Beweis, dass aus der Voraussetzung die Behauptung folgt (Schluss von n auf $n+1$).

Beispiel Satz: Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen ist $\frac{n(n+1)}{2}$, (C.F. Gauß[11]).

Dabei erfolgt das Beweisverfahren beginnend vom Induktionsanfang mit der Aussage $A(1)$, fortfolgend für ein beliebiges k aus $\mathbb{N}$, der Induktionsvoraussetzung. Dann folgt der *Induktionschluss* zur *Induktionsbehauptung*.

Dabei wird häufig der Summationsbuchstabe geändert, um Beweis und Aussage besser trennen zu können. Hier erfolgt der Übergang von n zu k.

Beweis: Zu zeigen ist, dass gilt

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\,.$$

[9] Das Gegenteil von Induktion ist Deduktion, also das Schließen vom Allgemeinen auf das Spezielle.

[10] Ohne vertieft darauf einzugehen, sei angemerkt, dass das Beweisverfahren auf den fünf Axiomen von Peano (1891) beruht, aus denen sich die natürlichen Zahlen ableiten lassen. Sie lauten: 1) 0 ist eine Zahl. 2) Jede Zahl n hat genau einen Nachfolger $n^{'}$. 3) 0 ist nicht Nachfolger einer Zahl. 4) Jede Zahl ist Nachfolger höchstens einer Zahl. 5) Von allen Mengen, die die Zahl 0 und mit der Zahl n auch deren Nachfolger $n^{'}$ enthalten, ist die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen die kleinste.

[11] Carl Friedrich Gauß, geb. 1777 Braunschweig, gest. 1855 Göttingen

Induktionsanfang: $A(1):$ LS: $\sum_{i=1}^{1} i = 1$ RS: $\frac{1(1+1)}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad$ LS = RS $\surd$

Induktionsvoraussetzung: $A(k): \quad \sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$ (gültig z.B. für $k = n_0 = 1$)

Induktionsbehauptung: $A(k+1): \sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

Vorgehen: Schließe von $A(k)$ auf $A(k+1)$ indem die Gültigkeit von $A(k)$ verwendet wird.

Umformung der Induktionsbehauptung:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{k+1} i}_{A(k+1)} = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} i + (k+1)}_{\text{Abtrennung letzter Summand}} = \underbrace{\frac{k(k+1)}{2}}_{A(k)} + (k+1) = \underbrace{\frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2}}_{\text{Hauptnenner bilden}}$$

$$= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \underbrace{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}_{(k+1)\text{ ausklammern}} \qquad \text{q.e.d.}$$

1.5 Binomischer Satz

1.5.1 Binomialkoeffizient

Einführung der Rechenoperation „n-Fakultät“:

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot n$ außerdem $0! := 1$.

Binomialkoeffizient

Def.: $m, n \in \mathbb{N}_0;\ m \geqq n \qquad \binom{m}{n} := \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$ (sprich: m über n) (1.4)

Der Binomialkoeffizient wird u.a. in der Kombinatorik[12] angewendet. Er ergibt die Anzahl von Möglichkeiten aus einer n-elementigen Menge eine ungeordnete Stichprobe (Reihenfolge ist ohne Bedeutung) vom Umfang k, wobei $k \leq n$, ohne Zurücklegen zu entnehmen.

[12] Unter Kombinatorik wird die Anzahl möglicher Anordnungen (Permutationen) oder Kombinationen von Objekten verstanden.

1.5.2 Eigenschaften

a) Symmetriesatz

$$\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n} \tag{1.5}$$

Denn: Linke Seite ergibt sich nach (1.4). Rechte Seite ergibt eingesetzt in (1.4):

$$\binom{m}{m-n} = \frac{m!}{(m-n)! \cdot (m-(m-n))!} = \frac{m!}{(m-n)! \cdot (m-m+n)!}$$
$$= \frac{m!}{n!\,(m-n)!} = \binom{m}{n}$$

und damit die Behauptung (1.5). **Spezialfälle von (1.5):**

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = \frac{n!}{n! \cdot 1} = 1\,, \tag{1.6}$$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)! \cdot (n-(n-1))!} = \frac{n!}{(n-1)! \cdot 1!} = n\,, \quad n \geq 1\,. \tag{1.7}$$

b) Additionstheorem

$$\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \binom{m+1}{n+1} \quad m > n \geqq 0 \tag{1.8}$$

Denn: 1) $n = 0$:

Linke Seite: $\binom{m}{0} + \binom{m}{1} = \underbrace{1}_{\text{nach (1.6)}} + \underbrace{m}_{\text{nach (1.7)}} = m+1\,,$

Rechte Seite: $\binom{m+1}{1} = \frac{(m+1)!}{(m+1-1)!1!} = m+1$

Damit ist (1.8) für $n = 0$ erfüllt. Für $n \geqq 1$ folgt nach (1.4) für die linke Seite von (1.8):

$$\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \underbrace{\frac{m!}{n! \cdot (m-n)!}}_{a)} + \underbrace{\frac{m!}{(n+1)! \cdot (m-n-1)!}}_{b)}$$

Bildung des Hauptnenners von a) und b), Hauptnenner ist: $((n+1)! \cdot (m-n)!)$

Erweiterungsfaktor für Nenner a) von $n!$ auf $(n+1)!$: $(n+1)$
Erweiterungsfaktor für Nenner b) von $(m-n-1)!$ auf $(m-n)!$: $(m-n)$

$$= \frac{\overbrace{m! \cdot (n+1) + m! \cdot (m-n)}^{m!\text{ ausklammern}}}{(n+1)! \cdot (m-n)!} = \frac{m! \cdot (m+1)}{(n+1)! \cdot (m-n)!}$$
$$= \frac{(m+1)!}{(n+1)! \cdot (m+1-(n+1))!} = \binom{m+1}{n+1}\,,$$

wobei im letzten Schritt die Definition des Binomialkoeffizienten (1.4) angewendet wurde.

c) Außerdem gilt:

$$\binom{m}{n} = \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+2) \cdot (m-n+1)}{n!}\,, \qquad n \geqq 1 \tag{1.9}$$

Denn:

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!} = \underbrace{\frac{1}{n!}}_{a)} \underbrace{\frac{m!}{(m-n)!}}_{b)} \tag{1.10}$$

Term b) von (1.10) ergibt:

$$\frac{m!}{(m-n)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (m-n)} = (m-n+1) \cdot (m-n+2) \cdot (m-n+3) \cdot \ldots \cdot m \tag{1.11}$$

und damit den Zähler von (1.9). Multiplikation mit a) von (1.10) ergibt die Behauptung (1.9).

Potenzen des Binoms $(a+b)$ Es ist oft wichtig, einen entwickelten Ausdruck für die n-te Potenz eines Binoms, $(a+b)^n$, zu besitzen. Man findet:

für $n = 0:\ (a+b)^0 = 1$
für $n = 1:\ (a+b)^1 = a + b$
für $n = 2:\ (a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$
für $n = 3:\ (a+b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3$
usw.

Werden die Koeffizienten in Dreiecksform geschrieben, entsteht das ***Pascalsche Dreieck***[13]

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & & & & \ldots & & & & \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{ccccccccc} & & & & \binom{0}{0} & & & & \\ & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\ & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\ & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\ \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\ & & & & \ldots & & & & \end{array}$$

Die Koeffizienten für den allgemeinen Fall liefert der binomische Satz:

Binomischer Satz Sei $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} \cdot b^i\,. \tag{1.12}$$

Beweis siehe Kapitel 1.5.4 auf Seite 1-13.

[13] Blaise Pascal, französischer Mathematiker, geb. 1623 Clermont-Ferrand, gest. 1662 Paris

1.5.3 Anwendungen des Binomischen Satzes

Man ersetze in (1.12) b durch $-b$, dann folgt

$$(a-b)^n \;=\; \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} a^{n-i} \cdot b^i \;. \tag{1.13}$$

Eigenschaften des Pascalschen Dreiecks

Die Summe der Zeilenglieder ergibt, falls $a = b = 1$ in (1.12) eingesetzt wird

$$(a+b)^n \;:\; = \sum_{i=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} = 2^n \;. \tag{1.14}$$

Wird $a = b = 1$ in (1.13) eingesetzt, so folgt

$$(a-b)^n \;:\; = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} = 0 \;. \tag{1.15}$$

1.5.4 Beweis des binomischen Lehrsatzes (Ergänzung)

Binomischer Satz: Sei $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} \cdot b^i$.

Beweis:

$$\text{A}(0): \text{ linke S.}: (a+b)^0 = 1 \ , \quad \text{rechte S.}: \sum_{i=0}^{0} \binom{n}{i} a^{n-i} \cdot b^i = 1$$

Induktionsschluss von A(k) auf A(k+1):

$$A(k): \ (a+b)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^{k-i} \cdot b^i \quad \Rightarrow \quad A(k{+}1): \ (a+b)^{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} a^{k+1-i} \cdot b^i$$

Denn:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{k+1} &= (a+b)^k \cdot (a+b) \\
&\quad \Downarrow \text{ mit A(k)} \\
&= \left[\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^{k-i} \cdot b^i \right] \cdot (a+b) \\
&\quad \Downarrow \text{ (a und b reinmultiplizieren)} \\
&= \left[\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^{\mathbf{k+1}-i} \cdot b^i \right] + \left[\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^{k-i} \cdot b^{\mathbf{i+1}} \right] \\
&\quad \Downarrow \text{ (abtrennen des ersten (i = 0) bzw. letzten Summanden(k))} \\
&= \left[\mathbf{a^{k+1}} + \sum_{\mathbf{i=1}}^{k} \binom{k}{i} a^{\mathbf{k+1}-i} \cdot b^i \right] + \left[\sum_{i=0}^{\mathbf{k-1}} \binom{k}{i} a^{k-i} \cdot b^{i+1} + \mathbf{b^{k+1}} \right] \\
&\quad \Downarrow \text{ (Wechsel des Summationsbuchstaben in der zweiten Summe)} \\
&= a^{k+1} + \left[\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} a^{\mathbf{k+1}-i} \cdot b^i + \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{k}} \binom{k}{\mathbf{i\text{-}1}} a^{k-(\mathbf{i\text{-}1})} \cdot b^{\mathbf{i}} \right] + b^{k+1} \\
&\quad \Downarrow \text{ mit } \binom{k}{i} + \binom{k}{i-1} = \binom{k+1}{i} \text{ nach (1.8), gleiches Summenzeichen} \\
&= \underbrace{a^{k+1}}_{\text{Summand für i=0}} + \left[\sum_{i=1}^{k} \binom{k+1}{i} a^{k+1-i} \cdot b^i \right] + \underbrace{b^{k+1}}_{\text{Summand für i=k+1}} \\
&\quad \Downarrow \text{ (Zu einer Summe zusammenfassen)} \\
&= \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} a^{k+1-i} \cdot b^i \qquad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

1.6 Hinweise

Lösen von quadratischen Gleichungen

Bsp.: Man bestimme die Lösung der quadratischen Gleichung

$$x^2 - \frac{5}{6}x - 1 = 0 \ .$$

Quadratische Gleichungen werden am einfachsten mit der „pq-Formel“ gelöst. Ausgangspunkt ist dabei die sogenannte Normalform $x^2 + px + q = 0$.

Nach binomischer Formel gilt

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2. \text{ Mit } a = x \text{ und } b = p/2 \text{ folgt}$$
$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \ .$$

Wird dies in die Normalform eingesetzt, so muss der zusätzliche Summand abgezogen werden

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0 \ .$$

Nun kann nach x aufgelöst werden

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \ ,$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right) = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \ ,$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \ .$$

Anwendung auf das Beispiel $x^2 - \frac{5}{6}x - 1 = 0$ liefert mit $p = -\frac{5}{6}$ und $q = -1$

$$x_{1,2} = \frac{5}{12} \pm \sqrt{\left(\frac{25}{144}\right) + 1} = \frac{5}{12} \pm \sqrt{\left(\frac{25}{144}\right) + \frac{144}{144}} = \frac{5}{12} \pm \sqrt{\frac{169}{144}} \ .$$

Damit ergeben sich zwei Lösungen

$$x_1 = \frac{18}{12} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}} \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{8}{12} = \underline{\underline{-\frac{2}{3}}} \ .$$

Lösbarkeitsregel

$$\text{Diskriminante } D \ = \ \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \ \begin{cases} > 0, & \text{2 verschiedene reelle Lösungen;} \\ = 0, & \text{2 gleiche reelle Lösungen;} \\ < 0, & \text{2 konjugiert komplexe Lösungen.} \end{cases}$$

Quadratischen Gleichung - Satz des Vieta

Für obige Gleichung gilt nach Francois Viète (1540 - 1603)

$$\begin{array}{ll} x_1 + x_2 = -p & \text{hier } p = -\frac{5}{6} \\ x_1 \cdot x_2 = q & \text{hier } q = -1 \ . \end{array}$$

Durch Probieren findet man $x_1 = -\frac{2}{3}$ und $x_2 = \frac{3}{2}$. Der Satz von Vieta ist bei quadratischen Gleichungen nur ein ergänzendes Hilfsmittel. Er bietet bei Gleichungen höheren Grades allerdings mehrere Vorteile. Siehe hierzu z.B. http://home.fonline.de/fo0126//algebra/alg29.htm.

Bi-Quadratische Gleichung

Die biquadratische Gleichung

$$x^4 + px^2 + q = 0 \tag{1.16}$$

lässt sich durch die Substitution $z = x^2$ auf eine quadratische Gleichung zurückführen

$$z^2 + pz + q = 0\ . \tag{1.17}$$

Zu jeder Lösung $z_0 > 0$ von (1.17) erhält man die Lösungen

$$x_{01} = \sqrt{z_0} \quad \text{und} \quad x_{02} = -\sqrt{z_0}$$

zur Ausgangsgleichung (1.16).

Summen- und Produktzeichen

Es gilt mit $i, m, n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + n\ .$$

Zum Beispiel

$$\sum_{i=m}^{n} x_i = x_m + x_{m+1} + x_{m+2} ... + x_{m+n}\ .$$

$$\prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot n\ .$$

Potenzen und Potenzgesetze

Es gilt mit $a, b \in \mathbb{R},\ m, n \in \mathbb{N}$:

$$
\begin{aligned}
a^m \cdot a^n &= a^{m+n} \\
\tfrac{a^m}{a^n} &= a^{m-n} \qquad \text{mit } a \neq 0 \\
(a^m)^n &= a^{m \cdot n} \\
a^n \cdot b^n &= (a \cdot b)^n \\
\tfrac{a^n}{b^n} &= \left(\tfrac{a}{b}\right)^n \qquad \text{mit } b \neq 0 \\
\sqrt[m]{a^n} &= a^{\frac{n}{m}} \qquad \text{mit } a \geq 0,\ m > 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a^0 &= 1 \qquad & a^1 &= a \\
1^n &= 1 \qquad & 0^n &= 0 \quad (n \neq 0)\ .
\end{aligned}
$$

0^0 ist nicht definiert.

Logarithmus und Logarithmusgesetze

$$\log_a b = c \quad \Leftrightarrow \quad a^c = b \qquad \text{mit } a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ a, b \in \mathbb{R}$$

Lies: Logarithmus von b zur Basis a ist c.

$$
\begin{aligned}
\log_a 1 = x \quad &\Leftrightarrow \quad a^x = 1 \quad &\Rightarrow \quad x = 0 \\
\log_a a = x \quad &\Leftrightarrow \quad a^x = a \quad &\Rightarrow \quad x = 1
\end{aligned}
$$

Gesetze:

$$
\begin{aligned}
\log_a (u \cdot v) &= \log_a u + \log_a v \\
\log_a \left(\tfrac{u}{v}\right) &= \log_a u - \log_a v \\
\log_a u^w &= w \log_a u \\
\log_a \sqrt[w]{u} &= \tfrac{1}{w} \log_a u
\end{aligned}
$$

Kettenregel:

$$(\log_a b) \cdot (\log_b u) = \log_a u \quad \Leftrightarrow \quad \log_b u = \frac{\log_a u}{\log_a b} \quad \text{(Umrechnung von Basis } b \text{ in } a\text{)}$$

1.7 Aufgaben zu Kapitel 1 - Mengen

1.7.1 Logarithmen, Summenzeichen, quadratische Gleichung

Aufgabe 1.1

Berechnen Sie

a) $\log_a(1)$ **b)** $\lg(10)$ **c)** $\ln(e)$ **d)** $\lg(1000)$ **e)** $\ln(e^\pi)$ **f)** $\log_2(64)$.

Aufgabe 1.2

Berechnen Sie x und überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch eine Probe

$$\frac{1}{2}\ln\left[(1+x)(1-x)\right] - \ln\left[\sqrt{(1+x)}\right] = \lg\left[10^{e\cdot\ln(e)}\right] \ .$$

Aufgabe 1.3

Berechnen Sie x

a) $\ln\sqrt{1+x} - \frac{1}{2}\ln(1-x) = \lg 10^{\ln\sqrt{9}}$ **b)** $\log_{\frac{1}{2}} x = -4$.

Aufgabe 1.4

Formen Sie in zwei Terme um:

$$\log_b \sqrt[3]{\frac{q^5}{s^2}} \ .$$

Aufgabe 1.5

Formen Sie in zwei Summanden um

$\log_a\left(\frac{a^2}{6+a}\right)$ und berechnen Sie anschließend den Ausdruck für $a = 2$.

Aufgabe 1.6

Berechnen Sie alle reellen Lösungen der gegebenen Gleichungen

a) $x^2 - 2x - 63 = 0$ **b)** $18x^2 - 3x = 10$ **c)** $x^4 - 34x^2 + 225 = 0$

Aufgabe 1.7

Für welche Werte von $a > 0$ besitzt

$x^2 - 4x - \log_2 a = 0$ reelle Lösungen?

1.7.2 Mengen

Aufgabe 1.8

Man bestimme die Elemente von:

$$M_1 = \left\{x|\ x \in \mathbb{N} \text{ und } \tfrac{x}{3} \in \mathbb{N}\right\}$$
$$M_2 = \{x|\ x = 2 \text{ und } x = 3\}$$
$$M_3 = \left\{x|\ x \in \mathbb{Q} \text{ und } x^2 - \tfrac{5}{6}x - 1 = 0\right\}$$

Aufgabe 1.9

Man bestimme:

a) $A \setminus A$, **b)** $A \setminus \varnothing$, **c)** $\varnothing \setminus A$, **d)** $(A \setminus B) \setminus B$, **e)** $A \setminus B \subseteqq$ oder $\supseteqq A$!

1.7.3 Vollständige Induktion

Aufgabe 1.10

Beweisen Sie nach der Methode der vollständigen Induktion, dass die Summe der ersten n ungerade Zahlen n^2 ergibt! Oder:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2 \ .$$

Aufgabe 1.11

Beweisen Sie nach der Methode der vollständigen Induktion, dass gilt:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1} \ .$$

Aufgabe 1.12

Beweisen Sie nach der Methode der vollständigen Induktion, dass gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) \ .$$

Aufgabe 1.13

Beweisen Sie nach der Methode der vollständigen Induktion, dass gilt

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{3}{4^i} = 1 - \frac{1}{4^n} \ .$$

Aufgabe 1.14

Beweisen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} 2 \cdot i = n \cdot (n+1) \ .$$

Aufgabe 1.15

Beweisen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen x gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} x^{i-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1} \ .$$

Aufgabe 1.16

Beweisen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion folgende Ungleichung:

$$3^n > 2 \cdot (n+1)$$

Man vermute zunächst, für welche n die Aussage gilt!

Aufgabe 1.17

Beweisen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion folgende Ungleichung:

$$2^n > 3 \cdot (n+1)$$

Man vermute zunächst, für welche n die Aussage gilt!

Aufgabe 1.18

Beweisen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{n+2}{2^n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \ .$$

1.7.4 Binomischer Lehrsatz

Aufgabe 1.19

Bestimmen Sie das konstante Glied des Ausdruckes

$$\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^9 \ .$$

Mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes lässt sich der Ausdruck in eine Summe umformen. Unter konstantem Glied soll dabei der Summand ohne Potenz von x verstanden werden.

Ein mögliche Vorgehensweise ist:

1) Schreiben Sie den Term in Form des binomischen Satzes,

2) Fassen Sie die beiden Exponenten von x zusammen,

3) Berechnen Sie für welches i der Exponent von x Null ist,

4) Berechnen Sie für das ermittelte i den Binomialkoeffizienten im binomischen Satz.

Aufgabe 1.20

Bestimmen Sie den Faktor vor dem quadratischen Glied des Terms

$$\sum_{j=1}^{3} \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x^3}} \right)^{8j} . \tag{A.2.2}$$

Zunächst lässt sich die obige Summe (A.2.2) als drei Summanden darstellen. Mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes lässt sich jeder dieser drei Summanden jeweils in eine Summe umformen. Es ist jeweils der Faktor vor dem quadratischen Term x^2 gesucht. Abschließend sollen alle drei Faktoren summiert werden.

Ein mögliche Vorgehensweise ist:

1) Stellen Sie die Summe (A.2.2) durch drei Summanden dar

2) Schreiben Sie jeden der drei Summanden in Form des binomischen Satzes,

3) Fassen Sie jeweils die beiden Exponenten von x zusammen,

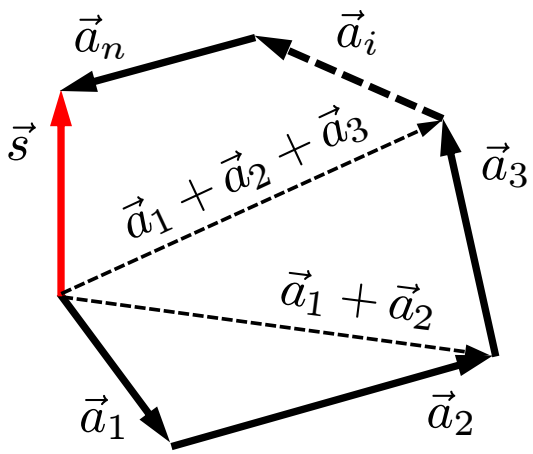
4) Berechnen Sie für welches i der Exponent von x zwei ist,

5) Berechnen Sie für das ermittelte i den Binomialkoeffizienten mit Hilfe des binomischen Satz,

6) Summieren Sie Ihre drei Ergebnisse.

Kapitel 2

Vektorrechnung und Vektorräume



Kapitelinhalt

2.1 Vektoren **2-1**
2.1.1 Einführung 2-1
2.1.2 Skalare 2-1
2.1.3 Vektoren 2-1
2.1.4 Vektoroperationen 2-5
2.1.5 Ausblick Tensoren 2-12
2.2 Vektorräume **2-13**
2.2.1 Definition 2-13
2.2.2 Beispiele 2-14
2.2.3 Lineare Abhängigkeit 2-14
2.3 Anwendungen in der Geometrie **2-17**
2.3.1 Vektorielle Darstellung einer Geraden 2-17
2.3.2 Abstand eines Punktes von einer Geraden 2-17
2.3.3 Abstand zweier paralleler Geraden 2-18

2.3.4 Abstand zweier windschiefer Geraden 2-18
2.3.5 Schnittpunkt und Schnittwinkel zweier Geraden 2-19
2.3.6 Vektorielle Darstellung einer Ebene 2-19
2.3.7 Ebene senkrecht zu einem Vektor 2-20
2.3.8 Abstand eines Punktes von einer Ebene 2-20
2.3.9 Abstand einer Geraden von einer Ebene 2-21
2.3.10 Abstand zweier paralleler Ebenen 2-21
2.3.11 Schnittpunkt und Schnittwinkel einer Geraden mit einer Ebene 2-22
2.3.12 Schnittwinkel zweier Ebenen () 2-22
2.4 Aufgaben zu Kapitel 2 2-23
2.4.1 Einführung 2-23
2.4.2 Skalarprodukt 2-23
2.4.3 Vektorprodukt 2-23
2.4.4 Spatprodukt 2-24
2.4.5 Anwendungen in der Geometrie 2-24
2.4.6 Vektorräume 2-24
2.4.7 Lineare Abhängigkeit 2-25
2.4.8 Basis und Dimension 2-25

2.1 Vektoren

2.1.1 Einführung

Zur mathematischen Beschreibung der Natur und in der Anwendung in der Technik sind unterschiedliche Größen notwendig. Es wird unterschieden zwischen Skalaren, Vektoren, Tensoren. Dabei stellen die Tensoren den Oberbegriff dar. Skalare und Vektoren sind daher Sonderfälle von Tensoren, und Skalare sind verallgemeinert Sonderfälle von Vektoren.

Wird z.B. jedem Punkt eines sich drehenden Körpers ein Temperaturwert zugeordnet, so erfolgt eine räumliche Zuordnung von Zahlen. Wird außerdem jedem Punkt dieses Körpers eine Geschwindigkeit zugeordnet, so hat die Geschwindigkeit einen Betrag und eine Richtung. Es liegen unterschiedliche physikalische Fälle vor, je nachdem ob sich der Körper im Uhrzeigersinn oder entgegen dem Uhrzeigersinn dreht. Dies führt zu den Begriffen Skalare und Vektoren.

2.1.2 Skalare

Skalare bestehen aus einer einfachen Zahl. Falls sie eine physikalischen Größe darstellen, gehört eine entsprechende physikalische Einheit dazu. Ein Skalar kann auch negativ sein.

Beispiele:

- Temperatur als Beschreibung des thermodynamischen Zustandes eines Körpers: unterschiedliche Einheiten, z.B. Celsius, mit negativer Temperatur unterhalb der Gefriertemperatur des Wassers, Kelvinskala ist immer positiv, da sie vom absoluten Nullpunkt ausgeht
- Masse als Beschreibung des Widerstandes eines Körpers gegen das Beschleunigtwerden: SI-Einheit Kilogramm (Fertigung eines Probekörpers als Urkilogramm)
- Weitere Beispiele: Dichte, Druck, Länge einer Strecke, Energie eines Körpers, Zeit, Flächen- und Massenträgheitsmoment.

2.1.3 Vektoren

Vektoren sind gerichtete Größen. Sie bestehen aus einer positiven Maßzahl und einer Richtung.

Beispiele:

- Geschwindigkeit und Beschleunigung als Beschreibung der Bewegung eines Körpers
- Kraft und Impuls (Masse mal Geschwindigkeit)
- Drehmoment und elektrische Feldstärke
- Ortsvektor, als Vektor vom Koordinatenursprung zu einem Punkt P im Raum oder in der Ebene, Schreibweise oft $\vec{r}(P)$.

Vektoren können symbolisch durch einen Pfeil dargestellt werden. Die Länge des Pfeiles heißt Betrag des Vektors und entspricht seiner Maßzahl. Durch die örtliche Orientierung des Gesamtpfeils wird die Richtung festgelegt (man spricht auch von *Wirkungslinie*), die Pfeilspitze legt den Richtungssinn fest.

In einigen Lehrbüchern wird zwischen Richtung und Richtungssinn nicht unterschieden. Dann steht das Wort Richtung nur für den Richtungssinn.

Ein Vektor lässt sich eindeutig auch durch einen Anfangs- und Endpunkt festlegen. Dabei können diese Punkte in der Ebene (2d) oder allgemeiner im Raum (3d) liegen.

Zur Unterscheidung zu den Skalaren werden Vektoren mit einem Pfeil überschrieben, z.B. die Kraft $\vec{F}$. In einigen Lehrbüchern werden Vektoren auch nur fett dargestellt, z.B. $\boldsymbol{F}$, oder durch einen Unterstrich gekennzeichnet, z.B. $\underline{F}$. Im Folgenden soll die Pfeildarstellung verwendet werden.

Der Betrag eines Vektors wird durch die Betragsstriche gekennzeichnet $|\vec{a}|$. Oft bezeichnet eine physikalische Größe mit Vektorcharakter $\vec{a}$ ohne Pfeildarstellung, also a, den Betrag des Vektors, also $a = |\vec{a}|$. In einigen Lehrbüchern wird anstelle von Betrag auch mit dem Begriff *skalare Größe* gearbeitet (siehe z.B. Pestel „Technische Mechanik“).

Hat eine physikalische Größe Vektorcharakter und ist ihr Betrag Null, so bezeichnet man den entsprechenden Vektor als Nullvektor $\vec{0}$. Verallgemeinert wird jeder Vektor mit dem Betrag Null als Nullvektor bezeichnet.

Jeder Vektor mit dem Betrag Eins heißt Einheitsvektor. Diese werden häufig mit $\vec{e}$ abgekürzt. Von besonderer Bedeutung sind die Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenachsen. Oft wird dabei die entsprechende Achse als Index mitgeschrieben, z.B. $\vec{e}_x$ für einen Vektor mit der Länge Eins und mit dem Richtungssinn der x-Achse. Sinnvoller Weise beginnt der Vektor $\vec{e}_x$ im Koordinatenursprung.

In den Anwendungen werden noch *freie*, *linienflüchtige* und *gebundene* Vektoren unterschieden:

- Freie Vektoren dürfen beliebig parallel zu sich selbst verschoben werden, z.B. statische Momente
- Linienflüchtige Vektoren sind längs ihrer Wirkungslinie beliebig verschiebbar, z.B. Kräfte, die an einen starren Körper angreifen
- Gebundene Vektoren werden von einem festen Punkt aus abgetragen, z.B. der Ortsvektor, welcher immer vom Koordinatenursprung abgetragen wird.

Wichtiger Hinweis: Mathematische Gleichungen und physikalische Gesetzmäßigkeiten müssen auf der linken und der rechten Seite immer als Ergebnis entweder jeweils einen Vektor oder jeweils einen Skalar aufweisen. Physikalisch muss natürlich auch jeweils die Dimension (z.B. Längeneinheit) bzw. Maßeinheit (z.B. Meter) übereinstimmen.

2.1.3.1 Gleichheit und Parallelität von Vektoren

Die Gleichheit von Vektoren wird folgendermaßen erklärt:

Def.: Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind gleich, $\vec{a} = \vec{b}$,
wenn sie in Betrag, Richtung und Richtungssinn übereinstimmen.

Vektoren sind demnach gleich, wenn sie durch Parallelverschiebung ineinander überführbar sind. Diese Art von Vektoren bezeichnet man als freie Vektoren. Die weiteren Ausführungen beziehen sich auf diese Vektoren.

Haben zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die gleiche Richtung, so heißen sie parallel zueinander, symbolisch $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. Besitzen die Vektoren entgegengesetzte Richtung, so werden sie als antiparallel oder invers zu einander bezeichnet, symbolisch $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Kollinear sind zwei Vektoren, wenn sie entweder parallel oder antiparallel zueinander sind.

In der Mechanik ist oft die Wirkung von Vektoren, insbesondere von Kräften, von Bedeutung. Sind zwei Kräfte in ihrer Wirkung auf einen Körper gleich, so bezeichnet man diese Kräfte als *äquivalent*. Ist also der Angriffspunkt für die Wirkung der Kraft von Bedeutung, so müssen für äquivalente Kräfte der Angriffspunkt, der Betrag und die Richtung übereinstimmen.

2.1.3.2 Komponentendarstellung

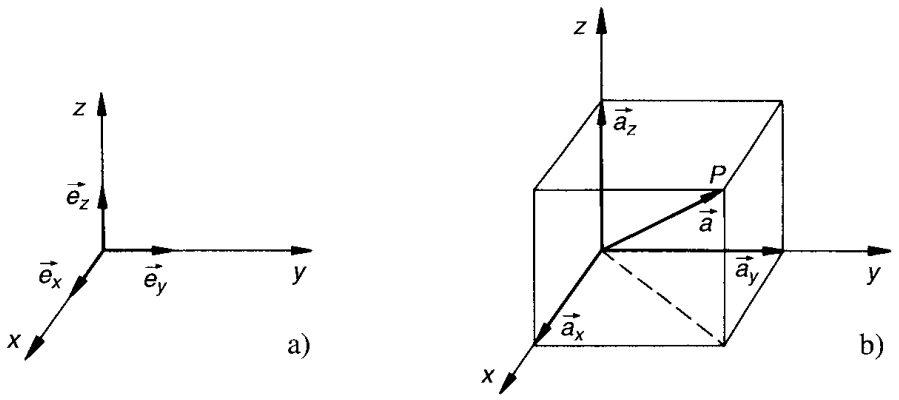


Bild 2.1: *Komponentendarstellung von Vektoren*

Vektoren lassen sich durch ihre Komponenten in einem Koordinatensystem mit den Basisvektoren $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ darstellen, z.B. Vektor $\vec{a}$ im Raum:

$$\text{Vektorkoordinaten (Skalare)} : a_x, a_y, a_z \quad \text{(auch skalare Vektorkomponenten)} \tag{2.1a}$$

$$\text{Vektorkomponenten (Vektoren)} : \vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z \ . \tag{2.1b}$$

Dabei stehen die Einheitsvektoren bzw. Basisvektoren senkrecht aufeinander und bilden in dieser Reihenfolge ein rechtshändiges System, siehe Bild 2.1a) auf Seite 2-3[1].

[1]Ein rechtshändiges System hat in der angegebenen Reihenfolge x, y, z dieselbe Orientierung wie Daumen, Zeige- und Mittelfingerder der rechten Hand.

Dabei ist die Schreibweise als Spalten- oder Zeilenvektor üblich

$$\text{Spaltenvektor: } \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} , \qquad \text{Zeilenvektor: } \vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \ . \tag{2.2}$$

Die Komponentendarstellung eines Vektors durch die zwei Punkte

$$P_1 = (x_1, y_1, z_1) \qquad \text{und} \qquad P_2 = (x_2, y_2, z_2)$$

ergibt sich damit zu (Pfeil zeigt von P_1 zu P_2)

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\vec{e}_x + (y_2 - y_1)\vec{e}_y + (z_2 - z_1)\vec{e}_z = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \ . \tag{2.3}$$

Der Vektor (2.3) zeigt von P_1 zu P_2. Für den *Ortsvektor*[2] des Punktes $P(x_P, y_P, z_P)$ folgt

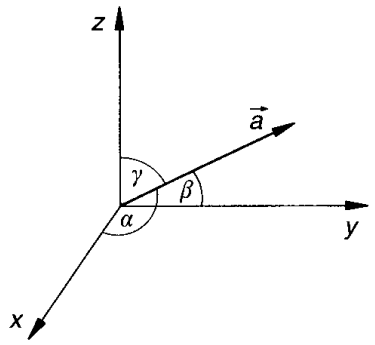
$$\vec{r}(P) = \overrightarrow{0P} = x_P\vec{e}_x + y_P\vec{e}_y + y_P\vec{e}_z = (x_P, y_P, z_P) \ . \tag{2.4}$$

Für die Richtungswinkel α, β und γ, die der Vektor $\vec{a} \neq 0$ mit den drei Koordinatenachsen (Basisvektoren) bildet, gelten entsprechend der unten dargestellten Skizze folgende Beziehungen:

$$\cos(\alpha) = \frac{a_x}{|\vec{a}|} \ , \qquad \cos(\beta) = \frac{a_y}{|\vec{a}|} \ , \qquad \cos(\gamma) = \frac{a_z}{|\vec{a}|} \ . \tag{2.5}$$

Damit ergibt sich zusätzlich

$$\begin{aligned} &\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) \\ &= \frac{a_x^2}{|\vec{a}|^2} + \frac{a_y^2}{|\vec{a}|^2} + \frac{a_z^2}{|\vec{a}|^2} \\ &= \frac{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}{|\vec{a}|^2} \\ &= \frac{|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|^2} = 1 \ . \end{aligned} \tag{2.6}$$



Umgekehrt lassen sich die Vektorkoordinaten aus dem Betrag und den drei Richtungswinkeln des Vektors berechnen

$$a_x = |\vec{a}| \cdot \cos(\alpha) \ , \qquad a_y = |\vec{a}| \cdot \cos(\beta) \ , \qquad a_z = |\vec{a}| \cdot \cos(\gamma) \ . \tag{2.7}$$

Die Koordinatendarstellung der Einheitsvektoren lautet

$$\vec{e}_x = (1, 0, 0) \ , \qquad \vec{e}_y = (0, 1, 0) \ , \qquad \vec{e}_z = (0, 0, 1) \ . \tag{2.8}$$

Der Betrag eines Vektors ergibt sich zu

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \ . \tag{2.9}$$

[2]Der Ortsvektor ist bei der Beschreibung von Bewegungen von Bedeutung (TM3). Er zeigt vom Koordinatenursprung zum betrachteten Punkt.

2.1.4 Vektoroperationen

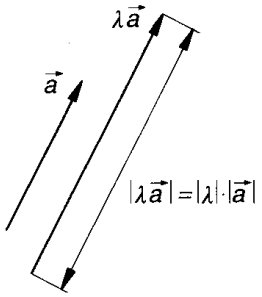
2.1.4.1 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar

Die Multiplikation eines Vektors $\vec{a}$ mit einer reellen Zahl λ erfolgt komponentenweise:

$$\lambda \cdot \vec{a} = (\lambda \cdot a_x, \lambda \cdot a_y, \lambda \cdot a_z) \ . \quad (2.10)$$

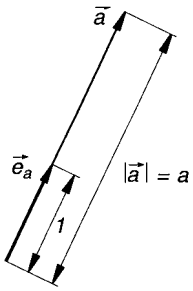
Für die Eigenschaften des resultierenden Vektors $\lambda\vec{a}$ ergibt sich

$$\lambda > 0: \quad \lambda\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a} \quad (2.11a)$$
$$\lambda < 0: \quad \lambda\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a} \quad (2.11b)$$
$$\lambda = 0: \quad \lambda\vec{a} = \vec{0} \ . \quad (2.11c)$$



Für den in Richtung des Vektors $\vec{a} \neq \vec{0}$ weisenden Einheitsvektor $\vec{e}_a$ mit $|\vec{e}_a| = 1$ gilt (Normierung eines Vektors)

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\frac{a_x}{|\vec{a}|}, \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \frac{a_z}{|\vec{a}|} \right) \ . \quad (2.12)$$



Es gelten folgende Rechenregeln $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$

Assoziativgesetz	$\lambda(\mu\vec{a}) = \mu(\lambda\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$	(2.13a)
Distributivgesetze	$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$	(2.13b)
	$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$.	(2.13c)

2.1.4.2 Addition von Vektoren

Die Addition von Vektoren erfolgt nach der *Parallelogrammregel*. Der Summenvektor

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} \tag{2.14}$$

lässt sich auf zwei verschiedene Arten darstellen:

1) Konstruktion eines Parallelogramms nach Bild 2.2 links und Darstellung der Diagonalen beginnend am Ausgangspunkt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$,

2) Parallelverschiebung von Vektor $\vec{b}$ an die Spitze von Vektor $\vec{a}$ und Verbindung des Anfangspunktes von $\vec{a}$ mit der Pfeilspitze von $\vec{b}$, Bild 2.2 rechts.

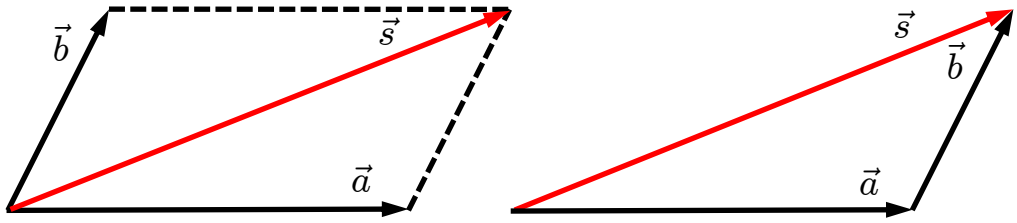


Bild 2.2: *Addition von zwei Vektoren in der Ebene*

In der Komponentendarstellung erfolgt die Addition komponentenweise

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= (a_x, a_y, a_z) + (b_x, b_y, b_z)\\ &= (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)\\ &= (s_x, s_y, s_z) = \vec{s}\,.\end{aligned} \tag{2.15}$$

Sinngemäß lässt sich die Addition auf mehrere Vektoren erweitern. Es ergibt sich die Polygonregel, wobei dabei die Parallelogrammregel mehrfach nacheinander angewendet wird

$$\vec{s} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \ldots + \vec{a}_n\ . \tag{2.16}$$

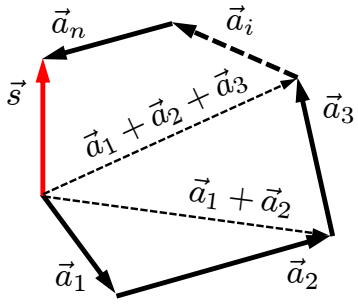


Bild 2.3: *Addition mehrerer Vektoren in der Ebene mit der Polygonregel*

In Bild 2.3 ergibt sich $\vec{s}$ demnach als Verbindung des Anfangspunktes in Richtung der Pfeilspitze von $\vec{a}_n$, wenn alle Vektoren entsprechend ihrer Richtung nacheinander aufgetragen werden.

2.1.4.3 Subtraktion von Vektoren

Die Subtraktion von zwei Vektoren lässt sich auf die Addition zurückführen. Der Differenzvektor

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) \tag{2.17}$$

wird durch Addition mit dem Inversen von $\vec{b}$, also $-\vec{b}$, berechnet. Er lässt sich auf zwei verschiedene Arten darstellen:

1) Konstruktion eines Parallelogramms mit der Diagonalen $\vec{a}$ nach Bild 2.4 links und Darstellung der fehlenden Seite $\vec{d}$ beginnend am Schnittpunkt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$,

2) Darstellung von $-\vec{b}$ und Konstruktion eines Parallelogramms mit den Seiten $\vec{a}$ und $-\vec{b}$ und Darstellung der fehlenden Seite $\vec{d}$ beginnend am Schnittpunkt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$, Bild 2.4 rechts.

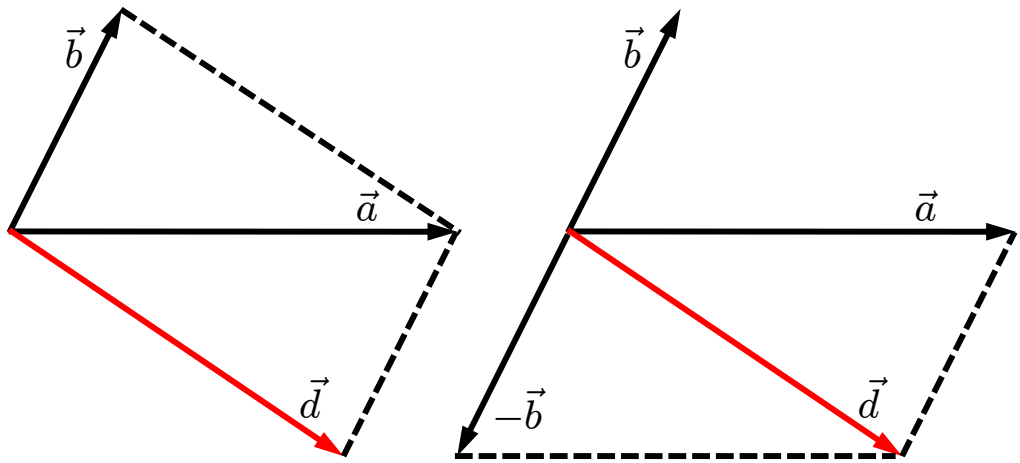


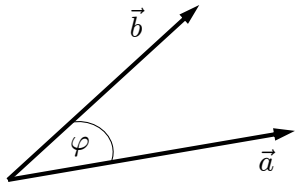
Bild 2.4: *Subtraktion von zwei Vektoren in der Ebene*

In Komponentendarstellung erfolgt die Subtraktion komponentenweise

$$\begin{aligned}\vec{a} - \vec{b} &= (a_x, a_y, a_z) - (b_x, b_y, b_z)\\ &= (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z)\\ &= (d_x, d_y, d_z) = \vec{d}\,.\end{aligned} \tag{2.18}$$

2.1.4.4 Skalarprodukt

Das Skalarprodukt[3] $\vec{a}\cdot\vec{b}$ zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist der wie folgt definierte Skalar



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\varphi)\ , \tag{2.19}$$

wobei φ der Winkel im Intervall $0 \leq \varphi \leq \pi$ zwischen den Richtungen der beiden Vektoren ist.

In Komponenten gilt

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x, a_y, a_z)\cdot(b_x, b_y, b_z) = a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z\ . \tag{2.20}$$

(2.20) gilt nur, falls eine orthonormierte[4] Basis vorliegt. Diese Bedingung ist bei kartesischen Koordinaten erfüllt.

Es gelten folgende Rechenregeln ($\lambda \in \mathbb{R}$)

Kommutativgesetz
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a} \tag{2.21a}$$

Distributivgesetze
$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c} \tag{2.21b}$$

$$\lambda\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = (\lambda\cdot\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\left(\lambda\cdot\vec{b}\right)\ . \tag{2.21c}$$

Damit kann bei Kenntnis der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ der Schnittwinkel zwischen beiden durch Umstellung von (2.19) nach $\cos(\varphi)$ berechnet werden

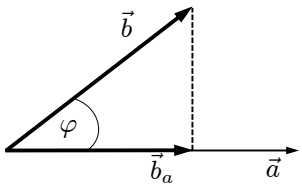
$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}\ . \tag{2.22}$$

Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ vom Nullvektor verschieden, so stehen sie orthogonal aufeinander, wenn das Skalarprodukt verschwindet

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{a}\perp\vec{b}\ . \tag{2.23}$$

Orthogonal bedeutet in diesem Zusammenhang, dass $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist, die Vektoren also einen rechten Winkel bilden.

Durch die Projektion des Vektors $\vec{b}$ auf den Vektor $\vec{a}$ entsteht der Vektor



$$\vec{b}_a = \left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\right)\cdot\vec{a} = \left(\vec{b}\cdot\vec{e}_a\right)\cdot\vec{e}_a\ . \tag{2.24}$$

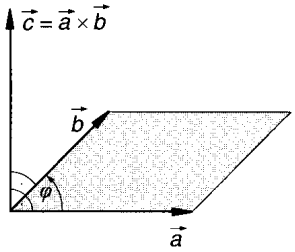
Dabei entspricht $\vec{b}_a$ der Komponente von $\vec{b}$ in Richtung $\vec{a}$ mit $\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

[3] Das Skalarprodukt wird manchmal auch als inneres Produkt bezeichnet.

[4] Orthonormiert bedeutet, dass die Basisvektoren Einheitsvektoren sind und senkrecht auf einander stehen.

2.1.4.5 Vektorprodukt

Zur Berechnung einiger physikalischer Größen, welche Vektorcharakter haben und welche sich aus Vektoren bestimmen lassen, wird eine weitere Vektoroperation benötigt. Dabei ergibt sich aus zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ein neuer Vektor $\vec{c}$ mit folgenden Eigenschaften:



(1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$ (2.25a)

(2) $\vec{c} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{b}$ (2.25b)

(3) $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$: Rechtshändiges System . (2.25c)

Geometrische Deutung:

(1) $|\vec{c}|$ ist die Maßzahl des Flächeninhaltes des aufgespannten Parallelogramms

(2) $|\vec{c}|$ steht senkrecht auf der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene

(3a) Rechte Hand Regel: $\vec{a}$ Daumen, $\vec{b}$ Zeige-, $\vec{c}$ Mittelfinger

(3b) Rechtsgängige Schraube: $\vec{a}$ wird auf dem kürzesten Weg in Richtung $\vec{b}$ gedreht $\Rightarrow$ $\vec{c}$ zeigt in Schraubenrichtung.

Das Berechnungsymbol ist $\times$. Die Berechnungsvorschrift in Komponenten lautet

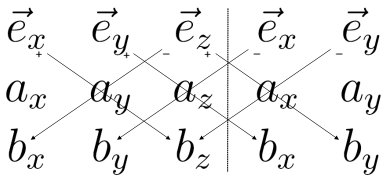
$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y \cdot b_z - b_y \cdot a_z \\ a_z \cdot b_x - b_z \cdot a_x \\ a_x \cdot b_y - b_x \cdot a_y \end{pmatrix} . \tag{2.26}$$

Dies entspricht in Zeilendarstellung

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y \cdot b_z - b_y \cdot a_z) \cdot \vec{e}_x + (a_z \cdot b_x - b_z \cdot a_x) \cdot \vec{e}_y + (a_x \cdot b_y - b_x \cdot a_y) \cdot \vec{e}_z . \tag{2.27}$$

Das Vektorprodukt ergibt sich auch aus folgender Determinate

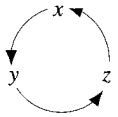
$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} . \tag{2.28}$$



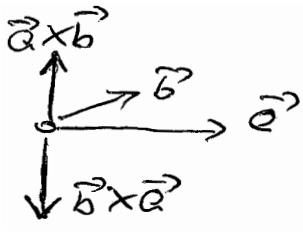
Damit kann die rechts dargestellte Sarrusregel angewendet werden!

Hinweis:

Durch zyklisches Vertauschen der Variablen kann in (2.26) und (2.27) aus der ersten die zweite Komponente und anschließend die dritte bestimmt werden.



Es gelten folgende Rechenregeln ($\lambda \in \mathbb{R}$):



$$\text{Antikommutativgesetz} \qquad \vec{a} \times \vec{b} = -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right) \tag{2.29a}$$

$$\text{Distributivgesetze} \qquad \vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \tag{2.29b}$$

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} \tag{2.29c}$$

$$\lambda \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = (\lambda \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times \left(\lambda \cdot \vec{b}\right) \ . \tag{2.29d}$$

Beispiel

Man berechne das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ mit $\vec{a} = (3, -2, 1)$ und $\vec{b} = (3, 2, -5)$ und prüfe dass $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$ und $\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$ gilt.

Sonderfall Ebene

Manchmal wird auch der Fall benötigt, dass das Vektorprodukt von Vektoren in der Ebene zu bilden ist. In der Ebene gilt

$$\vec{a} = (a_x, a_y, 0) \quad \text{und} \quad \vec{b} = (b_x, b_y, 0) \ . \tag{2.30}$$

Damit folgt

$$= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y \cdot 0 - b_y \cdot 0 \\ 0 \cdot b_x - 0 \cdot a_x \\ a_x \cdot b_y - b_x \cdot a_y \end{pmatrix} = (a_x \cdot b_y - b_x \cdot a_y) \cdot \vec{e}_z \ . \tag{2.31}$$

Es hat sich ein Vektor nur in z-Richtung ergeben. Dies deckt sich auch mit der Eigenschaft des Vektorproduktes, dass der resultierende Vektor senkrecht auf der aufgespannten Ebene von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ liegt.

Eine Anwendung ist beispielsweise das statische Moment einer Kraft $\vec{F}$ mit dem Abstand $\vec{r}$ zum Drehpunkt, wenn beide Vektoren in einer Ebene liegen,

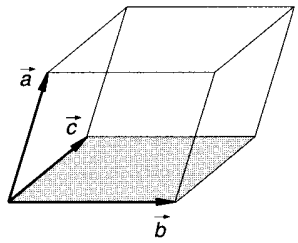
$$\vec{M} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_y \cdot 0 - F_y \cdot 0 \\ 0 \cdot F_x - 0 \cdot r_x \\ r_x \cdot F_y - F_x \cdot r_y \end{pmatrix} = (r_x \cdot F_y - F_x \cdot r_y) \cdot \vec{e}_z \ . \tag{2.32}$$

Der Momentenvektor steht senkrecht auf der Ebene von Hebelarm und Kraftvektor.

2.1.4.6 Spatprodukt

Das Spatprodukt der drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ ist erklärt als

$$\left[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right] = \vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) \ . \tag{2.33}$$



Das Spatprodukt ist ein Skalar. Es ist positiv, wenn die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden, ansonsten negativ.

Geometrische Deutung:

Der Betrag des Spatproduktes $\left[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right]$ ist das Volumen des von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Spats (auch Parallelepiped genannt):

$$V_{\text{Spat}} = \left|\left[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right]\right| \ . \tag{2.34}$$

Das Spatprodukt wird auch gemischtes Produkt genannt. Ein Spat oder ein Parallelepiped ist ein spezielles Prisma.

Werden die Rechenregeln des Skalar- und des Vektorproduktes angewendet, so ergibt sich in Komponentendarstellung

$$\left[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right] = a_x\cdot(b_y\cdot c_z - b_z\cdot c_y) + a_y\cdot(b_z\cdot c_x - b_x\cdot c_z) + a_z\cdot(b_x\cdot c_y - b_y\cdot c_x) \ . \tag{2.35}$$

Somit kann das Spatprodukt auch als Determinate geschrieben und ggf. nach der Sarrusregel berechnet werden

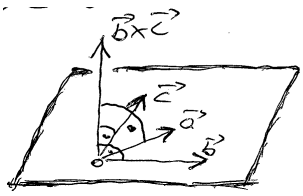
$$\left[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \text{ ==> z.B. Sarrusregel } \begin{array}{ccc|cc} a_x & a_y & a_z & a_x & a_y \\ b_x & b_y & b_z & b_x & b_y \\ c_x & c_y & c_z & c_x & c_y \end{array}$$

$$= \begin{array}{l} a_x(b_yc_z - b_zc_y) \\ +a_y(b_zc_x - b_xc_z) \\ +a_z(b_xc_y - b_yc_x) \ . \end{array} \tag{2.36}$$

Komplanare Vektoren

Vektoren werden komplanar genannt, wenn sie in einer Ebene liegen. Damit sind drei Vektoren komplanar, wenn ihr Spatprodukt verschwindet:

$$\left[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c} \ \text{ komplanar.} \tag{2.37}$$



Es gelten folgende Rechenregeln:

1) Zyklische Vertauschung möglich $\left[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right] = \left[\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}\right] = \left[\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}\right]$ (2.38a)

2) Vorzeichenw. bei Vertauschen von zwei Vektoren z.B. $\left[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right] = -\left[\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b}\right]$. (2.38b)

Beispiel

Es soll das Volumen eines Spates, welches am Punkt A durch die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ gebildet wird, berechnet werden. Dabei sind die vier Punkte

$$A = (2;2;2), \quad B = (4;3;3), \quad C = (4;5;4), \quad D = (5;5;6)$$

gegeben und es gilt

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{AC}, \quad \vec{c} = \overrightarrow{AD}\ .$$

2.1.5 Ausblick Tensoren

Für einige physikalische Größen reicht die Beschreibung mit einem Vektor nicht aus. Zur vollständigen Beschreibung eines physikalischen Zustandes werden einem Punkt eines Körpers beispielsweise 6 Skalare zugeordnet. Diese Skalare werden entsprechend des zugeordneten Koordinatensystems geordnet. Es ergibt sich ein Tensor (zweiter Stufe), welcher sich in Form einer 3×3-Matrix darstellen lässt. Dies trifft beispielsweise auf den Spannungs- und Verzerrungszustand eines Festkörpers zu. Die zugehörigen Tensoren heißen Spannungs- τ_{ij} und Verzerrungstensor ε_{ij}. Dabei sind die Elemente des Verzerrungstensor Dehnungen in unterschiedliche Richtungen

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz}\ . \end{bmatrix} \tag{2.39}$$

Für weitere Ausführungen hierzu siehe Lehrbücher der Festigkeitslehre (TM2). Vektoren sind somit Spezialfälle von Tensoren. Tensoren werden auch als Dyaden bezeichnet. Sie lassen sich noch weiter verallgemeinern. Es ergeben sich dann Tensoren dritter bzw. n-ter Stufe. Auf weitere Eigenschaften von Tensoren soll an dieser Stelle nicht eingegangen werden.

2.2 Vektorräume

Es zeigt sich, dass sich die Behandlung von Vektoren wesentlich erweitern und verallgemeinern lässt. Dies führt zum Begriff des Vektorraumes.

2.2.1 Definition

Häufig kommen Mengen vor, deren Größen zueinander addiert werden können und die mit einer Zahl multipliziert werden können, ohne dass diese Operationen aus der betrachteten Menge herausführen. Durch Abstraktion dieser Eigenschaften gelangt man zu dem für die lineare Algebra und weitere Teilgebiete der Mathematik zentralen Begriff des *Vektorraums*:

> **Ein Vektorraum ist eine Menge von Elementen, die man zueinander addieren und die man mit Zahlen multiplizieren kann, wobei die üblichen Rechenregeln gelten.**

Ein Beispiel für eine Menge mit den oben genannten Eigenschaften ist die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems.

- Die Elemente eines Vektorraumes heißen **Vektoren**.
- Die Zahlen mit denen multipliziert wird heißen **Skalare**.

Als Menge der Skalare können die rationalen, die reellen oder komplexen Zahlen dienen (andere Bereiche sind möglich). Im Folgenden wird als Bereich der Skalare immer die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen angenommen. Charakteristisch für Vektorräume V sind folgende Regeln, in denen $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ Elemente des Vektorraums V und μ, λ Skalare bezeichnen.

Regeln für die Addition

1) $\vec{a}, \vec{b} \in V \quad \Rightarrow \quad \vec{a} + \vec{b} \in V$

2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (Assoziativgesetz der Addition)

3) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (Kommutativgesetz der Addition)

4) Gesetz der Null: Es gibt ein Element $\vec{0}$ in V, so dass für alle $\vec{a}$ aus V gilt: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

5) Gesetz des Inversen: Zu jedem $\vec{a}$ aus V gibt es ein Element $-\vec{a}$ aus V, so dass gilt: $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Regeln für die Vielfachenbildung

1) $\vec{a} \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \lambda \cdot \vec{a} \in V$

2) $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a}$ (Assoziativgesetz der Multiplikation)

3) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ (Einselement)

4) $\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$ (erstes distributives Gesetz)

5) $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a}$ (zweites distributives Gesetz).

Jede Menge, in der eine Addition und eine Multiplikation mit Zahlen definiert ist, die nicht aus der Menge herausführen (Eig. **1**)) und für die die obigen Regeln gelten, ist ein Vektorraum.

2.2.2 Beispiele

2.2.2.1 Vektorraum R^n

Die Menge aller n-Tupel $(a_1, a_2, ..., a_n)$, in denen die a_i, reelle Zahlen sind, bildet einen Vektorraum R^n für jede positive natürliche Zahl n. Für n = 2 spricht man auch von geordneten Paaren, im Fall $n = 3$ von Tripeln und für $n = 4$ von Quadrupeln. Man definiert die Addition durch

$$(a_l, a_2, ..., a_n) + (b_1, b_2, ..., b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n) \tag{2.40}$$

und die Multiplikation mit einem Skalar durch

$$\lambda \cdot (a_1, a_2, ..., a_n) = (\lambda \cdot a_1, \lambda \cdot a_2, ..., \lambda \cdot a_n) \ . \tag{2.41}$$

2.2.2.2 Lösungsmenge eines homogenen Gleichungssystems

Siehe Vorlesung

2.2.2.3 Komplexe Zahlen

Siehe Vorlesung

2.2.2.4 Funktionen

Siehe Vorlesung

2.2.2.5 Matrizen

Siehe Vorlesung

2.2.3 Lineare Abhängigkeit

2.2.3.1 Einführung

Zunächst wird der Begriff der Linearkombination eingeführt:

Def.: Sei V ein VR und $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k \in V$ sowie $\lambda_i \in \mathbb{R}$,
dann heißt $\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + ... + \lambda_k \cdot \vec{a}_k$
Linearkombination (LK) und die λ_i Koeffizienten der LK.

Dies führt auf den Begriff des aufgespannten Vektorraumes:

Def.: Die Menge der Linearkombinationen
$[\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k] := \{\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + ... + \lambda_k \cdot \vec{a}_k \mid \lambda_i \in \mathbb{R}\}$
heißt der von $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k$ **aufgespannte Vektorraum**.

Beispiele

Siehe Vorlesung

Def.: k Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k$ eines Vektorraumes V heißen **linear abhängig**, wenn es k reelle Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ gibt, die nicht alle verschwinden, mit $\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + ... + \lambda_k \cdot \vec{a}_k = \vec{0}$.
Andernfalls heißen die Vektoren **linear unabhängig**.

Es lässt sich zeigen:

- Zwei linear abhängige Vektoren des $\mathbb{R}^2$ sind kollinear und umgekehrt.
- Sind zwei Vektoren des $\mathbb{R}^2$ nicht kollinear, so sind sie linear unabhängig und umgekehrt.
- Drei Vektoren des $\mathbb{R}^2$ sind stets linear abhängig.

Dies lässt sich auf den $\mathbb{R}^3$ übertragen:

- Drei linear abhängige Vektoren des $\mathbb{R}^3$ sind komplanar und umgekehrt.
- Sind drei Vektoren des $\mathbb{R}^3$ nicht komplanar, so sind sie linear unabhängig und umgekehrt.
- Vier Vektoren des $\mathbb{R}^3$ sind stets linear abhängig.

Verallgemeinert gilt: Im $\mathbb{R}^n$ sind $n + 1$ Vektoren immer linear abhängig.

Beispiele

Siehe Vorlesung

2.2.3.2 Sätze über Lineare Abhängigkeit

Satz 1: Die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2..., \vec{a}_k$ sind *linear abhängig* genau dann, wenn mindestens einer dieser Vektoren LK der übrigen ist.
Denn:
In $\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + ... + \lambda_k \cdot \vec{a}_k = \vec{0}$ sei z.B. $\lambda_1 \neq 0$ dann folgt
$\vec{a}_1 = \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) \cdot \vec{a}_2 + ... + \left(-\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right) \cdot \vec{a}_k$ und somit
$\vec{a}_1 = \mu_1 \cdot \vec{a}_2 + ... + \mu_{k-1} \cdot \vec{a}_k$ bzw.
$1 \cdot \vec{a}_1 + (-\mu_1) \cdot \vec{a}_2 + ... + (-\mu_{k-1}) \cdot \vec{a}_k = \vec{0}$, wobei damit
mit dem Faktor 1 von $\vec{a}_1$ mindestens ein Koeffizient ungleich Null ist q.e.d.

Satz 2: Die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k$ sind *linear unabhängig* genau dann, wenn aus

$$\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + ... + \lambda_k \cdot \vec{a}_k = \vec{0}$$

folgt $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k = 0$.

Denn:

Wäre $\lambda_i \neq 0$ für irgendein i, so wäre $\vec{a}_i$ LK von den übrigen Vektoren q.e.d.

Satz 3: Prinzip des Koeffizientenvergleichs

Sind die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2..., \vec{a}_k$ *linear unabhängig* und ist

$\vec{b}$ LK dieser Vektoren (oder $\vec{b} \in [\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k]$),

so sind die Koeffizienten der LK *eindeutig* bestimmt.

Denn:

Sei $\vec{b} = \lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + ... + \lambda_k \cdot \vec{a}_k = \mu_1 \cdot \vec{a}_1 + ... + \mu_k \cdot \vec{a}_k$

so folgt wegen Regel 4) der Vielfachenbildung

$(\lambda_1 - \mu_1) \cdot \vec{a}_1 + ... + (\lambda_k - \mu_k) \cdot \vec{a}_k = \vec{0}$

und somit nach Satz 2 von oben

$\lambda_1 - \mu_1 = 0$, ... , $\lambda_k - \mu_k = 0$ und somit $\lambda_1 = \mu_1$, ... , $\lambda_k = \mu_k$ q.e.d. .

Die Zahlen $\lambda_1, ..., \lambda_k$ in Satz 3 werden die *Koordinaten* von $\vec{b}$ bezüglich der $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_k$ genannt.

2.2.3.3 Basis und Dimension

Basis und Dimension eines Vektorraumes werden folgendermaßen erklärt:

Def.: Eine Teilmenge B eines Vektorraumes V heißt **Basis** von V, wenn gilt

a) Die Vektoren aus B sind linear unabhängig,

b) jeder Vektor aus V ist Linearkombination der Vektoren aus B.

Die Anzahl der Vektoren aus B heißt **Dimension** von V ($\dim V$).

2.2.3.4 Beispiele

Siehe Vorlesung

2.3 Anwendungen in der Geometrie

Die folgenden Anwendungen sind der Formelsammlung von Papula entnommen.

2.3.1 Vektorielle Darstellung einer Geraden

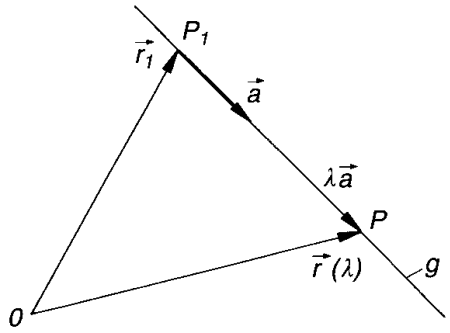
2.3.1.1 Punkt-Richtungs-Form

In der Parameterdarstellung

Gegeben: Ein Punkt P_1 auf der Geraden g mit dem Ortsvektor $\vec{r}_1$ und ein Richtungsvektor $\vec{a}$ der Geraden

$$\boxed{\vec{r}(\lambda) = \vec{r}_1 + \lambda\vec{a}}$$

λ: Parameter; $\lambda \in \mathbb{R}$; $\vec{a} \neq \vec{0}$



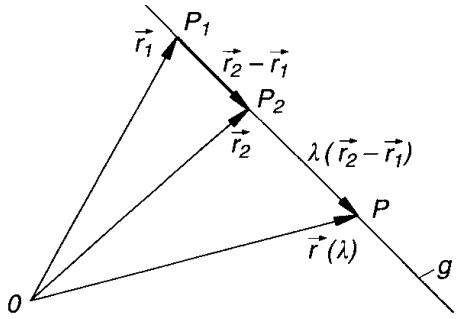
2.3.1.2 Zwei-Punkte-Form

Gegeben: Zwei *verschiedene* Punkte P_1 und P_2 auf der Geraden g mit den Ortsvektoren $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$

$$\boxed{\vec{r}(\lambda) = \vec{r}_1 + \lambda\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{r}_1 + \lambda(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}$$

λ: Parameter; $\lambda \in \mathbb{R}$

$\vec{r}_2 - \vec{r}_1$: Richtungsvektor der Geraden

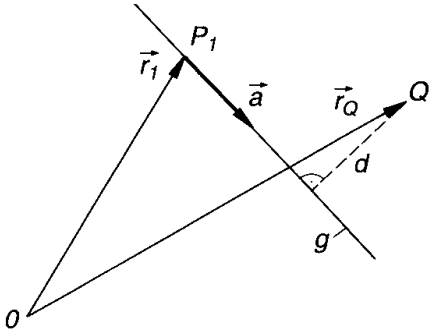


2.3.2 Abstand eines Punktes von einer Geraden

Gegeben: Eine Gerade g mit der Gleichung $\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda\vec{a}$ und ein Punkt Q mit dem Ortsvektor $\vec{r}_Q$

$$\boxed{d = \frac{|\vec{a} \times (\vec{r}_Q - \vec{r}_1)|}{|\vec{a}|}}$$

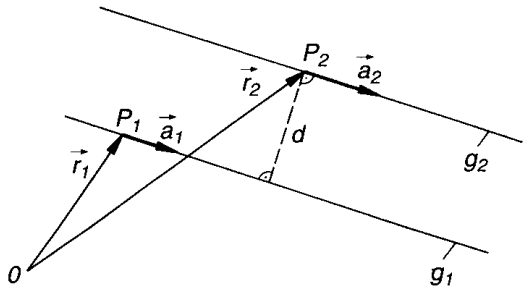
$\vec{a}$: Richtungsvektor der Geraden



2.3.3 Abstand zweier paralleler Geraden

Gegeben: Zwei *parallele* Geraden g_1 und g_2 mit den Gleichungen
$\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda_1 \vec{a}_1$ und
$\vec{r} = \vec{r}_2 + \lambda_2 \vec{a}_2$

$$d = \frac{|\vec{a}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)|}{|\vec{a}_1|}$$

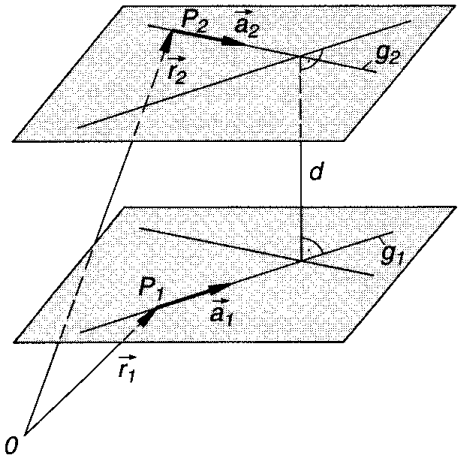


Die Geraden g_1 und g_2 mit den Richtungsvektoren $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ sind genau dann *parallel*, wenn $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \vec{0}$ ist.

2.3.4 Abstand zweier windschiefer Geraden

Gegeben: Zwei *windschiefe* Geraden g_1 und g_2 mit den Gleichungen
$\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda_1 \vec{a}_1$ und
$\vec{r} = \vec{r}_2 + \lambda_2 \vec{a}_2$

$$d = \frac{|[\vec{a}_1\, \vec{a}_2\, (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)]|}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}$$



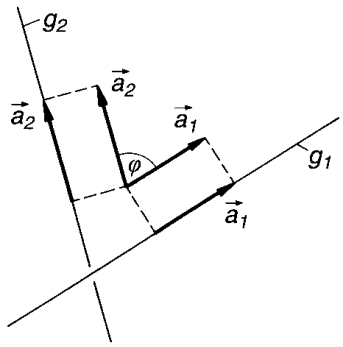
Die Geraden g_1 und g_2 sind genau dann *windschief* (d. h. nicht-parallel und kommen nicht zum Schnitt), wenn die Bedingungen $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \neq \vec{0}$ und $[\vec{a}_1\, \vec{a}_2\, (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)] \neq 0$ erfüllt sind.

2.3.5 Schnittpunkt und Schnittwinkel zweier Geraden

Unter dem Schnittwinkel φ zweier Geraden versteht man den Winkel zwischen den zugehörigen *Richtungsvektoren* (auch dann, wenn sich die Geraden *nicht* schneiden).

Gegeben: Zwei Geraden g_1 und g_2 mit den Richtungsvektoren $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$

$$\boxed{\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|}\right)}$$



Den Schnittpunkt S der Geraden g_1: $\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda_1 \vec{a}_1$ und g_2: $\vec{r} = \vec{r}_2 + \lambda_2 \vec{a}_2$ erhält man durch *Gleichsetzen* der Ortsvektoren:

$$\vec{r}_1 + \lambda_1 \vec{a}_1 = \vec{r}_2 + \lambda_2 \vec{a}_2$$

Diese Vektorgleichung führt (*komponentenweise* geschrieben) zu einem *linearen Gleichungssystem* mit drei Gleichungen und den beiden Unbekannten λ_1 und λ_2. Die (eindeutige) Lösung liefert die zum Schnittpunkt S gehörigen Parameterwerte. Den Ortsvektor $\vec{r}_S$ des gesuchten Schnittpunktes S erhält man dann durch Einsetzen des Parameterwertes λ_1 in die Gleichung der Geraden g_1 (alternativ: λ_2 in die Gleichung der Geraden g_2 einsetzen).

2.3.6 Vektorielle Darstellung einer Ebene

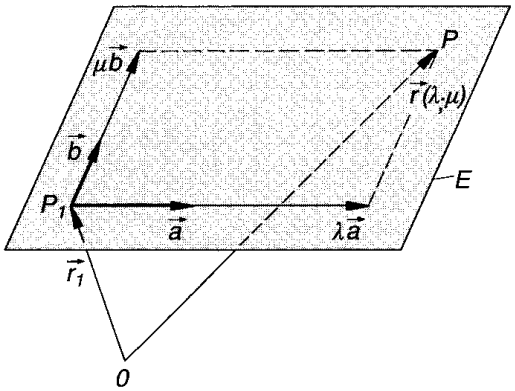
2.3.6.1 Punkt-Richtungs-Form

In der Parameterdarstellung

Gegeben: Ein Punkt P_1 der Ebene E mit dem Ortsvektor $\vec{r}_1$ und zwei *nicht-kollineare* Richtungsvektoren $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$ der Ebene

$$\boxed{\vec{r}(\lambda;\ \mu) = \vec{r}_1 + \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}}$$

$\lambda,\ \mu$: Parameter; $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$



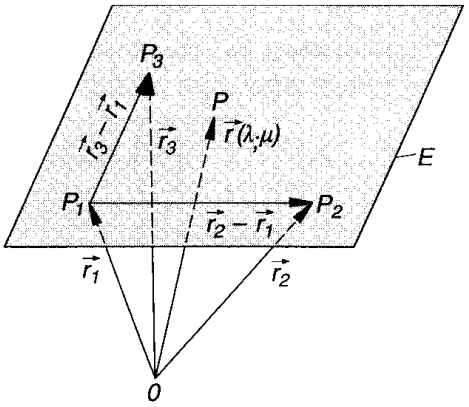
2.3.6.2 Drei-Punkte-Form

Gegeben: Drei *verschiedene* Punkte P_1, P_2 und P_3 der Ebene E mit den Ortsvektoren $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ und $\vec{r}_3$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{r}(\lambda;\ \mu) &= \vec{r}_1 + \lambda\overrightarrow{P_1P_2} + \mu\overrightarrow{P_1P_3} = \\ &= \vec{r}_1 + \lambda(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + \mu(\vec{r}_3 - \vec{r}_1)\end{aligned}}$$

λ, μ: Parameter; $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$

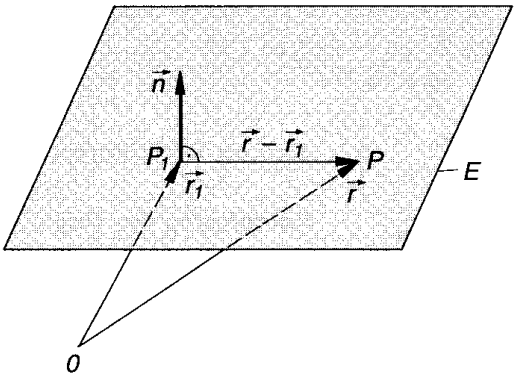
Die Ebene ist *eindeutig* bestimmt, wenn die drei Punkte *nicht* in einer Geraden liegen. Dies ist der Fall, wenn $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times (\vec{r}_3 - \vec{r}_1) \neq \vec{0}$ ist.



2.3.7 Ebene senkrecht zu einem Vektor

Gegeben: Ein Punkt P_1 der Ebene E mit dem Ortsvektor $\vec{r}_1$ und ein *Normalenvektor* $\vec{n}$ der Ebene (steht *senkrecht* auf der Ebene)

$$\boxed{\vec{n}\cdot(\vec{r} - \vec{r}_1) = 0 \qquad \text{oder} \qquad \vec{n}\cdot\vec{r} = \vec{n}\cdot\vec{r}_1}$$

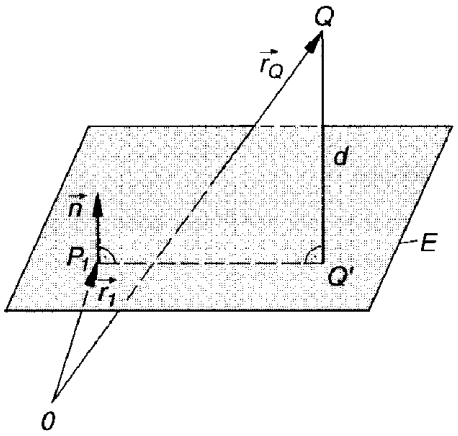


2.3.8 Abstand eines Punktes von einer Ebene

Gegeben: Eine Ebene E mit der Gleichung $\vec{n}\cdot(\vec{r} - \vec{r}_1) = 0$ und ein Punkt Q mit dem Ortsvektor $\vec{r}_Q$

$$\boxed{d = \frac{|\vec{n}\cdot(\vec{r}_Q - \vec{r}_1)|}{|\vec{n}|}}$$

Q': Fußpunkt des Lotes von Q auf die Ebene E

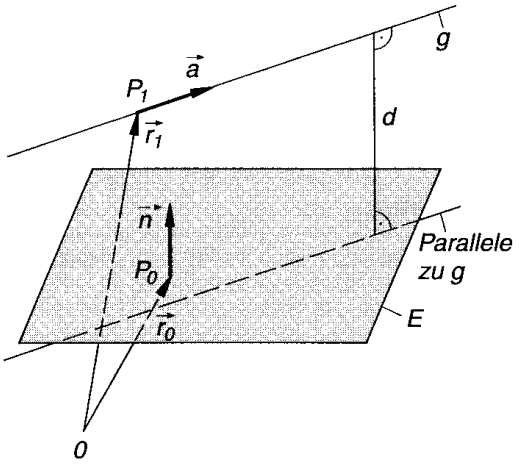


2.3.9 Abstand einer Geraden von einer Ebene

Gegeben: Eine Ebene E mit der Gleichung $\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$ und eine zu dieser Ebene *parallele* Gerade g mit der Gleichung $\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda \vec{a}$

$$d = \frac{|\vec{n} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)|}{|\vec{n}|}$$

Eine Gerade mit dem Richtungsvektor $\vec{a}$ verläuft genau dann *parallel* zu einer Ebene mit dem Normalenvektor $\vec{n}$, wenn das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{n}$ *verschwindet.*



Hier wird der Vektor $\vec{r}_1 - \vec{r}_0$ auf die Normale $\vec{n}$ der Ebene projeziert.

2.3.10 Abstand zweier paralleler Ebenen

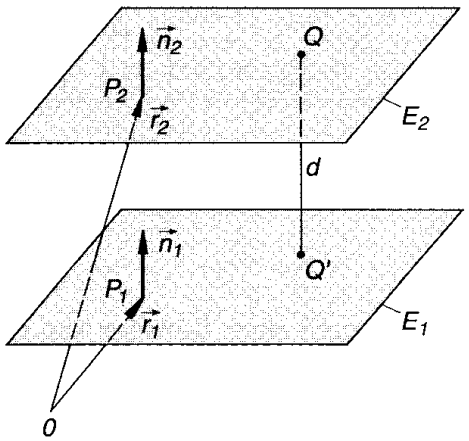
Gegeben: Zwei *parallele* Ebenen E_1 und E_2 mit den Gleichungen
$\vec{n}_1 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) = 0$ und
$\vec{n}_2 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_2) = 0$

$$d = \frac{|\vec{n}_1 \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)|}{|\vec{n}_1|} = \frac{|\vec{n}_2 \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)|}{|\vec{n}_2|}$$

Q : Beliebiger Punkt der Ebene E_2

Q': Fußpunkt des Lotes von Q auf die zweite Ebene E_1

Zwei Ebenen sind genau dann *parallel*, wenn ihre Normalenvektoren $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ *kollinear* sind, d. h. $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{0}$ ist.



Hier wird wie in 2.3.9 der Vektor $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ auf die Normale $\vec{n}$ der Ebene projeziert.

2.3.11 Schnittpunkt und Schnittwinkel einer Geraden mit einer Ebene

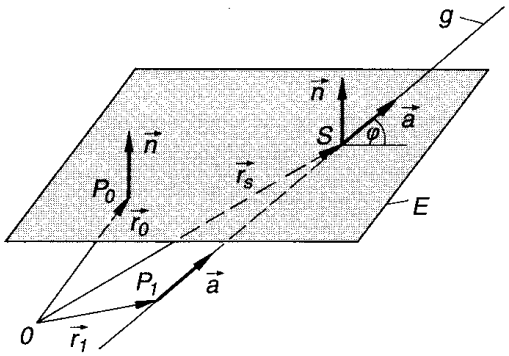
Gegeben: Eine Gerade g mit der Gleichung $\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda\,\vec{a}$ und eine Ebene E mit der Gleichung $\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$

Ortsvektor des Schnittpunktes S:

$$\vec{r}_S = \vec{r}_1 + \frac{\vec{n} \cdot (\vec{r}_0 - \vec{r}_1)}{\vec{n} \cdot \vec{a}}\,\vec{a}$$

Schnittwinkel φ*:*

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{|\vec{n} \cdot \vec{a}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|}\right)$$



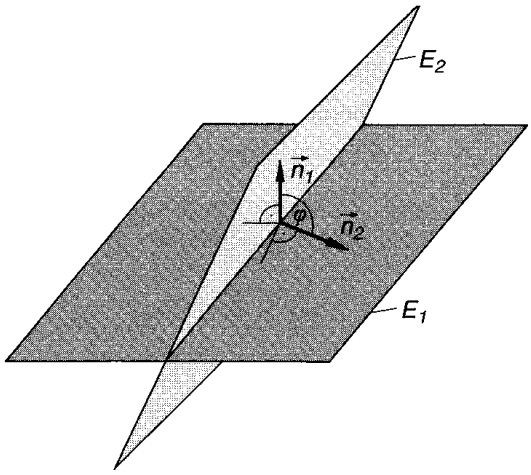
Eine Gerade mit dem Richtungsvektor $\vec{a}$ und eine Ebene mit dem Normalenvektor $\vec{n}$ kommen genau dann zum *Schnitt*, wenn $\vec{a} \cdot \vec{n} \neq 0$ ist.

2.3.12 Schnittwinkel zweier Ebenen ()

Unter dem Schnittwinkel φ zweier Ebenen versteht man den Winkel zwischen den zugehörigen *Normalenvektoren* der beiden Ebenen.

Gegeben: Zwei Ebenen E_1 und E_2 mit den Normalenvektoren $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}\right)$$



2.4 Aufgaben zu Kapitel 2

2.4.1 Einführung

Aufgabe 2.1

a) Was sind die Unterschiede zwischen Skalar und Vektor?

b) Nennen Sie drei Beispiele für physikalische Größen welche Skalare sind!

c) Nennen Sie drei Beispiele für physikalische Größen welche Vektoren sind!

d) Wann heißen zwei Vektoren zueinander orthogonal?

2.4.2 Skalarprodukt

Aufgabe 2.2

Bestimmen Sie den Vektor $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$a_x > 0 \ , \quad |\vec{a}| = 3 \ , \quad \vec{a} \perp \vec{b} \quad \text{und} \quad \vec{a} \perp \vec{c} \ ,$$

wobei $\vec{b} = (3; -4; 1)$ und $\vec{c} = (6; -2; 5)$. [Lösung: $\vec{a} = (2; 1; -2)$].

Aufgabe 2.3

Bestimmen Sie für das räumliche Dreieck mit den Eckpunkten

$$A = (1; 1; 2) \ , \quad B = (0; 3; -1) \quad \text{und} \quad C = (-4; 0; 9)$$

mit Hilfe des Skalarproduktes die Seitenlängen a, b und c und die Winkel α, β und γ.
[Lösung: $a = 11,2$, $b = 8,7$, $c = 3,7$, $\alpha \approx 124°$, $\beta \approx 40°$, $\gamma \approx 16°$.]

2.4.3 Vektorprodukt

Aufgabe 2.4

Bestimmen Sie y und z so, dass

$$\vec{a} = (2; y; z) \quad \text{auf} \quad \vec{b} = (-1; 4; 2) \quad \text{und} \quad \vec{c} = (3; -3; -1)$$

senkrecht steht. Bestimmen Sie anschließend $|\vec{a}|$ und die Winkel φ_1 zwischen $\vec{a}$ und $(\vec{b} + \vec{c})$ und φ_2 zwischen $\vec{a}$ und $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$. [Lösung: $y = 5$, $z = -9$, $|\vec{a}| \approx 10,5$, $\varphi_1 = 90°$, $\varphi_1 = 13,1°$].

Aufgabe 2.5

Zeigen Sie, dass gilt

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)^2 = |\vec{a}|^2 \cdot \left|\vec{b}\right|^2 - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2 \ .$$

Hinweis: Eine Lösungsmöglichkeit besteht darin, zunächst das Skalarprodukt des letzten Terms umzuschreiben und dann die gesamte rechte Seite mit einem Additionstheorem umzuformen.

2.4.4 Spatprodukt

Aufgabe 2.6

Gegeben sind die drei Vektoren

$$\vec{a} = (1; 0; 2) \ , \quad \vec{b} = (4; -1; 5) \quad \text{und} \quad \vec{c} = (2; 3; 13) \ .$$

Prüfen sie, ob $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ komplanar sind und zeigen Sie, dass

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \left[\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\right] = \left[\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}\right] \qquad \text{gilt!} \qquad \text{[Lösung: ja.]}$$

2.4.5 Anwendungen in der Geometrie

Aufgabe 2.7

Von einer Geraden g ist der Punkt $P_1 = (2; 2; 1)$ und der Richtungsvektor $\vec{a}$ mit den skalaren Vektorkomponenten $a_x = 1$, $a_y = -2$ und $a_z = 5$ bekannt. Welche Abstände d_a und d_b besitzen die Punkte $A = (5; 10; 3)$ bzw. $B = (-1; 8; -14)$ von g? [Lösung: $d_a = 8,76$, $d_b = 0$.]

Aufgabe 2.8

Bestimmen Sie die Gleichung der durch den Punkt $P_1 = (5; 1; 5)$ gehenden Ebene E mit dem Normalenvektor $\vec{n} = (-1; 2; -1)$. [Lösung: $x - 2y + z - 8 = 0$.]

2.4.6 Vektorräume

Aufgabe 2.9

a) Was ist ein Vektorraum? Nennen Sie drei Beispiele für Vektorräume aus der Mathematik!

b) Wann heißen k Vektoren eines Vektorraums linear unabhängig, wann linear abhängig?

c) Was ist eine Basis eines Vektorraumes?

d) Ermitteln Sie drei Teilmengen des $\mathbb{R}^3$, welche eine Basis diese Vektorraumes darstellen.

2.4.7 Lineare Abhängigkeit

Aufgabe 2.10

Im R^3 prüfe man, ob $\vec{c} = (1; 1; 1)$ eine Linearkombination von

$\vec{a} = (1; 0; 1)$ und $\vec{b} = (0; 0; 1)$ ist! [Lösung: nein.]

Aufgabe 2.11

Im R^3 zeige man, dass $\vec{d} = (1; 5; 5)$ eine Linearkombination von

$\vec{a} = (-1; 1; 1)$, $\vec{b} = (1; 3; 1)$ und $\vec{c} = (1; 0; 1)$ ist! [Lösung: $\vec{d} = 2\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}$.]

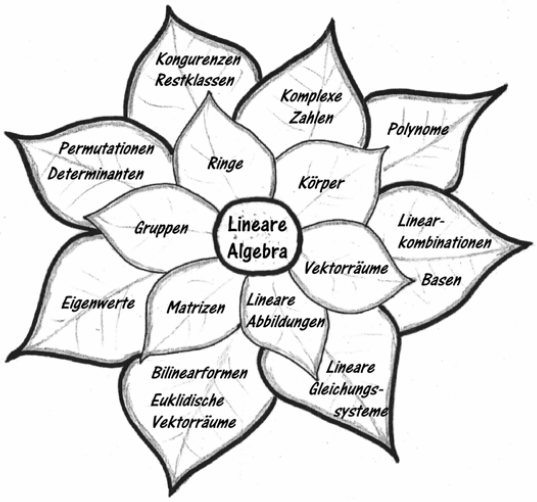
2.4.8 Basis und Dimension

Aufgabe 2.12

Zeigen Sie, $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{j} + \vec{k}$ und $\vec{c} = \vec{k} + \vec{i}$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$, falls dies für $\vec{i}$, $\vec{j}$ und $\vec{k}$ gilt.

Kapitel 3

Lineare Algebra



Kapitelinhalt

3.1 Lineare Gleichungssysteme 3-1

3.1.1 Vorbemerkungen 3-1

3.1.2 System von linearen Gleichungen 3-2

3.1.3 Transfomation auf Trapezform (speziell Dreicksform) 3-4

3.1.4 Beschreibung der Lösungsmenge 3-7

3.1.5 Homogene Gleichungssysteme 3-12

3.2 Matrizen 3-13

3.2.1 Grundbegriffe 3-13

3.2.2 Addition 3-14

3.2.3 Vielfachenbildung 3-14

3.2.4 Multiplikation 3-16

3.3 Inverse Matrix, Determinanten 3-21

3.3.1 Inverse Matrix 3-21

3.3.2 Determinanten zweiter Ordnung 3-22
3.3.3 Determinanten dritter Ordnung 3-24
3.3.4 Determinanten n-ter Ordnung 3-25
3.3.5 Cramersche Regel 3-30
3.4 Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystem 3-33
3.4.1 Schreibweisen 3-33
3.4.2 Rang eines Linearen Gleichungssystems 3-34
3.4.3 Struktur der Lösungsmenge 3-35
3.5 Spezielle Matrizen und Eigenwerte 3-36
3.5.1 Orthogonale Matrix 3-37
3.5.2 Diagonalmatrix 3-38
3.5.3 Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix 3-38
3.6 Aufgaben zu Kapitel 3 3-42

3.1 Lineare Gleichungssysteme

3.1.1 Vorbemerkungen

Lineare Gleichung

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \ldots + a_n \cdot x_n = b \tag{3.1}$$

Festlegung

$a_i \in \mathbb{R}$	Koeffizienten
$b \in \mathbb{R}$	absolutes Glied
$x_1, x_2, ..., x_n$	Variablen

Gleichung (3.1) heißt **homogen**, falls $b = 0$ und **inhomogen** falls $b \neq 0$.

Lösung:

n-Tupel $(d_1, d_2, d_3, ..., d_n) \in \mathbb{R}^n$ heißt Lösung von (3.1) falls

$$a_1 \cdot d_1 + a_2 \cdot d_2 \ldots + a_n \cdot d_n = b \tag{3.2}$$

gilt.

Die Menge aller Lösungen sei L. Dann gilt $L \subseteqq \mathbb{R}^n$.

Beispiele

3.1.2 System von linearen Gleichungen

Gegeben: Menge (System) von m linearen Gleichungen mit n Variablen,

$$\begin{array}{rcl} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + ... + a_{1n} \cdot x_n & = & b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + ... + a_{2n} \cdot x_n & = & b_2 \\ ... & & \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + ... + a_{mn} \cdot x_n & = & b_m \end{array} , \tag{3.3}$$

wobei $a_{ik} \in \mathbb{R}$ Koeffizienten,
$b_i \in \mathbb{R}$ absolute Glieder.

System heißt **homogen**: $\Leftrightarrow$ für alle i gilt $b_i = 0$.

System heißt **inhomogen**: $\Leftrightarrow$ für mindestens ein i gilt $b_i \neq 0$.

Lösungsmenge L: Schnittmenge der Lösungsmengen aller m Gleichungen.

Fragen

1) Bedingungen für Lösbarkeit

- speziell Bedingungen für eindeutige Lösbarkeit

2) Bildungsgesetz für die Lösungsmenge L

Ziel: Umformung des System so, dass die Lösungen abgelesen werden können.

Voraussetzung: Es existiere eine Lösung (ist das System nicht lösbar, so ergibt sich ein Widerspruch).

Beispiel Gaußsches Eliminierungsverfahren

Zu lösen ist folgendes Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} 3 \cdot x + 4 \cdot y + 3 \cdot z & = & 1 \\ 2 \cdot x - 1 \cdot y - 1 \cdot z & = & 6 \\ 1 \cdot x + 3 \cdot y + 2 \cdot z & = & -1 \end{array} \tag{3.4}$$

Lösung durch Addieren/Subtrahieren von Vielfachen der Gleichungen

$$\begin{array}{rcll} 3\cdot x+4\cdot y+3\cdot z & = & 1 & \mid \cdot 2 \downarrow \quad \mid \cdot 1 \downarrow \\ 2\cdot x-1\cdot y-1\cdot z & = & 6 & \mid \cdot(-3) \downarrow \quad \mid \\ 1\cdot x+3\cdot y+2\cdot z & = & -1 & \mid \cdot(-3) \downarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} 3\cdot x+4\cdot y+3\cdot z & = & 1 & \text{Gleichung bleibt unverändert} \\ 11\cdot y+9\cdot z & = & -16 & \mid \cdot 5 \downarrow \\ -5\cdot y-3\cdot z & = & 4 & \mid \cdot 11 \downarrow \end{array} \tag{3.5}$$

$$\begin{array}{rcll} 3\cdot x+4\cdot y+3\cdot z & = & 1 & \text{Gleichung bleibt unverändert} \\ 11\cdot y+9\cdot z & = & -16 & \text{Gleichung bleibt unverändert} \\ 12\cdot z & = & -36 & \textbf{System hat nun Dreiecksgestalt} \end{array}$$

Die eingekreisten Koeffizienten werden jeweils eliminiert.

Aus der dritten Gleichungssytemform unten kann abgelesen werden: $z=-3$, aus der zweiten Gleichung folgt dann $y=1$ und schließlich aus der oberen also ersten Gleichung, $x=2$.

$\Rightarrow$ Lösungsmenge = $\{(2;1;-3)\}$.

$\Rightarrow$ System eindeutig lösbar!

Probe:

$$\begin{array}{rcrcr} 3\cdot 2+4\cdot 1+3\cdot(-3) & = & 6+4-9 & = & 1\ \surd \\ 2\cdot 2-1\cdot 1-1\cdot(-3) & = & 4-1+3 & = & 6\ \surd \\ 1\cdot 2+3\cdot 1+2\cdot(-3) & = & 2+3-6 & = & -1\ \surd\,. \end{array} \tag{3.6}$$

Im vorherigen Beispiel ist zum Teil folgendes benutzt worden:

Äquivalente Umformungen

Zwei Systeme heißen äquivalent, wenn sie dieselbe Lösungsmenge haben

Aus einem Gleichungssystem entsteht ein äquivalentes Gleichungssystem, wenn folgende Veränderungen vorgenommen werden:

(I) Zwei Gleichungen werden vertauscht.

(II) Eine Gleichung wird mit einem von Null verschiedenen Faktor multipliziert.

(III) Zu einer Gleichung des Systems wird ein beliebiges Vielfaches einer anderen Gleichung addiert.

3.1.3 Transfomation auf Trapezform (speziell Dreicksform)

Zunächst: Vertauschen der Gleichungen so, dass der Koeffizient oben links ungleich Null ist.

Umformung

$$
\begin{array}{rcccccccccl|l|l|l}
a_{11} \cdot x_1 & + & a_{12} \cdot x_2 & + & \dots & + & a_{1n} \cdot x_n & = & b_1 & | \cdot (-a_{21}) \downarrow & | & & | \cdot (-a_{m1}) \downarrow \\
a_{21} \cdot x_1 & + & a_{22} \cdot x_2 & + & \dots & + & a_{2n} \cdot x_n & = & b_2 & | \cdot a_{11} \downarrow & | & & | \\
\vdots & & & & \dots & & & & \vdots & | & | & \dots & | \\
a_{m1} \cdot x_1 & + & a_{m2} \cdot x_2 & + & \dots & + & a_{mn} \cdot x_n & = & b_m & | & | & & | \cdot a_{11} \downarrow
\end{array}
$$

Als Ergebnis ergibt sich nach dem ersten Schritt (Elimination der Koeffizienten vor x_1):

$$
\begin{array}{rcccccccc}
a_{11} \cdot x_1 & + & a_{12} \cdot x_2 & + & \dots & + & a_{1n} \cdot x_n & = & b_1 \\
 & & a'_{22} \cdot x_2 & + & \dots & + & a'_{2n} \cdot x_n & = & b'_2 \\
 & & \vdots & & \dots & & & & \vdots \\
 & & a'_{m2} \cdot x_2 & + & \dots & + & a'_{mn} \cdot x_n & = & b'_m
\end{array}
$$

Bei jedem Schritt:

Anzahl der verbleibenden Gleichungen und Anzahl der darin verbleibenden Variablen nimmt um 1 ab.

Also: Verfahren bricht nach endlichen Schritten ab!

Fall 1: Verfahren bricht nach $(m-1)$-Schritten ab, weil keine weiteren Gleichungen vorhanden sind.

Fall 2: Verfahren bricht ab, weil die Koeffizienten in den restlichen Gleichungen verschwinden.

Beispiel 1:

$$
\begin{array}{rrrrcl|l|l|}
3\cdot x_1 - & 1\cdot x_2 + & 4\cdot x_3 - & 1\cdot x_4 & = & 2 & \cdot(-2)\downarrow & \cdot(-5)\downarrow \\
2\cdot x_1 + & 1\cdot x_2 - & 1\cdot x_3 + & 5\cdot x_4 & = & 1 & \cdot 3\downarrow & \\
5\cdot x_1 - & 2\cdot x_2 + & 2\cdot x_3 + & 2\cdot x_4 & = & 7 & & \cdot 3\downarrow \\
\hline
3\cdot x_1 - & 1\cdot x_2 + & 4\cdot x_3 - & 1\cdot x_4 & = & 2 & & \\
 & 5\cdot x_2 - & 11\cdot x_3 + & 17\cdot x_4 & = & -1 & \cdot 1\downarrow & \\
 & -1\cdot x_2 - & 14\cdot x_3 + & 11\cdot x_4 & = & 11 & \cdot 5\downarrow & \\
\hline
3\cdot x_1 - & 1\cdot x_2 + & 4\cdot x_3 - & 1\cdot x_4 & = & 2 & & \\
 & 5\cdot x_2 - & 11\cdot x_3 + & 17\cdot x_4 & = & -1 & & \\
 & & -81\cdot x_3 + & 72\cdot x_4 & = & 54 & & .
\end{array}
$$

Für das obige Beispiel 1 liegt Fall 1) vor, da Trapezform vorliegt und keine weiteren Gleichungen vorhanden sind.

Beispiel 2:

$$
\begin{array}{rrrcl|l|l|}
7\cdot x_1 - & 1\cdot x_2 + & 5\cdot x_3 & = & 1 & \cdot(-1)\downarrow & \cdot(-15)\downarrow \\
1\cdot x_1 + & 3\cdot x_2 - & 1\cdot x_3 & = & 7 & \cdot 7\downarrow & \\
15\cdot x_1 + & 1\cdot x_2 + & 9\cdot x_3 & = & 9 & & \cdot 7\downarrow \\
\hline
7\cdot x_1 - & 1\cdot x_2 + & 5\cdot x_3 & = & 1 & & \\
 & 22\cdot x_2 - & 12\cdot x_3 & = & 48 & \cdot 1\downarrow & \\
 & 22\cdot x_2 - & 12\cdot x_3 & = & 48 & \cdot(-1)\downarrow & \\
\hline
7\cdot x_1 - & 1\cdot x_2 + & 5\cdot x_3 & = & 1 & & \\
 & 22\cdot x_2 - & 12\cdot x_3 & = & 48 & & \\
 & & 0 & = & 0 & & .
\end{array}
$$

Für das obige Beispiel 2 liegt Fall 2) vor, da die Koeffizienten aller Variablen verschwinden.

Beispiel 3:

$$
\begin{array}{rrrcl|l|l|}
7\cdot x_1 - & 1\cdot x_2 + & 5\cdot x_3 & = & 1 & \cdot(-1)\downarrow & \cdot(-15)\downarrow \\
1\cdot x_1 + & 3\cdot x_2 - & 1\cdot x_3 & = & 7 & \cdot 7\downarrow & \\
15\cdot x_1 + & 1\cdot x_2 + & 9\cdot x_3 & = & 2 & & \cdot 7\downarrow \\
\hline
7\cdot x_1 - & 1\cdot x_2 + & 5\cdot x_3 & = & 1 & & \\
 & 22\cdot x_2 - & 12\cdot x_3 & = & 48 & \cdot 1\downarrow & \\
 & 22\cdot x_2 - & 12\cdot x_3 & = & -1 & \cdot(-1)\downarrow & \\
\hline
7\cdot x_1 - & 1\cdot x_2 + & 5\cdot x_3 & = & 1 & & \\
 & 22\cdot x_2 - & 12\cdot x_3 & = & 48 & & \\
 & & 0 & = & 49 & & .
\end{array}
$$

Für das obige Beispiel 3 hat sich ein Widerspruch ergeben, da $0 \neq 49$.

Der Widerspruch in der 3. Gleichung zeigt, dass die Annahme, dass das Gleichungssystem eine Lösung hat, falsch war: $\Rightarrow\ L = \varnothing$.

Es gilt folgender Satz (ohne Beweis):

Satz: Ein lineares Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn sich bei der Transformation des Systems auf Trapezform (Dreiecksform) keine Widersprüche ergeben.

3.1.4 Beschreibung der Lösungsmenge

Gegeben: Lineares Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + ... + a_{1n} \cdot x_n & = & b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + ... + a_{2n} \cdot x_n & = & b_2 \\ & ... & \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + ... + a_{mn} \cdot x_n & = & b_m \end{array} , \tag{3.7}$$

Nach dem Eliminierungsverfahren, Fall 2, sollen r Gleichungen übrig bleiben:

$$\begin{array}{rcl} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + ... + a_{1r} \cdot x_r + a_{1r+1} \cdot x_{r+1} + ... + a_{1n} \cdot x_n & = & b_1 \\ a_{22} \cdot x_2 + ... + a_{2r} \cdot x_r + a_{2r+1} \cdot x_{r+1} + ... + a_{2n} \cdot x_n & = & b_2 \\ & ... & \\ a_{rr} \cdot x_r + a_{rr+1} \cdot x_{r+1} + ... + a_{rn} \cdot x_n & = & b_r \\ 0 & = & b_{r+1} \\ & \vdots & \\ 0 & = & b_m \end{array} . \tag{3.8}$$

mit $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$ ... $a_{rr} \neq 0$.

Fall 1 ergibt sich aus r = m, die Gleichungen $0 = b_{r+1}, ..., 0 = b_m$ fallen dann weg.

Es gilt: $L = \varnothing$, wenn mindestens ein $b_i \neq 0$, wobei $i = r+1, r+2, ..., n-1, n$,

$L \neq \varnothing$, wenn $b_{r+1} = b_{r+2} = ... = b_{m-1} = b_m = 0$,
in diesem Fall heißt r *Rang des Gleichungssystems*.
Stets gilt: $r \leq n$ und $r \leq m$,

wobei n = Anzahl der Variablen, m = Anzahl der Gleichungen.

In Worten: Die Anzahl der verbleibenden Gleichungen nach widerspruchsfreier Umformung eines Gleichungssystems in Trapezform heißt **Rang** r des Gleichungssystems.

Weglassen der letzten $(m-r)$-Gleichungen $0=0$, Umschreiben des LGS in folgende Form:

$$
\begin{array}{rcrcl}
a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1r}\cdot x_r & = & b_1 - a_{1r+1}\cdot x_{r+1} - \ldots - a_{1n}\cdot x_n & & \mid \cdot a_{rr} \\
a_{22}\cdot x_2 + \ldots + a_{2r}\cdot x_r & = & b_2 - a_{2r+1}\cdot x_{r+1} - \ldots - a_{2n}\cdot x_n & & \mid \\
\ldots \quad \ldots & = & \ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \mid \\
a_{rr}\cdot x_r & = & b_r - a_{rr+1}\cdot x_{r+1} - \ldots - a_{rn}\cdot x_n & & \mid \cdot(-a_{1r}) \uparrow
\end{array}
$$

Weiteres Eliminieren der Elemente des linken Dreiecks durch Anwendung des Eliminierungsverfahrens von **unten nach oben**.

Ergebnis: Auf der linken Seite steht jeweils nur noch eine Variable x_i je Gleichung.

Demonstration des gesamten Vorgehens an einem Beispiel

$$
\begin{array}{rrrrrcrlll}
2\cdot x_1 - & 1\cdot x_2 + & 5\cdot x_3 - & 2\cdot x_4 - & 1\cdot x_5 & = & 1 & \mid \cdot 3\downarrow & \mid \cdot(-5)\downarrow & \mid \cdot 1\downarrow \\
-3\cdot x_1 + & 2\cdot x_2 - & 1\cdot x_3 - & 1\cdot x_4 + & 4\cdot x_5 & = & 0 & \mid \cdot 2\downarrow & \mid & \\
5\cdot x_1 - & 4\cdot x_2 + & 1\cdot x_3 - & 1\cdot x_4 + & 2\cdot x_5 & = & 2 & \mid & \mid \cdot 2\downarrow & \\
1\cdot x_1 + & 1\cdot x_2 + & 4\cdot x_3 - & 3\cdot x_4 + & 3\cdot x_5 & = & 1 & \mid & & \mid \cdot 2\downarrow
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrrrcrlll}
2\cdot x_1 - & 1\cdot x_2 + & 5\cdot x_3 - & 2\cdot x_4 - & 1\cdot x_5 & = & 1 & \mid & & \\
 & x_2 + & 13\cdot x_3 - & 8\cdot x_4 + & 5\cdot x_5 & = & 3 & \mid \cdot 3\downarrow & \mid \cdot 1\downarrow & \\
 & -3\cdot x_2 - & 23\cdot x_3 + & 8\cdot x_4 + & 9\cdot x_5 & = & -1 & \mid \cdot 1\downarrow & \mid & \\
 & 1\cdot x_2 + & 13\cdot x_3 - & 8\cdot x_4 + & 5\cdot x_5 & = & 3 & \mid & \mid \cdot(-1)\downarrow &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrrrcrl}
2\cdot x_1 - & 1\cdot x_2 + & 5\cdot x_3 - & 2\cdot x_4 - & 1\cdot x_5 & = & 1 & \mid \\
 & x_2 + & 13\cdot x_3 - & 8\cdot x_4 + & 5\cdot x_5 & = & 3 & \mid \\
 & & 16\cdot x_3 - & 16\cdot x_4 + & 24\cdot x_5 & = & 8 & \mid :8 \\
 & & & & 0 & = & 0 & \mid
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrrrcrl}
2\cdot x_1 - & 1\cdot x_2 + & 5\cdot x_3 - & 2\cdot x_4 - & 1\cdot x_5 & = & 1 & \mid \\
 & x_2 + & 13\cdot x_3 - & 8\cdot x_4 + & 5\cdot x_5 & = & 3 & \mid \\
 & & 2\cdot x_3 - & 2\cdot x_4 + & 3\cdot x_5 & = & 1 & \mid
\end{array}
$$

Umschreiben

$$
\begin{array}{rrrcrrrl}
2\cdot x_1 - & 1\cdot x_2 + & 5\cdot x_3 & = & 1 + & 2\cdot x_4 + & x_5 & \mid \cdot 2 \\
 & 1\cdot x_2 + & 13\cdot x_3 & = & 3 + & 8\cdot x_4 - & 5\cdot x_5 & \mid \qquad \mid \cdot 2 \\
 & & 2\cdot x_3 & = & 1 + & 2\cdot x_4 - & 3\cdot x_5 & \mid \cdot(-5)\uparrow \quad \mid \cdot(-13)\uparrow
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrcrrrl}
4\cdot x_1 & -2\cdot x_2 & & = & -3 - & 6\cdot x_4 + & 17\cdot x_5 & \mid \cdot 1 \\
 & 2\cdot x_2 & & = & -7 - & 10\cdot x_4 + & 29\cdot x_5 & \mid \cdot 1\uparrow \\
 & & 2\cdot x_3 & = & 1 + & 2\cdot x_4 - & 3\cdot x_5 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrcrrr}
4\cdot x_1 & & & = & -10 - & 16\cdot x_4 + & 46\cdot x_5 \\
 & 2\cdot x_2 & & = & -7 - & 10\cdot x_4 + & 29\cdot x_5 \\
 & & 2\cdot x_3 & = & 1 + & 2\cdot x_4 - & 3\cdot x_5
\end{array}
$$

Das ergibt:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -\tfrac{5}{2} - 4\cdot x_4 + \tfrac{23}{2}\cdot x_5 \\
x_2 &= -\tfrac{7}{2} - 5\cdot x_4 + \tfrac{29}{2}\cdot x_5 \\
x_3 &= +\tfrac{1}{2} + 1\cdot x_4 - \tfrac{3}{2}\cdot x_5
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Das bedeutet: Wie auch immer x_4 und x_5 gewählt werden, stets erhält man zugehörige x_1, x_2, x_3 die das LGS lösen.

Deshalb: Man setzt $x_4 = t_1$ und $x_5 = t_2$ und nennt t_1, t_2 *freie Parameter* aus $\mathbb{R}$, die Anzahl ist $n - r$ (im Bsp. $n - r = 5 - 3 = 2$).

Lösungsmenge

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & = & -\frac{5}{2} & - & 4\cdot t_1 & + & \frac{23}{2}\cdot t_2 \\
x_2 & = & -\frac{7}{2} & - & 5\cdot t_1 & + & \frac{29}{2}\cdot t_2 \\
x_3 & = & \frac{1}{2} & + & t_1 & - & \frac{3}{2}\cdot t_2 \\
x_4 & = & & & t_1 & & \\
x_5 & = & & & & & t_2
\end{array}
\tag{3.10}
$$

oder in anderer Form geschrieben

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ -\frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
+
\begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot t_1
+
\begin{pmatrix} \frac{23}{2} \\ \frac{29}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot t_2
\tag{3.11}
$$

oder

$$L = \left\{ \left(-\frac{5}{2}; -\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}; 0; 0\right) + t_1 \cdot (-4; -5; 1; 1; 0) \right.$$
$$\left. + t_2 \cdot \left(\frac{23}{2}; \frac{29}{2}; -\frac{3}{2}; 0; 1\right) \mid \; t_1, t_2 \; \in \; \mathbb{R} \right\} \; .$$

L heißt zweifach unendlich, allgemein $(n-r)$-fach unendlich.

Probe:

Lösungen immer in das Ausgangssystem einsetzen! Für die **erste** Gleichung ergibt sich:

$$2 \cdot \left(-\frac{5}{2} - 4 \cdot t_1 + \frac{23}{2} \cdot t_2\right) - \left(-\frac{7}{2} - 5t_1 + \frac{29}{2} t_2\right)$$
$$+5 \cdot \left(\frac{1}{2} + t_1 - \frac{3}{2} \cdot t_2\right) - 2 \cdot t_1 - t_2 = 1 \; . \tag{3.13}$$

Damit ergibt sich für die Zahlen

$$-\frac{10}{2} + \frac{7}{2} + \frac{5}{2} = \frac{2}{2} = 1 \; \surd \; ,$$

und für die Koeffizienten von t_1 und von t_2

$$-8 \cdot t_1 + 5 \cdot t_1 + 5 \cdot t_1 - 2 \cdot t_1 = 0 \; \surd \; , \qquad 23 \cdot t_2 - \frac{29}{2} \cdot t_2 - \frac{15}{2} \cdot t_2 - t_2 = 0 \; \surd \; .$$

Für die **zweite** Gleichung ergibt sich:

$$-3 \cdot \left(-\frac{5}{2} - 4 \cdot t_1 + \frac{23}{2} \cdot t_2\right) + 2\left(-\frac{7}{2} - 5t_1 + \frac{29}{2} t_2\right)$$
$$- \left(\frac{1}{2} + t_1 - \frac{3}{2} \cdot t_2\right) - t_1 + 4 \cdot t_2 = 0 \; ? \; . \tag{3.14}$$

Damit ergibt sich für die Zahlen

$$\frac{15}{2} - \frac{14}{2} - \frac{1}{2} = 0 \; \surd \; ,$$

und für die Koeffizienten von t_1 und von t_2

$$12 \cdot t_1 - 10 \cdot t_1 - t_1 - t_1 = 0 \; \surd \; , \qquad -\frac{69}{2} \cdot t_2 + \frac{58}{2} \cdot t_2 + \frac{3}{2} \cdot t_2 + \frac{8}{2} t_2 = 0 \; \surd \; .$$

Für die **dritte** Gleichung ergibt sich:

$$5 \cdot \left(-\frac{5}{2} - 4 \cdot t_1 + \frac{23}{2} \cdot t_2\right) - 4\left(-\frac{7}{2} - 5t_1 + \frac{29}{2} t_2\right)$$
$$+ \left(\frac{1}{2} + t_1 - \frac{3}{2} \cdot t_2\right) - t_1 + 2 \cdot t_2 = 2 \; ? \; . \tag{3.15}$$

Damit ergibt sich für die Zahlen

$$-\frac{25}{2}+\frac{28}{2}-\frac{1}{2}=2\ \surd\ ,$$

und für die Koeffizienten von t_1 und von t_2

$$-20\cdot t_1+20\cdot t_1-t_1+t_1=0\ \surd\ , \qquad -\frac{115}{2}\cdot t_2-\frac{116}{2}\cdot t_2-\frac{3}{2}\cdot t_2+\frac{4}{2}t_2=0\ \surd\ .$$

Für die **vierte** Gleichung ergibt sich:

$$\begin{aligned}&-\left(-\frac{5}{2}-4\cdot t_1+\frac{23}{2}\cdot t_2\right)+\left(-\frac{7}{2}-5t_1+\frac{29}{2}\cdot t_2\right)\\ &\qquad +4\cdot\left(\frac{1}{2}+t_1-\frac{3}{2}\cdot t_2\right)-3\cdot t_1+3\cdot t_2=1\ ?\ .\end{aligned} \tag{3.16}$$

Damit ergibt sich für die Zahlen

$$\frac{5}{2}-\frac{7}{2}+\frac{4}{2}=1\ \surd\ ,$$

und für die Koeffizienten von t_1 und von t_2

$$4\cdot t_1-5\cdot t_1+4\cdot t_1-3\cdot t_1=0\ \surd\ , \qquad -\frac{23}{2}\cdot t_2+\frac{29}{2}\cdot t_2-\frac{12}{2}\cdot t_2+\frac{6}{2}\cdot t_2=0\ \surd\ .$$

3.1.5 Homogene Gleichungssysteme

Das homogene lineare Gleichungssystem (LGS)

$$\begin{array}{rcl} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + ... + a_{1n} \cdot x_n & = & 0 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + ... + a_{2n} \cdot x_n & = & 0 \\ ... & & \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + ... + a_{mn} \cdot x_n & = & 0 \end{array} \tag{3.17}$$

ist erfüllt für $x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_n = 0$.

Oder: Der Nullvektor[1] $\vec{0} := (0; 0; 0; ...; 0) \in \mathbb{R}^n$ ist Lösungsvektor (**triviale Lösung**).

Also: Ein homogenes Gleichungssystem besitzt stets den Nullvektor als Lösung.

Falls Parameteranzahl n > Rang r, also $n - r > 0$, so gibt es mindestens einen freien Parameter.

Es folgt: Ein homogenes LGS ist **genau** dann nichttrivial lösbar, wenn der Rang r des Systems kleiner ist als die Anzahl der Variablen n. - **Notwendige und hinreichende Bedingung!**

Falls die Anzahl der Gleichungen m < n, so folgt wegen $r \leqslant m$ auch $r < n$.

Damit ergibt sich: Ein homogenes LGS ist dann nichttrivial lösbar, wenn die Anzahl der Gleichungen m kleiner ist als die Anzahl der Variablen n. - **Nur hinreichende Bedingung!**

Es gilt auch bei den homogenen Systemen: Die Anzahl der Gleichungen ist eine unwesentliche Größe beim Lösen des Systems, das Wesentliche ist der Rang.

Erläuterungen zu notwendigen und hinreichenden Bedingungen

Es wird unterschieden in notwendige und hinreichende Kriterien oder Bedingungen. Dies sei anhand der obigen Aussagen noch einmal erläutert:

Ein **notwendiges Kriterium** gibt eine Vorwahl. Homogene LGSe, die es nicht erfüllen, haben mit Sicherheit keine nichttriviale Lösung. Ist es dagegen erfüllt, so kann für das LGS eine nichttriviale Lösung existieren, muss aber nicht. Es existiert sicher eine nichttriviale Lösung, wenn das homogene Gleichungssystem ein **hinreichendes Kriterium** befriedigt, verletzt es dieses, so kann dennoch eine nichttriviale Lösung existieren.

Sichere Schlüsse können daher nur gezogen werden, wenn ein hinreichendes Kriterium erfüllt bzw. ein notwendiges Kriterium verletzt ist. Am wertvollsten sind deshalb **notwendige und hinreichende Kriterien**, da sie sofort auf die Existenz nichttrivialer Lösungen schließen lassen.

[1] Auf den Begriff Vektor im ZUsammenhang mit der Lösungsmenge wird später ausführlicher eingegangen. Er ist eine Element aus einem Vektorraum. Von technischer Bedeutung ist zunächst der dreidimensionale Raum als Vektorraum und somit dreidimensionaleVektoren, z.B. der Ortsvektor $\vec{r} = (x, y, z)$, wobei (x, z, y) Koordinaten im Raum sind.

3.2 Matrizen

3.2.1 Grundbegriffe

Abkürzen des Lösens eines Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcl} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + ... + a_{1n} \cdot x_n & = & b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + ... + a_{2n} \cdot x_n & = & b_2 \\ ... & & \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + ... + a_{mn} \cdot x_n & = & b_m \end{array} \qquad a_{ik},\ ,b_i \in \mathbb{R} \quad , \tag{3.18}$$

Zusammenstellen der Koeffizienten zu einem Schema

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \text{heißt } \textbf{Matrix}. \tag{3.19}$$

Kurzschreibweise:

$$\underline{A} = (a_{ik}) \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, 3, .., m \text{ Zeilenindex} \\ k = 1, 2, 3, .., n \text{ Spaltenindex} \\ \\ a_{ik} \text{ Elemente der Matrix} \end{array} \tag{3.20}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Zeilen}\\ \text{Spalten}\end{array}\right\}\text{Reihen}$$

Nullmatrix: $a_{ik} = 0$ für alle i,k

Typ: $\tau(\underline{A}) = (m, n)$, Zahlenpaar

Beispiele:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \ : \ \tau(\underline{A}) = (2, 3) \qquad \underline{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \ : \ \tau(\underline{B}) = (2, 2)$$

Sonderfall Quadratische Matrizen

- hier gilt: $m = n$
- Hauptdiagonale: Elemente a_{ii}, z.B. $\tau(4, 4)$: $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}$.
- Nebendiagonale: Elemente $a_{i;n-i+1}$, z.B. $\tau(4, 4)$: $a_{14}, a_{23}, a_{32}, a_{41}$.

$$\text{z.B.:} \quad \underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \searrow \text{ Hauptdiagonale} \\ \\ \swarrow \text{ Nebendiagonale} \end{array}$$

Gleichheit: Es stimmen alle Elemente von zwei Matrizen gleichen Typs überein.

$$\text{Es gilt } (a_{ik}) = (b_{ik}) \quad \Leftrightarrow \quad \text{für alle } i, k \text{ gilt } a_{ik} = b_{ik} \ . \tag{3.21}$$

Transponierte Matrix $\underline{A}^T$

Transponierte Matrix $\underline{A}^T$: Vertauschung von Zeilen und Spalten, es gilt dann

$$\tau\left(\underline{A}\right) = (m, n) \quad \Rightarrow \quad \tau\left(\underline{A}^T\right) = (n, m) \ . \tag{3.22}$$

Beispiele von oben:

$$\underline{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \underline{B^T} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Symmetrische Matrix

Falls $\underline{A} = \underline{A}^T$, so ist $\underline{A}$ **symmetrisch**. (3.23)

Beispiel:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.24}$$

Invarianz bei Spiegelung an der Hauptdiagonalen.

3.2.2 Addition

Die Addition ist nur für Matrizen gleichen Typs erklärt:

Def. 1: $(a_{ik}) + (b_{ik}) := (a_{ik} + b_{ik})$. (3.25)

In Worten: Matrizen gleichen Typs werden addiert, indem die entsprechenden Elemente addiert werden.

Eigenschaften

1) Kommutativgesetz: $\underline{A} + \underline{B} = \underline{B} + \underline{A}$

2) Nullmatrix: $\underline{A} + \underline{0} = \underline{0} + \underline{A} = \underline{A}$

3) Entgegengesetzte Matrix: $-\underline{A} = -\left(a_{ik}\right) := \left(-a_{ik}\right)$ (jedes Element wird negativ)

Es gilt $\underline{A} + (-\underline{A}) = \underline{0}$ (mit $\underline{0}$ = Nullmatrix)

3.2.3 Vielfachenbildung

Def. 2: $\lambda \cdot (a_{ik}) := (\lambda \cdot a_{ik})$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ (3.26)

In Worten: Es wird das λ-fache einer Matrix gebildet, indem **jedes** Element mit λ multipliziert wird.

Später wird gezeigt: Die Menge der Matrizen vom Typ (m, n) bilden einen *Vektorraum*.

Regeln

1) Es gilt

$$(\underline{A} + \underline{B})^T = \underline{A}^T + \underline{B}^T \ . \tag{3.27}$$

In Worten: Die Transponierte einer Summe ist gleich der Summe der Transponierten.

Beweis:

$$\begin{aligned}((a_{ik}) + (b_{ik}))^T &\underbrace{=}_{\text{Def. 1}} (a_{ik} + b_{ik})^T = (a_{ki} + b_{ki}) \\ &\underbrace{=}_{\text{Def. 1}} (a_{ki}) + (b_{ki}) = (a_{ik})^T + (b_{ik})^T \qquad \text{q.e.d.}\end{aligned} \tag{3.28}$$

2) Es gilt

$$(\lambda \cdot \underline{A})^T = \lambda \cdot \underline{A}^T \ . \tag{3.29}$$

In Worten: Das λ-fache einer Transponierten (rechte Seite) ist gleich der Transponierten des λ-fachen (linke Seite).

Beweis:

$$\begin{aligned}(\lambda \cdot (a_{ik}))^T &\underbrace{=}_{\text{Def. 2}} (\lambda \cdot a_{ik})^T = (\lambda \cdot a_{ki}) \\ &\underbrace{=}_{\text{Def. 2}} \lambda \cdot (a_{ki}) = \lambda \cdot (a_{ik})^T \qquad \text{q.e.d.}\end{aligned} \tag{3.30}$$

3.2.4 Multiplikation

3.2.4.1 Einführende Beispiele und Festlegungen

Vorgabe von zwei Gleichungssystemen

$$\begin{array}{rcl} a_{11} \cdot y_1 + a_{12} \cdot y_2 & = & c_1 \\ a_{21} \cdot y_1 + a_{22} \cdot y_2 & = & c_2 \\ a_{31} \cdot y_1 + a_{23} \cdot y_2 & = & c_3 \end{array} \quad \text{mit der Koeffizientenmatrix} \quad \underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} , \tag{3.31}$$

$$\begin{array}{rcl} b_{11} \cdot x_1 + b_{12} \cdot x_2 & = & y_1 \\ b_{21} \cdot x_1 + b_{22} \cdot x_2 & = & y_2 \end{array} \quad \text{mit der Koeffizientenmatrix} \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} , \tag{3.32}$$

d.h. die rechten Seiten des zweiten Systems y_1, y_2 sollen die Variablen des ersten Systems sein. Einsetzen des zweiten Systems (3.32) in das erste (3.31) ergibt

$$\begin{array}{rcl} a_{11} \cdot (b_{11} \cdot x_1 + b_{12} \cdot x_2) + a_{12} \cdot (b_{21} \cdot x_1 + b_{22} \cdot x_2) & = & c_1 \\ a_{21} \cdot (b_{11} \cdot x_1 + b_{12} \cdot x_2) + a_{22} \cdot (b_{21} \cdot x_1 + b_{22} \cdot x_2) & = & c_2 \\ a_{31} \cdot (b_{11} \cdot x_1 + b_{12} \cdot x_2) + a_{32} \cdot (b_{21} \cdot x_1 + b_{22} \cdot x_2) & = & c_3 \end{array} \tag{3.33}$$

oder geordnet nach den x_i

$$\begin{array}{rcl} (a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21}) \cdot x_1 + (a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22}) \cdot x_2 & = & c_1 \\ (a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21}) \cdot x_1 + (a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22}) \cdot x_2 & = & c_2 \\ (a_{31} \cdot b_{11} + a_{32} \cdot b_{21}) \cdot x_1 + (a_{31} \cdot b_{12} + a_{32} \cdot b_{22}) \cdot x_2 & = & c_3 \quad . \end{array} \tag{3.34}$$

Für die Koeffzientenmatrix hat sich ergeben bezogen auf $\underline{A}$ von (3.31) und $\underline{B}$ von (3.32)

$$\begin{pmatrix} \begin{array}{cc} \text{1. Zeile} \times \text{1. Spalte} & \text{1. Zeile} \times \text{2. Spalte} \\ a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \end{array} \\ \\ \begin{array}{cc} \text{2. Zeile} \times \text{1. Spalte} & \text{2. Zeile} \times \text{2. Spalte} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{array} \\ \\ \begin{array}{cc} \text{3. Zeile} \times \text{1. Spalte} & \text{3. Zeile} \times \text{2. Spalte} \\ a_{31} \cdot b_{11} + a_{32} \cdot b_{21} & a_{31} \cdot b_{12} + a_{32} \cdot b_{22} \end{array} \end{pmatrix} \tag{3.35}$$

oder kurz

$$\begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \\ \\ a_{31} \cdot b_{11} + a_{32} \cdot b_{21} & a_{31} \cdot b_{12} + a_{32} \cdot b_{22} \end{pmatrix} . \tag{3.36}$$

Die Matrix (3.36) $\underline{A} \cdot \underline{B}$ heißt das Produkt von $\underline{A}$ und $\underline{B}$.

Dabei werden die Zeilen von $\underline{A}$ mit den Spalten von $\underline{B}$ „multipliziert“, also muss sein: Zeilenlänge von $\underline{A}$ = Spaltenlänge von $\underline{B}$, also Spaltenzahl von $\underline{A}$ = Zeilenzahl von $\underline{B}$, also

$$\tau(\underline{A}) = (\overline{m}, \textcircled{n}) \qquad \Rightarrow \qquad \tau(\underline{B}) = (\textcircled{n}), p^*) \tag{3.37}$$

Es folgt

$$\tau(\underline{A} \cdot \underline{B}) = (\overline{m}, p^*) \tag{3.38}$$

$\underline{A}$ und $\underline{B}$ heißen dann *verkettet*.

Beispiel

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} & \underline{B} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ \tau &= (2, \textcircled{2}) & \tau &= (\textcircled{2}, 3) \end{aligned} \tag{3.39}$$

$\underline{A}$ und $\underline{B}$ sind verkettet, $\tau(\underline{A} \cdot \underline{B}) = (2, 3)$.

Für die Multiplikation von $\underline{A}$ und $\underline{B}$ ergibt sich

Allgemeiner Fall

Def. 3: Sei $\tau(\underline{A}) = (m, n)$ und $\tau(\underline{B}) = (n, p)$ und $\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{C}$.

Dann sei $\tau(\underline{C}) = (m, p)$ und

$(c_{ik}) := (a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + ... + a_{in} \cdot b_{nk})$ (Vorgabe von Zeile i Spalte k)

d.h. die Elemente der i-ten Zeile von $\underline{A}$ $(a_{i1}\ a_{i2}\ a_{i3}\ a_{i4}\ ...\ a_{in})$

werden mit den Elementen der k-ten Spalte von $\underline{B}$ $\begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{mk} \end{pmatrix}$

„multipliziert“ und dann die Produkte addiert, also

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} \quad \text{(bei Vorgabe von Zeile } i \text{ und Spalte } k \tag{3.40}$$

Dabei entspricht n der Spaltenzahl von $\underline{A}$ und der Zeilenzahl von $\underline{B}$.

Beispiele

1) Multiplikation von Zeilen- und Spaltenmatrizen - 2 Möglichkeiten

a) Spaltenmatrix x Zeilenmatrix

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot (b_1, b_2, ..., b_n) = \begin{pmatrix} a_1 \cdot b_1 & a_1 \cdot b_2 & ... & a_1 \cdot b_n \\ a_2 \cdot b_1 & a_2 \cdot b_2 & ... & a_2 \cdot b_n \\ \vdots & & & \\ a_n \cdot b_1 & a_n \cdot b_2 & ... & a_n \cdot b_n \end{pmatrix} = (a_i \cdot b_k)$$

$$\tau = (n, 1) \qquad \tau = (1, n) \qquad \tau = (n, n) \qquad \tau = (n, n)$$

Es hat sich eine Matrix vom Typ $\tau = (n, n)$ ergeben.

b) Zeilenmatrix x Spaltenmatrix

$$(b_1, b_2, ..., b_n) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + ... + a_n \cdot b_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i \right)$$

$$\tau = (1, n) \qquad \tau = (n, 1) \qquad \tau = (1, 1) \qquad \tau = (1, 1)$$

Als Ergebnis der Multiplikation hat sich ein Matrix vom Typ $\tau = (1, 1)$, also eine Zahl, ergeben.

2) Schreibweise eines Linearen Gleichungssystems (LGS) mit Hilfe von Matrizen

Spezialfall

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 &= b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 &= b_2 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\tau = (2, 2) \qquad \tau = (2, 1) \quad \tau = (2, 1)$$

Allgemeiner Fall

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + ... + a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + ... + a_{2n} \cdot x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + ... + a_{mn} \cdot x_n &= b_m \end{aligned} \qquad \text{bzw.}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad \text{oder} \quad \underline{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

$$\tau = (m, n) \qquad \tau = (n, 1) \qquad \tau = (m, 1)\ .$$

3.2.4.2 Eigenschaften der Multiplikation von Matrizen

Darstellung der Eigenschaften ohne Beweise:

1) Assoziativgesetz

$$(\underline{A} \cdot \underline{B}) \cdot \underline{C} = \underline{A} \cdot (\underline{B} \cdot \underline{C}) \ , \tag{3.41}$$

falls $\tau(\underline{A}) = (m, n)$, $\tau(\underline{B}) = (n, p)$, $\tau(\underline{C}) = (p, q)$

2) Distributivgesetz

$$(\underline{A} + \underline{B}) \cdot \underline{C} = \underline{A} \cdot \underline{C} + \underline{B} \cdot \underline{C} \quad \text{und} \tag{3.42}$$

$$\underline{A} \cdot (\underline{B} + \underline{C}) = \underline{A} \cdot \underline{B} + \underline{A} \cdot \underline{C} \ , \tag{3.43}$$

Erster Fall $\tau(\underline{A}) = \tau(\underline{B}) = (m, n)$, $\tau(\underline{C}) = (n, p)$

3) Kommutativgesetz gilt nicht

(a) Ist $\underline{A}$ und $\underline{B}$ verkettet, so nicht notwendig $\underline{B}$ mit $\underline{A}$.

(b) Ist sowohl $\underline{A}$ mit $\underline{B}$ als auch $\underline{B}$ mit $\underline{A}$ verkettet, so kann trotzdem ein Gegenbeispiel angegeben werden

4) Einheitsmatrix

$$\text{Sei} \quad \underline{E} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{3.44}$$

die Einheitsmatrix des $\mathbb{R}^{n \times n}$, so gilt für jede Matrix $\underline{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\underline{E} \cdot \underline{A} = \underline{A} \cdot \underline{E} = \underline{A} \ . \tag{3.45}$$

5) Eigenschaften der Transponierten

Sei $\underline{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\underline{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$, dann gilt

$$(\underline{A} \cdot \underline{B})^T = \underline{B}^T \cdot \underline{A}^T \ . \tag{3.46}$$

In Worten: Die Transponierte des Produkts ist gleich dem Produkt der Transponierten in umgekehrter Reihenfolge.

3.3 Inverse Matrix, Determinanten

In diesem Abschnitt werden spezielle LGS behandelt, nämlich diejenigen die erfüllen $m = n$ (Anzahl der Gleichungen = Anzahl der Unbekannten).

3.3.1 Inverse Matrix

Def.: Existiert zu einer quadratischen Matrix $\underline{A}$ eine Matrix $\underline{A}^{-1}$ mit

$$\underline{A} \cdot \underline{A}^{-1} = \underline{A}^{-1} \cdot A = \underline{E} \tag{3.47}$$

so heißt $\underline{A}^{-1}$ inverse Matrix zu $\underline{A}$.

Konstruktion von $\underline{A}^{-1}$

Sei $\underline{A}$ die quadratische Matrix eines LGSs

$$\underline{A} \cdot \vec{x} = \vec{b} \,,$$

existiert $\underline{A}^{-1}$, so Multiplikation der Gleichung von links

$$\underline{A}^{-1} \cdot (\underline{A} \cdot \vec{x}) = \left(\underline{A}^{-1} \cdot \underline{A}\right) \cdot \vec{x} = \underline{E} \cdot \vec{x} = \vec{x} = \underline{A}^{-1} \cdot \vec{b} \,.$$

Also gilt

1) $\vec{x} = \underline{A}^{-1} \cdot \vec{b}$ ist Lösung des LGS,

2) $\vec{x} = \underline{A}^{-1} \cdot \vec{b}$ liefert eine Möglichkeit $\underline{A}^{-1}$ zu konstruieren.

Beispiel:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \,, \quad \text{also} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \tag{3.48}$$

b_1, b_2 und b_3 bleiben während des Verfahrens allgemein, Anwendung des Gauss-Verfahrens auf das LGS.

Zu bestimmen ist die inverse Matrix der Koeffizientenmatrix von (3.49), diese entspricht Matrix $\underline{A}$ von (3.48). Es ist eine Probe durchzuführen!

$$\begin{aligned} x_1 \;+\; x_2 + x_3 &= b_1 \\ x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 &= b_2 \\ 2 \cdot x_1 + x_2 + x_3 &= b_3 \end{aligned} \tag{3.49}$$

3.3.2 Determinanten zweiter Ordnung

Gegeben sei ein LGS mit 2 Variablen:

$$\begin{array}{llll} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 & = b_1 & \mid \cdot a_{22} & \downarrow \mid \cdot (-a_{21}) \downarrow \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 & = b_2 & \mid \cdot (-a_{12}) & \downarrow \mid \cdot a_{11} \downarrow \end{array} \qquad \underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{3.50}$$

Beide Manipulationen ergeben 2 neue Gleichungen mit einem gemeinsamen Koeffizienten auf der linken Seite:

$$\begin{array}{ll} (a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21})\cdot x_1 & = b_1\cdot a_{22} - b_2\cdot a_{12} \\ (a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21})\cdot x_2 & = b_2\cdot a_{11} - b_1\cdot a_{21} \end{array} \tag{3.51}$$

Falls $(a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}) \neq 0$, so gilt

$$x_1 = \frac{b_1\cdot a_{22} - b_2\cdot a_{12}}{a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{b_2\cdot a_{11} - b_1\cdot a_{21}}{a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}} \ . \tag{3.52}$$

Damit ist gezeigt: Hat das LGS (3.50) eine Lösung, so ist es von der Form (3.52).

Einsetzen von (3.52) in (3.50) zeigt, dass es sich tatsächlich um eine Lösung handelt

$$\begin{aligned} a_{11}\cdot\frac{b_1\cdot a_{22} - b_2\cdot a_{12}}{a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}} + a_{12}\cdot\frac{b_2\cdot a_{11} - b_1\cdot a_{21}}{a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}} &= \frac{b_1\cdot(a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21})}{a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}} = b_1 \ \surd \\ a_{21}\cdot\frac{b_1\cdot a_{22} - b_2\cdot a_{12}}{a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}} + a_{22}\cdot\frac{b_2\cdot a_{11} - b_1\cdot a_{21}}{a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}} &= \frac{b_2\cdot(a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21})}{a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}} = b_2 \ \surd \end{aligned} \tag{3.53}$$

Kurzschreibweise der entscheidenden Zahl durch eine
sogenannte **Determinante** (Bestimmende)

$$a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21} =: \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \ . \tag{3.54}$$

Es hat sich das Produkt der Hauptdiagonalenglieder minus dem Produkt der Nebendiagonalenglieder ergeben. Die Determinate ist also eine reelle Zahl.

Determinantenschreibweise der Zähler von (3.52)

$$\begin{aligned} b_1\cdot a_{22} - b_2\cdot a_{12} &= \det\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix} \\ b_2\cdot a_{11} - b_1\cdot a_{21} &= \det\begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es gilt der Satz: Das LGS (3.50) ist genau dann lösbar, wenn

$$\det(\underline{A}) = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0 \ .$$

Die Lösung lautet

$$x_1 = \frac{\det\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}}{\det(\underline{A})} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{\det\begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}}{\det(\underline{A})} \ .$$

Dabei ist in der jeweiliegenden Zählerdeterminate von x_1 und x_2 die 1. Spalte bzw. die 2. Spalte durch die absoluten Glieder zu ersetzen.

Beispiel

$$\begin{aligned} 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 &= 1 \\ -x_1 + 2 \cdot x_2 &= -4 \end{aligned} \qquad \underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Das LGS ist lösbar, da

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) = 7 \neq 0$$

Die Lösung lautet

$$x_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}}{\det(\underline{A})} = \frac{14}{7} = 2 \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}}{\det(\underline{A})} = \frac{-7}{7} = -1 \ .$$

Probe:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) &= 1 \quad \surd \\ -2 + 2 \cdot (-1) &= -4 \quad \surd \ . \end{aligned}$$

3.3.3 Determinanten dritter Ordnung

Analoge Behandlung eines LGS mit drei Variablen wie in Abschnitt 3.3.2, S. 3-22:

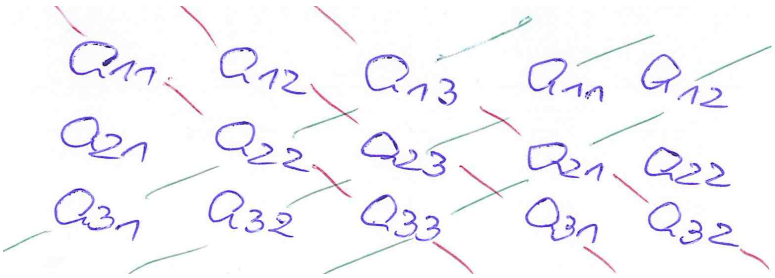
$$\begin{aligned} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 &= b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + a_{23}\cdot x_3 &= b_2 \\ a_{31}\cdot x_1 + a_{32}\cdot x_2 + a_{33}\cdot x_3 &= b_3 \end{aligned} \quad \text{mit} \quad \underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} . \tag{3.55}$$

Als notwendige und hinreichende Bedingung ergibt sich:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} := \begin{array}{rl} & a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} \\ - & a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33} - a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} \\ & \neq 0 \, . \end{array} \tag{3.56}$$

Sarrus-Regel (1833)

Zur Berechnung dreireihiger Determinanten[2]



$\det(\underline{A}) =$ Summe der Hauptdiagonalprodukte
minus Summe der Nebendiagonalprodukte

Lösung

$$x_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}{\det(\underline{A})} , \quad x_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{pmatrix}}{\det(\underline{A})} , \quad x_3 = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{pmatrix}}{\det(\underline{A})} \tag{3.57}$$

Satz

Das lineare Gleichungssystem (LGS) (3.55) ist lösbar genau dann, wenn die Koeffizientendeterminante verschieden von Null ist. Das LGS (3.55) hat dann die Lösung (3.57).

[2] Pierre Frédéric Sarrus (geb. 10. März 1798 in Saint-Affrique; gest. 20. November 1861 ebenda) Französischer Mathematiker

3.3.4 Determinanten n-ter Ordnung

3.3.4.1 Definition

Betrachtet wird die Menge $\mathbb{R}^{n\times n}$ der Matrizen vom Typ(n,n) (quadratische Matrizen).

Jeder Matrix dieser Menge wird eine reelle Zahl zugeordnet,
$\det(\underline{A})$, genannt **Determinante** von $\underline{A}$.

Weiter sei

$\underline{A}_{ij}$:=Matrix die aus $\underline{A}$ entsteht,
falls i-te Zeile und j-te Spalte
gestrichen werden.

$\Rightarrow\ \underline{A}_{ij} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$

$$\begin{array}{cc} & j \\ i & \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & | & \dots \\ \dots & \dots & \dots & | & \dots \\ \dots & \dots & \dots & | & \dots \\ - & - & - & + & - \\ \dots & \dots & \dots & | & \dots \end{pmatrix} \end{array}$$

Definition der Determinante (rekursiv)

$$\det(\underline{A}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} \cdot a_{1j} \cdot \det\left(\underline{A}_{1j}\right) \quad n \geq 2 \tag{3.58}$$

Dabei bedeutet die Matrix $\underline{A}_{1j}$ die ursprüngliche Matrix $\underline{A}$ ohne die erste Zeile und die j-te Spalte. Dies bedeutet in (3.58), dass die Elemente der ersten Zeile a_{1j} nach einander mit den entsprechenden Unterdeterminanten $\underline{A_{1j}}$ multipliziert werden.

Einordnung der bisherigen Fälle:

Für die Matrizen vom Typ (2,2) ergibt sich:

$$\underline{A}_{ij} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \quad \Rightarrow \quad \underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \underline{A}_{11} = (a_{22}) = a_{22} \\ \underline{A}_{12} = (a_{21}) = a_{21} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \det(\underline{A}) &= \sum_{j=1}^{2} (-1)^{1+j} \cdot a_{1j} \cdot \det\left(\underline{A}_{1j}\right) \\ &= (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \det(\underline{A}_{11}) + (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot \det(\underline{A}_{12}) \\ &= (-1)^{2} \cdot a_{11} \cdot a_{22} + (-1)^{3} \cdot a_{12} \cdot a_{21} \\ &= a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \ . \end{aligned} \tag{3.59}$$

Dies entspricht - wie erwartet - dem Produkt der Hauptdiagonalelemente minus dem Produkt der Nebendiagonalelemente.

Nun sollen die Matrizen vom Typ(3,3) untersucht werden:

$$\underline{A}_{ij} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

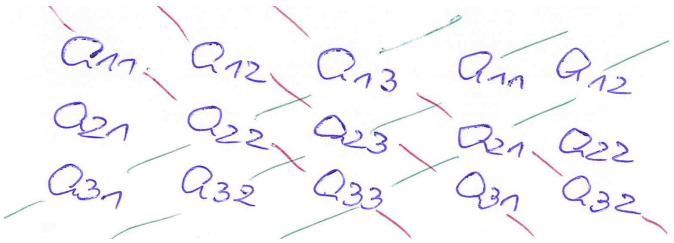
mit den $\underline{A}_{1j}$, wobei hier $(j = 1, 2, 3)$,

$$\underline{A}_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad \underline{A}_{12} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad \underline{A}_{13} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

Damit folgt aus (3.58)

$$\begin{aligned} \det\underline{A} &= +a_{11} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} && -a_{12} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} && +a_{13} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \\ & (-1)^{1+1} && (-1)^{1+2} && (-1)^{1+3} \\ &= a_{11} \cdot (a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}) && -a_{12} \cdot (a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{31}) && +a_{13} \cdot (a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \\ &+ a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} \\ &+ a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \\ &- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} \\ &- a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} \\ &- a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} \end{aligned}$$



Es haben sich die sechs Produkte der Sarrus-Regel ergeben.

3.3.4.2 Rechenregeln

Sei $\underline{A}, \underline{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \lambda \in \mathbb{R}$.

1) $\underline{B}$ entstehe aus $\underline{A}$ durch Vertauschen von zwei Reihen.Dann gilt

$$\det(\underline{B}) = -\det(\underline{A}) \qquad \text{(ohne Beweis)} . \tag{3.60}$$

2) Wird die i-te Zeile von $\underline{A}$ durch wiederholtes Vertauschen mit der *Vorgängerzeile* an die erste Stelle gebracht und dann die Determinate nach Definition (3.58) berechnet, so gilt

$$\det(\underline{A}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det\left(\underline{A}_{ij}\right) \qquad (i \text{ fest}) . \tag{3.61}$$

Entwicklung von $\underline{A}$ nach der i-ten Zeile
Notwendig sind dazu $(i-1)$ Vertauschungen, nach Regel **1)** bzw. (3.60). Somit ist (-1) also $(i-1)$ in die Potenz zu erheben. Folglich ergibt sich der alternierende Faktor direkt nach dem Summenzeichen in (3.61) zu

$$(-1)^{1+j} \cdot (-1)^{i-1} = (-1)^{i+j} . \tag{3.62}$$

3) Für die transponierte Matrix $\underline{A}^T$ gilt

$$\det\left(\underline{A}^T\right) = \det\left(\underline{A}\right) \qquad \text{(ohne Beweis)} \ . \tag{3.63}$$

Es kann gefolgert werden: Offensichtlich kann die Determinate auch nach einer beliebigen j-ten Spalte entwickelt werden

$$\det\left(\underline{A}\right) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det\left(\underline{A}_{ij}\right) \qquad (j \text{ fest}) \ . \tag{3.64}$$

(3.64) unterscheidet sich von (3.61) nur durch den Summationsindex im Summenzeichen, hier i statt j. Zeilen und Spalten (Reihen) sind bei der Entwicklung von Determinanten gleichberechtigt.

4) In $\underline{A}$ enthalte eine Reihe (Zeile oder Spalte) nur Nullen. Dann gilt

$$\det\left(\underline{A}\right) = 0 \ , \qquad \text{denn} \tag{3.65}$$

in (3.64) oder (3.61) ist dann bei Entwicklung nach der Reihe mit den Nullen $a_{ij} = 0$.

5) $\underline{B}$ entstehe aus $\underline{A}$ durch Addition des λ-fachen einer Reihe zu einer parallelen Reihe. Dann gilt

$$\det\left(\underline{A}\right) = \det\left(\underline{B}\right) \qquad \text{(ohne Beweis)} \ . \tag{3.66}$$

6) In $\underline{A}$ stimmen zwei parallele Reihen überein. Dann gilt

$$\det\left(\underline{A}\right) = 0 \ , \qquad \text{denn} \tag{3.67}$$

man addiere das (-1)-fache dieser Reihe zu der anderen. Damit ergibt sich eine Reihe die nur Nullen enthält. Nach Regel **4)** ist die Determinate dann Null.

7) Einführung einer Dreiecksmatrix

$$\underline{A} = (a_{ij}) \ \text{heißt} \begin{cases} \text{rechte obere Dreiecksmatrix}, & a_{ij} = 0, \ i > j \ , \\ \text{linke untere Dreiecksmatrix}, & a_{ij} = 0, \ i < j \ . \end{cases} \tag{3.68}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \dots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \dots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Für eine Dreiecksmatrix $\underline{A}$ gilt

$$\det\left(\underline{A}\right) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \ , \qquad \text{denn} \tag{3.69}$$

man benutzte (3.61) oder (3.64), es verbleibt nur ein Summand $\neq 0$.

3.3.4.3 Strategie für die Berechnung

a) Nach Regel **4)** möglichst viele Nullen in eine Reihe bringen

Beispiel:

b) Nach Regel **4)** und **7)** Erreichen von Dreiecksgestalt

Beispiel wie bei a):

3.3.4.4 Weitere Rechenregeln

8) Sei $\underline{B}$ aus $\underline{A}$ dadurch entstanden, dass eine Reihe von $\underline{A}$ mit λ multipliziert wird. Dann gilt

$$\det(\underline{B}) = \lambda \cdot \det(\underline{A}) \ , \qquad \text{denn} \tag{3.70}$$

man setze in (3.61) oder (3.64) statt a_{ij} nun $\lambda \cdot a_{ij}$.[3]

9) Sei $\underline{B} = \lambda \cdot \underline{A}$. Dann gilt, wobei n die Anzahl der Zeilen bzw, Spalten darstellt,

$$\det(\underline{B}) = \lambda^n \cdot \det(\underline{A}) \ , \qquad \text{denn} \tag{3.71}$$

man wende Regel **8)** n-mal an.

10) Für das Matrizenprodukt $\underline{A} \cdot \underline{B}$ gilt der **Multiplikationssatz für Determinanten**

$$\det(\underline{A} \cdot \underline{B}) = \det(\underline{A}) \cdot \det(\underline{B}) \tag{3.72}$$

Für die beiden weiteren Regeln wird neu eingeführt:

Def. $\underline{A}$ heißt regulär: $\Leftrightarrow$ $\det(\underline{A}) \neq 0$

$\underline{A}$ heißt singulär: $\Leftrightarrow$ $\det(\underline{A}) = 0$.

Der **Rang** r **einer Matrix** ist die Anzahl der Zeilen, welche ungleich Null sind, wenn die Matrix in Trapezform vorliegt (weiteres hierzu später).

11) Falls $\underline{A}$ regulär ist, so existiert die inverse Matrix $\underline{A}^{-1}$, und es gilt

$$\det\left(\underline{A}^{-1}\right) = \frac{1}{\det(\underline{A})} \qquad \text{(ohne Beweis)} \ . \tag{3.73}$$

12) Aussagen über den Rang r, wobei n die Anzahl der Zeilen und Spalten ist,

$\underline{A}$ regulär: $\Leftrightarrow$ $\text{Rang}(\underline{A}) = n$

$\underline{A}$ singulär: $\Leftrightarrow$ $\text{Rang}(\underline{A}) < n$ (ohne Beweis) .

[3] Regel 8 lässt sich auch verbal formulieren: Werden die Elemente einer beliebigen Reihe mit einem Skalar λ multipliziert, so multipliziert sich die Determinante mit λ. Oder: Eine Determinate wird mit einem Skalar λ multipliziert, indem die Elemente einer beliebigen Reihe mit λ multipliziert werden.

3.3.5 Cramersche Regel

Es wird ein lineares Gleichungssystem von n Gleichungen und n Variablen betrachtet

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + ... + a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \\ .... &\quad ... \\ a_{n1} \cdot x_1 + ... + a_{nn} \cdot x_n &= b_n \quad . \end{aligned} \tag{3.74}$$

Darstellung in Vektorform in Spaltenschreibweise (Vorgriff auf die Vektorrechnung),

$$\underline{A} \in \mathbb{R}^{n \times n} \,, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \,, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \,. \tag{3.75}$$

Vorausgesetzt wird, dass $\underline{A}$ regulär ist. Dann gilt

$$\det(\underline{A}) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{A}^{-1} \text{ existiert} \,. \tag{3.76}$$

Damit liegt der sogenannte **Cramersche Hauptfall** vor. Falls $\det(\underline{A}) = 0$ sind die hier dargestellten Überlegungen nicht anwendwar.

In vektorieller Darstellung folgt

$$\underline{A} \cdot \vec{x} = \vec{b} \quad | \cdot \underline{A}^{-1} \text{ von links} \qquad \text{ergibt}$$

$$\vec{x} = \underline{A}^{-1} \cdot \vec{b} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underline{A}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \,. \tag{3.77}$$

Cramerscher Hauptfall

Man kann zeigen: Die explizite Berechnung der x_i kann wie bei n = 2 vorgenommen werden

$$x_i = \frac{\det \begin{array}{c} i\text{-te Spalte} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & ... & b_1 & ... & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & ... & b_n & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array}}{\det(\underline{A})} \,, \tag{3.78}$$

wobei jeweils die i-te Spalte durch die absoluten Glieder ersetzt wird. (3.78) wird als Cramersche Regel[4] bezeichnet.

(3.78) stellt einen wichtigen Zusammenhang dar. Leider ist er in der praktischen Berechnung von linearen Gleichungssystemen nur in seltenen Fällen effektiv anwendbar.

[4] nach Gabriel Cramer (geb. 31. Juli 1704 in Genf, Schweiz; gest. 4. Januar 1752 in Bagnols-sur-Cèze, Frankreich), Schweizer Mathematiker.

Beispiel: Anwendung der Kirchhofschen Gesetze in der Elektrotechnik

1. Kirchhoffsches Gesetz (Knotenpunktregel): Für jeden Verzweigungspunkt ist die Summe der zufließenden Ströme I_{zu} (positiv) gleich der Summe der abfließenden Ströme I_{ab} (negativ).

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = 0 \ , \tag{3.79}$$

wobei n die Anzahl der Stromleiter am betroffenen Knoten darstellt.

2. Kirchhoffsches Gesetz (Maschenregel): Für jeden geschlossenen Kreis (Masche) von linearen Leitern ist die Summe der Spannungsabfälle und der Quellspannungen gleich Null.

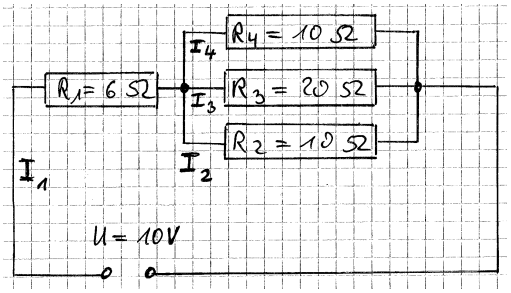
$$\sum_{k=1}^{n} U_k = 0 \quad \text{bzw. mit } U = I \cdot R \text{ (Ohmsches Gesetz)} \quad \sum_{k=1}^{n} I_k \cdot R_k = 0 \ , \tag{3.80}$$

wobei n die Anzahl der Maschen zusätzlich der Quellspannung darstellt.

Beispiel

In folgendem Stromkreis sollen die Stromstärken mit Hilfe der Cramerschen Regel bestimmt werden:

- Berechnung der Ströme I_1, I_2, I_3 und I_4 in einem Netzwerk eines Gleichstromkreises
- Ohmsches Gesetz $\Leftrightarrow$ $U = R \cdot I$
- Anwendung der Kirchhoffschen Gesetze



Es ergibt sich folgendes Gleichungssystem (ohne Einheiten) aus den Kirchhoffschen Gesetzen (1. Gesetz erste Zeile, 2. Gesetz Zeile 2-4):

$$\begin{array}{rcrcrcrcll}
I_1 & - & I_2 & - & I_3 & - & I_4 & = & 0 & \text{Summe der Span.} \\
R_1 \cdot I_1 & + & R_2 \cdot I_2 & & & & & = & 10 & U_1 + U_2 = U \\
R_1 \cdot I_1 & & & + & R_3 \cdot I_3 & & & = & 10 & U_1 + U_3 = U \\
R_1 \cdot I_1 & & & & & + & R_4 \cdot I_4 & = & 10 & U_1 + U_4 = U
\end{array} \ .$$

Die zugehörige Koeffizientenmatrix lautet

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 & 0 \\ R_1 & 0 & R_3 & 0 \\ R_1 & 0 & 0 & R_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 6 & 10 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 20 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \ .$$

Entwicklung der zugehörigen Determinate nach den Elementen der zweiten Zeile

$$\begin{aligned}
\det(\underline{A}) &= (-1)^{2+1}\cdot 6\cdot \det\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}}_{\text{Dreiecksmatrix}} + (-1)^{2+2}\cdot 10\cdot \det\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 6 & 20 & 0 \\ 6 & 0 & 10 \end{pmatrix}}_{\text{Entw. nach 2. Zeile}} \\
&= (-6)\cdot(-1)\cdot 20\cdot 10 + 10\cdot\left[(-1)^{(2+1)}\cdot 6\cdot \det\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}\right. \\
&\qquad\qquad \left. +(-1)^{2+2}\cdot 20\cdot \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}\right] \\
&= 1200 + 10\cdot(6\cdot 10 + 20\cdot 16) = 1200 + 10\cdot(60+320) = 1200 + 3800 \\
&= \underline{5000}
\end{aligned}$$

Anwendung der Cramerschen Regel

Bestimmung von I_1 - Ausklammern des gemeinsamen Faktors 10 der 1. Spalte aus der Koeffizientenmatrix des Zählers in der Cramerschen Regel für I_1

$$\det\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 10 & 10 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 20 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \underbrace{=}_{\text{Eig. 8}} 10\cdot\det\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 10 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 20 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Für die Determinate folgt bei Entwicklung nach der zweiten Zeile

$$\begin{aligned}
&= 10\cdot\left\{(-1)^{2+1}\cdot 1\cdot \det\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}}_{\text{Dreiecksmatrix}} + (-1)^{2+2}\cdot 10\cdot \det\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 20 & 0 \\ 1 & 0 & 10 \end{pmatrix}}_{\text{Entw. nach 1. Zeile}}\right\} \\
&= 10\cdot\left\{(-1)\cdot(-1)\cdot 20\cdot 10 + 10\cdot\left[(-1)^{(1+2)}\cdot(-1)\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}\right\}\right. \\
&\qquad\qquad \left. +(-1)^{1+3}\cdot(-1)\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 20 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] \\
&= 10\cdot\{20\cdot 10 + 10\cdot(1\cdot 10 + 20)\} = \underline{5000}
\end{aligned}$$

Damit folgt für I_1

$$I_1 = \frac{5000}{5000} = \underline{1}\,. \tag{3.81}$$

Übung: Bestimmung von I_2, I_3 und I_4 mit Hilfe der Cramerschen Regel

3.4 Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystem

3.4.1 Schreibweisen

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + ... + a_1 n \cdot x_n &= b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + ... + a_2 n \cdot x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad &= \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + ... + a_{mn} \cdot x_n &= b_m \end{aligned} \tag{3.82}$$

Für die Koeffzientenmatrizen gilt

Koeffizientenmatrix

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\in \mathbb{R}^{m \times n}$$

erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left(\underline{A}, \vec{b}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & ... & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

$$\in \mathbb{R}^{m \times (n+1)}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

Damit kann geschrieben werden

$$\begin{array}{ccccc} \underline{A} & \cdot & \vec{x} & = & \vec{b} \\ \text{Typen} \quad (m,n) & & (n,1) & & (m,1) \quad . \end{array} \tag{3.83}$$

Ausblick Vektorrechnung: Aufteilen der Matrix $\underline{A}$ in Spaltenvektoren

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + ... + x_n \cdot \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \vec{a}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \tag{3.84}$$

also

$$x_1 \cdot \vec{a}_1 + ... + x_n \cdot \vec{a}_n = \vec{b} \qquad \text{später: } \vec{b} \text{ Linearkombination (LK) der } \vec{a}_i \ . \tag{3.85}$$

Daraus folgt

1) $\vec{b}$ ist LK von $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n \quad \Rightarrow \quad L \neq \varnothing$

2) $\vec{b}$ ist keine LK von $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n \quad \Rightarrow \quad L = \varnothing$.

In Fall **1)** werden $\{\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n\}$ linear abhängig genannt.

3.4.2 Rang eines Linearen Gleichungssystems

Wiederholung

Anwendung des Gauss-Verfahrens von oben nach unten $\Rightarrow$ Trapezform des LGS

$$\begin{aligned}
a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + ... + a_{1r} \cdot x_r + a_{1r+1} \cdot x_{r+1} + ... + a_1 n \cdot x_n &= b_1 \\
a_{22} \cdot x_2 + ... + a_{2r} \cdot x_r + a_{2r+1} \cdot x_{r+1} + ... + a_2 n \cdot x_n &= b_2 \\
\vdots &= \vdots \\
a_{rr} \cdot x_r + a_{rr+1} \cdot x_{r+1} + ... + a_{rn} \cdot x_n &= b_r \\
0 &= b_{r+1} \\
\vdots &= \vdots \\
0 &= b_m
\end{aligned} \tag{3.86}$$

Ergebnis: LGS ist lösbar $\Leftrightarrow$ wenn keine Widersprüche auftreten

$b_{r+1} = b_{r+2} = ... = b_{m-1} = b_m = 0$, dann heißt r **Rang (rg) des LGS**.

Anschließend: Gauss-Verfahren von unten nach oben anwenden

$\Rightarrow$ $(n - r)$ freie Parameter: $t_1, t_2, ..., t_{n-r}$.

Bestimmung des Rangs r mit Hilfe der Matrix:

Beispiel.

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 6 & 6 & -6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rg}\,\underline{A} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 6 & 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2\downarrow \\ 1\downarrow \\ \end{matrix} \left| \begin{matrix} 2\downarrow \\ 1\downarrow \end{matrix} \right|$$

$$= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & -5 & 4 \\ 0 & 12 & 10 & -10 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2\downarrow \\ 1\downarrow \\ \end{matrix} \Bigg|$$

$$= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{rg}\,\underline{A} = 2$$

3.4.3 Struktur der Lösungsmenge

3.4.3.1 Homogene lineare Gleichungssysteme

1) Ist $\vec{x}_1$ eine Lösung, so ist auch $\lambda \cdot \vec{x}_1$, mit $\lambda \in \mathbb{R}$, eine Lösung, denn

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 \text{ Lösung} \quad \Rightarrow \quad & \underline{A} \cdot \vec{x}_1 = \vec{0} \quad | \cdot \lambda \\ & \lambda \cdot (\underline{A} \cdot \vec{x}_1) = \lambda \cdot \vec{0} \\ \Rightarrow \quad & \underline{A} \cdot (\lambda \cdot \vec{x}_1) = \vec{0} \qquad \Rightarrow \quad \lambda \cdot \vec{x}_1 \quad \text{ist Lösung .} \end{aligned}$$

2) Sind $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ Lösungen, so auch $\vec{x}_1 + \vec{x}_2$, denn

$$\left.\begin{aligned} \vec{x}_1 \text{ Lsg.} \Rightarrow \underline{A} \cdot \vec{x}_1 = \vec{0} \\ \vec{x}_2 \text{ Lsg.} \Rightarrow \underline{A} \cdot \vec{x}_2 = \vec{0} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \Rightarrow \quad & \underline{A} \cdot \vec{x}_1 + \underline{A} \cdot \vec{x}_2 = \vec{0} + \vec{0} \\ \Rightarrow \quad & \underline{A} \cdot (\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \vec{0} \quad \Rightarrow^{a)} \quad \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \text{ Lösung ,} \end{aligned}$$

wobei bei a) das Distributivgesetz angewendet wurde.

3.4.3.2 Inhomogene lineare Gleichungssysteme

1) Sei $\underline{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ mit $\vec{b} \neq \vec{0}$, also $\vec{x} = \vec{0}$ keine Lösung des LGS, dann gilt:

Satz 1): Ist $\vec{x}_0$ eine spezielle Lösung des inhomgenen LGS und $\vec{x}^*$ eine **beliebige** Lösung des zugehörigen homogenen LGS, so gilt:

$$L = \left\{ \vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{x}^* \mid \underline{A} \cdot \vec{x}^* = \vec{0} \right\} \ , \qquad \text{denn}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{x}_0 \text{ Lsg.} \Rightarrow \underline{A} \cdot \vec{x}_0 = \vec{b} \\ \vec{x}^* \text{ Lsg.} \Rightarrow \underline{A} \cdot \vec{x}^* = \vec{0} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} & \Rightarrow^{a)} \ \underline{A} \cdot \vec{x}_0 + \underline{A} \cdot \vec{x}^* = \vec{b} + \vec{0} \\ & \Rightarrow^{b)} \ \underline{A} \cdot (\vec{x}_0 + \vec{x}^*) = \vec{b} \\ & \Rightarrow \quad \vec{x}_0 + \vec{x}^* \text{ ist Lösung des LSG,} \end{aligned}$$

wobei bei $a)$ addiert und bei $b)$ das Distributivgesetz angewendet wurde.

2) Es gibt keine anderen Lösungen. Ist $\vec{x}_1$ eine beliebige Lösung des inhomogenen LGS, so ist sie von der Form $\vec{x}_0 + \vec{x}^*$, denn

$$\left.\begin{aligned} \vec{x}_1 \text{ Lsg.} \Rightarrow \underline{A} \cdot \vec{x}_1 = \vec{b} \\ \vec{x}_0 \text{ Lsg.} \Rightarrow \underline{A} \cdot \vec{x}_0 = \vec{b} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} & \Rightarrow^{a)} \ \underline{A} \cdot \vec{x}_1 - \underline{A} \cdot \vec{x}_0 = \vec{b} - \vec{b} \\ & \Rightarrow \quad \underline{A} \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_0) = \vec{0} \\ & \Rightarrow \quad \vec{x}^* := \vec{x}_1 - \vec{x}_0 \text{ ist Lösung des zugeh. homog. LSG} \\ & \Rightarrow \quad \vec{x}_1 = \vec{x}_0 + \vec{x}^*, \text{damit ist } \vec{x}_1 \text{von der behaupteten Form!} \end{aligned}$$

wobei bei a) beide Gleichungssysteme mit den jeweiligen Lösungen $\vec{x}_0$ und $\vec{x}_1$ subtrahiert wurden.

3.4.3.3 Beliebige lineare Gleichungssysysteme

Satz 2): Ein LGS mit der zugehörigen Koeffizientenmatrix $\underline{A}$ ist **lösbar** genau dann, wenn

$$\text{rg}(\underline{A}) = \text{rg}(\underline{A}, \vec{b}) \ .$$

Das LGS ist **eindeutig lösbar** genau dann, wenn $n - r = 0$, also

$$\text{rg}(\underline{A}) = \text{rg}(\underline{A}, \vec{b}) = n \ ,$$

da $n = r$, wobei n die Anzahl der Variablen darstellt (ohne Beweis). Die Abkürzung rg stellt den Rang dar.

Dabei bedeutet lösbar, dass es mehrere Lösungen geben kann und eindeutig lösbar, dass es genau eine Lösung gibt.

3.5 Spezielle Matrizen und Eigenwerte

Eingeführt wurden bereits

- die **transponierte Matrix** $\underline{A}^T$ (Ausdruck (3.22, Seite 3-14),
- die **symmetrische Matrix** (Ausdruck(3.23), Seite 3-14),
- die **Einheitsmatrix** $\underline{E}$ (Ausdruck (3.44), Seite 3-20) und
- die **inverse Matrix** $\underline{A}^{-1}$ (Ausdruck 3.47), Seite 3-21).

3.5.1 Orthogonale Matrix

$\underline{A}$ heiß **orthogonal**, wenn gilt $\underline{A}^T = \underline{A}^{-1}$. (3.87)

Es gilt:

1) Mit $\underline{A}$ ist auch $\underline{A}^T$ orthogonal.

2) Mit $\underline{A}$ und $\underline{B}$ ist auch $\underline{A} \cdot \underline{B}$ orthogonal.

3) Ist $\underline{A}$ orthogonal, so ist $|\det(\underline{A})| = 1$.

Beweis:

1) Mit $\underline{A}$ ist auch $\underline{A}^T$ orthogonal,
denn:
Da $\underline{A}$ orthogonal ist, gilt:$\underline{A}^T = \underline{A}^{-1}$.
Zu zeigen ist also: $\left(\underline{A}^T\right)^T = \left(\underline{A}^T\right)^{-1}$ (3.88)
(hier wurde statt $\underline{A}$ die Transponierte $\underline{A}^T$ in **1)** eingesetzt.
LS von (3.88): $\left(\underline{A}^T\right)^T = \underline{A}$
RS von (3.88): $\left(\underline{A}^T\right)^{-1} = \left(\underline{A}^{-1}\right)^{-1} = \underline{A}$
$\Rightarrow$ LS = RS q.e.d.

2) Mit $\underline{A}$ und $\underline{B}$ ist auch $\underline{A} \cdot \underline{B}$ orthogonal,
denn:
Es gilt $(\underline{A} \cdot \underline{B})^T \cdot (\underline{A} \cdot \underline{B}) \underbrace{=}_{\text{(3.46), S. 3-20}} \left(\underline{B}^T \cdot \underline{A}^T\right) \cdot (\underline{A} \cdot \underline{B})$
$= \underline{B}^T \cdot \left(\underline{A}^T \cdot \underline{A}\right) \cdot \underline{B} \underbrace{=}_{\underline{A}\text{ orthogonal}} \underline{B}^T \cdot \underline{E} \cdot \underline{B} \underbrace{=}_{\underline{B}\text{ orthogonal}} \underline{E}$
Es folgt $(\underline{A} \cdot \underline{B})^T = (\underline{A} \cdot \underline{B})^{-1}$ und damit ist $(\underline{A} \cdot \underline{B})$ orthogonal. q.e.d.

3) Ist $\underline{A}$ orthogonal, so ist $|\det \underline{A}| = 1$,
denn:
Es gilt $\underline{E} = \underline{A}^T \cdot \underline{A}$. Übergang zu den Determinanten:
$\det(\underline{E}) = \det\left(\underline{A}^T \cdot \underline{A}\right)$
$1 = \det\left(\underline{A}^T\right) \cdot \det(\cdot \underline{A}) = (\det(\underline{A}))^2$ q.e.d.

3.5.2 Diagonalmatrix

$\underline{A}$ heiß Diagonalmatrix, wenn gilt $(a_{ik}) = 0 \qquad$ für $i \neq k$.

$\underline{A}$ hat also die Gestalt

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & .... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Es gilt: $\det(\underline{A}) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot ... \cdot a_{nn}$,

denn $a_{11} \cdot a_{22} \cdot ... \cdot a_{nn}$ ist das einzige nicht verschwindende Produkt in der Entwicklung von $\underline{A}$.

3.5.3 Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix

Frage: Wann gilt für eine vorgegebene Matrix $\underline{A}$

$$\underline{A} \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} \ ?$$

Die Frage lässt sich auf die Lösbarkeit eines homogenen Gleichungssystems zurück führen: Wegen $\vec{x} = \underline{E} \cdot \vec{x}$ kann auch geschrieben werden

$$(\underline{A} - \lambda \cdot \underline{E}) \cdot \vec{x} = \vec{0} \ . \tag{3.89}$$

(3.89) ist ein homogenes Gleichungssystem mit der Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & ... & a_{2n} \\ ... & .... & & \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} .$$

Frage: Gibt es solche λ und welche Bedeutung haben sie?

Nichttriviale Lösungen des homogenen Gleichungssystems (3.89) gibt es genau dann, wenn gilt

$$\det(\underline{A} - \lambda \cdot \underline{E}) = 0 \ . \tag{3.90}$$

(3.90) ist eine Gleichung n-ten Grades in λ. Sie besitzt nach dem Hauptsatz der Algebra genau n Lösungen in $\mathbb{C}$: $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$.

Definition

Gleichung (3.90) heißt **charakteristische Gleichung** der Matrix $\underline{A}$. Die n Lösungen heißen **Eigenwerte** von $\underline{A}$. Ein zum Eigenwert λ_i gehörender Lösungsvektor $\vec{x}_i$ von (3.89) heißt **Eigenvektor**.

Eigenschaften

1) Sind alle Eigenwerte voneinander verschieden, so gibt es zu jedem Eigenwert einen vom Nullvektor verschiedenen Eigenvektor. Diese sind alle linear unabhängig (ohne Beweis).

2) Tritt eine Eigenwert k-fach auf, so gehört zu ihm mindestens ein vom Nullvektor verschiedener Eigenvektor, höchstens aber k linear unabhängige Eigenvektoren (ohne Beweis).

3) Die Eigenwerte einer oberen Dreiecksmatrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

stimmen mit den Hauptdiagonalelementen überein. Denn es gilt

$$\begin{aligned} \det\left(\underline{A} - \lambda \cdot \underline{E}\right) &= \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (a_{11} - \lambda) \cdot (a_{22} - \lambda) \cdot \dots \cdot (a_{nn} - \lambda) \ . \end{aligned}$$

Nach (3.89) folgt für die Eigenwerte $\lambda_i = a_{ii}$, $(i = 1, .., n)$ q.e.d.

Eigenschaften symmetrischer Matrizen

1) Alle Eigenwerte sind reell.

2) Es gibt insgesamt genau n linear unabhängige Eigenvektoren.

3) Zu einem k-fachen Eigenwert gehören genau k linear unabhängige Eigenvektoren.

4) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.

Beispiel: Verwendung von Eigenvektoren bei einem schwingendem System

Zur technischen Anwendung von Eigenvektoren und Eigenwerten wird ein schwingendes System betrachtet:[5]

Bild I-14 zeigt zwei *identische* schwingungsfähige mechanische Systeme, die jeweils aus einer Schwingungsmasse m und einer elastischen Feder mit der Federkonstanten c bestehen und über eine *Kopplungsfeder* mit der Federkonstanten k miteinander *verbunden*, d. h. *gekoppelt* sind.

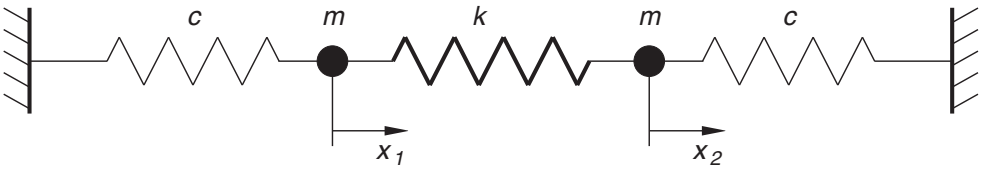


Bild I-14 Kopplung zweier schwingungsfähiger Systeme (Masse m, Federkonstante c) über eine Kopplungsfeder (Federkonstante k)

Dieses System ist zu sog. *Normalschwingungen* in Richtung der Systemachse fähig. Beide Massen schwingen dabei *harmonisch* mit der gleichen Kreisfrequenz ω, ihre Lagekoordinaten x_1 und x_2 sind also *periodische* Funktionen der Zeit mit der Schwingungsdauer $T = 2\pi/\omega$. Die noch unbekannten Kreisfrequenzen dieser Normalschwingungen sind die Wurzeln aus den (reellen) Eigenwerten der sog. *Systemmatrix* $\mathbf{A}$, die hier das folgende Aussehen hat:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} (c+k)/m & -k/m \\ -k/m & (c+k)/m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

(mit den Abkürzungen $\alpha = (c+k)/m$ und $\beta = k/m$).

[5] Papula, L.: *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*, Band 2, Vieweg+Teubner Verlag, 13. Auflage, Wiesbaden 2012

Die Berechnung der benötigten Eigenwerte erfolgt aus der *charakteristischen Gleichung*

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} \alpha - \lambda & -\beta \\ -\beta & \alpha - \lambda \end{vmatrix} = (\alpha - \lambda)^2 - \beta^2 = 0$$

Wir erhalten:

$$(\alpha - \lambda)^2 = \beta^2 \quad \Rightarrow \quad \alpha - \lambda = \pm\beta \quad \Rightarrow \quad \lambda = \alpha \mp \beta$$

Die *Eigenwerte* der Systemmatrix $\mathbf{A}$ lauten somit:

$$\lambda_1 = \alpha - \beta = \frac{c+k}{m} - \frac{k}{m} = \frac{c+k-k}{m} = \frac{c}{m}$$

$$\lambda_2 = \alpha + \beta = \frac{c+k}{m} + \frac{k}{m} = \frac{c+k+k}{m} = \frac{c+2k}{m}$$

Durch *Wurzelziehen* erhalten wir daraus die gesuchten *Kreisfrequenzen* der Normalschwingungen:

$$\omega_1 = +\sqrt{\lambda_1} = \sqrt{\frac{c}{m}} \qquad \text{und} \qquad \omega_2 = +\sqrt{\lambda_2} = \sqrt{\frac{c+2k}{m}}$$

Das System besitzt also *zwei* Normalschwingungen in Richtung der Systemachse. Sie erfolgen mit den Kreisfrequenzen ω_1 bzw. ω_2, wobei der *erste* Wert der sog. *Eigenkreisfrequenz* ω_0, d. h. der Kreisfrequenz der *entkoppelten* Feder-Masse-Systeme entspricht:

$$\omega_1 = \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

Die Massen schwingen dabei *in Phase*, die Kopplungsfeder wird bei dieser Normalschwingung überhaupt *nicht* beansprucht. Bild I-15 verdeutlicht diesen Schwingungstyp.

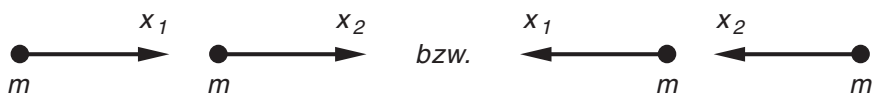


Bild I-15 Die Massen der gekoppelten Systeme schwingen in *Phase* (d. h. synchron)

Bei der *zweiten* möglichen Normalschwingung mit der *größeren* Kreisfrequenz $\omega_2 > \omega_1$ dagegen schwingen die Massen in *Gegenphase*, wobei die Kopplungsfeder diesmal in *maximaler* Weise beansprucht wird. Dieser Schwingungstyp wird in Bild I-16 verdeutlicht.

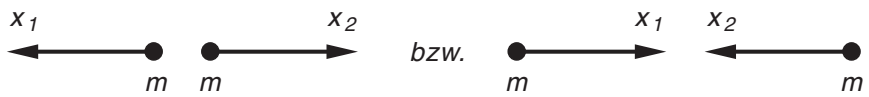


Bild I-16 Die Massen der gekoppelten Systeme schwingen in *Gegenphase*

3.6 Aufgaben zu Kapitel 3

Aufgabe 3.1

a) Was ist ein inhomogens lineares Gleichungssystem?

b) Was sind äquivalente Umformungen eines Gleichungssystems?

c) Wann ist ein lineares Gleichungssystem lösbar?

d) Was versteht man unter dem Begriff „triviale Lösung“?

Aufgabe 3.2

Prüfen Sie, ob folgendes Gleichungssystem lösbar ist:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2\cdot x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ 6\cdot x_1 & - & 4\cdot x_2 & - & 3\cdot x_3 & = & 1 \\ 4\cdot x_1 & - & 3\cdot x_2 & - & 4\cdot x_3 & = & 2 \end{array} .$$

Aufgabe 3.3

Bestimmen Sie die Lösungsmenge:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2\cdot x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 5 \\ & & x_2 & + & 5\cdot x_3 & - & 3\cdot x_4 & = & -3 \\ & & & & 15\cdot x_3 & - & 8\cdot x_4 & = & -15 \end{array} .$$

Teil der Lösung: $x_1 = 1 - \frac{2}{5}\cdot t$, $x_4 = t$.

Aufgabe 3.4

Bestimmen Sie Rang und Lösungsmenge des Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2\cdot x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 5 \\ & & 2\cdot x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & = & 5 \\ & & & & 2\cdot x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 7 \\ x_1 & & & & & + & 2\cdot x_4 & + & x_5 & = & 12 \\ x_1 & + & x_2 & & & & & + & 2\cdot x_5 & = & 11 \end{array} .$$

Teil der Lösung: $x_1 =2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$.

Aufgabe 3.5

Bestimmen Sie Rang und Lösungsmenge des Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3\cdot x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2\cdot x_2 & - & 4\cdot x_3 & + & 2\cdot x_4 & = & 1 \\ x_1 & - & 5\cdot x_2 & - & 7\cdot x_3 & - & 3\cdot x_4 & = & -2 \\ 3\cdot x_1 & - & 8\cdot x_2 & - & 10\cdot x_3 & - & 4\cdot x_4 & = & -3 \end{array} .$$

Teil der Lösung: $x_1 = \frac{1}{7} - \frac{4}{7}\cdot t$, $x_3 = 0$, $x_4 = t$.

Aufgabe 3.6

a) Was ist eine transponierte Matrix $\underline{A}^T$?
Welche Eigenschaft von $\underline{A}$ liegt vor wenn $\underline{A} = \underline{A}^T$ gilt?

b) Was versteht man unter dem Begriff Typ einer Matrix?
Welche Bedingung müssen zwei Matrizen erfüllen, wenn sie multipliziert weden sollen?

c) Was ist eine inverse Matrix?

d) Gilt das Kommutativgesetz bei der Matrizenmultiplikation?

Aufgabe 3.7

Bestimmen Sie die Inverse Matrix $\underline{A}^{-1}$ von

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe der Umformung von folgendem Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 5 \cdot x_4 & = & b_1 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & 2 \cdot x_4 & = & b_2 \\ x_1 & & & + & x_3 & + & 4 \cdot x_4 & = & b_3 \\ x_1 & + & x_2 & & & + & 3 \cdot x_4 & = & b_4 \end{array} .$$

Lösung: $\begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3.8

Gegeben sind die Matrizen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \underline{C} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -6 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Zu überprüfen sind an diesen Matrizen die Beziehungen

a) $(\underline{A} \cdot \underline{B}) \cdot \underline{C} = \underline{A} \cdot (\underline{B} \cdot \underline{C})$ ***b)*** $\underline{A} \cdot (\underline{B} + \underline{C}) = \underline{A} \cdot \underline{B} + \underline{A} \cdot \underline{C}$

c) $(\underline{A} + \underline{B}) \cdot \underline{C} = \underline{A} \cdot \underline{C} + \underline{B} \cdot \underline{C}$ ***d)*** $(\underline{A} \cdot \underline{B})^T = \underline{B}^T \cdot \underline{A}^T$.

Aufgabe 3.9

a) Was ist eine Determinante einer Matrix $\underline{A}$, $\det(\underline{A})$?

b) Was versteht man unter der Regel von Sarrus?

c) Was versteht man unter der Cramerschen-Regel?

d) Wann ist ein LGS eindeutig lösbar?

Aufgabe 3.10

Bestimmen Sie die Determinante der Matrix $\underline{A}$

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

Ein denkbarer Lösungsweg ist, zunächst die zweite Zeile in die Form (0,0,0,0,1) umzuformen und dann die Determinante nach dieser Zeile zu entwickeln. Im Folgenden kann die zweite Spalte in die Form (1,0,0,0) umgeformt werden. Entwickeln nach dieser Spalte und anschließendes Umformen der ersten Spalte in (0,2,0) liefert nach Entwicklung nach dieser Spalte das Ergebnis det($\underline{A}$) = 26.

Aufgabe 3.11

Bestimmen Sie die Determinante der Matrix $\underline{A}$ indem Sie die Matrix zunächst in Diagonalform umformen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

Lässt sich ohne Rechnung eine Aussage zur Determinante von $\underline{A}^{-1}$ machen? (Lösung: det($\underline{A}$) = -1)

Aufgabe 3.12

Das Anwendungsbeispiel zu den Kirchhoffschen Gesetzen hat in der Vorlesung folgendes Gleichungssystem ergeben

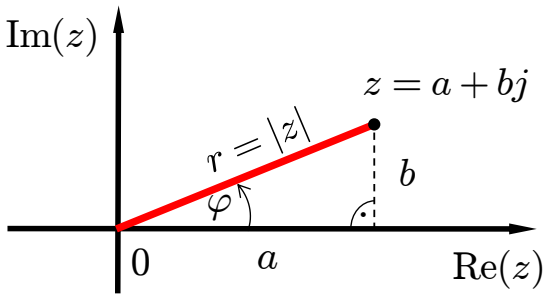
$$\begin{array}{rcrcrcrcl} I_1 & - & I_2 & - & I_3 & - & I_4 & = & 0 \\ R_1 \cdot I_1 & + & R_2 \cdot I_2 & & & & & = & 10 \\ R_1 \cdot I_1 & & & + & R_3 \cdot I_3 & & & = & 10 \\ R_1 \cdot I_1 & & & & & + & R_4 \cdot I_4 & = & 10 \end{array} .$$

Berechnen Sie abschließend die Ströme I_3 und I_4 mit Hilfe der Cramerschen Regel, wobei die Determinante der Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems 5000 beträgt.

Lösung: I_1 = 1, I_2 = 0,4, I_3 = 0,2, I_4 = 0,4.

Kapitel 4

Komplexe Zahlen



Kapitelinhalt

4.1 Hankelsches Permanenzprinzip 4-1

4.2 Operationen für komplexe Zahlen 4-4

4.2.1 Einführung der Operationen 4-4

4.2.2 Regeln für die Operationen 4-6

4.3 Gaußsche Zahlenebene 4-7

4.4 Trigonometrische Form 4-9

4.4.1 Einführung 4-9

4.4.2 Multiplikation und Division in trigonometrischer Form 4-11

4.4.3 Potenzieren 4-11

4.4.4 Satz von Moivre - Spezielle Additionstheoreme 4-12

4.5 Exponentialform 4-14

4.6 Reine Gleichungen 4-16

4.7 Lösbarkeit algebraischer Gleichungen 4-17

4.7.1 Quadratische Gleichungen 4-17

4.7.2 Algebraische Gleichungen n-ten Grades 4-17

4.8 Aufgaben zu Kapitel 4 4-20

4.1 Hankelsches Permanenzprinzip

Unter Berücksichtigung des Hankelschen Permanenzprinzips werden die unterschiedlichen Zahlenbereiche jeweils erweitert.

Hankelsches Permanenzprinzip (Hermann Hankel 1867)

Beim Erweitern eines Zahlenbereiches sollen die bisherigen Gesetze weiter gelten.[1]

a) Natürliche Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$
Eigenschaften

Addition:	Kommutativgesetz	$a + b$	$=$	$b + a$
	Assoziativgesetz	$(a + b) + c$	$=$	$a + b(+c)$
Multiplikation:	Kommutativgesetz	$a \cdot b$	$=$	$b \cdot a$
	Assoziativgesetz	$(a \cdot b) \cdot c$	$=$	$a \cdot (b \cdot c)$
	Distributivgesetz	$a \cdot (b + c)$	$=$	$a \cdot b + a \cdot c$

Additive Gleichungen in $\mathbb{N}$: $a + x = b; \quad a, b, x \in \mathbb{N}$
lösbar $\Leftrightarrow \quad a < b$
Für $a \geq b$ Einführung neuer Zahlen:

b) Ganze Zahlen $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$
$\mathbb{Z}$ erfüllt obige Gesetze
Multiplikative Gleichungen in $\mathbb{Z}$: $a \cdot x = b; \quad a \neq 0, \quad a, b, x \in \mathbb{Z}$
lösbar $\Leftrightarrow \quad b$ Vielfaches von a
Nichterfüllung der Bedingung führt zu

c) Rationalen Zahlen $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} | p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \right\}$
$\mathbb{Q}$ erfüllt obige Gesetze
Betrachtung der Gleichung $x^2 - 2 = 0$, Lösung $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl
$\sqrt{2}$ irrationale Zahl, weitere Zahlen dieser Art
$\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ..., π, e oder $x = \log_{10} 5$
Diesen Zahlen entsprechen Punkte auf der Zahlengeraden.
Zusammenfassung der rationalen und der irrationalen Zahlen zu

d) Reelle Zahlen $\mathbb{R}$, Vereinigungsmenge der rationalen und der irrationalen Zahlen
$\mathbb{R}$ erfüllt obige Gesetze

Betrachtung der Gleichung
$x^2 + 1 = 0 \qquad$ nicht lösbar in $\mathbb{R}$

Konstruktion neuer Zahlen: Sei j Lösung der Gleichung, also

$$j^2 = -1 \qquad \text{(ursprüngliche Bezeichnung } i) \tag{4.1}$$

mit j imaginäre Einheit. Die neuen Zahlen sollen obige Gesetze erfüllen.

[1] nach Hermann Hankel, geb. 14. Februar 1839 in Halle (Saale); gest. 29. August 1873 in Schramberg, deutscher Mathematiker, Arbeiten zur Funktionen- und Integrationstheorie

Anwendung des Hankelschen Permanenzprinzips auf j

1) Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division

$$j + j = 2j \ , \quad 24j - 9j = 15j \ , \quad j - 4j = -3j \ , \qquad j - j = 0 \ ,$$

$$mj + nj = (m+n)j, \quad m, n \in \mathbb{R} \quad j \cdot 0 = 0 \qquad \frac{j}{j} = 1 \ ,$$

$$(3j)^2 = 3^2 \cdot j^2 = 9 \cdot (-1) = -9 \ , \quad j^2 \cdot (-2) = -2j^2 = 2$$

2) Potenzen von j für natürliche Exponenten

$$j^1 = j \ , \quad j^2 = -1 \ , \quad j^3 = j^2 \cdot j = (-1) \cdot j = -j$$

$$j^4 = j^2 \cdot j^2 = (-1) \cdot (-1) = 1 \ \text{ oder } \ j^4 = j^3 \cdot j^1 = (-j) \cdot j = -j^2 = -(-1) = 1$$

$$j^5 = j^4 \cdot j = j \ \text{ oder } \ j^5 = j^3 \cdot j^2 = (-j) \cdot (-1) = j \ , \quad j^6 = j^5 \cdot j = j \cdot j = -1$$

allgemein:

a) $j^{4n} = 1$ b) $j^{4n+1} = j$ c) $j^{4n+2} = -1$ d) $j^{4n+3} = -j \ , \quad n \in \mathbb{N} \ .$ (4.2)

3) Ausweitung auf ganzzahlige Exponenten

$$j^0 := 1 \ , \quad j^{-n} := \frac{1}{j^n} \ , \quad n \in \mathbb{N} \ , \quad \text{dann gilt:}$$

$$j^{-2} = \frac{1}{j^2} = \frac{1}{-1} = -1 \quad \text{(das ist } n = -1 \text{ in Formel (4.2)c)}$$

$$j^{-3} = \frac{1}{j^3} = \frac{1 \cdot j}{-j \cdot j} = \frac{j}{-j^2} = \frac{j}{1} = j \quad \text{(das ist } n = -1 \text{ in Formel (4.2)b)}$$

$\Rightarrow$ Die Formeln (4.2) gelten sogar für $n \in \mathbb{Z}$.

e) Komplexe Zahlen
Verknüpfung von imaginären Zahlen $b \cdot j$; $b \in \mathbb{R}$, mit reellen Zahlen a durch Addition

$$\begin{array}{lll} z := & a + b \cdot j & a, b \in \mathbb{R} \\ & a =: \text{Re } z & \text{Realteil von } z \\ & b =: \text{Im } z & \text{Imaginärteil von } z \end{array}$$

Damit wird gebildet

$$\mathbb{C} := \{a + b \cdot j \mid a, b \in \mathbb{R}\} \quad \text{Menge der komplexen Zahlen .}$$

Es wird eingeführt:

$$\begin{array}{rcll} z^* & := & a - b \cdot j & \textbf{konjugiert komplexe Zahl} \text{ von z} \\ -z & := & -a - b \cdot j & \textbf{entgegengesetzte Zahl} \text{ von z} \\ |z| & := & \sqrt{a^2 + b^2} & \textbf{Betrag} \text{ von z} \end{array}$$

Spezialfälle:

$$\begin{array}{lllll} a = 0 & \Rightarrow & z = b \cdot j & z \text{ rein imaginär} \\ b = 0 & \Rightarrow & z = a & z \text{ rein reell .} \end{array}$$

4.2 Operationen für komplexe Zahlen

Ziel: Die Operationen sind so zu definieren, dass das Hankelsche Permanenzprinzip erfüllt ist.

Es seien zwei komplexe Zahlen in allgemeiner Form gegeben:

$$z_1 = a_1 + b_1 \cdot j \ , \qquad z_2 = a_2 + b_2 \cdot j \ . \tag{4.3}$$

Definition der Gleichheit

$$z_1 = z_2 \ : \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = a_2 \quad \text{und} \quad b_1 = b_2 \ . \tag{4.4}$$

In Worten: Zwei komplexe Zahlen sind gleich, wenn Realteil und Imaginärteil übereinstimmen.

4.2.1 Einführung der Operationen

1) Addition

$$z_1 + z_2 := (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot j \tag{4.5}$$

In Worten: Zwei komplexe Zahlen werden addiert, indem die Real- und die Imaginärteile addiert werden. Es lässt sich zeigen, dass das Kommutativ- und das Assoziativgesetz gelten.

2) Subtraktion

$$z_1 - z_2 := (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) \cdot j \tag{4.6}$$

In Worten: Zwei komplexe Zahlen werden subtrahiert, indem die Real- und die Imaginärteile subtrahiert werden.

Spezialfall: $z - z^* = (a + b \cdot j) - (a - b \cdot j) = 2 \cdot b \cdot j$ (rein imaginär) .

3) Multiplikation

Vorüberlegung unter Benutzung der Assoziativität und Distributivität

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + b_1 \cdot j) \cdot (a_2 + b_2 \cdot j) \\ &= a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2 \cdot j + b_1 \cdot a_2 \cdot j + \underbrace{b_1 \cdot b_2 \cdot j^2}_{-b_1 \cdot b_2} \qquad (j^2 = -1) \ , \end{aligned}$$

also ist es zweckmäßig zu definieren

$$z_1 \cdot z_2 := (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_2 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_2) \cdot j \ . \tag{4.7}$$

Beispiel:

$$z_1 = (2 + 3 \cdot j) \, , \ \ z_2 = (3 - 4 \cdot j) \quad (a_1 = 2; \ b_1 = 3; \ a_2 = 3; \ b_2 = -4)$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (2 + 3 \cdot j) \cdot (3 - 4 \cdot j) \\ &= (2 \cdot 3 - 3 \cdot (-4)) + (3 \cdot 3 + 2 \cdot (-4)) \, j \\ &= (6 - (-12)) + (9 + (-8)) \, j \\ &= \underline{18 + j} \end{aligned}$$

Es kann mit Formel (4.7) gerechnet werden, oder es wird direkt ausmultipliziert.

Spezialfall:

$$\begin{aligned} z \cdot z^* &= (a + b \cdot j) \cdot (a - b \cdot j) && \text{(Binomische Formel anwenden)} \\ &= a^2 - (b \cdot j)^2 = a^2 - (-b^2) \\ &= \underline{a^2 + b^2 = |z|^2} && \text{(rein reell)} \ . \end{aligned}$$

4) Division

Vorüberlegung

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1 + b_1 \cdot j}{a_2 + b_2 \cdot j} \qquad \text{(Erweitern mit der konjugiert komplexen Zahl des Nenners)} \\ &= \frac{(a_1 + b_1 \cdot j) \cdot (a_2 - b_2 \cdot j)}{(a_2 + b_2 \cdot j) \cdot (a_2 - b_2 \cdot j)} \\ &= \frac{a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + (a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2) \cdot j}{a_2^2 + b_2^2} \ . \end{aligned}$$

Dies führt zu einer geeigneten Definition der Division:

$$\frac{z_1}{z_2} := \frac{(a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2)}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{(a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2)}{a_2^2 + b_2^2} \cdot j \ . \tag{4.8}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} \frac{4 + 3 \cdot j}{2 + 5 \cdot j} &= \frac{(4 + 3 \cdot j) \cdot (2 - 5 \cdot j)}{(2 + 5 \cdot j) \cdot (2 - 5 \cdot j)} \\ &= \frac{8 - 20 \cdot j + 6 \cdot j + 15}{4 + 25} \\ &= \frac{23 - 14 \cdot j}{29} = \underline{\frac{23}{29} - \frac{14}{29} \cdot j} \end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned} \left(\frac{23}{29} - \frac{14}{29} \cdot j\right) \cdot (2 + 5 \cdot j) &= \left(\frac{23}{29} \cdot 2 - \left(-\frac{14}{29} \cdot 5\right)\right) + \left(\left(-\frac{14}{29}\right) \cdot 2 + \frac{23}{29} \cdot 5\right) \cdot j \\ &= \left(\frac{46 + 70}{29}\right) + \left(\frac{-28 + 115}{29}\right) \cdot j \\ &= \frac{116}{29} + \frac{87}{29} \cdot j = \underline{4 + 3 \cdot j} \ \checkmark \ . \end{aligned}$$

Probe für den allgemeinen Fall:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} \cdot z_2 &= z_1 \ ? \\ &= \left(\frac{(a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2)}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{(a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2)}{a_2^2 + b_2^2} \cdot j\right) \cdot (a_2 + b_2 \cdot j) \\ &\Rightarrow \quad \text{Übung,} \end{aligned}$$

4.2.2 Regeln für die Operationen

1) $z = z^* \quad \Leftrightarrow \quad z \in \mathbb{R}$.

In Worten: Ist eine Zahl mit ihrer konjugiert komplexen Zahl identisch, so ist diese Zahl eine reelle Zahl, denn

$$\begin{aligned} a + b \cdot j = a - b \cdot j \quad &\Leftrightarrow \quad b \cdot j = -b \cdot j \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot b \cdot j = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad b = 0 \quad \Rightarrow z \in \mathbb{R} \qquad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

2) $z = -z^* \quad \Leftrightarrow \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (Menge der nichtrellen komplexen Zahlen)

In Worten: Ist eine Zahl mit dem Negativen ihrer konjugiert komplexen Zahl identisch, so ist diese Zahl rein imaginär, denn

$$\begin{aligned} a + b \cdot j = -(a - b \cdot j) \quad &\Leftrightarrow \quad a + b \cdot j = -a + b \cdot j \quad \Leftrightarrow \quad a = -a \\ &\Leftrightarrow \quad a = 0 \quad \Rightarrow z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \qquad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

3) $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$, $\qquad (z_1 - z_2)^* = z_1^* - z_2^*$

In Worten: Die konjugiert komplexe Zahl einer Summe (Differenz) ist gleich der Summe (Differenz) der konjugiert komplexen Zahlen, denn

$$\begin{aligned} \text{Linke Seite: } ((a_1 + b_1 \cdot j) + (a_2 + b_2 \cdot j))^* \quad &= ((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot j)^* \\ &= (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) \cdot j \\ \text{Rechte Seite: } (a_1 - b_1 \cdot j) + (a_2 - b_2 \cdot j) \quad &= (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) \cdot j \qquad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

4) $(z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^*$.

In Worten: Die konjugiert komplexe Zahl eines Produktes ist gleich dem Produkt der konjugiert komplexen Zahlen der Faktoren, denn
...
...
...
...

5)

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*} \; .$$

In Worten: Die konjugiert komplexe Zahl eines Quotienten ist gleich dem Quotienten der konjugiert komplexen Zahlen von Zähler und Nenner, denn **(Übungsaufgabe ...)**

4.3 Gaußsche Zahlenebene

Veranschaulichnung:

- Reelle Zahlen: Zahlengerade
- Komplexe Zahlen: Gaußsche Zahlenebene.

Gaußsche Zahlenebene:

- Abszisse: Realteil von z $\mathrm{Re}(z)$
- Ordinate: Imaginärteil von z $\mathrm{Im}(z)$
- $z = a + bj$ entspricht $P(a, b)$ oder Pfeil $\overrightarrow{0P}$ oder Zeiger z

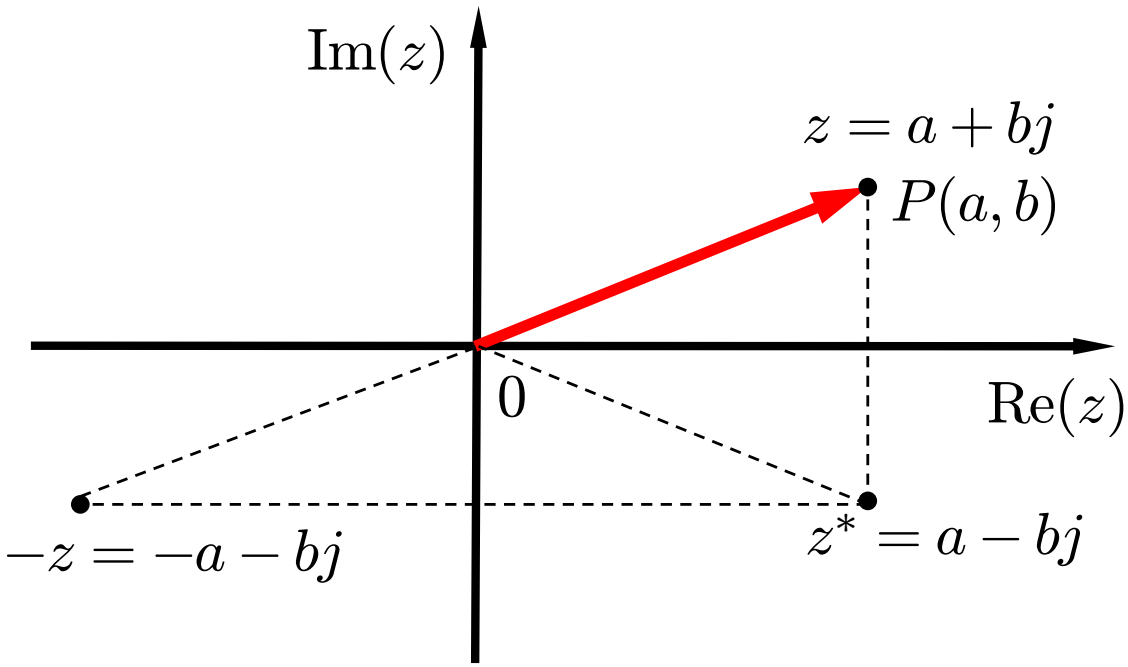


Bild 4.1: *Veranschaulichung einer komplexen Zahl z in der Gaußschen Zahlenebene*

- Konjugiert komplexe Zahl z^*: Spiegelung von z an reeller Achse
- Entgegengesetzte Zahl $-z$: Spiegelung am Ursprung
- z^* und $-z$: Spiegelung an imaginärer Achse
- Betrag $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$: Länge des Zeigers oder Abstand von P vom Ursprung
- $a = 0$: Punkte der imaginären Achse
- $b = 0$: Punkte der reellen Achse.

Addition in der Zahlenebene

$z_1 + z_2$: Addition der Zeiger analog zum Kräfteparallelogramm

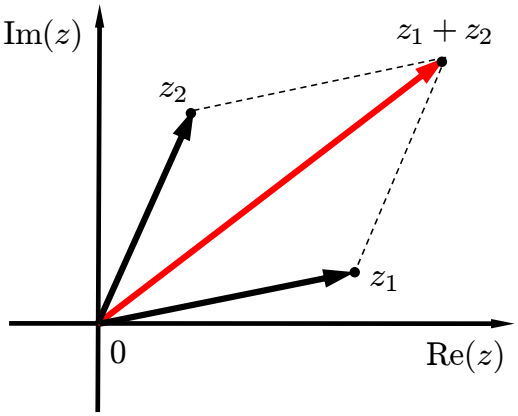


Bild 4.2: *Addition komplexer Zahlen*

Subtraktion in der Zahlenebene

- Zurückführung der Subtraktion auf die Addition, Beispiel: $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$
- Reihenfolge z_1 und z_2 vorgeben, $-z_2$ einzeichnen
- Parallelogramm aus z_1 und $-z_2$ zeichnen
- Zeiger als Diagonale einzeichnen, siehe Bild 4.3 links
- Vertauschung der Reihenfolge führt in der Regel auf ein anderes Ergebnis, siehe als Beispiel $z_2 - z_1$ Bild 4.3 rechts

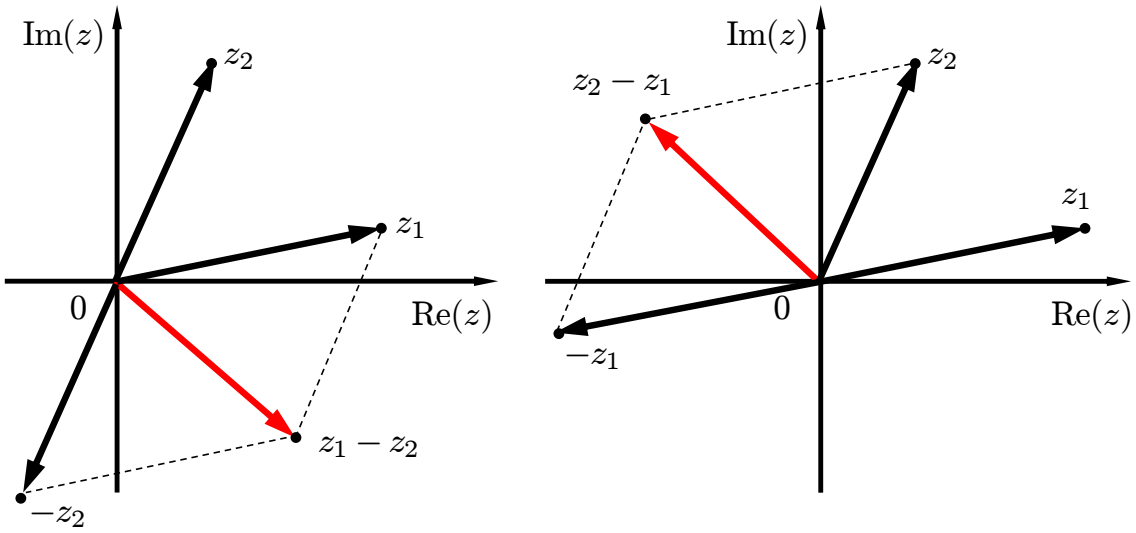


Bild 4.3: *Subtraktion komplexer Zahlen: $z_1 - z_2$ (links), $z_2 - z_1$ (rechts)*

4.4 Trigonometrische Form

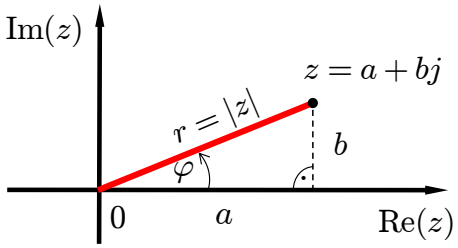
4.4.1 Einführung

Die Trigonometrische Form wird auch als **Polarform** oder **goniometrische Form** bezeichnet.

Entsprechend den Bezeichnungen der algebraischen Form $z = a + b \cdot j$ gilt:

$$r := |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \textbf{(Betrag)} \quad (4.9)$$

Rechtwinkliges Dreieck



$$\mathrm{Re}(z) = a = r \cdot \cos(\varphi)$$
$$\mathrm{Im}(z) = b = r \cdot \sin(\varphi)\ , \quad \varphi \in [0; 2\pi[$$
$$\varphi = \arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \quad \textbf{(Argument)}\ .$$

Damit folgt

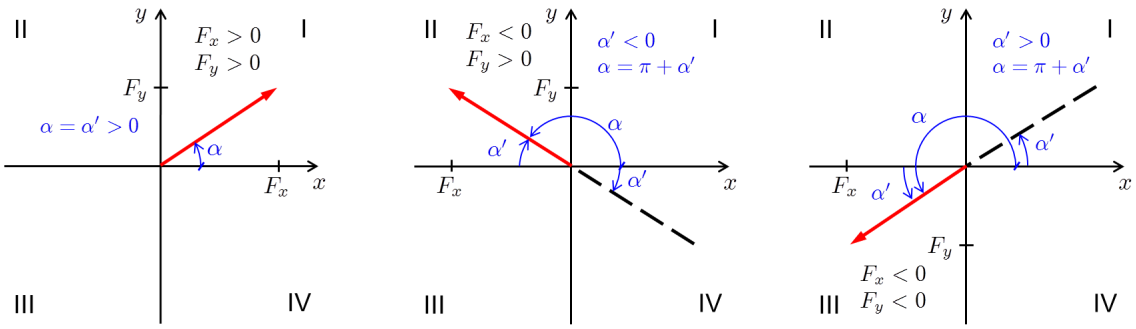
$$z = a + b \cdot j = r \cdot \cos(\varphi) + r \cdot \sin(\varphi) \cdot j$$

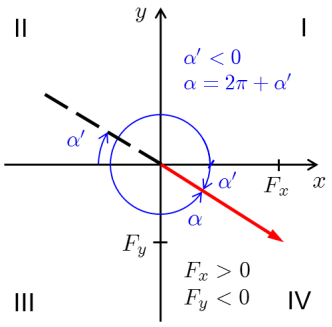
und somit

$$\underline{z = r \cdot (\cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi))} \qquad \textbf{(trigonometrische Form)}\ . \qquad (4.10)$$

Bei der Bestimmung des Arguments sind die Besonderheiten der Arkustangensfunktion zu beachten. Die gleichen Fragestellungen treten bei der Richtungsangabe von Kraftvektoren in der Technischen Mechanik auf. Werden der Realteil a der komplexen zahl als Koordinate F_x und der Imaginärteil als Koordinate F_y im kartessichen Koordinatensystem aufgefasst, so können die Hinweise in Bild 4.4 auf Seite 4-10 zur Bestimmung des Arguments einer komplexen Zahl verwendet werden.

Richtungsangabe von Kraftvektoren im kartesischen Koordinatensystem



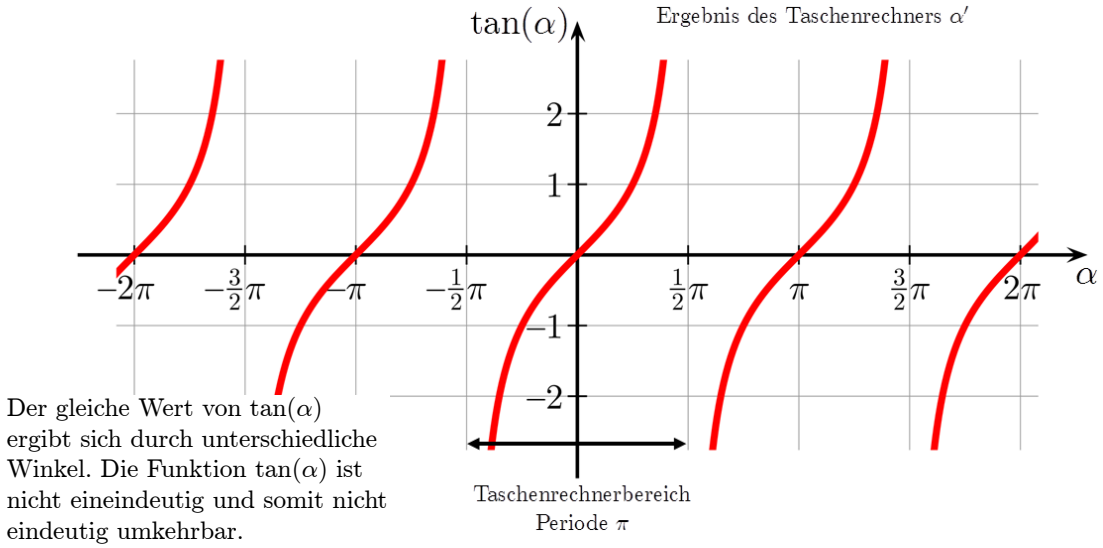


F_x	F_y	α'	Q	α
+	+	+	1	α'
-	+	-	2	$\pi + \alpha'$
-	-	+	3	$\pi + \alpha'$
+	-	-	4	$2\pi + \alpha'$

Winkel sind entgegen des Uhrzeigersinns positiv

Vorgehen:

- Bestimmung des Quadranten durch Vorzeichen von F_x und F_y
- Berechnung von α' mit $\tan(\alpha') = \frac{F_y}{F_x}$ und $\alpha' \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- Berechnung von α mit Hilfe der obigen Darstellungen



Der gleiche Wert von $\tan(\alpha)$ ergibt sich durch unterschiedliche Winkel. Die Funktion $\tan(\alpha)$ ist nicht eineindeutig und somit nicht eindeutig umkehrbar.

Bild 4.4: *Bestimmung des Winkels zur x-Achse in Anlehnung zu Kraftvektoren*

4.4.2 Multiplikation und Division in trigonometrischer Form

Multiplikation

$$
\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot (\cos(\varphi_1) + j \cdot \sin(\varphi_1)) \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_2) + j \cdot \sin(\varphi_2)) \\
&= r_1 \cdot r_2 \cdot \Bigg[\underbrace{(\cos(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2))}_{\cos(\varphi_1+\varphi_2)} \\
&\qquad\qquad + j \cdot \underbrace{(\sin(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2) + \cos(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2))}_{\sin(\varphi_1+\varphi_2)} \Bigg]
\end{aligned}
$$

Es ergibt sich

$$
\underline{z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2))} \; . \tag{4.11}
$$

In Worten: Zwei komplexe Zahlen werden in trigonometrischer Form multipliziert, indem die Beträge multipliziert und die Argumente addiert werden.

Division

$$
\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1 \cdot (\cos(\varphi_1) + j \cdot \sin(\varphi_1))}{r_2 \cdot (\cos(\varphi_2) + j \cdot \sin(\varphi_2))} \quad \text{Erweitern mit} \quad \frac{z_2^*}{r_2} \\
&= \frac{r_1 \cdot (\cos(\varphi_1) + j \cdot \sin(\varphi_1)) \cdot (\cos(\varphi_2) - j \cdot \sin(\varphi_2))}{r_2 \cdot \underbrace{(\cos(\varphi_2) + j \cdot \sin(\varphi_2)) \cdot (\cos(\varphi_2) - j \cdot \sin(\varphi_2))}_{\cos^2(\varphi_2)+\sin^2(\varphi_2)=1}} \\
&= \frac{r_1}{r_2} \cdot \Bigg[\underbrace{(\cos(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2) + \sin(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2))}_{\cos(\varphi_1-\varphi_2)} \\
&\qquad\qquad + j \cdot \underbrace{(\sin(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2) - \cos(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2))}_{\sin(\varphi_1-\varphi_2)} \Bigg]
\end{aligned}
$$

Es ergibt sich

$$
\underline{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]} \; . \tag{4.12}
$$

In Worten: Zwei komplexe Zahlen werden in trigonometrischer Form dividiert, indem die Beträge dividiert und die Argumente subtrahiert werden.

4.4.3 Potenzieren

Mehrfaches Anwenden der Multiplikation führt auf

$$
\begin{array}{lrl}
z_1 \, , z_2 : & z_1 \cdot z_2 & = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \\
z_1 = z_2 = z : & z^2 & = r^2 \cdot (\cos(2 \cdot \varphi) + j \cdot \sin(2 \cdot \varphi)) \\
z^3 : & z \cdot z^2 & = r^3 \cdot (\cos(3 \cdot \varphi) + j \cdot \sin(3 \cdot \varphi)) \; .
\end{array}
$$

Naheliegende Vermutung:

$$z^n = [r \cdot (\cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi))]^n = r^n \cdot (\cos(n \cdot \varphi) + j \cdot \sin(n \cdot \varphi)) \ , \quad n \in \mathbb{N}_0 \ . \quad (4.13)$$

(4.13) ist der **Satz von Moivre**[2], Beweis mit vollständiger Induktion als Übung.

Zur Veranschaulichung in der Zahlenebene siehe Bild 4.5 auf Seite 4-14.

4.4.4 Ergänzung: Satz von Moivre - Spezielle Additionstheoreme

Es wird z^n mit $|z| = r = 1$, also $z = \cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)$, auf unterschiedliche Art gebildet:

a) Direkte Berechnung
b) Satz von Moivre.

$n = 2$

Direkte Berechnung

$$(\cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)) \cdot (\cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)) = \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi) + j \cdot 2 \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi)$$

Satz von Moivre

$$(\cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi))^2 = \cos(2\varphi) + j \cdot \sin(2\varphi)$$

Das ergibt durch den Vergleich der

Realteile: $\underline{\cos(2\varphi) = \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)}$

Imaginärteile: $\underline{\sin(2\varphi) = 2 \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi)}$.

$n = 3$

Direkte Berechnung

$$\begin{aligned}
(\cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi))^3 &= (\cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi))^2 \cdot (\cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)) \\
&= \left(\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi) + j \cdot 2 \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi)\right) \cdot (\cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)) \\
&= \left(\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)\right) \cdot \cos(\varphi) - 2 \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi) \\
&\quad + j \cdot \left(\left(\cos^3 - \sin(\varphi)\right) \cdot \sin(\varphi) + 2 \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\varphi)\right) \\
&= \cos^3(\varphi) - 3\sin^2(\varphi) \cdot \cos(\varphi) + j \cdot 3 \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos^2(\varphi) - \sin^3(\varphi)
\end{aligned}$$

Satz von Moivre

$$(\cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi))^3 = \cos(3\varphi) + j \cdot \sin(3\varphi)$$

[2] Abraham de Moivre, französischer Mathematiker, geb. Vitry-le-François (Departement Marne) 26. 5. 1667, gest. London 27. 11. 1754; Hauslehrer, später u. a. Mitglied der Royal Society; befasste sich mit Wahrscheinlichkeitsrechnung und untersuchte die Winkelfunktionen mit imaginärem Argument. Der moivresche Satz in der Formulierung $(\cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi))^n = \cos(n\varphi) + j \cdot \sin(n\varphi)$ stammt von L. Euler (n rationale Zahl, $j^2 = -1$), [2003 Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG].

Das ergibt durch den Vergleich der

$$\text{Realteile:} \quad \underline{\cos(3\varphi) = \cos^3(\varphi) - 3 \cdot \sin^2(\varphi) \cdot \cos(\varphi)}$$

$$\text{Imaginärteile:} \quad \underline{\sin(3\varphi) = 3 \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos^2(\varphi) - \sin^3(\varphi)} \ .$$

Für $n = 4$ ergibt sich als Ergebnis

$$\cos(4\varphi) = \cos^4(\varphi) - 6 \cdot \sin^2(\varphi) \cdot \cos^2(\varphi) + \sin^4(\varphi)$$

$$\sin(4\varphi) = 4 \cdot \sin(\varphi) \cos^3(\varphi) - 4 \cdot \sin^3(\varphi) \cdot \cos(\varphi) \ .$$

Als Probe können die Theoreme für bestimmte φ, z.B. $\varphi = \pi/6, \pi/4, \pi/3...$ nachgerechnet werden. Eine allgemeine Formel könnte durch vollständige Induktion bewiesen werden.

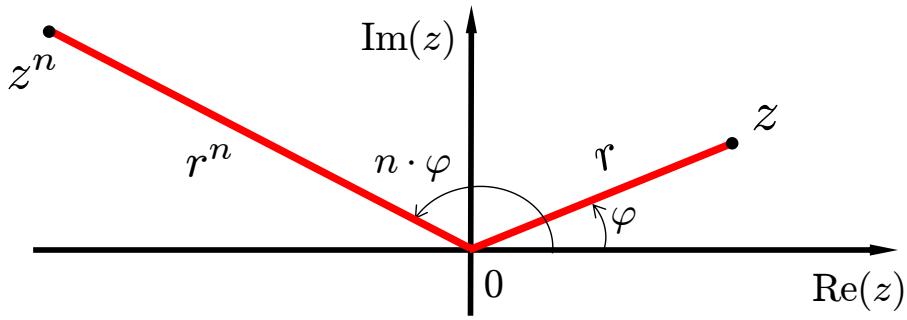


Bild 4.5: *Veranschaulichung des Potenzierens in trigonometrischer Form in der Zahlenebene*

4.5 Exponentialform

Später wird gezeigt

$$e^{j \cdot x} = \cos(x) + j \cdot \sin(x) \quad \text{mit} \quad e = 2,718... \quad \text{Basis des natürlichen Logarithmus} \tag{4.14}$$

Sei $z = |z| \cdot (\cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi))$, so gilt

$$z = |z| \cdot e^{j \cdot \varphi} \qquad \textbf{Exponentialform} \quad \text{mit} \tag{4.15}$$

$$|e^{j \cdot \varphi}| = 1 \quad \text{und} \quad \arg e^{j \cdot \varphi} = \varphi \; .$$

Die bereits bewiesenen Gesetze für Multiplikation, Division und Potenzieren erhalten nun die Form von Potenzgesetzen:

$$z_1 \cdot z_2 = \left(r_1 \cdot e^{j \cdot \varphi_1}\right) \cdot \left(r_2 \cdot e^{j \cdot \varphi_2}\right) = (r_1 \cdot r_2) \cdot e^{j \cdot (\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \cdot e^{j \cdot \varphi_1}}{r_2 \cdot e^{j \cdot \varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{j \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$z^n = \left(r \cdot e^{j \cdot \varphi}\right)^n = r^n \cdot e^{j \cdot (n \cdot \varphi)} \; .$$

Spezielle Winkel für φ:

$$e^{j \cdot \frac{\pi}{2}} = j \qquad e^{j \cdot \pi} = -1 \qquad e^{j \cdot \frac{3\pi}{2}} = -j \qquad \boldsymbol{e^{j \cdot 2\pi} = 1} \; .$$

Die letzte fettgedruckte Beziehung ist auch unter dem Begriff *Eulersche Zauberformel* bekannt, da die beiden speziellen irrationalen Zahlen e und π sowie die imaginäre Einheit j in einer Formel vorkommen. Zum besseren Verständnis dieses Zusammenhanges siehe die Erläuterung auf der folgenden Seite.

Periodizität dieser speziellen e-Funktion:

$$e^{j \cdot (\varphi + 2k\pi)} = e^{j \cdot \varphi} \qquad k \in \mathbb{Z} \; , \tag{4.16}$$

da die Sinus- und die Kosinusfunktion die Periode 2π haben.

Ergänzung: Erläuterung der Eulerformel

Später im Kapitel *Unendliche Reihen* wird gezeigt, dass gilt $(x < |\infty|)$:

$$e^x = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^9}{9!} + ... \tag{4.17a}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - +... \tag{4.17b}$$

$$\sin(x) = x^1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - +... \tag{4.17c}$$

Einsetzen von $x = \varphi$ bzw. $x = j\varphi$ und Beachtung von $j^2 = -1$ ergibt für die Reihen (4.17)

$$\begin{aligned} e^{j\varphi} &= 1 + \frac{(j\varphi)^1}{1!} + \frac{(j\varphi)^2}{2!} + \frac{(j\varphi)^3}{3!} + \frac{(j\varphi)^4}{4!} + \frac{(j\varphi)^5}{5!} + \frac{(j\varphi)^6}{6!} + \frac{(j\varphi)^7}{7!} + \frac{(j\varphi)^8}{8!} + ... \\ &= 1 + j \cdot \varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - j \cdot \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + j \cdot \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^6}{6!} - j \cdot \frac{\varphi^7}{7!} + \frac{\varphi^8}{8!} + j \cdot \frac{\varphi^9}{9!} + ... \end{aligned} \tag{4.18a}$$

$$\cos(\varphi) = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \frac{\varphi^8}{8!} - +... \tag{4.18b}$$

$$j \cdot \sin(\varphi) = j \cdot \varphi - j \cdot \frac{\varphi^3}{3!} + j \cdot \frac{\varphi^5}{5!} - j \cdot \frac{\varphi^7}{7!} + j \cdot \frac{\varphi^9}{9!} - +... \tag{4.18c}$$

Es ist zu erkennen, dass die Summe von (4.18b) und (4.18c) die Exponentialfunktion (4.18a) ergibt und somit

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi) \tag{4.19}$$

gilt. Ein Faktor k vor den Funktionen kann entsprechend ausgeklammert werden, so dass ebenso gilt

$$k \cdot e^{j\varphi} = k \cdot (\cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)) \ . \tag{4.20}$$

4.6 Reine Gleichungen

Gesucht sind die Lösungen

$$z^n = c\,, \qquad c \in \mathbb{C}\,. \tag{4.21}$$

Sei $\quad c = R \cdot e^{j\cdot\alpha} \quad$ und $\quad z = r \cdot e^{j\cdot\varphi}\,, \quad$ so folgt

$$r^n \cdot e^{j\cdot n\cdot\varphi} = R \cdot e^{j\cdot\alpha}\,. \tag{4.22}$$

Das ergibt für den Betrag von r

$$r^n = R \quad \text{oder} \quad r = \sqrt[n]{R} \qquad (\text{existiert wegen } R \geq 0) \tag{4.23}$$

und für das Argument

$$n \cdot \varphi = \alpha + k \cdot 2 \cdot \pi\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,. \tag{4.24}$$

Es ergibt sich die Frage, wieviele k für ein bestimmtes n möglich sind

$$\varphi = \frac{\alpha}{n} + k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{n}\,. \tag{4.25}$$

Es ergeben sich genau n verschiedene Winkel φ für $k = 0, 1, 2, ..., n-1$:

$$\varphi_0 = \frac{\alpha}{n} + 0 \cdot \frac{2\pi}{n}, \varphi_1 = \frac{\alpha}{n} + 1 \cdot \frac{2\pi}{n}, \varphi_2 = \frac{\alpha}{n} + 2 \cdot \frac{2\pi}{n}, ..., \varphi_{n-1} = \frac{\alpha}{n} + (n-1) \cdot \frac{2\pi}{n}\,,$$

Wird $k = n$ gesetzt, ergibt sich wieder $\varphi_0 = \frac{\alpha}{n}$

$$\varphi_n = \frac{\alpha}{n} + n \cdot \frac{2\pi}{n} = \frac{\alpha}{n} + 2\pi = \varphi_0 + 2\pi\,,$$

da die e-Funktion mit der Periode 2π periodisch ist. Daher ergeben sich n Winkel, wie oben bereits erwähnt.

Zusammengefasst ergeben sich n Lösungen für z in (4.21) in der Form

$$z_{\boldsymbol{k}} = \sqrt[n]{R} \cdot \exp\left[j \cdot \left(\frac{\alpha}{n} + \boldsymbol{k} \cdot \frac{2\pi}{n}\right)\right]\,, \qquad \boldsymbol{k = 0, 1, 2, ..., n-1}\,. \tag{4.26}$$

Daraus folgt: Alle Lösungen liegen in der Gaußschen Zahlenebene auf einem Kreis vom Radius $\sqrt[n]{R}$ und bilden die Ecken eines regelmäßigen n-Ecks. Deshalb heißt

$$z^n = c \qquad \textbf{Kreisteilungsgleichung}\,. \tag{4.27}$$

4.7 Lösbarkeit algebraischer Gleichungen

4.7.1 Quadratische Gleichungen

Quadratische Gleichungen sind jetzt immer lösbar

$$a_2 \cdot z^2 + a_1 \cdot z + a_0 = 0 \ , \qquad a_i \ \in \ \mathbb{R} \ , a_2 \neq 0 \ . \tag{4.28}$$

Division durch a_2 ergibt die Normalform

$$z^2 + \frac{a_1}{a_2} \cdot z + \frac{a_0}{a_2} = 0 \quad \text{oder} \quad z^2 + p \cdot z + q = 0 \ . \tag{4.29}$$

(4.29) hat die selbe Lösungsmenge wie (4.28), da nur äquivalente Umformungen vorgenommen wurden.

Lösung mit Hilfe der quadratischen Ergänzung

$$z^2 + p \cdot z + \frac{p^2}{4} = -q + \frac{p^2}{4} \quad \text{oder} \quad \left(z + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q := D \ , \tag{4.30}$$

wobei D Diskriminante heißt. Lösungen für

$D > 0: \quad z_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{D}$ und $z_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{D}$ 2 versch. reelle Lösungen

$D = 0: \quad z_1 = z_2 = -\frac{p}{2}$ genau eine reelle Lösung

$D < 0: \quad z_1 = -\frac{p}{2} + j \cdot \sqrt{-D}$ und $z_2 = -\frac{p}{2} - j \cdot \sqrt{-D}$ 2 konj. kompl. Lösungen .

Probe durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung, z.B. für den dritten Fall,

$$\begin{aligned} z_1^2 + p \cdot z_1 + q &= \left(-\frac{p}{2} + j \cdot \sqrt{-D}\right)^2 + p \cdot \left(-\frac{p}{2} + j \cdot \sqrt{-D}\right) + q \\ &= \frac{p^2}{4} - \underline{2 \cdot \frac{p}{2} \cdot j \cdot \sqrt{-D}} + j^2 \cdot (-D) - \frac{p^2}{2} + \underline{p \cdot j \cdot \sqrt{-D}} + q \\ &= -\frac{p^2}{4} + q + D = 0 \quad \checkmark \ . \end{aligned}$$

4.7.2 Algebraische Gleichungen n-ten Grades

Fundamentalsatz der Algebra

Satz 4.7.2-1: Jede Gleichung

$$a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + ... + a_1 \cdot z + a_0 = 0 \ , \qquad a_i \in \mathbb{C} \ , \ a_n \neq 0 \ , \ n \in \mathbb{N}, \ n \geq 1 \ , \tag{4.31}$$

hat mindestens eine Lösung in $\mathbb{C}$ (ohne Beweis).[3]

[3] Erster vollständiger Beweis von C.F. Gauß im Rahmen seiner Dissertation (Helmstedt 1799).

Ein Spezialfall liegt vor, wenn die a_i reell sind.

Satz 4.7.2-2: Ist z_0 eine Lösung der Gleichung

$$a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + ... + a_1 \cdot z + a_0 = 0 \ , \quad a_i \in \mathbb{R} \ , \ a_n \neq 0 \ , \ n \in \mathbb{N} \ , \ n \geq 1 \ , \quad (4.32)$$

so ist auch auch z_0^* eine Lösung dieser Gleichung.

Obiger Satz bedeutet, Gleichungen mit reellen Koeffizienten haben entweder keine komplexen oder paarweise konjugiert komplexe Lösungen.

Beweis:

$$\begin{aligned} z_0 \text{ Lösung} \quad &\Rightarrow \quad a_n \cdot z_0^n + a_{n-1} \cdot z_0^{n-1} + ... + a_1 \cdot z_0 + a_0 = 0 \qquad \text{Übergang zur konj. kompl. Lsg.} \\ &\Rightarrow \quad \left(a_n \cdot z_0^n + a_{n-1} \cdot z_0^{n-1} + ... + a_1 \cdot z_0 + a_0\right)^* = 0^* \\ &\Leftrightarrow^{a)} \quad a_n \cdot (z_0^*)^n + a_{n-1} \cdot (z_0^*)^{n-1} + ... + a_1 \cdot (z_0^*) + a_0 = 0 \\ &\Rightarrow \quad z_0^* \ \text{ ist Lösung der Gleichung} \qquad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Dabei wurden bei Schritt **a)** folgende Zusammenhänge verwendet

$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^* \ , \quad (z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^* \ , \quad 0^* = 0 \ , \quad a_i^* = a_i \ , \quad a_i \in \mathbb{R} \ . \qquad (4.33)$$

Beispiel 1

$z^3 - 1 = 0$, hier $a_3 = 1, a_2 = 0, a_0 = -1$

$1 + 0 \cdot j$ ist Lösung wegen $1^3 - 1 = 0$

$z_0 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot j$ ist Lösung wegen $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, also

$$\begin{aligned} &\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot j\right)^3 - 1 \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot j + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 \cdot j^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^3 \cdot j^3 - 1 \\ &= -\frac{1}{8} + \underline{\frac{3}{8} \cdot \sqrt{3} \cdot j} - \frac{9}{8} \cdot (-1) + \underline{\frac{3}{8} \cdot \sqrt{3} \cdot (-j)} - 1 = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Satz 4.7.2-2: $z_0^* = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot j$ ist auch Lösung .

Beispiel 2

$$z^4 - 1 = 0\ , \quad a_4 = 1, a_3 = a_2 = a_1 = 0, a_0 = -1$$

$(+1)$ und (-1) sind (reelle) Lösungen, wegen $1^4 - 1 = (-1)^4 - 1 = 0$

$z_0 = j$ ist Lösung, wegen $j^4 - 1 = 1 - 1 = 0$

$\Rightarrow$ Satz 4.7.2: $z_0^* = -j$ ist auch Lösung. Mehr kann es nicht geben.

Satz 4.7.2-2 gilt nicht bei nichtreellen Koeffizienten!

Gegenbeispiel: Die Gleichung mit den nichtreellen Koeffizienten

$$z^2 + (1 - 3 \cdot j) \cdot z + (-4 - 3 \cdot j) = 0$$

hat die Lösungen

$$z_1 = 1 + 2 \cdot j \quad \text{und} \quad z_2 = -2 + j \qquad (z_1, z_2 \text{ verschieden, aber nicht kompl. konjugiert})\ .$$

Probe: Mit der Rechenregel für die Multiplikation

$$(a_1 + b_1 \cdot j) \cdot (a_2 + b_2 \cdot j) = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_2 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_2) \cdot j \quad \text{ergibt sich}$$

$$\begin{array}{lllll} z_1: & (1 + 2 \cdot j)^2 & +(1 - 3 \cdot j) \cdot (1 + 2 \cdot j) & +(-4 - 3 \cdot j) & \\ = & -3 + 4 \cdot j & +7 - j & -4 - 3 \cdot j & = 0 \ \checkmark \end{array}$$

$$\begin{array}{lllll} z_2: & (-2 + j)^2 & +(1 - 3 \cdot j) \cdot (-2 + j) & +(-4 - 3 \cdot j) & \\ = & 3 - 4 \cdot j & +1 + 7 \cdot j & -4 - 3 \cdot j & = 0 \ \checkmark\ . \end{array}$$

Somit liegen zwei verschiedene Lösungen vor, welche nicht komplex konjugiert zueinander sind. Satz 4.7.2-2 gilt daher nicht, wenn die Koeffizineten nicht reell sind.

4.8 Aufgaben zu Kapitel 4

Aufgabe 4.1

Berechnen Sie:

a) $\dfrac{2-4j}{5+7j}$ **b)** $\dfrac{1+2j}{5j}$ **c)** $\dfrac{4j}{1-j}$ **d)** $\dfrac{(3+2j)\cdot(2-j)}{5+j}$.

Aufgabe 4.2

Berechnen Sie

a) $\dfrac{1+j}{1-j}+\dfrac{1-j}{1+j}$, **b)** $\dfrac{1+j}{j-1}+\dfrac{1-j}{j+1}$. [Lsg.: **a)** 0; **b)** -2j]

Aufgabe 4.3

Berechnen Sie die reellen Zahlen x und y für die folgende Gleichung erfüllt ist und führen Sie abschließend eine Probe durch:

$$\frac{1+2\cdot j}{x+y\cdot j}=3\cdot j\ .$$ [Lsg.: x = 2/3; y = -1/3]

Aufgabe 4.4

Zeigen Sie, dass für zwei komplexe Zahlen $z_1=(a_1+b_1j)$ und $z_2=(a_2+b_2j)$ gilt

$$\frac{z_1}{z_2}\cdot z_2=z_1$$

indem Sie zunächst die Division und dann die Multiplikation ausführen.

Aufgabe 4.5

Zeigen Sie, dass für alle komplexen Zahlen $z_2\neq 0$ gilt:

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^*=\frac{z_1^*}{z_2^*}\ .$$

Aufgabe 4.6

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für das Potenzieren komplexer Zahlen z für alle $n\in\mathbb{N}_0$ gilt

$$z^n=r^n\cdot(\cos(n\cdot\varphi)+j\cdot\sin(n\cdot\varphi))\ .$$

Nutzen Sie ggf. dabei die Additionstheoreme

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)\pm\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$
$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)\mp\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)\ .$$

Aufgabe 4.7

Gegeben sind die komplexen Zahlen

$$z_1 = 1 - 3j \quad \text{und} \quad z_2 = -2 - j \ .$$

Berechnen Sie in der algebraischen Form $z_1 \cdot z_2$ und $\frac{z_1}{z_2}$. Rechnen Sie nun z_1 und z_2 in die trigonometrische Form um und überprüfen Sie Ihre obigen beiden Rechnungen in dieser Form.

Aufgabe 4.8

Berechnen Sie die vierte Potenz von

$$z = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \ .$$

Stellen Sie Ihr Ergebnis in trigonometrischer, algebraischer und Exponentialform dar. [Lsg.: -4]

Aufgabe 4.9

Ermitteln Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^5 = -j \ .$$

Berechnen Sie die Ergebnisse in der Exponentialform und rechnen Sie anschließend die Lösungen in die algebraische Form um. Skizzieren Sie die Lösungen jeweils in Zeigerdarstellung in der Gaussschen Zahlenebene. Welche geometrische Figur ergibt sich erwartungsgemäß beim Verbinden der Zeigerspitzen?

Aufgabe 4.10

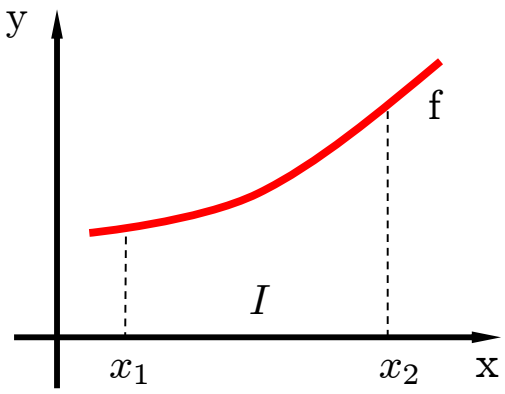
Potenzieren Sie in Exponentialform

$$\left(\frac{3}{1 + \sqrt{8}j} \right)^{10}$$

und rechnen Sie das Ergebnis in die algebraische Form um.

Kapitel 5

Funktionen



Kapitelinhalt

5.1 Relationen und Funktionen 5-1
5.2 Spezielle Eigenschaften von Funktionen 5-3
5.2.1 Monotonie 5-3
5.2.2 Beschränktheit 5-3
5.2.3 Symmetrie 5-4
5.2.4 Periodizität 5-4
5.2.5 Umkehrung 5-5
5.3 Elementare Funktionen 5-7
5.3.1 Rationale Funktionen 5-7
5.3.2 Horner Schema 5-9
5.3.3 Gebrochenrationale Funktionen 5-11
5.3.4 Kegelschnitte 5-13
5.3.5 Potenz- und Wurzelfunktionen 5-15
5.3.6 Potenzen und Logarithmen 5-17
5.3.7 Exponential- und Logarithmusfunktionen 5-19
5.3.8 Trigonometrische Funktionen 5-20

5.3.9 Arkusfunktionen 5-24
5.3.10 Hyperbelfunktionen 5-27
5.3.11 Areafunktionen 5-29
5.4 Operationen für Funktionen 5-31
5.4.1 Grundlegende Operationen 5-31
5.4.2 Verkettung 5-31
5.4.3 Definitionsbereiche 5-31
5.5 Funktionen in Parameterdarstellung 5-32
5.5.1 Kreis 5-32
5.5.2 Ellipse 5-33
5.5.3 Zykloide 5-34
5.5.4 Schiefer Wurf 5-34
5.6 Aufgaben zu Kapitel 5 5-36
5.6.1 Eigenschaften von Funktionen 5-36
5.6.2 Linearfaktoren 5-36
5.6.3 Umkehrfunktion 5-36
5.6.4 Polynomdivison 5-37
5.6.5 Horner Schema 5-37
5.6.6 Pol und Lücke 5-37
5.6.7 Trigonometrische Funktionen 5-38
5.6.8 Hyperbelfunktionen 5-39
5.6.9 Areafunktionen 5-39
5.6.10 Normalparabel 5-40
5.6.11 Exponential- und logarithmische Gleichungen 5-41

5.1 Relationen und Funktionen

Sei $A \times B$ = {(x,y) | x ∈ A und y ∈ B } die Menge sämtlicher Paare.

Def.: Eine Relation R über $A \times B$ ist eine **Teilmenge**
von $A \times B$: R $\subseteq A \times B$ (also eine Auswahl von Paaren). (5.1)

Beispiele:

1) Ordnungsrelationen

A={1,2}, B={1,2,3} ⇒ Produktmenge: $A \times B = \{(1;1),(1;2),(1;3),(2,1),(2;2),(2;3)\}$

z.B. Teilmengen daraus:

Relation **„<“** : R_1 = {(1;2),(1;3),(2;3)} Relation **„>“** : R_2 = {(2;1)}.

2) Funktionen

Funktionen sind spezielle Relationen.

Def.: Eine Relation über $A \times B$ heißt **Funktion**,
wenn zu jedem x ∈ A **genau** ein y ∈ B gehört.

Übliche Schreibweise: $f = \{(x,y) | \underbrace{y = \underbrace{f(x)}_{\text{Term}}}_{\text{Funktionsgleichung}} \}$

$y_0 = f(x_0)$: $f(x_0)$ Funktionswert an der Stelle x_0,
z.B. x_0 Nullstelle von f: ⇔ $f(x_0)$ = 0.

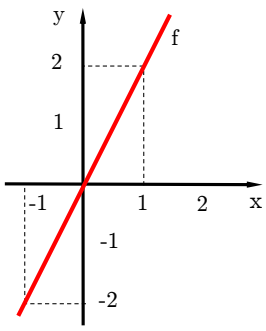
Andere Formulierung: f ist Abbildung von A in B

$f: x \to f(x)$, x Variable

Definitionsbereich:	$D = \{x \mid (x,y) \in f\}$	(=A)
Wertebereich:	$W = \{y \mid (x,y) \in f\}$	($\subseteq$ B)
Graph:	$G_f = \{P(x,y) \mid (x,y) \in f\}$	($\subseteq$ E (Ebene))
	mit $P(x,y)$ Punkte oder Menge isolierter Punkte	

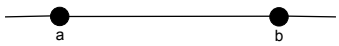
Beispiel: $f\{(x,y) \mid y = 2x\}$

oder $f: x \to f(x) = 2x, D = W = \mathbb{R}$



Spezielle Teilmengen aus $\mathbb{R}$ als Definitions- oder Wertebereich:

$[a;b] = \{x \mid a \leqq x \leqq b\}$ abgeschlossen $\Rightarrow$

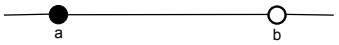


$]a;b[= \{x \mid a < x < b\}$ offen $\Rightarrow$

Zwei Fälle: halboffen

$]a;b]$ halboffen $\Rightarrow$

$[a;b[$ halboffen $\Rightarrow$



Weitere Beispiele

$]-\infty;a]$ $\{x \mid -\infty < x \leqq a\} \Rightarrow$

$\mathbb{R} =]-\infty;\infty[$.

3) Relation, die keine Funktion ist

$R_K = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$

$D = \{x \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\} = W$

oder $D = W = |x| \leqslant 1$ (Betrag siehe unten)

Paare der Relation R_K: $(1;0), (-1;0), \underbrace{(0;1)}_{x_1;y_1}, \underbrace{(0;-1)}_{x_1;y_2}$

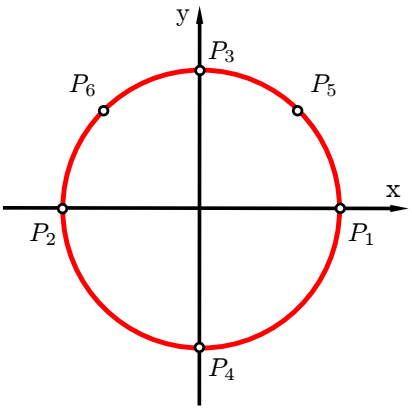
zu einem x, z.B. x_1 gehören mehrere y_i, hier y_1 und y_2.

Punkte auf dem Graphen G_R: P_1, P_2, P_3, P_4

weitere Paare: $(\frac{1}{2}\sqrt{2}; \frac{1}{2}\sqrt{2})$, $(-\frac{1}{2}\sqrt{2}; \frac{1}{2}\sqrt{2})$, ...

zugehörige Punkte: P_5, P_6, ...

Weitere Paare: $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3})$, ... usw.



Einführung Betrag: $|x| := \begin{cases} x, & x \geqq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$.

5.2 Spezielle Eigenschaften von Funktionen

Sei $f: x \to f(x)$ gegeben im Intervall $I \subseteqq D$.

5.2.1 Monotonie

f heißt monoton $\left\{ \begin{array}{c} \text{steigend} \\ \text{fallend} \end{array} \right\}$ auf I,

wenn für alle $x_1 < x_2 \in I$ $\left\{ \begin{array}{c} f(x_1) \leqq f(x_2) \\ f(x_1) \geqq f(x_2) \end{array} \right\}$ gilt und

streng monoton (oder echt),

wenn $\left\{ \begin{array}{c} f(x_1) < f(x_2) \\ f(x_1) > f(x_2) \end{array} \right\}$ gilt.

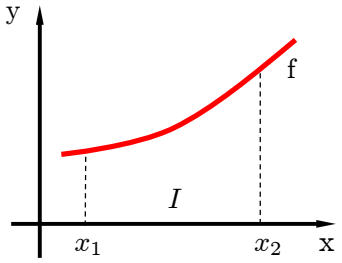


Bild 5.1: *Streng mon. steigend*

5.2.2 Beschränktheit

f ist nach $\left\{ \begin{array}{c} \text{oben} \\ \text{unten} \end{array} \right\}$ auf I beschränkt,

wenn für ein $k \in \mathbb{R}$ für alle $x \in$ D $\left\{ \begin{array}{c} f(x) \leqq k \\ f(x) \geqq k \end{array} \right\}$ gilt.

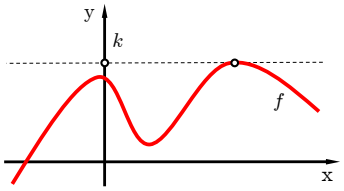


Bild 5.2: *nach oben beschr.*

f ist allgemein beschränkt (nach oben und unten),
wenn für alle $x \in$ D $|f(x)| \leqq k$ gilt.

Beispiele

Die Funktion $f(x) = x^2$ mit $D = \mathbb{R}$ und $W = R_0^+$ ist nur nach unten beschränkt. Jede nicht positive Zahl ist untere Schranke, die größte untere Schranke ist Null.

Die Funktion $f(x) = \sin(x)$ mit $D = \mathbb{R}$ und $W = [-1; 1]$ ist im gesamten Definitionsbereich beschränkt. Jede Zahl $k \geq 1$ ist Schranke von f, die kleinste Schranke ist Eins, denn es gilt für alle $x \in D$ $|f(x)| \leq 1$.

5.2.3 Symmetrie

f ist gerade, wenn für alle $x \in D$ $f(x) = f(-x)$ gilt,
Graph ist symmetrisch zur y-Achse.

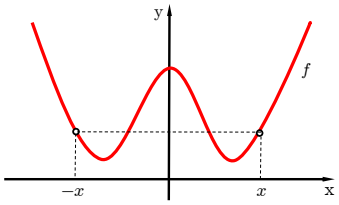


Bild 5.3: *sym. zur y-Achse*

f ist ungerade, wenn für alle $x \in D$ $f(x) = -f(-x)$ gilt,
Graph ist symmetrisch zum Ursprung.

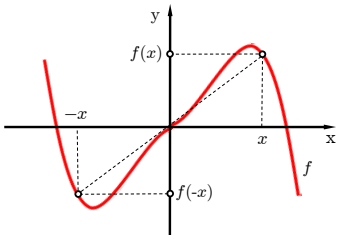


Bild 5.4: *sym. zum Ursprung*

Beispiele

Bestimmung des Definitionsbereiches und
des Symmetrieverhaltens

Gerade Potenz, $n = 2$

a) $f(x) = x^2 \quad D = \mathbb{R}$

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) = f(-x) \quad \Rightarrow \quad f \text{ ist gerade}$$

Ungerade Potenz, $n = 3$

b) $f(x) = x^3 \quad D = \mathbb{R}$

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) = -f(-x) \quad \Rightarrow \quad f \text{ ist ungerade}$$

5.2.4 Periodizität

f ist periodisch mit der Periode T,
wenn für alle $x \in D$ $f(x + T) = f(x)$ gilt.

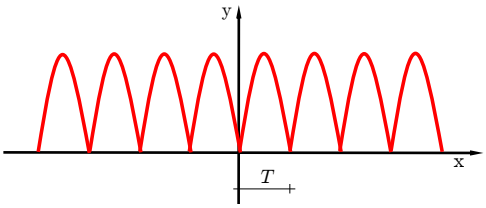


Bild 5.5: *periodische Funktion*

5.2.5 Umkehrung

f ist eineindeutig, wenn für alle $x_1, x_2 \in D$ für $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

d.h. jedem x wird genau ein y zugeordnet und umgekehrt.

Falls f eineindeutig ist, so ist Konstruktion einer neuen Funktion f^{-1} möglich.

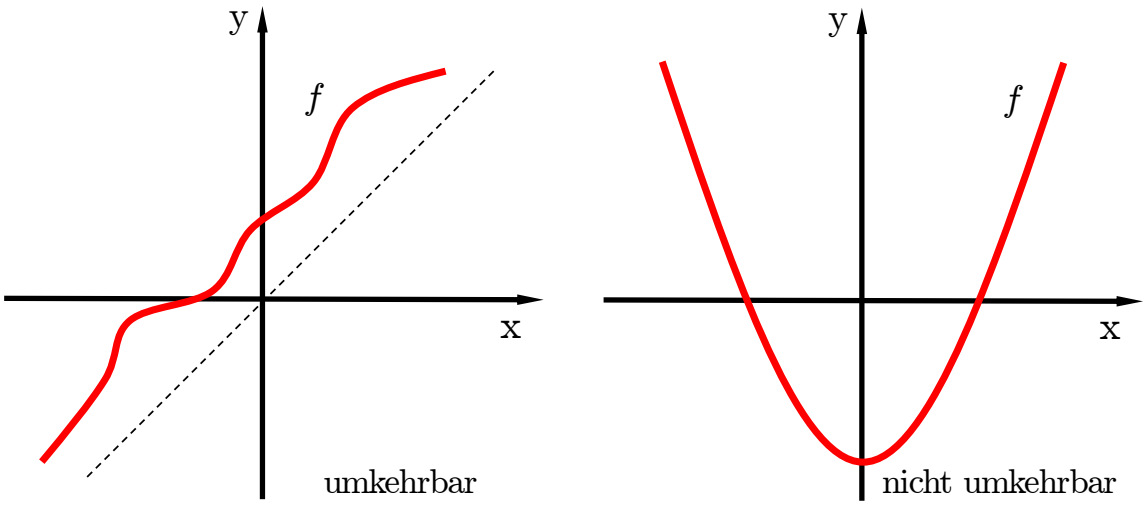


Bild 5.6: *Umkehrbare und nicht umkehrbare Funktion*

Umkehrfunktion f^{-1}:

Vertauschung von D und W

$\Rightarrow$ Graph G_f ist Spiegelbild von $G_{f^{-1}}$ an der Gerade $y = x$ (Winkelhalbierende des 1. und 3. Quadranten).

$\Rightarrow (f^{-1})^{-1} = f.$

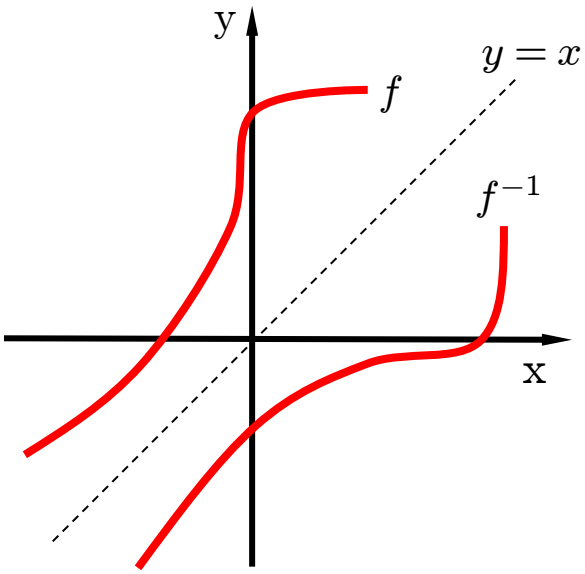


Bild 5.7: *Veranschaulichung der Umkehrung*

Bestimmung des Terms von f^{-1}

a) Auflösung von $y = f(x)$ nach x:

$$x = f^{-1}(y)$$

b) Vertauschen von x und y:

$$y = f^{-1}(x)$$

Beispiel:

$f\colon x \to f(x) = 2x$ (eineind. Fkt.)

a) $y = 2x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}y = f^{-1}(y)$

b) $f^{-1} : x \quad \to \quad \underline{\underline{f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x}}$

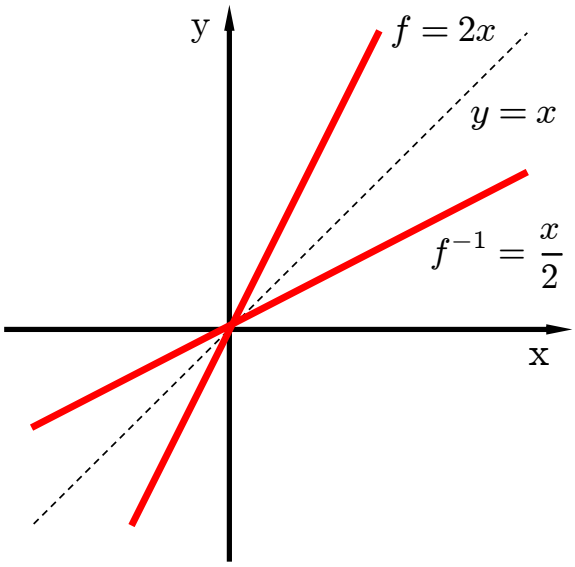


Bild 5.8: *Umkehrfunktion von $y = 2 \cdot x$*

Satz (ohne Beweis): Jede im gesamten Definitionsbereich streng monoton wachsende oder streng monoton fallende Funktion ist umkehrbar.

Ist eine Funktion nicht streng monoton, so ist sie nur in den Intervallen umkehrbar, in den denen eine strenge Monotonie vorliegt.

5.3 Elementare Funktionen

5.3.1 Rationale Funktionen

Ganzrationale Funktionen oder Polynomfunktionen

Definition: Funktionen vom Typ

$$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_1 \cdot x^1 + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i \ , \quad x \in \mathbb{R}$$

werden als *ganzrationale Funktionen* oder *Polynomfunktionen* bezeichnet. Es gilt

a) $a_i \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $a_n \neq 0$ für $n \geq 0$

b) Term heißt Polynom n-ten Grades, höchster Exponent n bestimmt den Grad

c) D = $\mathbb{R}$ und W $\subseteq \mathbb{R}$

1) Spezialfälle

a) Potenzfunktionen, $f: \ x \ \rightarrow \ x^n, \ a_n = 1 \neq 0$, Grad n

b) Quadratische Funktionen, $f: \ x \ \rightarrow \ a_2x^2 + a_1x + a_0, \ a_2 \neq 0$, Grad 2

c) Lineare Funktionen, $f: \ x \ \rightarrow \ a_1x + a_0, \ a_1 \neq 0$, Grad 1

d) Konstante Funktionen, $f: \ x \ \rightarrow \ a_0$, $a_0 \neq 0$ Grad 0

e) Nullfunktion; $f: \ x \ \rightarrow \ 0$, kein Grad (Sonderfall, $a_0 = 0$ für $n = 0$)

2) Eigenschaften

a) Def.-bereich: D=$\mathbb{R}$ ist möglich

b) für n ungerade ist f unbeschränkt, siehe z.B. Bild 5.9

c) für n gerade ist f einseitig beschränkt, Vorzeichen von a_n entscheidet ob nach unten oder oben

d) es gibt höchstens n Nullstellen.

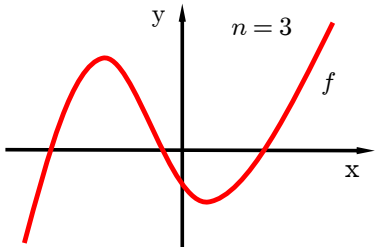


Bild 5.9: *Potenzfkt. 3. Grades*

z.B. $f: \ x \ \rightarrow \ f(x) = x^4 - 4x^2 + 4 = (x^2 - 2)^2$,
siehe Bild 5.10

Menge der Nullstellen: $N = \{-\sqrt{2}, +\sqrt{2}\}$
4 wären möglich, f nach unten beschränkt,
da $a_4 = 1 > 0$.

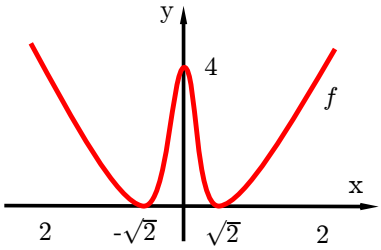


Bild 5.10: *Potenzfkt. 4. Grades*

3) Polynomdivision ganzrationaler Funktionen

z.B.: $(2x^5 \qquad + 3x^3 - x^2 + 4x + 1) : (x^2 - x + 1) = 2x^3 + 2x^2 + 3x \quad \text{Rest} : (x+1)$

$$
\begin{array}{l}
\quad -\underline{(2x^5 - 2x^4 + 2x^3)} \\
\qquad\qquad (2x^4 + x^3 - x^2) \\
\qquad\quad -\underline{(2x^4 - 2x^3 + 2x^2)} \\
\qquad\qquad\qquad (3x^3 - 3x^2 + 4x) \\
\qquad\qquad\quad -\underline{(3x^3 - 3x^2 + 3x)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (x+1)
\end{array}
$$

Probe: $(x^2 - x + 1) \cdot (2x^3 + 2x^2 + 3x) + (x+1) = 2x^5 + 3x^3 - x^2 + 4x + 1$

4) Linearfaktoren ganzrationaler Funktionen

Sei $f(x)$ durch $(x - x_0)$ (dies ist ein Linearfaktor) ohne Rest teilbar, dann gilt:

$f(x) = (x - x_0) \cdot q(x) \quad \Leftrightarrow \quad x_0$ Nullstelle von f

Es gilt auch die Umkehrung: Ist x_0 Nullstelle von f, dann ist der Funktionsterm von f darstellbar durch $f(x)$=$(x - x_0) \cdot q(x)$.

Im Allgemeinen gilt: $f(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n) \quad \text{mit } x_i \in \mathbb{C}$!!
Menge der Nullstellen $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$ höchstens n verschiedene x_i!

Hier nur Betrachtung von Funktionen mit reellen Nullstellen!
Beispiele zu Linearfaktoren:

a) $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x-2)(x+2)(x-1)$
Nullstellen $\{2; -2; 1\}$, alle Nullstellen einfach

$$
\begin{aligned}
\text{Probe:} \quad 2: &\quad 8 - 4 - 8 + 4 = 0 \\
-2: &\quad -8 - 4 + 8 + 4 = 0 \\
1: &\quad 1 - 1 - 4 + 4 = 0
\end{aligned}
$$

b) $f(x) = 3x^4 + 9x^3 - 9x^2 - 33x - 18 = 3(x+1)^2(x-2)(x+3)$
Nullstellen $\{-1; 2; -3\}$, 2 und 3 einfache Nullstellen , -1 zweifache Nullstelle

Die Potenz in der Linearfaktorendarstellung liefert den *Grad der Nullstelle*, bei Beispiel b) hat $(x+1)$ die Potenz 2, daher ist (-1) zweifache Nullstelle.

Ergänzung: Falls $a_i \in \mathbb{Z}$ (a_i ganze Zahlen) so sind die Nullstellen Teiler von a_0. Oben in den Beispielen $\{2; -2; 1\}$ Teiler von 4 und $\{-1; 2; -3\}$ Teiler von 18.

5.3.2 Horner Schema

Das Verfahren von W.G. Horner[1] liefert für

- die Berechnung von Funktionswerten einer ganzrationalen Funktion,
- die Bestimmung von Nullstellen und
- die Bestimmung von reduzierten Polynomen vom Grad $(n-1)$

wertvolle Dienste.

Prinzip für n = 3

Darstellung der Funktion an der Stelle x_0

$$f(x_0) = a_3x_0^3 + a_2x_0^2 + a_1x_0 + a_0 = [(a_3x_0 + a_2)\,x_0 + a_1]\,x_0 + a_0 \tag{5.2}$$

Dabei lässt sich eine neue Funktion erklären, welche um den Grad 1 erniedrigt ist

$$\underbrace{[\underbrace{(\underbrace{a_3}_{b_2}\,x_0 + a_2)}_{b_1}x_0 + a_1)]}_{b_0}\,x_0 + a_0\ . \tag{5.3}$$

Im Horner Schema gibt es drei Zeilen:

- 1. Zeile Koeffizienten der Funktion
- 2. Zeile beginnt mit 0 und ergibt sich durch Multiplikation
- 3. Zeile ergibt sich durch Addition der beiden darüber liegenden Zeilen.

In Bild 5.11 sind die drei Zeilen dargestellt. Der schräge Pfeil bedeutet dabei Multiplikation. Erste und zweite Zeile werden zur dritten Zeile addiert.

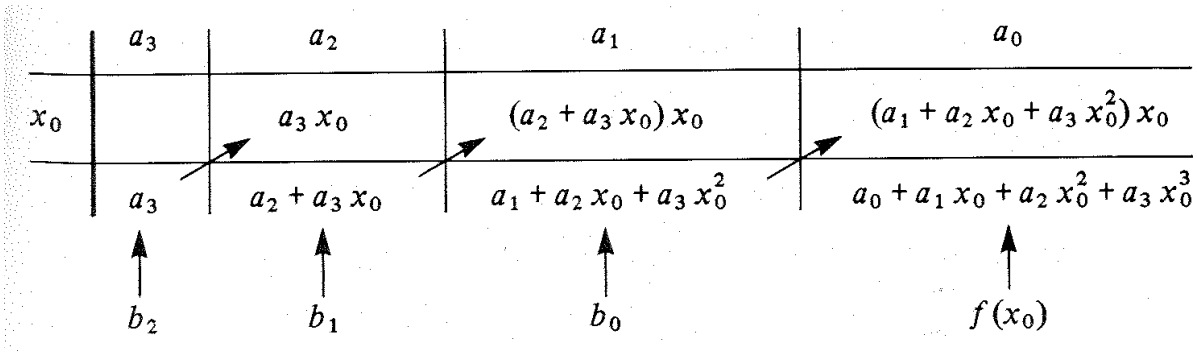


Bild 5.11: *Prinzip Horner Schema, n = 3*

[1] William George Horner, engl. Mathematiker, geb. 1786 Bristol, gest. 22. September 1837 Bath

Beispiel

$$f(x) = -x^3 + 6x - 3 \quad , \; x_0 = 2$$

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 0 & 6 & -3 \\ \boxed{2} & 0 & -2 & -4 & 4 \\ \hline & \boxed{-1} & -2 & \boxed{2} & 1 \end{array} = f(2)$$

Bild 5.12: *Beispiel Horner Schema, n = 3*

Letzte Zeile: Koeffizienten eines neuen Polynoms $f_1(x)$:

$$f_1(x) = -x^2 - 2 \cdot x + 2 \; , \tag{5.4}$$

mit der Eigenschaft (ohne Beweis)

$$(-x^3 + 6x - 3) = \left[(x-2) \cdot (-x^2 - 2 \cdot x + 2) + \underbrace{1}_{\text{Restfkt. R(x)}} \right] . \tag{5.5}$$

Prüfung der Zerlegung durch Polynomdivison

$$\begin{array}{l} (-x^3 \qquad\quad + 6x - 3) : (x-2) = -x^2 - 2x + 2 \quad \text{Rest } 1 \\ \underline{-x^3 + 2x^2} \\ \qquad -2x^2 + 6x \\ \qquad \underline{-2x^2 + 4x} \\ \qquad\qquad 2x - 3 \\ \qquad\qquad \underline{2x - 4} \\ \qquad\qquad\qquad 1 \end{array}$$

Bild 5.13: *Polynomdivison zur Prüfung des Horner Schemas*

Falls die gewählte Stelle x_0 eine Polynomnullstelle ist, verschwindet die Restfunktion $R(x)$, da dann durch einen Linearfaktor geteilt wurde.

Folglich kann das Horner Schema als alternatives Verfahren zur Zerlegung von Polynomfunktionen in Linearfaktoren benutzt werden.

5.3.3 Gebrochenrationale Funktionen

Definition: Funktionen deren Term darstellbar ist durch

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \quad \text{mit} \quad \frac{g(x) = \text{Zählerpolynom}}{h(x) = \text{Nennerpolynom}}$$

heißen gebrochenrationale Funktionen (gebr.-rat. F.). (Falls gilt Grad von $g(x)$ > Grad $h(x)$ echt gebrochen, für Grad von $g(x) \leq$ Grad $h(x)$ unecht gebrochen.)

1) Definitionsbereich

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{x \mid h(x) = 0\}$ (reelle Zahlen ohne Nullstellen des Nennerpolynoms)

Beispiel:

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 - x - 6} \quad \text{mit} \quad x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$$

$\Rightarrow \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 3\}$

2) Nullstellen

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g(x) = 0 \quad \text{und} \quad h(x) \neq 0$$

Für $h(x)$ = 0 ist die Funktion nicht erklärt.

3) Polstellen und Definitionslücken

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}\,, \qquad x_0 \text{ sei } q\text{-fache Nullstelle von } h \text{ und } p\text{-fache Nullstelle von g,}$$

dann ist folgende Darstellung möglich:

$$f(x) = \frac{(x - x_0)^p \cdot \overline{g}(x)}{(x - x_0)^q \cdot \overline{h}(x)}\,.$$

Definition: x_0 ist **Pol**, wenn gilt $0 \leqq p < q$, x_0 ist **Def.-lücke**, wenn gilt $1 \leqq q \leqq p$.

Vorgehen bei Pol:

Kürzen mit $(x - x_0)^p$:

$$f(x) = \frac{\overline{g}(x)}{(x - x_0)^{q-p} \cdot \overline{h}(x)} \qquad \text{Bezeichnung: } (q-p)\text{-facher Pol}\,.$$

Vorgehen bei Def.-Lücke:

Kürzen mit $(x - x_0)^q$:

$$f(x) = \frac{(x - x_0)^{p-q} \cdot \overline{g}(x)}{\overline{h}(x)} \quad \text{für alle } x \neq x_0\,.$$

4) Verhalten gebrochen rationaler Funktionen für große bzw. kleine x-Werte $x \to \pm\infty$

a) Grad g < Grad h:

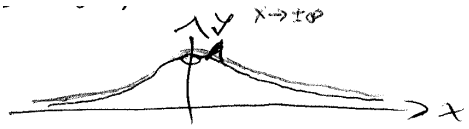


Bild 5.14: *Waagerechte Asymptote $y = 0$*

$\Rightarrow$ y = 0 waagerechte Asymptote mit

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0\ .$$

z.B.: $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, Grad $g = 0$, Grad $h = 2$

b) Grad g = Grad h:

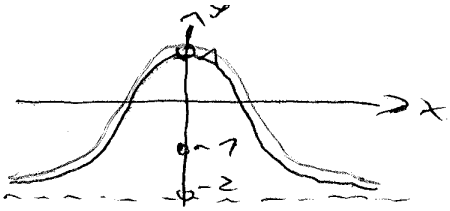


Bild 5.15: *Waager. Asymptote $y = -2$*

$\Rightarrow y = c$ waagerechte Asymptote mit

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = c\ .$$

z.B.: $f(x) = \dfrac{-2x^2+1}{x^2+1} = \dfrac{-2+\frac{1}{x}^2}{1+\frac{1}{x}^2}$, Grad g = Grad $h = 2$

mit $c = \dfrac{-2}{1} \quad \Rightarrow \quad = -2$ waagerechte Asymptote

c) Grad g > Grad h:

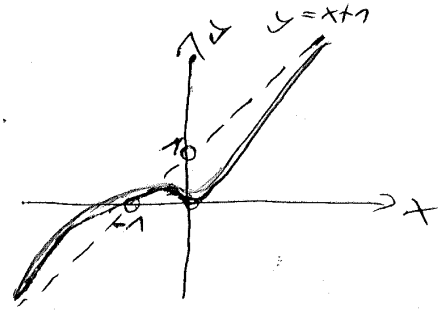


Bild 5.16: *Schräge Asymptote*

z.B.: $f(x) = \dfrac{x^3+x^2}{x^2+1} = (x+1) + \dfrac{-x-1}{x^2+1}$

$$\lim_{x\to\ \pm\infty} f(x) = x+1$$

$y = x+1$ schräge Asymptote (auch Kurve möglich)

Asymptote wird auch als **Schmiegefunktion** bezeichnet!

Bemerkung: Polynomdivision

$(x^3+x^2) : (x^2+1) = (x+1)$
Rest: $(-x-1)$

5.3.4 Kegelschnitte

5.3.4.1 Einführung

Wird ein gerader Kreiskegel mit der Mantelneigung α durch eine Ebene E unter dem Neigungswinkel β, aber nicht durch die Spitze, geschnitten, entstehen *Kegelschnitte*, mit

- $\beta = 0$: Kreis,
- $0 < \beta < \alpha$: Ellipse,
- $\beta = \alpha$: Parabel,
- $\alpha < \beta \leq \pi/2$: Hyperbel.

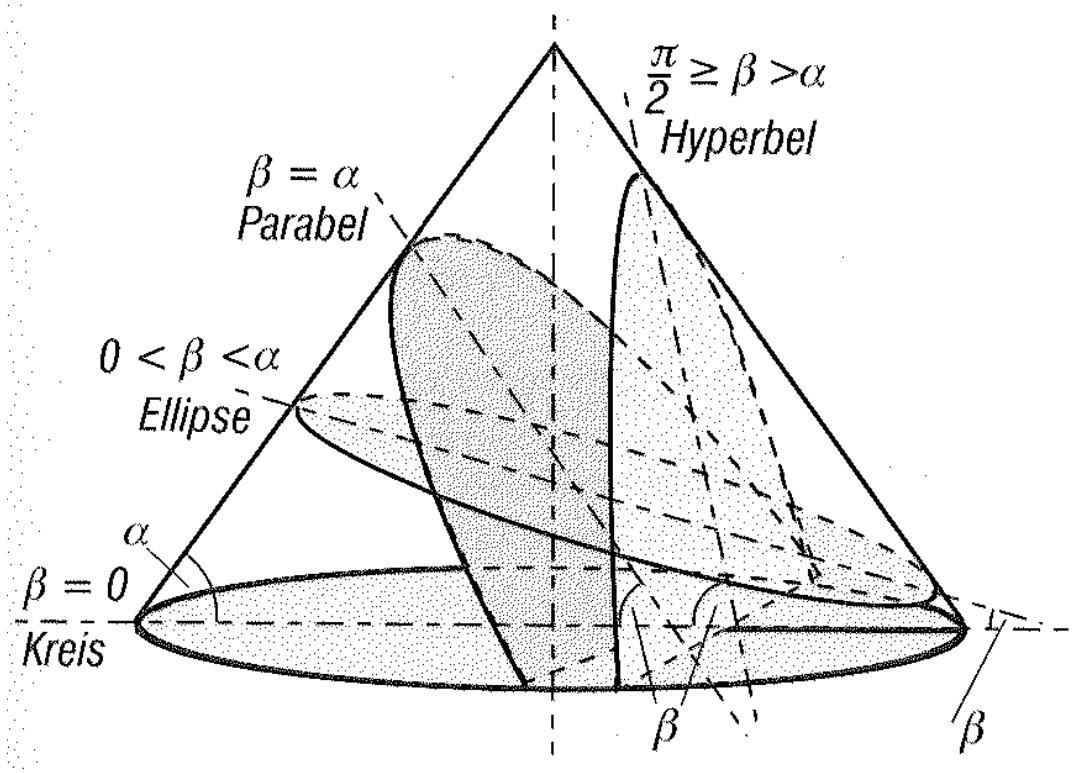


Bild 5.17: *Kegelschnitte*

Die Menge (der geometrische Ort) aller Punkte P, deren Abstände von einem Punkt F (Brennpunkt) und einer Geraden L (Leitlinie), wobei F kein Element von L sein darf, ein festes Verhältnis haben, heißen Kegelschnitte.

Hinweis: Die folgenden Gleichungen der Kegelschnitte stellen im Allgemeinen keinen Funktionsterm dar, da oft keine eindeutigen Abbildungen vorliegen.

5.3.4.2 Kreis

Mittelpunktsgleichung

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{(Einheitskreis: } r = 1\text{)} \ , \tag{5.6}$$

allgemeine Kreisgleichung (Hauptform)

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2 \ , \tag{5.7}$$

wobei die Koordinaten x_m und y_m den Mittelpunkt des Kreises im K-System angegeben.

5.3.4.3 Parabel

Scheitelgleichung

$$y^2 = 2 \cdot p \cdot x \ , \quad S = (0, 0) \quad \text{mit } S \text{ Scheitelpunkt} \ , \tag{5.8}$$

Rechts geöffnete Parabel

$$y = \pm\sqrt{2 \cdot p \cdot x} \quad \text{mit} \quad x \geq 0 \quad \text{und} \quad p > 0 \ , \tag{5.9}$$

Links geöffnete Parabel

$$y = \pm\sqrt{2 \cdot p \cdot x} \quad \text{mit} \quad x \leq 0 \quad \text{und} \quad p < 0 \ . \tag{5.10}$$

Hauptform der Parabelgleichung

$$(y - y_0)^2 = 2 \cdot p \cdot (x - x_0)^2 \ , \quad S = (x_0; y_0) \ , \tag{5.11}$$

Rechts geöffnete Parabel

$$y = y_0 \pm \sqrt{2 \cdot p \cdot (x - x_0)} \quad \text{mit} \quad x \geq x_0 \quad \text{und} \quad p > 0 \ , \tag{5.12}$$

Links geöffnete Parabel

$$y = y_0 \pm \sqrt{2 \cdot p \cdot (x - x_0)} \quad \text{mit} \quad x \leq x_0 \quad \text{und} \quad p < 0 \ . \tag{5.13}$$

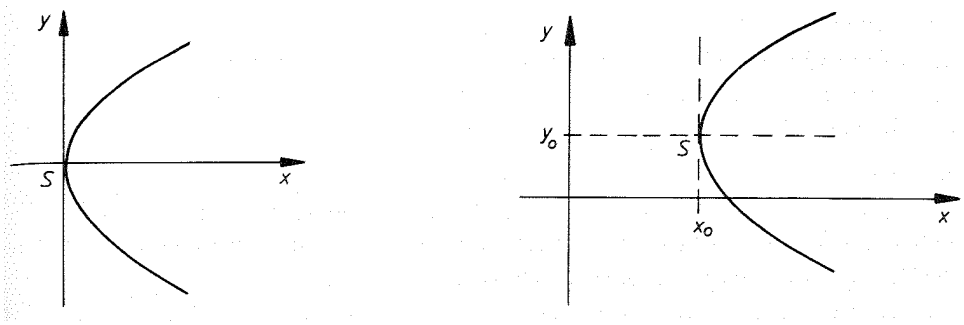
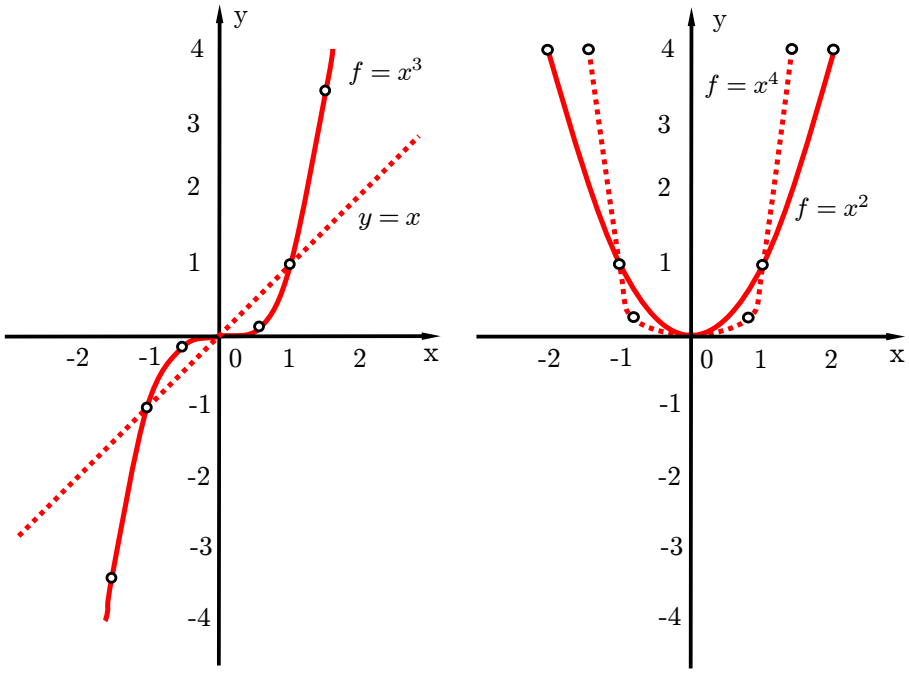


Bild 5.18: *Parabel beschrieben mit Scheitelgleichung (links) und mit Hauptform (rechts)*

5.3.5 Potenz- und Wurzelfunktionen

5.3.5.1 Potenzfunktionen



Für die Potenzfunktionen gilt

$$f(x) = x^n \ , \quad n \in \mathbb{N} \ , \quad D = \mathbb{R}, \quad \text{Nullstelle: } x_0 = 0 \ ,$$

Zwei Fälle für den Wertebereich:

a) n ungerade: $W = \mathbb{R}$

b) n gerade: $W = \mathbb{R}^+$

Graphen: Parabeln n-ter Ordnung

Die Umkehrung führt auf die Wurzelfunktionen, siehe nächsten Abschnitt.

5.3.5.2 Wurzelfunktionen

Beispiel $n = 2$

$f:\ x \to f(x) = x^2, \quad D = R, \quad W = \mathbb{R}_0^+$

auf $\mathbb{R}$ nicht eineindeutig, daher

Zerlegung von D: $D_1 = [0; +\infty[= \mathbb{R}_0^+$

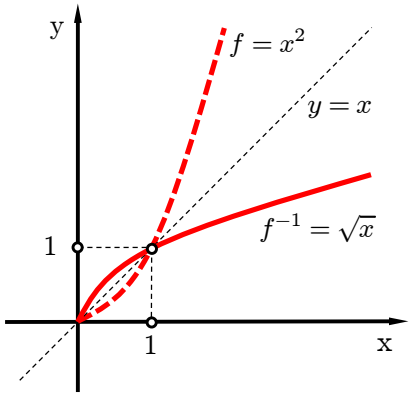
f dort echt monoton steigend

Bildung Umkehrfunktion in 2 Schritten

a) $y = x^2, \quad x \geq 0 \Rightarrow |x| = \sqrt{y} \quad x \geq 0$

b) $y = \sqrt{x}$

$f^{-1}:\ x \to \sqrt{x}, \quad D = \mathbb{R}_0^+, \quad W = \mathbb{R}_0^+$



$D_2 =]-\infty; 0] = \mathbb{R}_0^-$

f dort echt monoton fallend

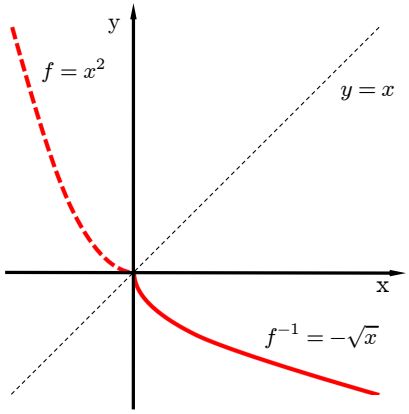
Bildung Umkehrfunktion in 2 Schritten

a) $y = x^2, \quad x \leq 0 \Rightarrow |x| = \sqrt{y} \quad x \leq 0$

$\Rightarrow -x = \sqrt{y} \Rightarrow x = -\sqrt{y}$

b) $y = -\sqrt{x}$

$f^{-1}:\ x \to -\sqrt{x}, \quad D = \mathbb{R}_0^+, \quad W = \mathbb{R}_0^-$



Allgemein n gerade:

$f:\ x \to \sqrt[n]{x}, \quad D = \mathbb{R}_0^+, \quad W = \mathbb{R}_0^+$

n **ungerade,** f **stets umkehrbar, Bsp.** $n = 3$

$f:\ x \to f(x) = x^3, \quad D = R, \quad W = \mathbb{R}$

f echt monoton steigend

Bildung Umkehrfkt. für 2 Intervalle

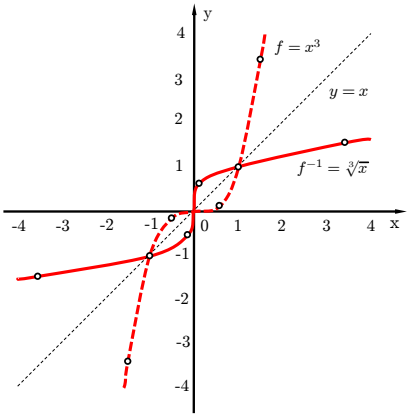
$x \in \mathbb{R}_0^+$ a) $y = x^3 \ \Rightarrow\ x = \sqrt[3]{y}$

b) $y = \sqrt[3]{x}$

$x \in \mathbb{R}_0^-$ a) $y = x^3 \ \Rightarrow\ *) \Rightarrow \cdot(-1)$

$-y = (-x)^3 \Rightarrow -x = \sqrt[3]{-y}$

b) $-y = \sqrt[3]{-x} \ \Rightarrow\ y = -\sqrt[3]{-x}$



Es ergibt sich für $n = 3$ und allgemein für ungerade n

$$n = 3: \quad f^{-1}:\ x \to \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & x \in \mathbb{R}_0^+; \\ -\sqrt[3]{-x}, & x \in \mathbb{R}_0^-, \end{cases} \qquad n: \quad f^{-1}:\ x \to \begin{cases} \sqrt[n]{x}, & x \in \mathbb{R}_0^+; \\ -\sqrt[n]{-x}, & x \in \mathbb{R}_0^-. \end{cases}$$

*) Hier ist Wurzelziehen nicht möglich, da es sich um eine negative Zahl in der Wurzel handelt.

5.3.6 Potenzen und Logarithmen (Wiederholung)

5.3.6.1 Potenzgesetze

Es gilt mit $a, b \in \mathbb{R},\ m, n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
a^m \cdot a^n &= a^{m+n} \\
\tfrac{a^m}{a^n} &= a^{m-n} \quad \text{mit } a \neq 0 \\
(a^m)^n &= a^{m \cdot n} \\
a^n \cdot b^n &= (a \cdot b)^n \\
\tfrac{a^n}{b^n} &= \left(\tfrac{a}{b}\right)^n \quad \text{mit } b \neq 0 \\
\sqrt[m]{a^n} &= a^{\frac{n}{m}} \quad \text{mit } a \geq 0,\ m > 0
\end{aligned}$$

$$a^0 := 1 \ (a \neq 0) \qquad a^1 = a \qquad 1^n = 1 \qquad 0^n = 0 \ (n \neq 0)\,.$$

0^0 ist nicht definiert.

5.3.6.2 Logarithmen und Logarithmengesetze

Die eindeutige Lösung x der Gleichung

$$a^x = b \quad \text{mit } a > 0 \text{ und } a \neq 1 \tag{5.14}$$

heißt Logarithmus von b zur Basis a und wird als $x = \log_a(b)$ geschrieben.

Logarithmengesetze

$$\log_a b = c \quad \Leftrightarrow \quad a^c = b \quad \text{mit } a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ a, b \in \mathbb{R}$$

Lies: Logarithmus von b zur Basis a ist c.

$$\begin{aligned}
\log_a 1 = x \quad &\Leftrightarrow \quad a^x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \\
\log_a a = x \quad &\Leftrightarrow \quad a^x = a \quad \Rightarrow \quad x = 1
\end{aligned}$$

Gesetze:

$$\begin{aligned}
\log_a (u \cdot v) &= \log_a u + \log_a v \\
\log_a \left(\tfrac{u}{v}\right) &= \log_a u - \log_a v \\
\log_a u^w &= w \log_a u \\
\log_a \sqrt[w]{u} &= \tfrac{1}{w} \log_a u
\end{aligned}$$

Kettenregel zur Umrechnung von Basen

$$(\log_a b) \cdot (\log_b u) = \log_a u \quad \Leftrightarrow \quad \log_b u = \frac{\log_a u}{\log_a b} \tag{5.15}$$

5.3.6.3 Logarithmensysteme

Zweierlogarithmus (Binärer Logarithmus)

$$\text{Basis } 2: \quad a = 2 \quad \text{lb}(b) = \log_2(b) \quad \text{lb}(b) \quad \Leftrightarrow \quad 2^x = b \tag{5.16}$$

Dekadischer Logarithmus

$$\text{Basis } 10: \quad a = 10 \quad \text{lg}(b) = \log_{10}(b) \quad \text{lg}(b) \quad \Leftrightarrow \quad 10^x = b \tag{5.17}$$

Natürlicher Logarithmus

$$\text{Basis } e: \quad a = e \quad \ln(b) = \log_e(b) \quad \ln(b) \quad \Leftrightarrow \quad e^x = b \tag{5.18}$$

Die Zahl e heißt *Euler'sche Zahl*.Sie ergibt sich als Grenzwert der Zahlenfolge

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2,718281828459... \tag{5.19}$$

Die Abkürzung „ln“ steht dabei für „logarithmus naturalis“ (natürlicher Logarithmus).

5.3.6.4 Basiswechsel - Umrechnung in andere Logarithmensysteme

Als Beispiel soll die Umrechnung eines Logarithmus zur Basis b in den natürlichen Logarithmus dargestellt werden. Nach den Potenzgesetzen gilt mit $e^{\ln(a)} = a$

$$a^x = \left(e^{\ln(a)}\right)^x = e^{[\ln(a)]\cdot x} \ . \tag{5.20}$$

Als zugrundeliegender Zusammenhang soll

$$y = a^x = e^{\ln(a)\cdot x} \quad \text{mit} \quad x = \log_a(y) \tag{5.21}$$

gelten. Logarithmieren der Gleichung mit dem natürlichen Logarithmus führt auf

$$\ln(y) = \ln\left(e^{\ln(a)\cdot x}\right) \ . \tag{5.22}$$

Anwendung der Logarithmusgesetze ergibt

$$\ln(y) = x \cdot \ln(a) \ , \tag{5.23}$$

Umstellen nach x liefert

$$x = \frac{\ln(y)}{\ln(a)} \ . \tag{5.24}$$

Mit

$$x = \log_a(y) \quad \text{folgt} \quad \log_a(y) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot \ln(y) \ . \tag{5.25}$$

Wird im allgemeinen Fall in (5.20) in ein beliebiges Basissystem umgerechnet, so ergibt sich als Vorschrift für die Umrechnung die Kettenregel (5.15).

5.3.7 Exponential- und Logarithmusfunktionen

5.3.7.1 Exponentialfunktion

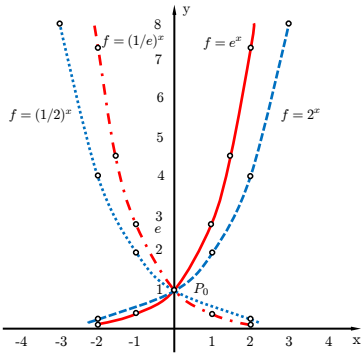
$f: \; x \to f(x) = a^x, \; a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$D = R, \quad W = \mathbb{R}^+$

Es gibt keine Nullstellen, denn

$a^x > 0$ für alle $a, x \in \mathbb{R}$.

Für alle a ist $(0;1) \in f$ wegen $a^0 = 1$.



Umkehrung aller Exponentialfunktionen möglich, da diese echt monoton sind (eineindeutig).

Alle Kurven gehen durch $P_0(0;1)$ und haben die x-Achse als Asymptote.

Wichtigster Spezialfall $a = e = 2,71828...$, $\quad f: \; x \to f(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$.

5.3.7.2 Logarithmusfunktion

Beispiel

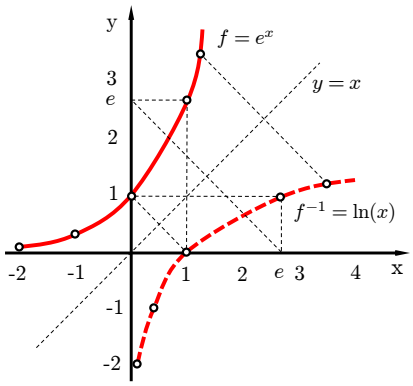
$f: \; x \to f(x) = e^x, \quad D = R, \quad W = \mathbb{R}^+$

Bildung der Umkehrfunktion in 2 Schritten

a) $y = e^x \Rightarrow x = \log_e(y) = \ln(y)$

b) $y = \ln(x)$ (Lies: Logarithmus naturalis oder ln)

$f^{-1}: \; x \to \ln(x), \quad D = \mathbb{R}^+, \quad W = \mathbb{R}$

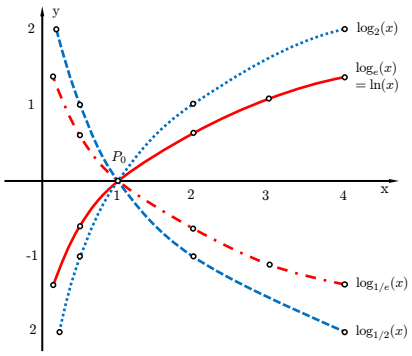


Allgemeiner Fall

$f: \; x \to a^x, \quad D = R, \quad W = \mathbb{R}^+$

$f^{-1}: \; x \to \log_a(x), \quad D = \mathbb{R}^+, \quad W = R$

Nullstelle: $x_0 = 1$



Für alle a gilt $(1;0) \in f^{-1}$, wegen $\log_a(1) = 0$, d.h. es gilt $a^0 = 1$ für alle a.

Alle Logarithmuskurven gehen durch $P_0(1;0)$ und haben die y-Achse als Asymptote.

Wichtigster Spezialfall $a = e = 2,71828...$,

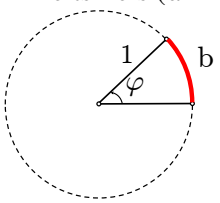
$f: \; x \to f(x) = \ln(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$ **(natürlicher Logarithmus)** .

5.3.8 Trigonometrische Funktionen

Winkelmaße

Grad	Gon	Bogenmaß
360°	400 gon	2π
270°	300 gon	$3\pi/2$
180°	200 gon	π
90°	100 gon	$\pi/2$
45°	50 gon	$\pi/4$
30°	33,3 gon	$\pi/6$

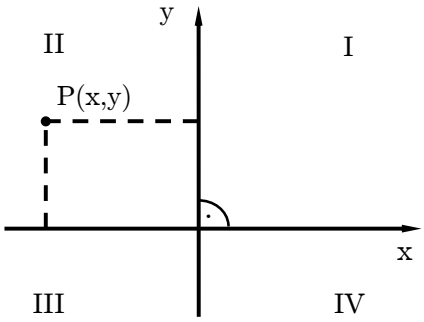
φ Bogenmaß: Maßzahl des Kreisbogens b am Einheitskreis ($u = 2\pi$)



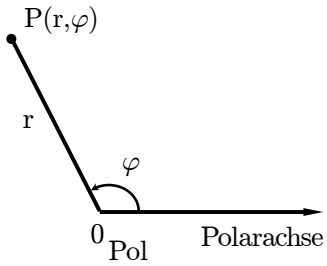
Mathematik: Bogenmaß
Anwendungen: Grad oder Gon

Festlegung eines Punktes in der Ebene - zwei Möglichkeiten:

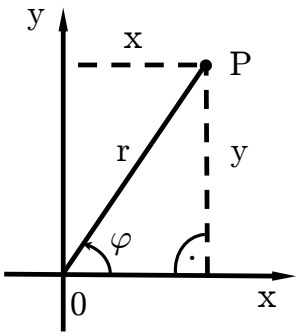
Rechtwinklige Koordinaten



Polarkoordinaten



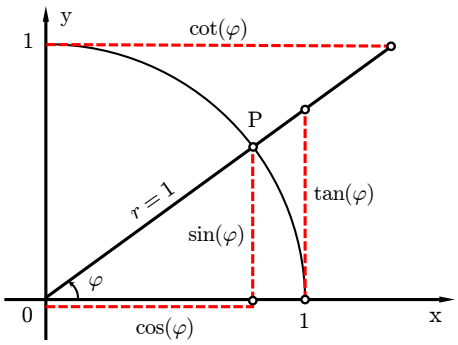
Zusammenhang beider Systeme durch trigonometrische Funktionen



$$\sin(\varphi) = \frac{y}{r} \qquad \cos(\varphi) = \frac{x}{r}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{y}{x} \qquad \cot(\varphi) = \frac{x}{y}$$

Veranschaulichung am Einheitskreis



Funktionswerte von φ
entsprechen Maßzahlen der Strecken

P hat die Koordinaten $\cos(\varphi)$ und $\sin(\varphi)$

Statt φ wird nun x verwendet.

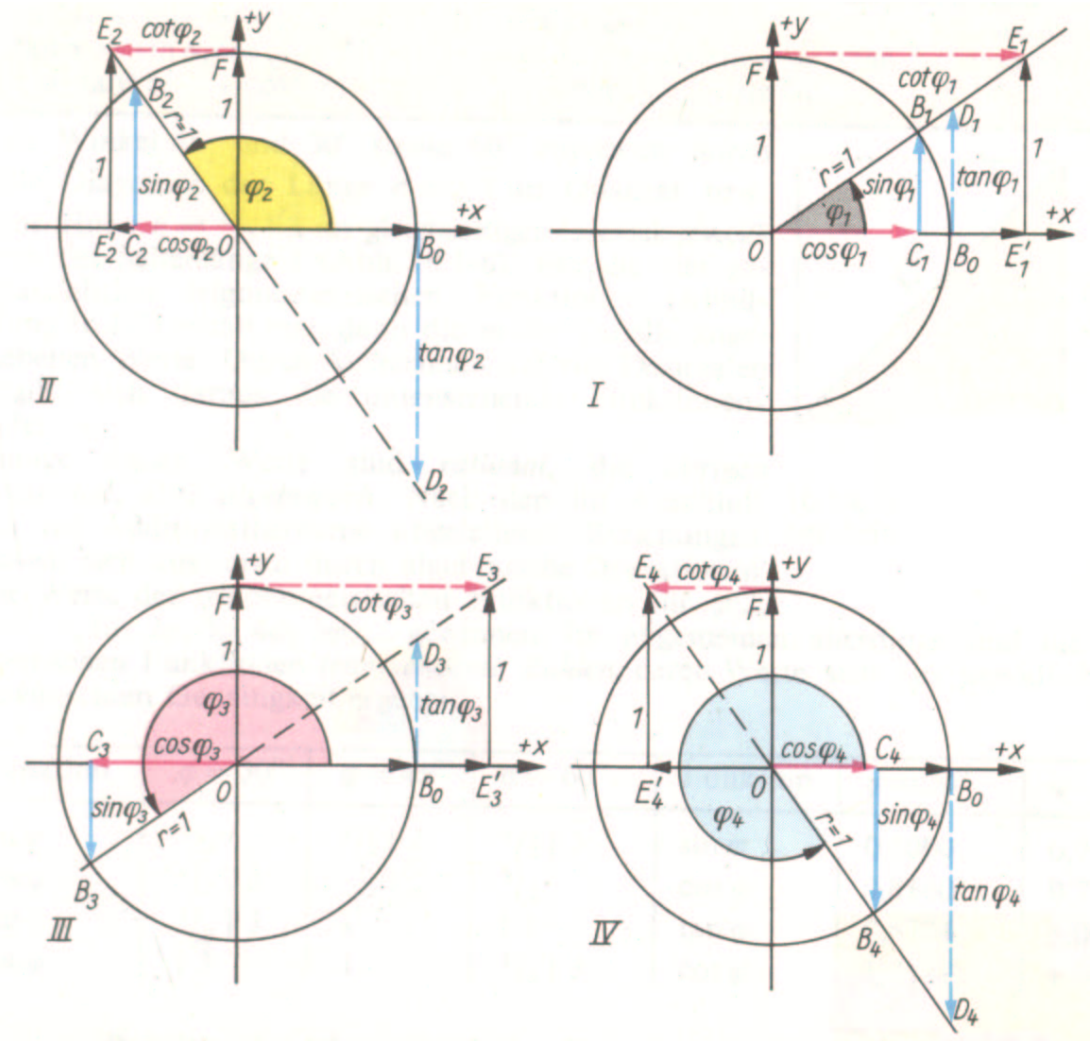


Bild 5.19: *Bestimmung der trigonometrischen Funktionen für Winkel der Größe φ in den 4 Quadranten*

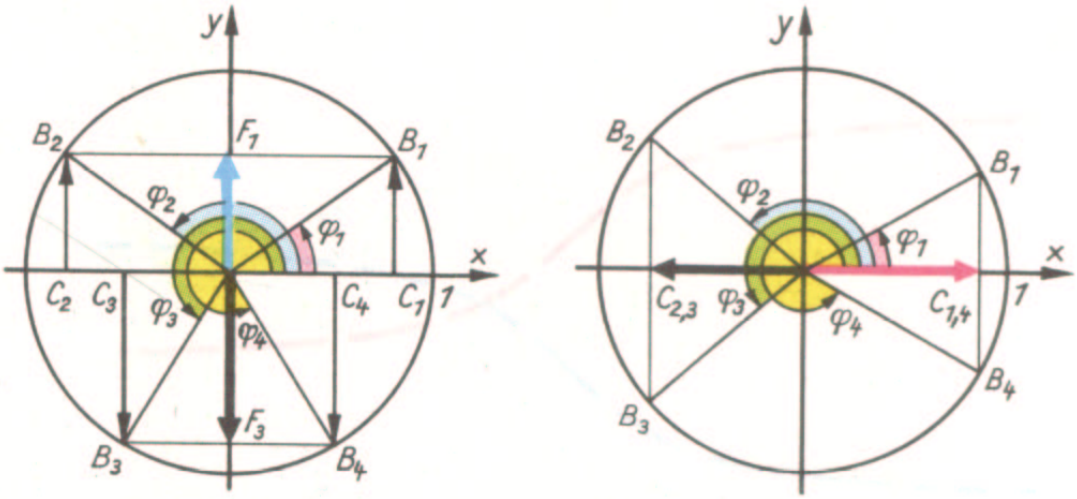
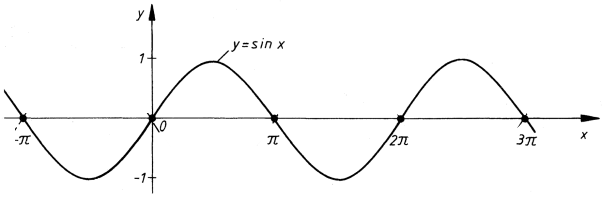


Bild 5.20: *Konstruktion der Winkel für zwei gegebene Sinuswerte (links) und Kosinuswerte (rechts)*

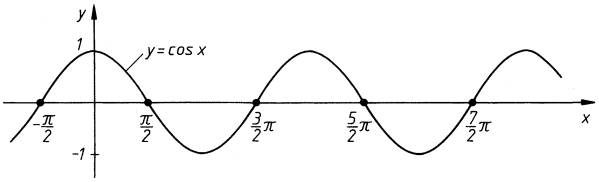
5.3.8.1 Sinusfunktion

$f: \; x \to \sin(x)$ (ungerade)
$D = \mathbb{R}\,, \quad W = [-1; +1]$
$N_{\sin} = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
Periode: 2π, Schranke 1



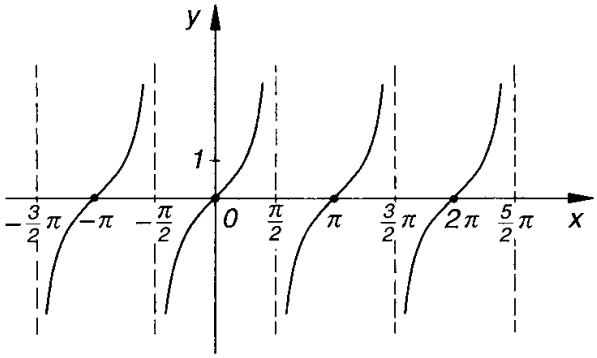
5.3.8.2 Kosinusfunktion

$f: \; x \to \cos(x)$ (gerade)
$D = \mathbb{R}\,, \quad W = [-1; +1]$
$N_{\cos} = \{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
Periode: 2π, Schranke 1



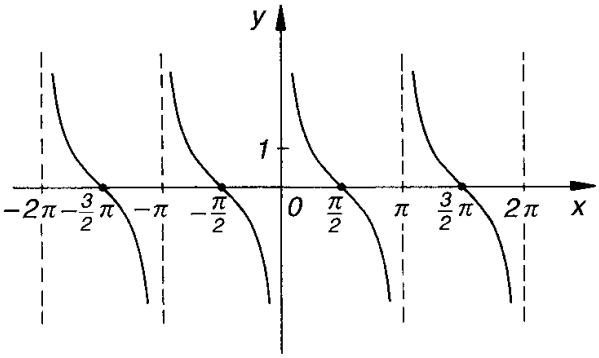
5.3.8.3 Tangensfunktion

$f: \; x \to \tan(x)$ (ungerade)
$D = \mathbb{R} \; \{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$,
$W = \mathbb{R}$
$N_{\tan} = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} = N_{\sin}$
Periode: π, unbeschränkt
Asymptoten: $x = \pi/2 + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$



5.3.8.4 Kotangensfunktion

$f: \; x \to \cot(x)$ (ungerade)
$D = \mathbb{R} \; \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$,
$W = \mathbb{R}$
$N_{\cot} = \{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} = N_{\cos}$
Periode: π, unbeschränkt
Asymptoten: $x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$



5.3.8.5 Wertetafel besonderer Funktionswerte

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin(x)$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$
$\cos(x)$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$
$\cot(x)$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

Mit Hilfe der Tabelle in Abschnitt 5.3.8.7 können aus dem Funktionswert einer Funktion die Funktionswerte der restlichen drei Funktionen bestimmt werden. Siehe Abschnitt 5.3.8.7.

5.3.8.6 Beziehungen zwischen den Funktionen

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \tag{5.26}$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{1}{\cot(x)} \tag{5.27}$$

$$\begin{aligned} & \sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta) \\ \Rightarrow \quad & \sin(2\cdot\alpha) = 2\cdot\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha) \end{aligned} \tag{5.28}$$

$$\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \;,\quad \cos(x) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \;,\quad \tan(x) = -\cot\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \;. \tag{5.29}$$

5.3.8.7 Zusammenhang der Funktionswerte

	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$	$\cot(x)$
$\sin(x)$	$-$	$\pm\sqrt{1-\cos^2(x)}$	$\pm\frac{\tan(x)}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2(x)}}$
$\cos(x)$	$\pm\sqrt{1-\sin^2(x)}$	$-$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}$	$\pm\frac{\cot(x)}{\sqrt{1+\cot^2(x)}}$
$\tan(x)$	$\pm\frac{\sin(x)}{\sqrt{1-\sin^2(x)}}$	$\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2(x)}}{\cos(x)}$	$-$	$\frac{1}{\cot(x)}$
$\cot(x)$	$\pm\frac{\sqrt{1-\sin^2(x)}}{\sin(x)}$	$\pm\frac{\cos(x)}{\sqrt{1-\cos^2(x)}}$	$\frac{1}{\tan(x)}$	$-$

Das Vorzeichen muss anhand des vorliegenden Quadranten festgelegt werden.

5.3.9 Arkusfunktionen

Die trigonometrischen Funktionen lassen sich in den Intervallen, in denen sie streng monoton sind, umkehren. Angegeben sind die *Hauptwerte* der Wertebereiche.

5.3.9.1 Arkusinusfunktion

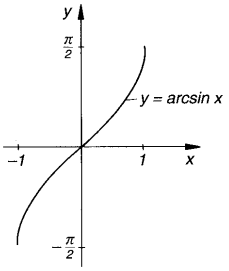
$f: \; x \to \sin(x)$

$D = \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right] \;, \quad W = [-1; +1]$

echt monoton steigend, damit umkehrbar

$f^{-1}: \; x \to \arcsin(x)$

$D = [-1; +1] \;, \quad W = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



5.3.9.2 Arkuskosinusfunktion

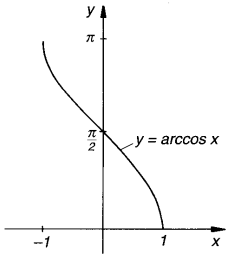
$f: \; x \to \cos(x)$

$D = [0; \pi] \;, \quad W = [-1; +1]$

echt monoton fallend, damit umkehrbar

$f^{-1}: \; x \to \arccos(x)$

$D = [-1; +1] \;, \quad W = [0; \pi]$



5.3.9.3 Arkustangensfunktion

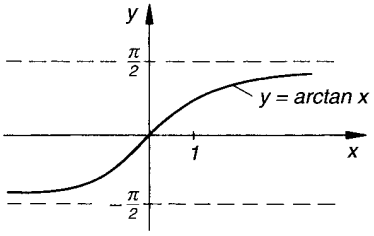
$f: \; x \to \tan(x)$

$D = \left]-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right[\;, \quad W = \mathbb{R}$

echt monoton steigend, damit umkehrbar

$f^{-1}: \; x \to \arctan(x)$

$D = \mathbb{R} \;, \quad W = \left]-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right[$



5.3.9.4 Arkuskotangensfunktion

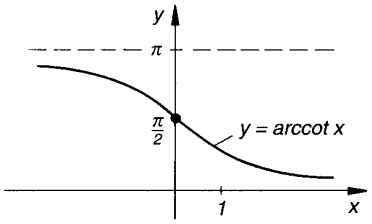
$f: \; x \to \cot(x)$

$D =]0; \pi[\;, \quad W = \mathbb{R}$

echt monoton fallend, damit umkehrbar

$f^{-1}: \; x \to \operatorname{arccot}(x)$

$D = \mathbb{R} \;, \quad W =]0; \pi[$



5.3.9.5 Wertetafel besonderer Funktionswerte

Angegeben sind wichtige Funktionswerte im Intervall $[-1; 1]$.

x	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\arcsin(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\approx -0,62$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\approx 0,62$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\arccos(x)$	π	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\approx 2,19$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\approx 0,96$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{6}\pi$	0
$\arctan(x)$	$-\frac{\pi}{4}$	$\approx -0,71$	$\approx -0,62$	$-\frac{\pi}{6}$	$\approx -0,46$	0	$\approx 0,46$	$\frac{\pi}{6}$	$\approx 0,62$	$\approx 0,71$	$\frac{\pi}{4}$
$\operatorname{arccot}(x)$	$\frac{3}{4}\pi$	$\approx 2,28$	$\approx 2,19$	$\frac{2}{3}\pi$	$\approx 2,03$	$\frac{\pi}{2}$	$\approx 1,12$	$\frac{\pi}{3}$	$\approx 0,96$	$\approx 0,86$	$\frac{\pi}{4}$

Die meisten Taschenrechner haben keine Möglichkeit, die Arcuskotangensfunktion zu berechnen. Hier muss auf die Zusammenhänge der Funktionswerte in Abschnitt 5.3.9.6, S. 5-26, zurückgegriffen werden. Dabei ist auf den betroffenen Quadranten zu achten, da die Arkussinus- und die Arkustangensfunktion nur Werte aus dem 1. und 4. Quadranten liefern und die Arkuskosinus- und die Arkuskotangensfunktion nur Werte aus dem 1. und 2. Quadranten.

5.3.9.6 Zusammenhang der Funktionswerte

Für das Intervall $x \in [0; 1]$ gilt die unten angegebene Tabelle.

	$\arcsin(x)$	$\arccos(x)$	$\arctan(x)$	$\text{arccot}(x)$
$\arcsin(x)$	$-$	$\arccos\sqrt{1-x^2}$	$\arctan\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\text{arccot}\sqrt{\dfrac{1-x^2}{x}}$
$\arccos(x)$	$\arcsin\sqrt{1-x^2}$	$-$	$\arctan\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\text{arccot}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$-$	$\text{arccot}\dfrac{1}{x}$
$\text{arccot}(x)$	$\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\arccos\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\arctan\dfrac{1}{x}$	$-$

Zu beachten ist auch hier, dass unterschiedliche Arkusfunktionen Winkel aus unterschiedlichen Quadranten liefern. Hier sollte im Zweifelsfall immer eine Skizze zur Veranschaulichung der Fragestellung verwendet werden. Analoges gilt für die Anwendung für x-Werte außerhalb des oben angegebenen Intervalls von $[0; 1]$.

5.3.9.7 Umkehrung

Da die Nacheinanderausführung von Funktion und Umkehrfunktion die identische Funktion $f(x) = x$ ergibt, folgt in den entsprechenden Definitionsbereichen

$$\sin(\arcsin(x)) = x \qquad \text{und} \qquad \arcsin(\sin(x)) = x\ , \tag{5.30}$$

$$\cos(\arccos(x)) = x \qquad \text{und} \qquad \arccos(\cos(x)) = x\ , \tag{5.31}$$

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1-x^2}\ , \tag{5.32}$$

$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))} = \sqrt{1-x^2}\ . \tag{5.33}$$

Entsprechende Zusammenhänge ergeben sich auch für die Arctangens- und die Arkuskotangensfunktionen.

Aus $\sin(y) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$ ergibt sich mit $y = \arcsin(x)$

$$x = \arcsin(\sin(y)) = \sin(\arcsin(x)) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)\right)\ .$$

Anwendung des $\arccos$ auf beiden Seiten liefert: $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$

und somit folgt

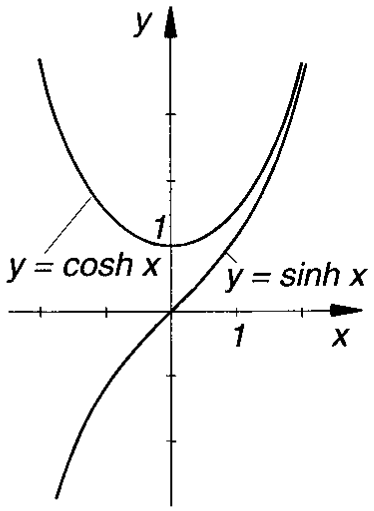
$$\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}\ . \tag{5.34}$$

5.3.10 Hyperbelfunktionen

Häufig werden Linearkombinationen der Exponentialfunktion e^x benötigt. Daher werden in Anlehnung an die trigonometrischen Funktionen folgende Funktionen eingeführt:

Sinushyperbolikusfunktion

$$f:\ x \to \sinh(x)$$
$$\text{mit } \sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$D = W = \mathbb{R}\ .$$

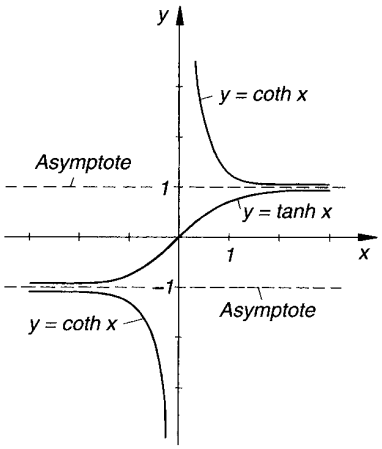


Kosinushyperbolikusfunktion

$$f:\ x \to \cosh(x)$$
$$\text{mit } \cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$D = \mathbb{R}\ , \qquad W = [1; +\infty[\ .$$

Tangenshyperbolikusfunktion

$$f:\ x \to \tanh(x)$$
$$\text{mit } \tanh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$
$$D = \mathbb{R}\ , \qquad W =]-1; +1[\ .$$



Kotangenshyperbolikusfunktion

$$f:\ x \to \coth(x)$$
$$\text{mit } \coth(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$
$$D = \mathbb{R}\backslash\{0\}\ ,$$
$$W =]-\infty; -1[\text{ und }]+1; +\infty[\ .$$

Der Graph der Kosinushyperbolikusfunktion wird auch Kettenlinie genannt, da sie sich in Kombination mit dem Parameter $a \in \mathbb{R}^+$ als Lösung der Differentialgleichung für das Gleichgewicht eines *biegsamen schweren Fadens* (z.B. Freileitung) ergibt:

$$y = \frac{a}{2} \cdot \left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right) = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right)\ , \qquad a > 0\ . \tag{5.35}$$

Es gilt neben zahlreichen weiteren Additionstheoremen:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \qquad \text{(Hyperbolischer Phytagoras)}, \tag{5.36}$$

$$\sinh(x) + \cosh(x) = e^x \qquad \text{und} \qquad \sinh(x) - \cosh(x) = -e^{-x}\ . \tag{5.37}$$

Für die Tangenshyberbolikus- und die Kotangenshyperbolikusfunktion gilt, wie bei den trigonometrischen Funktionen, in den entsprechenden Definitionsbereichen

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \ , \qquad \coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{1}{\tanh(x)} \ . \tag{5.38}$$

Die **Formel von Moivre** lautet

$$(\cosh(x) \pm \sinh(x))^n = \cosh(nx) \pm \sinh(nx) = e^{\pm x} \ , \qquad n \in \mathbb{N} \ . \tag{5.39}$$

Zusammenhang der Funktionswerte

Für die Umrechnung zwischen den Hyperbelfunktionen gilt folgende Tabelle.

	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$\tanh(x)$	$\coth(x)$
$\sinh(x)$	$-$	$\pm\sqrt{\cosh^2(x)-1}$	$\dfrac{\tanh(x)}{\sqrt{1-\tanh^2(x)}}$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{\coth^2(x)-1}}$
$\cosh(x)$	$\sqrt{\sinh^2(x)+1}$	$-$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-\tanh^2(x)}}$	$\pm\dfrac{\coth(x)}{\sqrt{\coth^2(x)-1}}$
$\tanh(x)$	$\dfrac{\sinh(x)}{\sqrt{\sinh^2(x)+1}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{\cosh^2(x)-1}}{\cosh(x)}$	$-$	$\dfrac{1}{\coth(x)}$
$\coth(x)$	$\dfrac{\sqrt{\sinh^2(x)+1}}{\sinh(x)}$	$\pm\dfrac{\cosh(x)}{\sqrt{\cosh^2(x)-1}}$	$\dfrac{1}{\tanh(x)}$	$-$

Das obere Vorzeichen gilt für $x \geq 0$, das untere für $x < 0$.

5.3.11 Areafunktionen

Die Umkehrung der Hyperbelfunktionen liefert die Areafunktionen.

Areasinushyperbolikus

$f:\ x \to \sinh(x)\ ,$ auf $D = \mathbb{R}$ echt monoton wachsend, d.h. eineindeutige Funktion

$\Rightarrow$ Umkehrfunktion existiert mit $x = \text{arsinh}(y)$

$f^{-1}:\ x \to \text{arsinh}(x)$

Explizite Darstellung (Berechnung des Funktionsterms):

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \quad \text{Berechnung von } y\text{, dazu sei } e^y = u > 0$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{2} \cdot \left(u - u^{-1}\right) \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot x = u - \frac{1}{u}$$

$$u^2 - 2xu - 1 = 0 \quad u_1 = x + \sqrt{x^2+1} \quad u_2 = x - \sqrt{x^2+1} \ \text{ entfällt, da } u > 0$$

$$u_1 = x + \sqrt{x^2+1} \quad \Rightarrow \quad e^y = x + \sqrt{x^2+1} \quad \Rightarrow \quad y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

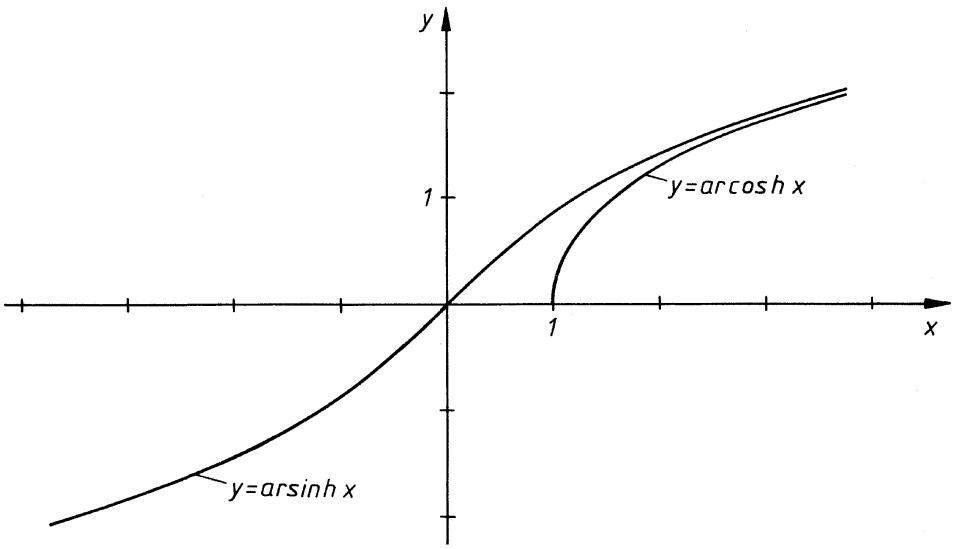
$$\Rightarrow \quad \underline{\text{arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)} \tag{5.40}$$

Areakosinushyperbolikus

Analog erhält man

$\text{arcosh}(x):\quad \ln(x + \sqrt{x^2-1})$ und $\ln(x - \sqrt{x^2-1})\ ,\quad x \geq 1\ .$

(ergibt zwei Zweige, siehe Vorlesung)



$$\text{artanh}(x): \quad \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad \text{für } |x| < 1 \tag{5.41}$$

$$\text{arcoth}(x): \quad \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \quad \text{für } |x| > 1 \tag{5.42}$$

(ergibt zwei Zweige, siehe Graph 5.21)

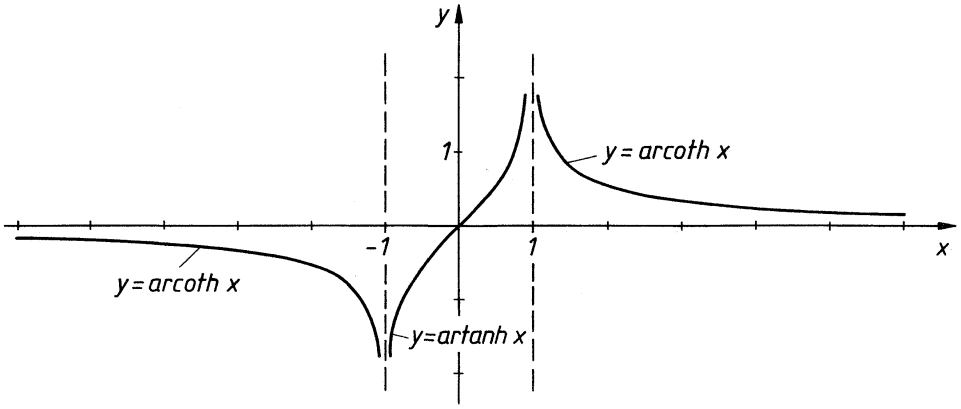


Bild 5.21: *Graphen der Areatangens- Areakotangeshyperbolikusfunktionen*

Zusammenhang der Funktionswerte

Für die Umrechnung zwischen den Areafunktionen gilt folgende Tabelle.

	$\text{arsinh}(x)$	$\text{arcosh}(x)$	$\text{artanh}(x)$	$\text{arcoth}(x)$
$\text{arsinh}(x)$	$-$	$\pm\text{arcosh}\sqrt{x^2+1}$	$\text{artanh}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$	$\text{arcoth}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$
$\text{arcosh}(x)$	$\text{arsinh}\sqrt{x^2-1}$	$-$	$\text{artanh}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	$\text{arcoth}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$
$\text{artanh}(x)$	$\text{arsinh}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\pm\text{arcosh}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-$	$\text{arcoth}\frac{1}{x}$
$\text{arcoth}(x)$	$\text{arsinh}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\pm\text{arcosh}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$	$\text{artanh}\frac{1}{x}$	$-$

Das obere Vorzeichen gilt für $x > 0$, das untere für $x < 0$.

5.4 Operationen für Funktionen

5.4.1 Grundlegende Operationen

Für die Funktionen

$$f:\ x \to f(x)\ ,\quad x \in D_f \qquad g:\ x \to g(x)\ ,\quad x \in D_g$$

stehe $*$ für eine der Operationen, Addition, Subtraktion, Multiplikation oder Division. Dann wird $f * g$ festgelegt durch den Term

$$f(x) * g(x)\ .$$

Beispiel

$$f(x) = \log_2(x)\ ,\quad D_f = \mathbb{R}^+ \qquad g(x) = \sqrt[3]{x}\ ,\quad x \in D_f = \mathbb{R}_0^+$$

Die oben genannten Operationen ergeben folgende Funktionen

$$\begin{aligned}
f+g &: x \to (f+g)(x) = \log_2(x) + \sqrt[3]{x} \\
f-g &: x \to (f-g)(x) = \log_2(x) - \sqrt[3]{x} \\
f\cdot g &: x \to (f\cdot g)(x) = \log_2(x) \cdot \sqrt[3]{x} \\
\frac{f}{g} &: x \to \frac{f}{g}(x) = \frac{\log_2(x)}{\sqrt[3]{x}}\ .
\end{aligned}$$

5.4.2 Verkettung

Eine weitere Operation ist die Verkettung (Hintereinanderausführung):

$$[f \circ g]\,(x) := f\,[g(x)]\ . \tag{5.43}$$

Für die oben genannten Funktionen ergibt sich beispielsweise

$$\begin{aligned}
[f \circ g]\,(x) &= \log_2\left(\sqrt[3]{x}\right) = \frac{1}{3}\cdot\log_2(x) \\
[g \circ f]\,(x) &= \sqrt[3]{\log_2(x)}\ .
\end{aligned}$$

5.4.3 Definitionsbereiche

Für die aus den Operationen hervorgehenden Funktionen ergeben sich folgende Definitionsbereiche:

$$f+g,\ f-g,\ f\cdot g: \quad D_f \cap D_g \tag{5.44a}$$

$$\frac{f}{g}: \quad D_{f/g} = (D_f \cap D_g)\ \setminus N_g \quad (N_g = \text{Nullstellen von } g)$$

$$f \circ g: \quad D_{f\circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \tag{5.44b}$$

5.5 Funktionen in Parameterdarstellung

Die Variablen x und y hängen zusätzlich von einem weiteren Parameter, z.B. t oder φ, ab. Physikalisch bedeutet dies, dass zusätzlich eine Zeitabhängigkeit oder eine Abhängigkeit von einem Drehwinkel φ vorliegt. Es gilt dann, z.B. bei Abhängigkeit von t,

$$\left.\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}\right\} \quad t_1 \leq t \leq t_2 \ . \tag{5.45}$$

Ein Punkt in der Ebene wird dabei mit $P\left(x(t); y(t)\right)$ beschrieben.

5.5.1 Kreis

Der Graph eines Kreises kann in Parameterform mit Hilfe des Polarwinkels t (meistens φ) dargestellt werden. Die Koordinaten des Punktes $P(x, y)$ lauten dabei

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = R \cdot \cos(t) \\ y(t) = R \cdot \sin(t) \end{array}\right\} \quad x^2 + y^2 = R^2 \cdot (\cos^2(t) + \sin^2(t)) = R^2 \ , \quad 0 \leq t < 2\pi \ . \tag{5.46}$$

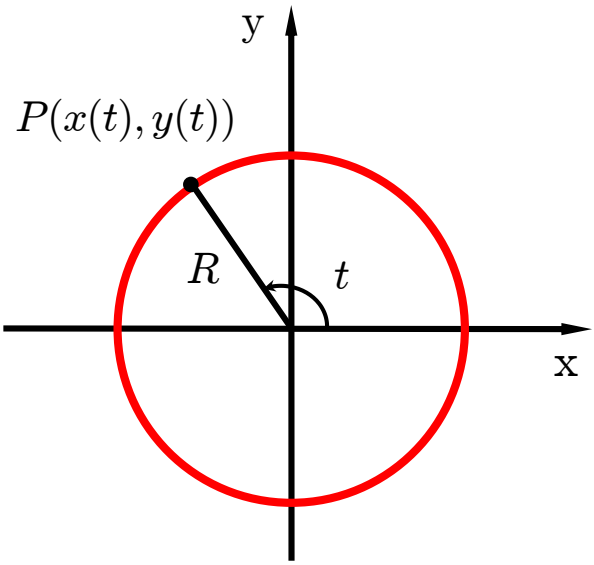
Es ergibt sich die implizite Gleichung des Kreises

$$x^2 + y^2 = R^2 \ . \tag{5.47}$$

Zu beachten ist dabei, dass es sich bei dieser Gleichung nicht um eine Funktionsgleichung handelt, und deshalb keine eindeutige Abbildung vorliegt, da es zu einem x-Wert zwei Zuordnungen gibt. Der Graph eines Kreises kann aber durch zwei Funktionen beschrieben werden:

$$\begin{array}{ll} f_1 : \ x \to \quad \sqrt{R^2 - x^2} & \text{Graph: oberer Halbkreis} \\ f_2 : \ x \to -\sqrt{R^2 - x^2} & \text{Graph: unterer Halbkreis.} \end{array}$$

Der Parameter t ist hier mit dem Polarwinkel φ identisch.



5.5.2 Ellipse

Eine Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte, für die die Summe der Abstände von 2 festen Punkten konstant ist. Ihre Gleichung kann ebenfalls in Parameterform angegeben werden. Zu beachten ist dabei, dass es sich bei dem verwendeten Parameter t nicht um den Polarwinkel des Punktes P auf der Ellipse, sondern um den Polarwinkel der zugeordneten Punkte des Haupt- (Außen-) und Nebenkreises (Innenkreises) der großen und kleinen Halbachsen a und b handelt, siehe Bild 5.22. Für die Koordinaten eines Punktes $P(x(t); y(t))$ gilt

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = a \cdot \cos(t) \\ y(t) = b \cdot \sin(t) \end{array}\right\} \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1 \ , \quad 0 \le t < 2\pi \ . \tag{5.48}$$

Es ergibt sich die implizite Gleichung der Ellipse

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \ . \tag{5.49}$$

Der Graph der Ellipse lässt sich auch hier mit zwei Funktionen beschreiben, wobei $x \in [-a, a]$,

$$f_1 : \ x \to \quad \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \qquad \text{Graph: für den I. und II. Quadranten}$$

$$f_2 : \ x \to -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \qquad \text{Graph: für den III. und IV. Quadranten.}$$

Der Parameter t wird auch als *exzentrische Anomalaie* bezeichnet, a und b als große bzw. kleine Halbachse. Es gilt

$$\tan(\varphi) = \frac{b}{a} \cdot \tan(t) \ . \tag{5.50}$$

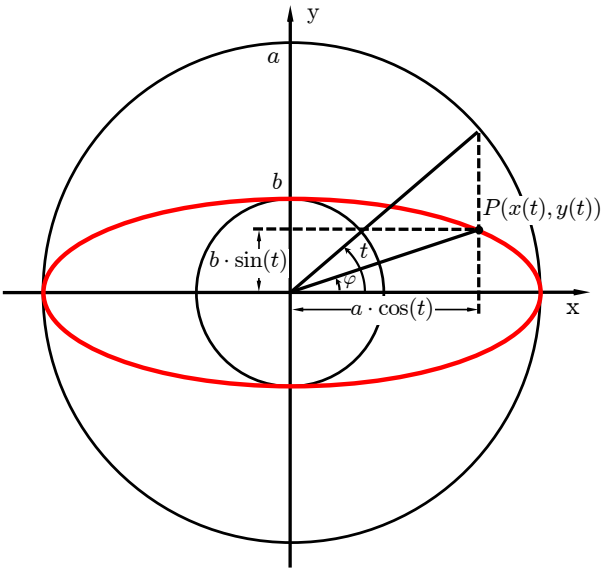


Bild 5.22: *Zusammenhang von Parameter t und Polarwinkel φ bei einer Ellipse*

5.5.3 Zykloide

Abrollen eines Kreises vom Radius R auf einer Gerade (x-Achse):

Ausgezeichneter Punkt P des Kreises beschreibt eine Kurve mit dem Rollwinkel t (ohne Beweis)

$$x(t) = R \cdot (t - \sin(t)) \ , \qquad y(t) = R \cdot (1 - \cos(t)) \ , \qquad t \in \mathbb{R} \ . \tag{5.51}$$

Es existiert keine explizite Form $y = f(x)$, aber eine explizite Form $x = g(y)$:

$$x = R \cdot \arccos\left(1 - \frac{y}{R}\right) - \sqrt{y \cdot (2R - y)} \quad \text{(ohne Beweis)} \ . \tag{5.52}$$

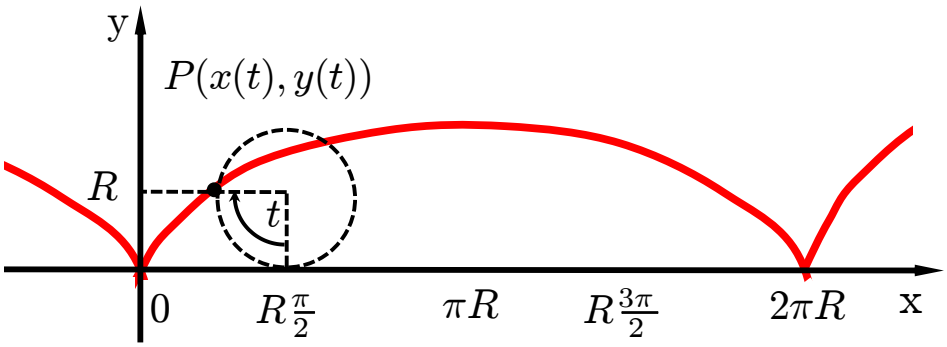
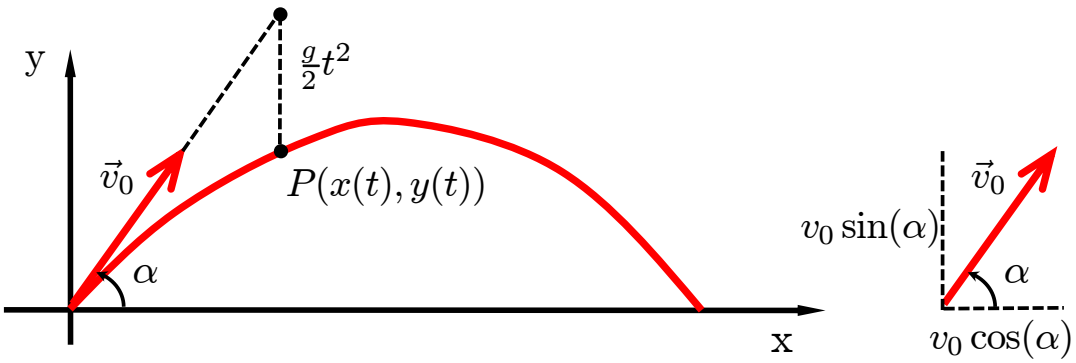


Bild 5.23: *Zykloide mit Rollwinkel t*

5.5.4 Schiefer Wurf

Oft ist die Bahn eines mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_0$ abgeworfenen Körpers von Interesse. Dabei variiert die Flugbahn in Abhängigkeit der Abwurfgeschwindigkeit und des Abwurfwinkels α. Die Wurfbahn lässt sich als Funktion in Parameterform in Abhängigkeit vom Parameter Zeit t darstellen.



Die gleichmäßige Bewegung in Richtung der positiven x-Achse ergibt

$$x(t) = (v_0 \cdot \cos(\alpha)) \cdot t \ . \tag{5.53}$$

Aus dem Weg-Zeit-Gesetz der gleichmäßig beschleunigten Bewegung folgt für die Bewegung in y-Richtung (Beschleunigung mit $\vec{g}$ in negativer y-Richtung)

$$y(t) = (v_0 \cdot \sin(\alpha)) \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \ , \tag{5.54}$$

Umstellen von (5.53) nach der Zeit

$$t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos(\alpha} \tag{5.55}$$

und Einsetzen in (5.54) ergibt

$$y(x) = v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot \frac{x}{v_0 \cdot \cos(\alpha)} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{x}{v_0 \cdot \cos(\alpha)} \right)^2 \ . \tag{5.56}$$

Damit ergibt sich die Gleichung der Wurfparabel

$$y = -\frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2(\alpha)} \cdot x^2 + \tan(\alpha) \cdot x \qquad \textbf{(Gleichung der Wurfparabel)} \ . \tag{5.57}$$

Wurfweite

Die Wurfweite entspricht einer Nullstelle von (5.57). Ausklammern von x ergibt

$$y = x \cdot \left(-\frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2(\alpha)} \cdot x + \tan(\alpha) \right) \qquad . \tag{5.58}$$

Ist der erste Faktor Null, liegt die Nullstelle im Koordinatenursprung. Ist der Term in der Klammer Null, ergibt sich die Wurfweite x_W zu

$$x_W = \frac{g \cdot \tan(\alpha)}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2(\alpha)} = \underline{\frac{2 \cdot v_0^2}{g} \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)} \qquad \textbf{Wurfweite} \ . \tag{5.59}$$

Wurfhöhe

Die Wurfparabel ist eine symmetrische Kurve, deren Symmetrieachse parallel zur y-Achse verläuft. Die Ordinate des Scheitelpunktes H ist die Wurfhöhe y_H. Seine Abszisse x_H ist die halbe Wurfweite, also $x_W/2$.

$$\begin{aligned} y_H &= -\frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2(\alpha)} \cdot \left(\frac{v_0^2}{g} \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \right)^2 + \tan(\alpha) \cdot \left(\frac{v_0^2}{g} \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \right) \\ &= -\frac{v_0^2}{2g} \cdot \sin^2(\alpha) + \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin^2(\alpha) \\ &= \underline{\frac{v_0^2}{2g} \cdot \sin^2(\alpha)} \qquad \textbf{(Wurfhöhe)} \ . \end{aligned} \tag{5.60}$$

Weitere Fragestellungen, wie die größte Wurfweite, bzw. der günstigste Abwurfwinkel und Aussagen über bestimmte Geschwindigkeiten sind erst mit Hilfe der Differentialrechnung möglich.

5.6 Aufgaben zu Kapitel 5

5.6.1 Eigenschaften von Funktionen

Aufgabe 5.1 Symmetrieverhalten

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich und das Symmetrieverhalten folgender Funktionen

a) $y = 4x^2 - 16$ **b)** $y = |x^2 - 4|$ **c)** $y = \dfrac{x^3}{x^2+1}$ **d)** $y = \sqrt{x^2 - 25}$.

5.6.2 Linearfaktoren

Aufgabe 5.2 Bestimmung der Funktionsgleichung

Eine Polynomfunktion dritten Grades besitzt für $x_1 = -5$ eine doppelte und für $x_2 = 8$ eine einfache Nullstelle. Die Funktion schneidet die y-Achse bei 100. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion.

5.6.3 Umkehrfunktion

Aufgabe 5.3

Man bestimme die Umkehrfunktion der Normalparabel $y = x^2$ für $x \geqq 0$ und zeichne die Funktion und ihre Umkehrfunktion.

Aufgabe 5.4

Man bestimme die Umkehrfunktion der Normalparabel $y = x^2$ für $x < 0$ und zeichne die Funktion und ihre Umkehrfunktion.

Aufgabe 5.5

Bestimmen Sie die Umkehrfunktionen von

a) $y = \dfrac{1}{x}$ **b)** $y = \dfrac{1}{x^2}$.

und zeichnen Sie jeweils die Funktion und ihre Umkehrfunktion!

Aufgabe 5.6

Bestimmen Sie jeweils die Umkehrfunktion

a) $y = \dfrac{x}{x-2} \quad (x \neq 2)$, **b)** $y = \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} - \dfrac{1}{2} \quad (x > 0)$

und stellen Sie die vier Funktionen in einem geeigneten Grafikprogramm dar.

5.6.4 Polynomdivison

Aufgabe 5.7 Polynomdivision

Berechnen Sie durch Polynomdivision

$$\left(x^7 + 2x^6 + 2x^5 + 6x^4 - 3x^3 - 5x + 1\right) \ : \ \left(x^3 + 2x - 1\right) \ .$$

5.6.5 Horner Schema

Aufgabe 5.8 Horner Schema

Stellen Sie folgende Funktionen in Linearfaktoren dar. Nutzen Sie das Horner Schema indem Sie von den jeweiligen Polynomen Nullstellen durch Probieren ermitteln

a) $y = -2x^5 - 8x^4 - 8x^3 + 4x^2 + 10x + 4$ **b)** $y = 2x^4 - 18x^2 + 8x + 24$.

Hinweis: Für beide Funktionen gilt $a_i \in \mathbb{Z}$.

5.6.6 Pol und Lücke

Aufgabe 5.9

Bestimmen Sie das Verhalten für sehr große und sehr kleine x-Werte für folgende Funktionen. Bestimmen Sie außerdem den Definitionsbereich, Pole, Definitionslücken und Nullstellen

a) $y = \dfrac{x^2 + x - 1}{x + 1}$ **b)** $y = \dfrac{2x^2 + 6x + 4}{3x^2 + 3x - 6}$.

Aufgabe 5.10

Bestimmen Sie das Verhalten für sehr große und sehr kleine x-Werte für folgende Funktion

$$y = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x - 6}{2x^2 - 12x + 18} \ .$$

Bestimmen Sie außerdem den Definitionsbereich, Pole, Definitionslücken und Nullstellen und skizzieren Sie den Funktionsverlauf.

Aufgabe 5.11

Prüfen Sie, ob für die folgende Funktion Pole und Definitionslücken vorliegen

$$f(x) = \frac{3x^4 - 12x^3 - 9x^2 + 42x - 24}{x^3 + x^2 - x - 1} \ .$$

Dabei ist z.B. 1 eine doppelte Nullstelle des Zählerpolynoms und (-1) z.B. eine doppelte Nullstelle des Nennerpolynoms.

Zusatz: Skizzieren Sie die Funktion im Intervall [-10;10]. Nutzen Sie ggf. ein Tabellenkalkulationsprogramm.

Ein mögliche Vorgehensweise ist:

1) Teilen Sie das Zählerpolynom zweimal durch $(x-1)$,

2) Lösen Sie die quadratische Gleichung des verbleibenden Polynoms,

3) Stellen Sie das Zählerpolynom in Linearfaktoren dar,

4) Teilen Sie das Nennerpolynom zweimal durch $(x+1)$,

5) Stellen Sie das Nennerpolynom in Linearfaktoren dar,

6) Prüfen Sie für die Funktion die Bedingung einer Definitionslücke und eines Pols.

7) **Zusatz:** Kennzeichnen Sie sich in einem Koordinatensystem die Nullstellen der Funktion und ggf. berechneter Pole oder Lücken und versuchen Sie durch Berechnung weniger Wertepaare, ggf. unter Nutzung der Darstellung von Zähler- und Nennerfunktion in Linearfaktoren, den Verlauf der Funktion zu skizzieren!

5.6.7 Trigonometrische Funktionen

Aufgabe 5.12 Polarkoordinaten

a) Bestimmen Sie die Polarkoordinaten des Punktes (3;4) im rechtwinkligen Koordinatensstem.

b) Bestimmen Sie die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes r = 3 und φ = 120°.

Aufgabe 5.13 Additionstheorem

Zeigen Sie, dass gilt

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \ .$$

Aufgabe 5.14 Trigonometrische Gleichungen

Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender trigonometrischer Gleichungen! Geben Sie Ihre Ergebnisse in rad und Grad an. Überprüfen Sie Ihre Lösungen durch Skizzen der Funktionsgraphen ggf. mit Hilfe eines Plottgprogrammes:

a) $8 \cdot \sin(3x) = -4$, **b)** $\sin(x) + 0,5 \cdot \tan(x) = 0$.

[Lsg.: a) $x_{01} = 7\pi/18 + k \cdot 2\pi/3$; $x_{02} = 11\pi/18 + k \cdot 2\pi/3$; b) $x_{01} = k \cdot \pi$; $x_{01} = k \cdot 2\pi/3 + k \cdot 2\pi$; $x_{03} = k \cdot 4\pi/3 + k \cdot 2\pi$]

5.6.8 Hyperbelfunktionen

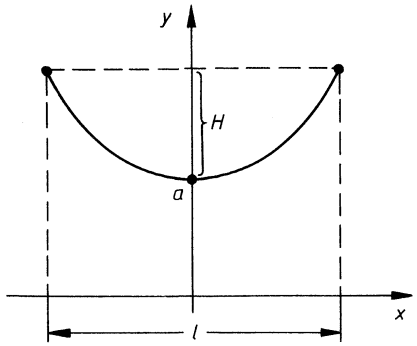
Aufgabe 5.15

Zeigen Sie, dass gilt

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \ .$$

Aufgabe 5.16

Ein durchhängendes Seil mit der Funktionsgleichung $y(x) = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ (Kettenlinie) soll einen Durchhang von $H = 75,9$ m haben. Wie groß ist der Abstand l der Aufhängepunkte zu wählen, wenn $a = 20$ m beträgt?
[Lsg.: l = 90 m.]



5.6.9 Areafunktionen

Aufgabe 5.17

Bestimmen Sie die explizite Darstellung von

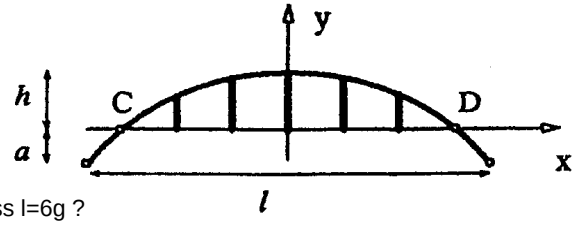
$$y = \text{arcosh}(x) \quad (\text{Umkehrfunktion von } \cosh(x))$$

indem Sie den Defintionsbereich D der Funktion sinnvoll aufteilen und anschließend 2 Funktionen betrachten. Skizzieren Sie alle drei Funktionen!

5.6.10 Normalparabel

Aufgabe 5.18 Parabolischer Brückenträger

6) Das Bild zeigt den parabolischen Träger einer Brücke. Die x-Achse ist gleich der Fahrbahn. Die Spannweite ist l und die Gesamthöhe g=h+a.



a) Man stelle die Gleichung der Parabel im angegebenen Koordinatensystem auf !

b) Wie lautet diese Gleichung für den Spezialfall, dass l=6g ? *(Man eliminiere g !)*

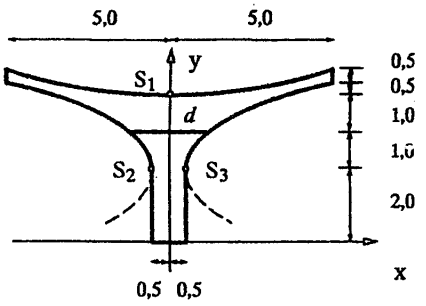
c) Wie lautet diese Gleichung für den (noch spezielleren) Fall, dass a=h ? (Man eliminiere a und h, einziger Parameter bleibt also l .)

d) Wie lang ist die Fahrbahn zwischen C und D ? *(Bruchteil von l !)*

e) Für l=36m, h=6m und a=3m sind zu berechnen : die Länge der Fahrbahn CD und die Längen der Vertikalstäbe auf den x-Koordinaten ±5 und ±10 !

Aufgabe 5.19 Parabolische Dachkonstruktion

7) Die Randlinien der dargestellten Dachstütze seien quadratische Parabeln.
a) Wie lauten die Funktionsgleichungen zu den 3 Parabeln ?
b) Wie groß ist d ?

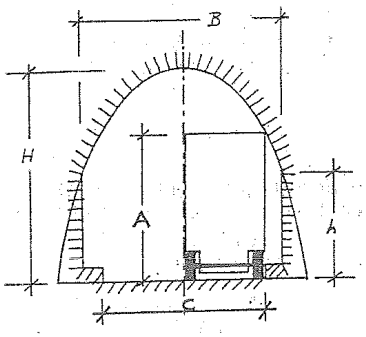


Aufgabe 5.20 Tunnelgewölbe

Ein Tunnelgewölbe hat oben einen para= belförmigen Querschnitt und ist symme= trisch aufgebaut (lichte Höhe H in der Mitte). Bis zur Höhe h ist links und rechts eine senkrechte Wand vorhanden. Die Fahrbahn hat die Breite c.

Wie hoch dürfen Lastwagen der Breite c/2, die den Tunnel auf der zweispuri= gen Fahrbahn durchfahren, maximal sein?

H,B,h und c sind bekannt, A ist gesucht.



Ein mögliche Vorgehensweise ist:

1) Führen Sie ein Koordinatensystem ein,

2) Wählen Sie den Koordinatenursprung sinnvoller Weise so, dass möglichst wenig Parameter der Parabel berechnet werden müssen,

3) Berechnen Sie aus den gegebenen Parametern die Parabelgleichung und bestimmen Sie A.

5.6.11 Exponential- und logarithmische Gleichungen

Aufgabe 5.21 Exponentialgleichungen

Lösen Sie die folgenden Exponentialgleichungen indem Sie bei **b)** ggf. die Substitution $u = e^x$ vornehmen:

a) $\exp(x^2 - 2x) = 2$, **b)** $\exp(x) + 2 \cdot \exp(-x) = 3$.

[Lsg.: a) $x_1 \approx 2,3$; $x_1 \approx -0,3$; b) $x_1 = 0$; $x_2 \approx 0,69$.]

Aufgabe 5.22 Logarithmische Gleichungen

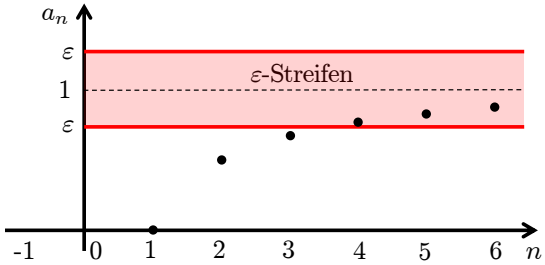
Welche Lösungen besitzen die folgenden logarithmischen Gleichungen? Nehmen Sie ggf. bei **b)** die Substitution $u = \lg(x)$ vor:

a) $\ln(\sqrt{x}) + 1,5 \cdot \ln(x) = \ln(2x)$, **b)** $(\lg(x))^2 - \lg(x) = 2$.

[Lsg.: a) $x \approx 2$; b) $x_1 = 0,1$; $x_2 = 100$.]

Kapitel 6

Zahlenfolgen und Stetigkeit



Kapitelinhalt

6.1 Zahlenfolgen 6-1

6.2 Arithmetische und geometrische Folgen 6-4

6.2.1 Einführung 6-4

6.2.2 Beispiele 6-5

6.3 Grenzwert einer Funktion 6-7

6.3.1 Einführung 6-7

6.3.2 Grenzwertsatz für Funktionen 6-10

6.4 Stetigkeit 6-11

6.4.1 Stetigkeit an einer Stelle x_0 6-11

6.4.2 Stetigkeit in einem Intervall 6-11

6.5 Eigenschaften stetiger Funktionen 6-12

6.6 Aufgaben zu Kapitel 6 6-13

6.6.1 Zahlenfolgen 6-13

6.6.2 Monotonie und Schranken 6-13

6.6.3 Bildungsgesetze 6-14

6.6.4 Stetigkeit und Grenzwerte 6-16

6.1 Zahlenfolgen

Definition: Eine Funktion f mit $D = \mathbb{N}$ und W $\subseteq \mathbb{R}$ heißt reelle Zahlenfolge (ZF).

Schreibweise: Statt $f: \; n \to f(n)$ wird geschrieben $f(1) = a_1, f(2) = a_2, ...$ oder kurz

$$\langle a_n \rangle = \langle a_1; a_2; a_3; ... \rangle \;, \tag{6.1}$$

wobei a_n das allgemeine Glied der Zahlenfolge ist.

Beispiele:

$$\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle = \left\langle 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; ... \right\rangle \qquad \text{(beschränkt)}$$

$$\langle 3n - 2 \rangle = \langle 1; 4; 7; 10; ... \rangle \qquad \text{(nach unten beschränkt)}$$

$$\left\langle n^2 \right\rangle = \langle 1; 4; 9; 16; ... \rangle \qquad \text{(nach unten beschränkt)}$$

$$\langle (-1)^n \rangle = \langle -1; +1; -1; +1; ... \rangle \qquad \text{(beschränkt, } k = 1\text{)}$$

$$\left\langle \frac{2n+1}{n+1} \right\rangle = \left\langle \frac{3}{2}; \frac{5}{3}; \frac{7}{4}; \frac{9}{5}; ... \right\rangle \qquad \text{(zurzeit keine weiteren Aussagen möglich)}$$

$$\langle 5 \rangle = \langle 5; 5; 5; 5; ... \rangle \qquad \text{(konstante Folge)}$$

Beispiel für eine rekursive Definition:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \text{ergibt}$$
$$\langle a_n \rangle = \langle 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; ... \rangle$$

Monotonie und Beschränktheit

$\langle a_n \rangle$ monoton steigend $:\Longleftrightarrow$ für alle $n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq a_{n+1}$

$\langle a_n \rangle$ monoton fallend $:\Longleftrightarrow$ für alle $n \in \mathbb{N} \quad a_n \geq a_{n+1}$

$\langle a_n \rangle$ nach oben beschränkt $:\Longleftrightarrow$ es gibt ein $S \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N} \quad S \geq a_n$

$\langle a_n \rangle$ nach unten beschränkt $:\Longleftrightarrow$ es gibt ein $S \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N} \quad S \leq a_n$

$\langle a_n \rangle$ beschränkt $:\Longleftrightarrow$ es gibt ein $k \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leq k$.

Grenzwert einer Folge

Beispiel: $a_n = 1 - \frac{1}{n}$

$$\langle a_n \rangle = \left\langle 0; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; ... \right\rangle$$

Die Glieder nähern sich 1, fast alle Glieder liegen in (siehe Bild 6.1)

$$U_\epsilon(1) =]1 - \epsilon; 1 + \epsilon[\quad \text{oder} \quad a_n \in U_\epsilon(1) \;\; \text{für fast alle } n$$
$$\text{oder} \quad |a_n - 1| < \epsilon \;\; \text{für fast alle } n \;.$$

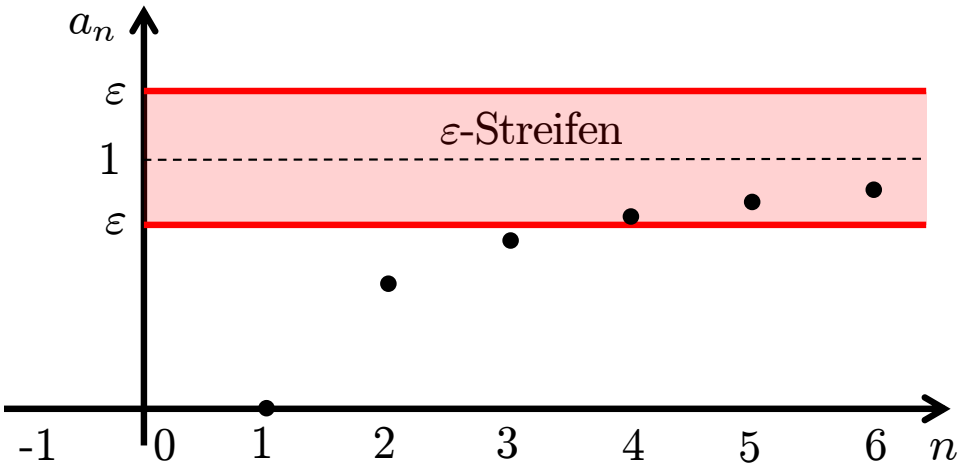


Bild 6.1: *Veranschaulichung des Grenzwertes einer Folge*

Definition:

$$
\begin{aligned}
g \text{ ist Grenzwert von } \langle a_n \rangle \quad &:\Longleftrightarrow \quad \text{Bei jedem positiven } \epsilon \text{ gilt für fast alle } n \\
&\qquad\quad\; |a_n - g| < \epsilon \ . \\
\text{oder} \quad &:\Longleftrightarrow \quad a_n \in U_\epsilon(g) \\
\text{oder} \quad &:\Longleftrightarrow \quad g - \epsilon < a_n < g + \epsilon \text{ für fast alle } n.
\end{aligned}
$$

In Worten: Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $|a_n - g| < \epsilon$.

Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$.

Folgen mit Grenzwert heißen **konvergent**. Folgen ohne Grenzwert heißen **divergent**.

Nullfolge: Folge mit Grenzwert Null.

Satz (ohne Beweis): Jede monotone und beschränkte Folge ist konvergent.

Die Bedingung des Satzes, dass die Folge monoton sein muss, ist nicht notwendig.

Gegenbeispiel: $\langle a_n \rangle = \left\langle (-1)^n \cdot \dfrac{1}{n} \right\rangle$ nicht monoton, aber konvergent.

Grenzwertsatz für Folgen: $\langle a_n \rangle$ und $\langle b_n \rangle$ seien konvergente Folgen. Dann gilt:

a) $\langle a_n + b_n \rangle$ konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (6.2a)

b) $\langle a_n - b_n \rangle$ konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (6.2b)

c) $\langle a_n \cdot b_n \rangle$ konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (6.2c)

Sei für alle $n \in \mathbb{N}$ $b_n \neq 0$ und $\langle b_n \rangle$ keine Nullfolge, so gilt

d) $\left\langle \dfrac{a_n}{b_n} \right\rangle$ konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_n}{b_n} \right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$. (6.2d)

6.2 Arithmetische und geometrische Folgen

6.2.1 Einführung

Sei $\langle a_n \rangle$ Zahlenfolge, dann heißt

$$S_n := a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad \textbf{n-te Partialsumme}$$

$\langle S_n \rangle$ Folge der Partialsummen oder unendliche Reihe.

Beispiel:

$$\langle a_k \rangle = \left\langle k^2 \right\rangle = \langle 1; 4; 9; 16; 25; ... \rangle \qquad \Rightarrow \quad \langle S_n \rangle = \langle 1; 5; 14; 30; 55; ... \rangle \tag{6.3}$$

Illustration an zwei rekursiv definierten Folgen:

Definition:

$\langle a_k \rangle$ arithmetische Folge
$:\Longleftrightarrow$ es gibt ein $d \in \mathbb{R}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so dass gilt $a_{k+1} = a_k + d$. (6.4)

Die Glieder haben den konstanten Abstand $a_{k+1} - a_k$

Beispiele:

a) $a_1 = 5,\ d = 7 \quad \Rightarrow \quad \langle a_k \rangle = \langle 5; 12; 19; 26, ... \rangle$
b) $\langle k \rangle$ Folge der natürlichen Zahlen, $\quad a_1 = 1, \quad d = 1$
c) $\langle c \rangle$ konstante Folge , $\quad a_1 = c, \quad d = 0$

Allgemein gilt:

$$a_2 = a_1 + d,\ a_3 = a_1 + 2d,\ a_4 = a_1 + 3d, ...$$
$$a_k = a_1 + (k-1) \cdot d \tag{6.5}$$

n-Partialsumme

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (a_1 + (k-1) \cdot d) \qquad \text{heißt } \textbf{arithmetische Summe} \ . \tag{6.6}$$

Man kann zeigen:

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot [2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d)] \ . \tag{6.7}$$

Spezialfall: $a_1 = 1$, $d = 1$, $\langle k \rangle$ = Folge der natürlichen Zahlen:

$$S_n = \frac{n}{2} [2 \cdot 1 + (n-1)] = n + \frac{n \cdot (n-1)}{2} = \frac{2n + n^2 - n}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{(Gauß)} \ .$$

Definition:

$$\langle a_k \rangle \text{ geometrische Folge}$$
$$:\Longleftrightarrow \text{ es gibt ein } q \in \mathbb{R},\ q \neq 0, \text{ so dass für alle } k \in \mathbb{N} \text{ gilt } a_{k+1} = a_k \cdot q\ . \tag{6.8}$$

Beispiel:

$$a_1 = 10,\ q = 5 \quad \Rightarrow \quad \langle a_k \rangle = \langle 10; 50; 250; 1250; ... \rangle\ :$$

Allgemein gilt:

$$a_2 = a_1 \cdot q,\ a_3 = a_1 \cdot q^2,\ a_4 = a_1 \cdot q^3, ...$$
$$a_k = a_1 \cdot q^{k-1}\ . \tag{6.9}$$

n-te Partialsumme

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_1 \cdot q^{k-1} \qquad \text{heißt } \textbf{geometrische Summe}\ . \tag{6.10}$$

Man kann zeigen:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \qquad q \neq 1\ . \tag{6.11}$$

6.2.2 Beispiele

6.2.2.1 Zinseszinsformel

k_0 Anfangskapital, k_n Kapital nach n Jahren, $\frac{p}{100}$ Zinssatz pro Jahr, z_n Zinsen für das n-te Jahr

$$k_1 = k_0 + z_1 = k_0 + k_0 \cdot \frac{p}{100} = k_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$
$$k_2 = k_1 + z_2 = k_1 + k_1 \cdot \frac{p}{100} = k_1 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = k_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$$
$$k_3 = k_2 + z_3 = k_2 + k_2 \cdot \frac{p}{100} = k_2 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = k_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3\ ,$$

$$\text{allgemein:} \quad k_n = k_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n\ . \tag{6.12}$$

Mit $q = 1 + \frac{p}{100}$ erhält man

$$k_n = k_0 \cdot q^n \qquad \textbf{Zinseszinsformel} \text{ (gilt auch für } n = 0)\ .$$

6.2.2.2 Achilles und die Schildkröte

Folgendes Beispiel zur unendlichen Reihe stammt von Zenon[1]:

- Achilles läuft 10 m/s[2]
- Achilles läuft zehnmal schneller als die Schildkröte

Die Schildkröte hat 100 m Vorsprung[3], beide laufen zur gleichen Zeit los. Kann Achilles die Schildkröte einholen?

Zenon schloss: Hat

- $\begin{cases} \text{Achilles 100 m zurückgelegt,} \\ \text{Schildkröte } 100\left(\frac{1}{10}\right) = 10 \text{ m} \end{cases}$
- $\begin{cases} \text{Achilles 100 + 10m (Hat er also diese 10 m noch durcheilt.),} \\ \text{Schildkröte hat noch } 100\left(\frac{1}{10}\right)^2 \text{ m Vorsprung (= 1 m)} \end{cases}$
- $\begin{cases} \text{Achilles 100 + } 100\left(\frac{1}{10}\right)^1 + 100\left(\frac{1}{10}\right)^2 \text{ (Hat er also diesen 1 m noch durcheilt.),} \\ \text{Schildkröte hat noch} 100\left(\frac{1}{10}\right)^2 \text{ m Vorsprung (= 10 cm)} \end{cases}$
- (...)

$\Rightarrow$ Zenon folgerte, Achilles kann die Schildkröte nie einholen, da sie nach n Schritten immer noch $100 \cdot (\frac{1}{10})^n$ m Vorsprung hat.

Der von Achilles bis zum Treffpunkt zurück zulegende Weg stellt sich als

$$\begin{aligned} &= 100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots \\ &= 100 \cdot \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots\right) \end{aligned} \tag{6.13}$$

dar.

Die obige Reihe bricht nie ab! Achilles holt die Schildkröte nie ein. Liegt hier ein logischer Widerspruch, ein Widerspruch im formalen Denken vor?

Wo ist der Fehler? Wo holt Achilles die Schildkröte ein?

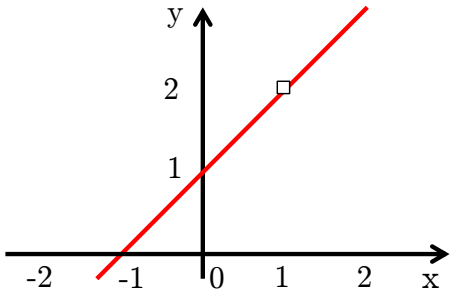
[1] griechischer Philosoph, 5. Jahrhundert vor Christus
[2] ursprünglich 12 m/s
[3] Der Vorsprung betrug ursprünglich einer griechischen Längeneinheit von einem Stadion (184,97 m).

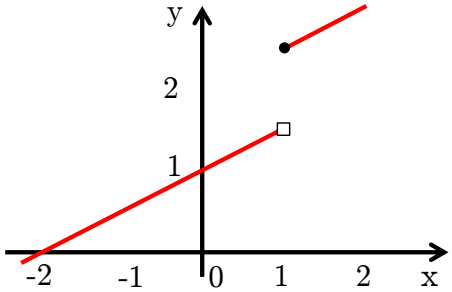
6.3 Grenzwert einer Funktion

6.3.1 Einführung

Beispiel

$$f_1 : x \to \frac{x^2-1}{x-1}, D = \mathbb{R}\backslash\{1\} \qquad f_2 : x \to \begin{cases} \frac{1}{2}x+1, & x < 1, \\ \frac{1}{2}x+2, & x \geq 1, \end{cases} \quad D = \mathbb{R}$$





Betrachtung bei $x_0 = 1$ durch Folgen $\langle x_n \rangle$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Untersuchung von Folgen der Funktionswerte $\langle f(x_n) \rangle$.

Annäherung von links mit der Folge $\langle \bar{x}_n \rangle = \langle 1 - \frac{1}{n} \rangle$, wobei $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{x}_n = 1$

Für $x \neq 1$ gilt $f_1(x) = x + 1$

$$\Rightarrow f_1(\bar{x}_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1$$

$$\Rightarrow \langle f_1(\bar{x}_n) \rangle = \left\langle 2 - \frac{1}{n} \right\rangle$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_1(\bar{x}_n) = 2 \qquad (6.14)$$

Für $x < 1$ gilt $f_2(x) = \frac{1}{2}x + 1$

$$\Rightarrow f_2(\bar{x}_n) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1$$

$$\Rightarrow \langle f_2(\bar{x}_n) \rangle = \left\langle \frac{3}{2} - \frac{1}{2n} \right\rangle$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_2(\bar{x}_n) = \frac{3}{2} \qquad (6.15)$$

Annäherung von rechts mit der Folge $\langle \bar{\bar{x}}_n \rangle = \langle 1 + \frac{1}{n} \rangle$, wobei $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{\bar{x}}_n = 1$

Für $x \neq 1$ gilt $f_1(x) = x + 1$

$$\Rightarrow f_1(\bar{\bar{x}}_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1$$

$$\Rightarrow \langle f_1(\bar{\bar{x}}_n) \rangle = \left\langle 2 + \frac{1}{n} \right\rangle$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_1(\bar{\bar{x}}_n) = 2 \qquad (6.16)$$

Für $x \geq 1$ gilt $f_2(x) = \frac{1}{2}x + 2$

$$\Rightarrow f_2(\bar{\bar{x}}_n) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 2$$

$$\Rightarrow \langle f_2(\bar{\bar{x}}_n) \rangle = \left\langle \frac{5}{2} + \frac{1}{2n} \right\rangle$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_2(\bar{\bar{x}}_n) = \frac{5}{2} \qquad (6.17)$$

Die Funktionen f_1 und f_2 zeigen unterschiedliches Verhalten für $x \to 1$.

Für f_1 gilt sogar: Ist $\langle x_n \rangle$ eine beliebige Folge mit $x_n \in U_\varepsilon$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_1(x_n) = 2 \ .$$

Denn: Für $x \neq 1$ gilt $f_1(x) = x + 1$, also $f_1(x_n) = x_n + 1$ und

$$\lim_{n\to\infty} f_1(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} 1 = 1 + 1 = 2 \qquad \text{q.e.d.}$$

Die Funktion f_2 hat bei unterschiedlichen Folgen verschiedene Grenzwerte (Ursache: Sprung im Graphen).

Def.: Die Funktion f sei in $U_\varepsilon(x_0)$ definiert und $\langle x_n \rangle$ sei eine Folge mit $x_n \in U_\varepsilon(x_0)$. f hat an der Stelle x_0 den **Grenzwert** g $:\Leftrightarrow$ Für jede gegen x_0 konvergierende Folge $\langle x_n \rangle$ konvergiert die Folge der zugehörigen Funktionswerte $\langle f(x_n) \rangle$ gegen g.

Schreibweise: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g$.

Trifft dies nicht zu, so hat die Funktion f an der Stelle x_0 keinen Grenzwert.

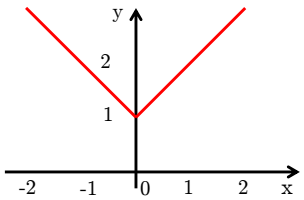
Beispiele von oben ($x_0 = 1$):

$$\lim_{x\to x_0} f_1(x) = 2 \ , \qquad \lim_{x\to x_0} f_2(x) \text{ existiert nicht .}$$

Beispiele

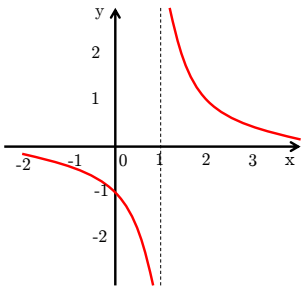
1) Existiert der Grenzwert der folgenden Funktion an der Stelle $x_0 = 0$?

$$f: \ x \ \to \ |x| + 1 \ , \quad D = \mathbb{R}$$



2) Existiert der Grenzwert der folgenden Funktion an der Stelle $x_0 = 1$?

$$f: \ x \ \to \ \frac{1}{x-1} \ , \quad D = \mathbb{R}\backslash\{1\}$$



Lösung Beispiel 1

Sei $\langle x_n \rangle$ eine beliebige Folge mit $x_n \neq 0$ und

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \qquad \text{also Nullfolge.}$$

Zu verwenden ist eine Nullfolge, da der Grenzwert der Funktion bei $x_0 = 0$ gesucht ist.

Für die **Folge** $\langle x_n \rangle$ gilt für jedes positives ε und genügend großes n

$$|x_n - 0| < \varepsilon \qquad \text{und somit} \qquad |x_n| < \varepsilon \ .$$

Nun wird die **Folge der Funktionswerte** untersucht:

$$\langle f(x_n) \rangle = \underbrace{\langle \overbrace{|x_n| + 1}^{\substack{\text{Fkt-Vorschrift für} \\ \text{die Folgenglieder}}} \rangle}_{\text{Folge der Funktionswerte}} \ .$$

Die Folge der Funktionswerte konvergiert mit dem Grenzwert 1, denn wird der Betrag der Funktionsvorschrift minus dem Grenzwert der Folge der Funktionswerte von 1 bestimmt, so folgt

$$|f(x_n) - 1| = |(|x_n| + 1) - 1| = ||x_n|| = |x_n| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |f(x_n) - 1| < \varepsilon \qquad \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 1 \ .$$

Lösung Beispiel 2

Es wird gezeigt: Es gibt eine Folge $\langle x_n \rangle$, so dass die Folge der Funktionswerte $\langle f(x_n) \rangle$ divergiert.

Dazu wird $\langle x_n \rangle = \langle 1 + \frac{1}{n} \rangle$ gewählt. Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ und $x_n \neq 1$ sowie

$$f(x_n) = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1} = \frac{1}{\frac{1}{n}} = n \ ,$$

$$\Rightarrow \text{ Folge der Funktionswerte } \langle f(x_n) \rangle = \langle n \rangle$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = \text{ existiert nicht } ,$$

da die Folge der Funktionswerte $\langle n \rangle$ unbeschränkt wächst.

6.3.2 Grenzwertsatz für Funktionen

Aus den Grenzwertsätzen für konvergente Folgen folgt der

Grenzwertsatz für Funktionen

Für die Funktionen u und v soll an der Stelle x_0 je der Grenzwert existieren. Dann gilt:

a) $$\lim_{x\to x_0}(u(x)+v(x)) = \lim_{x\to x_0} u(x) + \lim_{x\to x_0} v(x) \tag{6.18a}$$

b) $$\lim_{x\to x_0}(u(x)-v(x)) = \lim_{x\to x_0} u(x) - \lim_{x\to x_0} v(x) \tag{6.18b}$$

c) $$\lim_{x\to x_0}(u(x)\cdot v(x)) = \lim_{x\to x_0} u(x) \cdot \lim_{x\to x_0} v(x) \tag{6.18c}$$

d) $$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} u(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)} \qquad \left(\text{Voraussetzung: } \lim_{x\to x_0} v(x) \neq 0\right) . \tag{6.18d}$$

Die Regeln (6.18) gelten sinngemäß auch für die Grenzwerte vom Typ $x \to \infty$ und $x \to -\infty$.

Beispiele

1) $f:\ x \to \dfrac{x^2-5x}{x^2+8x} \quad D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ Existiert der Grenzwert bei $x_0 = 0$?

2) $f:\ h \to \dfrac{2h+h^2}{h} \quad D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ Existiert der Grenzwert bei $h_0 = 0$?

Größe der Sprungstelle einer Funktion an einer Stelle x_0

Existiert für eine Funktion an der Stelle x_0 kein Grenzwert, existieren jedoch linkseitiger und rechtseitiger Grenzwert der Funktion an der Stelle x_0, so wird als Größe der Sprungstelle (oder kurz nur Sprungstelle) der Betrag der Differenz zwischen linksseitigem und rechtseitigem Grenzwert eingeführt.

6.4 Stetigkeit

6.4.1 Stetigkeit an einer Stelle x_0

Def.: Eine Funktion f ist stetig an der Stelle x_0

$$:\Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

In Worten: Eine Funktion f ist an der Stelle x_0 stetig, wenn an dieser Stelle der Grenzwert mit dem Funktionswert übereinstimmt.

In der oben aufgeführten Definition müssen somit der links- und der rechtsseitige Grenzwert der Funktion existieren.

Beispiele

1) $f: \; x \to x^2 + 1 \quad D = \mathbb{R} \quad$ bei $x_0 = 1$

2) $f: \; x \to \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} \quad D = \mathbb{R} \backslash \{1\} \quad$ bei $x_0 = 1$

3) $f: \; x \to \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot x + 1 & \text{für } x < 1 \\ \frac{1}{2} \cdot x + 2 & \text{für } x \geq 1 \end{cases} \quad$ bei $x_0 = 1$

4) $f: \; x \to \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{für } x \neq 1 \\ 3 & \text{für } x = 1 \end{cases} \quad$ bei $x_0 = 1$

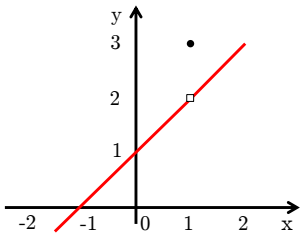


Bild 6.2: *Graph Funktion 4)*

6.4.2 Stetigkeit in einem Intervall

Def.: Eine Funktion f heißt im Intervall I stetig

$:\Leftrightarrow \quad f$ an jeder Stelle x von I stetig .

6.5 Eigenschaften stetiger Funktionen

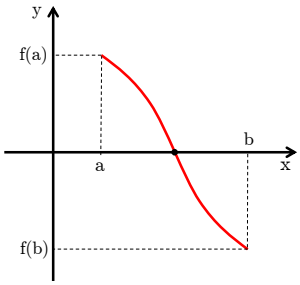
Aus dem Grenzwertsatz für Funktionen folgt Satz 1.

Satz 1: Stetigkeit verknüpfter Funktionen

Summe, Differenz, Produkt, Quotient und Verkettung stetiger Funktionen sind wieder stetig.

Satz 2: Nullstellensatz

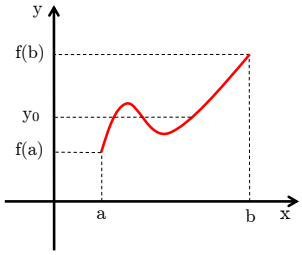
Die Funktion f sei auf $[a, b]$ stetig und $f(a)$ und $f(b)$ haben unterschiedliche Vorzeichen. Dann besitzt f in $]a, b[$ mindestens eine Nullstelle.



Verallgemeinerung führt auf den

Satz 3: Zwischenwertsatz

Eine in $[a, b]$ stetige Funktion f mit $f(a) \neq f(b)$ nimmt jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ in $]a, b[$ mindestens einmal an.



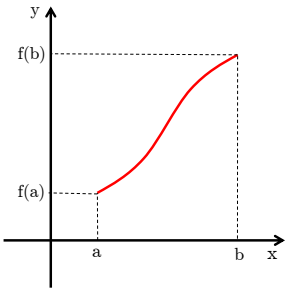
Beweis: Sei $f_1(a) < f_1(b)$ und y_0 Zwischenwert, also $f_1(a) < y_0 < f_1(b)$. Man bilde $f_2 : \; x \to f_1(x) - y_0$.

Es folgt $f_2(a) = f_1(a) - y_0 < 0$ und $f_2(b) = f_1(b) - y_0 > 0$
Satz 2: f_2 besitzt in $]a, b[$ mindestens eine Nullstelle x_0
$\Rightarrow \; f_2(x_0) = 0 \; \Rightarrow \; f_1(x_0) - y_0 = 0 \Rightarrow \; f_1(x_0) = y_0$ q.e.d.

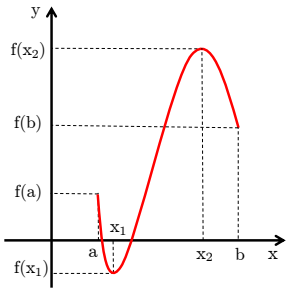
Satz 4: Extremwertsatz

Ist f in $[a, b]$ stetig, so nimmt f in $[a, b]$ ein Maximum und ein Minimum an.

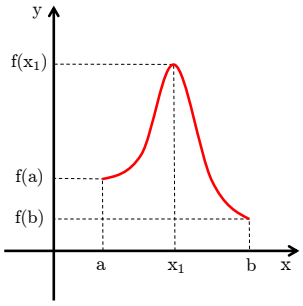
Mögliche Fälle:



$f(b)$ Maximum
$f(a)$ Minimum



$f(x_2)$ Maximum
$f(x_1)$ Minimum



$f(x_1)$ Maximum
$f(b)$ Minimum

6.6 Aufgaben zu Kapitel 6

6.6.1 Zahlenfolgen

Aufgabe 6.1 Glieder einer Zahlenfolge

Bestimmen Sie die ersten 5 Glieder folgender Zahlenfolgen

a) $\left\langle \frac{5n}{2} \right\rangle$ **b)** $\langle n^2 - n \rangle$ **c)** $\left\langle (-1)^n \cdot \left(\frac{3-n}{n} \right) \right\rangle$

rekursiv: **d)** $a_1 = 2\ ;\ a_{n+1} = a_n + \frac{1}{3}$ **e)** $a_1 = \frac{3}{2}\ ; a_{n+1} = \frac{4}{3} \cdot a_n$.

Aufgabe 6.2 Glieder und Grenzwerte

Bestimmen Sie die Grenzwerte folgender Zahlenfolgen

a) $\left\langle \frac{(3n+2)\cdot(3n-2)}{n^3+1} \right\rangle$ **b)** $\left\langle \left(\frac{\sqrt{2}\cdot 10^n - 1}{10^n} \right)^2 \right\rangle$.

Aufgabe 6.3 Glieder und Grenzwerte

Bestimmen Sie die ersten 5 Glieder und die Grenzwerte folgender Zahlenfolgen

a) $a_k = \frac{2\cdot k - 1}{k}$ **b)** $b_k = \frac{3-k}{2\cdot k}$ **c)** $a_k + b_k$ **d)** $a_k - 2\cdot b_k$ **e)** $a_k \cdot b_k$ **f)** $b_k = \frac{a_k}{2\cdot b_k}$.

6.6.2 Monotonie und Schranken

Aufgabe 6.4 Monotonie, Schranken, ϵ-Umgebung

Man zeige, das die folgenden Zahlenfolgen streng monoton wachsen oder fallen und gebe jeweils die größte untere oder kleinste obere Schranke an; ferner bestimme man jeweils den Grenzwert g und den Laufindex n als Funktion von ε, von dem an alle Glieder der Folge in einer ε-Umgebung um den Grenzwert liegen, und zwar jeweils für die drei ε-Werte 0,1, 0,01 und 0,001:

a) $x_k = \frac{k}{k+1}$ **b)** $x_k = \frac{-2}{3-2^{-k}}$ **c)** $x_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}$.

Hinweis zu b) und c): Eine Exponentialgleichung vom Typ $a^x = b$ wird gelöst durch Logarithmieren:

$$x = \log_a b = \frac{\lg a}{\lg b}\ .$$

Aufgabe 6.5 Grenzwerte von Folgen

Bestimmen Sie die Grenzwerte folgender Zahlenfolgen

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left\langle \frac{1}{n}\cdot\frac{(2n+1)^3-8n^3}{(2n+3)^2-4n^2}\right\rangle$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left\langle \frac{(3-n)\cdot(n+2)}{3n^2-27}\right\rangle$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left\langle \frac{1}{1+a^n}\right\rangle$ für a=0 und a>0

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left\langle a_1\cdot\frac{1-q^n}{1-q}\right\rangle$ für $|q|<1$

6.6.3 Bildungsgesetze

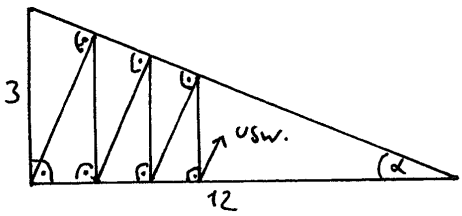
Aufgabe 6.6 Vergesslichkeit

Ein Student vergisst pro Woche 20 % von dem was er am Ende der vergangenen Woche noch wusste. Nach wieviel Wochen weiß er gerade noch mehr als 1 %?

Aufgabe 6.7 Fachwerkbinder - Bildungsgesetz und Summe einer geom. Folge

8) In einem Fachwerkbinder für ein Pultdach (12m lang, 3m hoch, rechtwinklig-dreieckig) laufen die Stäbe senkrecht auf die jeweils gegenüberliegenden Gurte zu.
Es ergibt sich eine Zick-Zack-Linie.

Der kürzeste Stab ist gerade noch über 0.3m lang.



Von welchem Typ ist die Zahlenfolge der Stablängen ?
a) Stellen Sie das Bildungsgesetz der Folge auf.
b) Berechnen Sie die Anzahl Stäbe und
c) die Gesamtlänge der Stäbe.

Aufgabe 6.8 Zinseszins

Beweisen Sie durch vollständige Induktion die Zinseszins-Formel

$$k_n = k_0 \cdot q^n \quad \text{mit} \quad q = 1 + \frac{p}{100}\ ,$$

k_0 Anfangskapital, k_n Kapital nach n Jahren und p Zinssatz in Prozent.

Aufgabe 6.9 Achilles und die Schildkröte

Folgendes Beispiel zur unendlichen Reihe stammt von Zenon[4]:

- Achilles läuft 10 m/s[5]
- Achilles läuft zehnmal schneller als die Schildkröte

Die Schildkröte hat 100 m Vorsprung[6], beide laufen zur gleichen Zeit los. Kann Achilles die Schildkröte einholen?

Zenon schloss: Hat

- $\begin{cases} \text{Achilles 100 m zurückgelegt,} \\ \text{Schildkröte } 100\left(\frac{1}{10}\right) = 10 \text{ m} \end{cases}$
- $\begin{cases} \text{Achilles 100 + 10m (Hat er also diese 10 m noch durcheilt.),} \\ \text{Schildkröte hat noch } 100\left(\frac{1}{10}\right)^2 \text{ m Vorsprung (= 1 m)} \end{cases}$
- $\begin{cases} \text{Achilles 100 + } 100\left(\frac{1}{10}\right)^1 + 100\left(\frac{1}{10}\right)^2 \text{ (Hat er also diesen 1 m noch durcheilt.),} \\ \text{Schildkröte hat noch} 100\left(\frac{1}{10}\right)^2 \text{ m Vorsprung (= 10 cm)} \end{cases}$
- (...)

$\Rightarrow$ Zenon folgerte, Achilles kann die Schildkröte nie einholen, da sie nach n Schritten immer noch $100 \cdot (\frac{1}{10})^n$ m Vorsprung hat.

Der von Achilles bis zum Treffpunkt zurück zulegende Weg stellt sich als

$$\begin{aligned} &= 100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots \\ &= 100 \cdot \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots\right) \end{aligned} \tag{6.19}$$

dar.

Die obige Reihe bricht nie ab! Achilles holt die Schildkröte nie ein. Liegt hier ein logischer Widerspruch, ein Widerspruch im formalen Denken vor?

Wo ist der Fehler? Wo holt Achilles die Schildkröte ein?

[4] griechischer Philosoph, 5. Jahrhundert vor Christus
[5] ursprünglich 12 m/s
[6] Der Vorsprung betrug ursprünglich einer griechischen Längeneinheit von einem Stadion (184,97 m).

Aufgabe 6.10 Erfindung des Schachspiels

Der König wollte den Erfinder des Schachspiels reich belohnen. Dieser überlegte eine Weile und erbat sich die Anzahl von Weizenkörnern die man erhält, wenn man auf das erste der 64 Schachfelder 1 Korn legt, auf das zweite 2 Körner, auf das nächste 4 Körner usw., d.h. auf jedes Feld doppelt so viele wie auf das vorhergehende.

Der König war zunächst sehr verärgert über den geringen Lohn und überlegte den Erfinder in den Kerker werfen zu lassen, da er es wagte, sein großzügiges Angebot aus zu schlagen. Sie als Hofmathematiker sollen die erforderliche Anzahl Weizenkörner berechnen. Wird der König weiterhin verärgert sein, wenn ja warum, denn wieviele Generationen des Landes müssten die gesamte Ernte abtreten? Um wieviele Weltjahresernten handelt es sich?

Legen Sie Ihren Berechnungen folgende Zahlen zu Grunde:

- Erdoberfläche 5,1 10^{10} ha (A_{Erde})
- Landfläche des Königreiches 164,8 10^6 ha (A_{Land})
- je Tonne Weizen 20 Millionen Körner (Koe)
- je Hektar Land Ertrag von 4 t Weizen (E)
- Dauer einer Generation 25 Jahre (t_G)

6.6.4 Stetigkeit und Grenzwerte

Aufgabe 6.11 Stetigkeit

Prüfen Sie die Funktionen

$$\textbf{a)}\ y = \frac{3}{1-\exp\left(\frac{c}{x}\right)} \qquad \textbf{b)}\ y = \arctan\left(\frac{1}{x-c}\right) \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}\ ,\ c \neq 0$$

an den Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = c$ auf Stetigkeit und geben Sie ggf. die jeweilige Sprunghöhe an.

Aufgabe 6.12 Grenzwerte von Funktionen

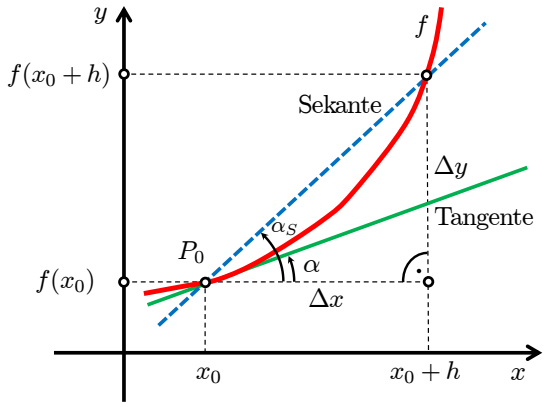
Bestimmen Sie folgende Grenzwerte

$$\textbf{a)}\ \lim_{x\to 1} = \frac{x^2-1}{x-1}\ , \qquad \textbf{b)}\ \lim_{x\to 1} = \frac{x^4-1}{x-1}\ .$$

Hinweis: Ein Lösungsweg besteht darin, vor der Grenzwertbildung eine Polynomdivision durchzuführen.

Kapitel 7

Differentialrechnung



Kapitelinhalt

7.1 Ableitungen 7-1

7.1.1 Das Geschwindigkeitsproblem 7-1

7.1.2 Das Tangentenproblem 7-2

7.1.3 Definition der ersten Ableitung 7-2

7.2 Technik des Differenzierens 7-4

7.2.1 Ableitungsregeln 7-4

7.3 Ableitung elementarer Funktionen 7-7

7.3.1 Natürliche Logarithmusfunktion 7-7

7.3.2 Exponentialfunktion 7-7

7.3.3 Allgemeine Exponentialfunktion 7-8

7.3.4 Allgemeine Logarithmusfunktion 7-8

7.3.5 Trigonometrische Funktionen 7-9

7.3.6 Arcus-Funktionen 7-10

7.3.7 Hyperbel- und Areafunktionen 7-11

7.3.8 Allgemeine Potenzfunktion 7-13

7.4 Übersicht elementarer Ableitungen 7-14
7.5 Logarithmische Differentation 7-15
7.6 Höhere Ableitungen 7-16
7.7 Physikalische Anwendungen 7-17
7.7.1 Geschwindigkeit und Beschleunigung 7-17
7.7.2 Weitere Anwendungen 7-17
7.8 Regeln für Ableitungen höherer Ordnung 7-18
7.9 Eigenschaften differenzierbarer Funktionen 7-19
7.9.1 Sekantengleichung 7-19
7.9.2 Differenzierbarkeit und Stetigkeit 7-20
7.9.3 Sätze von Fermat und Rolle 7-20
7.9.4 Mittelwertsatz der Differentialrechnung 7-21
7.10 Funktionsuntersuchung bzw. Kurvendiskussion 7-23
7.10.1 Monotonie 7-23
7.10.2 Extremstellen 7-24
7.10.3 Krümmungsverhalten und Wendestellen 7-27
7.10.4 Übersicht 7-29
7.11 Regeln von l'Hospital 7-30
7.12 Extremwertaufgaben 7-34
7.13 Parameterdarstellung und impliziter Form 7-35
7.13.1 Parameterdarstellung 7-35
7.13.2 Funktionen in impliziter Darstellung 7-35
7.14 Aufgaben zu Kapitel 7 7-36
7.14.1 Einführung in die Differentialrechnung 7-36
7.14.2 Logarithmische Differentation 7-37
7.14.3 Höhere Ableitungen 7-38
7.14.4 Funktionsuntersuchung und Kurvendiskussion 7-38
7.14.5 Regeln von Bernoulli l'Hospital 7-39
7.14.6 Extremwertaufgaben 7-40

7.1 Ableitungen

7.1.1 Das Geschwindigkeitsproblem

Die folgenden Überlegungen stammen von Newton.[1]

Bei der Bewegung eines Massepunktes m sei

- s der Weg und
- t die Zeit.

Gilt $s \sim t$, so ist $v := \frac{s}{t}$ konstant und v die *Geschwindigkeit* der Bewegung.

Im Allgemeinen ist v nicht konstant. Daher ist eine neue Definition der Geschwindigkeit notwendig:

Durchschnittsgeschwindigkeit $\overline{v}$ im Zeitintervall Δt

- Zum Zeitintervall t_0 bis $t_0 + \Delta t$ (vergangene Zeit Δt)
- gehört das Wegintervall $s(t_0)$ bis $s(t_0 + \Delta t)$ und damit der zurückgelegte Weg $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$.

Eingeführt wird die *Durchschnittsgeschwindigkeit* mit dem Quotienten wie oben

$$\overline{v}(\Delta t) := \frac{\Delta s}{\Delta t} \,. \tag{7.1}$$

Wird nun das betrachtete Zeitintervall immer weiter verkleinert, so ergibt sich die

Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0 (Momentangeschwindigkeit)

oder die Augenblicksgeschwindigkeit zu

$$v(t_0) := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} \,. \tag{7.2}$$

Natürlich muss der entsprechende Grenzwert existieren, andernfalls ist keine Geschwindigkeit erklärt.

[1] Newton, Isaac (1643-1727)

7.1.2 Das Tangentenproblem

Die folgenden Überlegungen stammen von Leibniz.[2]:

Betrachtet wird der Graph einer stetigen Funktion

- Anstieg der Sekante durch $P_0\left((x_0; f(x_0)\right)$ und $P\left(x_0+h; f(x_0+h)\right)$

$$\tan(\alpha_S) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{7.3}$$

- Anstieg des Graphen in P_0

$$\tan(\alpha) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \tag{7.4}$$

Falls der Grenzwert existiert, so heißt die Gerade durch P_0 mit diesem Anstieg **Tangente**.

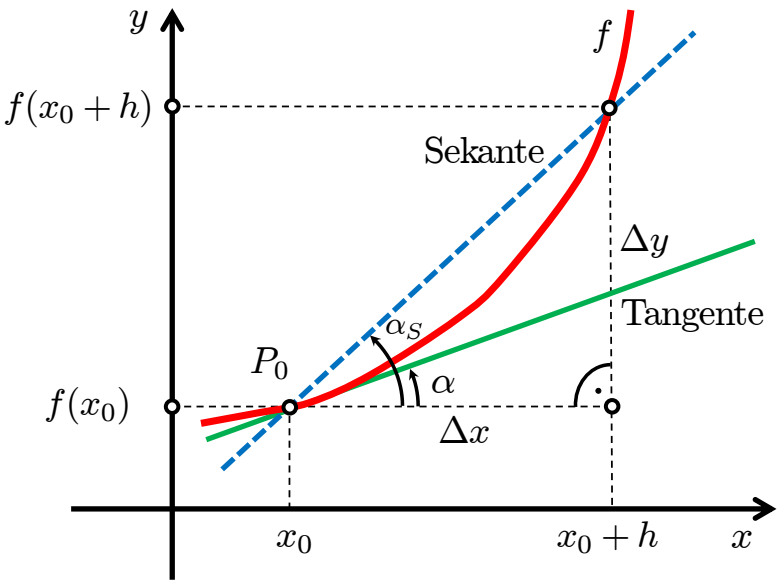


Bild 7.1: *Zum Tangentenproblem*

7.1.3 Definition der ersten Ableitung

7.1.3.1 Erste Ableitung an einer Stelle x_0

Die Gemeinsamkeiten der beiden Probleme aus den Abschnitten 7.1.1 und 7.1.2 werden verallgemeinert.

Definition: Als erste Ableitung von f an der Stelle x_0 bezeichnet man die Zahl

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} =: f'(x_0)\ , \tag{7.5}$$

falls dieser Grenzwert existiert.

[2]Leibniz, Gottfried (1646-1716)

7.1.3.2 Erste Ableitung auf einem Intervall

Definition: Falls für jedes Element eines Intervalls $]a;b[$ die erste Ableitung existiert, so heißt

$$\text{die Funktion} \quad f^{'} : x \to f^{'}(x), \quad x \in]a:b[\tag{7.6}$$

die **erste Ableitung** von f auf $]a;b[$ (Sprechweise: f ist differenzierbar auf $]a;b[$).

Schreibweise der ersten Ableitung nach Leibniz (Differentialquotient):

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \qquad \text{(Sprechweise } \mathrm{d}y \text{ nach } \mathrm{d}x\text{).} \tag{7.7}$$

7.2 Technik des Differenzierens

7.2.1 Ableitungsregeln

Die Funktionen f und g seien auf einem Intervall differenzierbar. Dann gilt:

7.2.1.1 Summenregel

Die Summe $f + g$ wird gliedweise differenziert, und es gilt

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) \ . \tag{7.8}$$

Denn:

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)+g(x+h)) - (f(x)+g(x))}{h} \\
&\underbrace{=}_{GWS} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= \qquad f'(x) \qquad + \qquad g'(x) \qquad \text{qed.}
\end{aligned}$$

Beispiel:

$$\left(x^2 + x^3\right)' = \left(x^2\right)' + \left(x^3\right)' = \underline{2 \cdot x + 3 \cdot x^2} \ .$$

7.2.1.2 Ableitung von Funktionen mit konstantem Faktor

Für $c \cdot f$ gilt

$$(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x) \ . \tag{7.9}$$

Denn:

$$\begin{aligned}
(c\cdot f)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(c\cdot f)(x+h) - (c\cdot f)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c\cdot f(x+h) - c\cdot f(x)}{h} \\
&\underbrace{=}_{GWS} c \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \qquad c\cdot f'(x) \qquad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

Beispiel:

$$\left(7 \cdot x^2\right)' = 7 \cdot \left(x^2\right)' = 7 \cdot 2 \cdot x = \underline{14 \cdot x} \ .$$

Folgerung:

Für ganzrationale Funktionen gilt also

$$\begin{aligned}
&\left(a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0\right)' \\
&\qquad = n \cdot a_n \cdot x^{n-1} + (n-1) \cdot a_{n-1} \cdot x^{n-2} + \ldots + 2 \cdot a_2 \cdot x + a_1 \ .
\end{aligned} \tag{7.10}$$

7.2.1.3 Produktregel

Für die Produktfunktion $f \cdot g$ gilt

$$(f \cdot g)^{'}(x) = f^{'}(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g^{'}(x) \; . \tag{7.11}$$

Denn:

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{(f \cdot g)(x+h) - (f \cdot g)(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(f(x+h) \cdot g(x+h)) - (f(x) \cdot g(x))}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) \overbrace{-f(x) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot g(x+h)}^{\text{Einfügen von zwei Summanden, deren Summe Null ist}} - f(x) \cdot g(x)}{h} \\
&\underbrace{=}_{GWS} \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \cdot f(x) \\
&\underbrace{=}_{GWS} \quad f'(x) \cdot g(x) \quad + \quad g'(x) \cdot f(x) \qquad \text{qed.}
\end{aligned}$$

7.2.1.4 Quotientenregel

Ist zusätzlich $g(x) \neq 0$ auf dem Intervall, so gilt

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f^{'}(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g^{'}(x)}{g^2(x)} \; . \tag{7.12}$$

Denn:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \lim_{h \to 0} \left(\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \right) \qquad (h \text{ ausklammern, im Zähler Hauptnenner bilden}) \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \left(\frac{f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+h)}{g(x+h) \cdot g(x)} \right) \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \left(\frac{f(x+h) \cdot g(x) \overbrace{-f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g(x)}^{\text{Einfügen, Summe Null}} - f(x) \cdot g(x+h)}{g(x+h) \cdot g(x)} \right) \\
&\underbrace{=}_{GWS} \lim_{h \to 0} \frac{1}{g(x+h) \cdot g(x)} \cdot \left(\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x) \right. \\
&\qquad \left. - \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \cdot f(x) \right) \\
&\underbrace{=}_{GWS} \quad \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \qquad \text{qed.}
\end{aligned}$$

7.2.1.5 Kettenregel

Sind $g:\ x \to g(x)$ (innere Funktion) und mit $z = g(x)$ auch $f:\ x \to f(z)$ (äußere Funktion) differenzierbar, so ist auch $F:\ x \to (f \circ g)(x)$ differenzierbar, und es gilt:

$$F'(x) = f'(z) \cdot g'(x)\ . \tag{7.13}$$

Denn:

$$\begin{aligned}
F'(x) = (f \circ g)'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{(f \circ g)(x+h) - (f \circ g)(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \qquad \text{(Erweitern mit } [g(x+h) - g(x)]) \\
&= \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \\
\underbrace{=}_{GWS} \quad & \quad f'(z) \quad \cdot \quad g'(x) \qquad \text{qed.}
\end{aligned}$$

Beispiel: $F:\ x \to (x^2+2)^9$ also $y = f(z) = z^9$ und $z = g(x) = x^2 + 2$

$$\begin{aligned}
& f'(z) = 9 \cdot z^8\ , \quad g'(x) = 2 \cdot x \\
\Rightarrow \quad & F'(x) = f'(z) \cdot g'(x) = 18 \cdot x \cdot \left(x^2+2\right)^8
\end{aligned} \tag{7.14}$$

Merkregel nach Leibniz: $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \tag{7.15}$$

7.2.1.6 Ableitung der Umkehrfunktion

Sei f umkehrbar und differenzierbar mit $y = f(x)$ und $x = f^{-1}(y)$. Dann ist auch f^{-1} differenzierbar, und es gilt

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}\ . \tag{7.16}$$

Denn: Mit $f^{-1}(f(x)) = x$ folgt nach Ableitung beider Seiten nach Kettenregel mit $y = f(x)$

$$\left(f^{-1}\right)'(y) \cdot f'(x) = 1 \qquad \text{und damit} \qquad \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} \qquad \text{q.e.d.} \tag{7.17}$$

Merkregel nach Leibniz: $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} \tag{7.18}$$

7.3 Ableitung elementarer Funktionen

7.3.1 Natürliche Logarithmusfunktion

Für die Funktion des natürlichen Logarithmus gilt:

$f:\ x \to \ln(x)$ ist auf $D = R^+$ differenzierbar mit

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}\ . \tag{7.19}$$

Denn für $(x+h) > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h} &\quad \text{(Erweitern mit } x/x \text{ und Anwenden von } \ln(a)-\ln(b)=\ln(a/b))\\ &= \frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\cdot\ln\left(\frac{x+h}{x}\right) \quad \text{(Anwenden von } a\cdot\ln(b)=\ln(b^a))\\ &= \frac{1}{x}\cdot\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{x/h}\end{aligned} \tag{7.20}$$

Mit $t := \frac{h}{x}$ gilt für $h \to 0$ nun $t \to 0$. Damit folgt

$$(\ln(x))' = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(1+t\right)^{1/t}\ .$$

Es gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\ , \qquad \text{und somit} \qquad \lim_{t\to 0}\left((1+t)^{1/t}\right) = e\ . \tag{7.21}$$

Da $\ln(x)$ bei $x = e$ stetig ist, kann der Grenzwert (7.21) in die $\ln$-Funktion geschrieben werden:

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}\cdot\ln\left(\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t}\right) = \frac{1}{x}\cdot\ln(e) = \frac{1}{x} \qquad \text{q.e.d.} \tag{7.22}$$

7.3.2 Exponentialfunktion

Für die Exponentialfunktion folgt

$f:\ x \to e^x$ ist auf $D = \mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$(e^x)' = e^x\ . \tag{7.23}$$

Denn mit

$$\begin{aligned} y &= \ln(x) = f(x) \quad \text{und}\\ x &= e^y = f^{-1}(y) \quad \text{(Funktion von der die Ableitung gesucht ist)}\end{aligned} \tag{7.24}$$

folgt

$$\begin{aligned}\left(f^{-1}(y)\right)' &= \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{(\ln(x))'}\\ &= \frac{1}{\frac{1}{x}} = x \qquad \text{und mit} \qquad x = e^y\end{aligned}$$

$$\text{folgt } (e^y)' = e^y \quad \Rightarrow \quad \text{Variablen vertauschen} \quad \underline{(e^x)' = e^x}\ . \tag{7.25}$$

7.3.3 Allgemeine Exponentialfunktion

Für die allgemeine Exponentialfunktion gilt:

$$f:\ x \to a^x \quad \text{ist auf } D = \mathbb{R} \text{ differenzierbar mit}$$
$$(a^x)' = a^x \cdot \ln(a)\ . \tag{7.26}$$

Denn es gilt

$$y = a^x = \left(e^{\ln(a)}\right)^x = e^{x\cdot\ln(a)}\ . \tag{7.27}$$

Man setze

$$y = e^z\ , \quad z = x\cdot\ln(a)\ , \quad \text{also} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} = e^z \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \ln(a)\ . \tag{7.28}$$

Es folgt mit Hilfe der Kettenregel

$$(a^x)' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = e^z\cdot\ln(a)$$

$$= e^{\ln(a^x)}\cdot\ln(a) = e^{x\cdot\ln(a)}\cdot\ln(a)$$
$$= \underline{a^x\cdot\ln(a)}\ .$$

7.3.4 Allgemeine Logarithmusfunktion

Für die allgemeine Logarithmusfunktion gilt:

$$f:\ x \to \log_a(x) \quad \text{ist auf } D = \mathbb{R}^+ \text{ differenzierbar mit}$$
$$(\log_a(x))' = \frac{1}{x\cdot\ln(a)}\ . \tag{7.29}$$

Denn für

$$y = a^x \quad \text{gilt} \quad x = \log_a(y) \qquad \text{(Definition des Logarithmus)}\ . \tag{7.30}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
(\log_a(y))' &= \frac{1}{(a^x)'} \qquad \text{mit} \quad (a^x)' = a^x\cdot\ln(a)\\
&= \frac{1}{a^x\cdot\ln(a)} \qquad \text{mit} \quad x = \log_a(y)\\
&= \frac{1}{a^{\log_a(y)}\cdot\ln(a)} = \frac{1}{y\cdot\ln(a)}\\
(\log_a(y))' &= \frac{1}{y\cdot\ln(a)} \qquad \text{(Vertauschen der Variablen)}\\
\Rightarrow (\log_a(x))' &= \underline{\frac{1}{x\cdot\ln(a)}}\ .
\end{aligned}$$

7.3.5 Trigonometrische Funktionen

Für die Sinus- und die Kosinusfunktion gilt:

$$f:\ x \to \sin(x) \quad \text{und} \quad f:\ x \to \cos(x) \quad \text{sind auf } D = \mathbb{R} \text{ differenzierbar mit}$$

$$\textbf{a)}\ (\sin(x))' = \cos(x) \qquad \textbf{b)}\ (\cos(x))' = -\sin(x)\ .$$

Wegen

$$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \qquad \text{gilt} \tag{7.31}$$

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} &= \frac{2}{h} \cdot \sin\left(\frac{(x+h)-x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{(x+h)+x}{2}\right)\\ &= \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \cdot \cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\ .\end{aligned}$$

Mit

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad \text{(Beweis später)} \quad \text{folgt} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = 1\ . \tag{7.32}$$

(Hinweis: Der oben verwendet Grenzwert kann beispielsweise mit der *Regel von l'Hospital* berechnet werden. Siehe Abschnitt 7.11.)

Außerdem gilt

$$\lim_{h\to 0} \cos\left(x+\frac{h}{2}\right) = \cos(x)\ . \tag{7.33}$$

Damit folgt aus dem Grenzwertsatz für Funktionen

$$\underline{(\sin(x))' = \cos(x)}\ . \tag{7.34}$$

Mit $\cos(x) = \sin(\pi/2 - x)$ sei $y = \sin(z)$, also

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} = \cos(z) \tag{7.35}$$

und

$$z = \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\ , \quad \text{also} \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -1\ . \tag{7.36}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}(\cos(x))' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} &= \cos(z) \cdot (-1) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\\ &= \underline{-\sin(x)} \qquad \text{q.e.d.}\end{aligned} \tag{7.37}$$

7.3.6 Arcus-Funktionen

Als Ausgangspunkt wird gewählt:

$$y = f(x) = \sin(x) \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \cos(x) \ . \tag{7.38}$$

Gesucht ist die Ableitung der Umkehrfunktion von $\sin(x)$, also von $f^{-1}(y) = \text{arcsin}(y)$.

Die Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion (7.16), S. 7-6, ergibt

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = (\text{arcsin}(y))' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos(x)} \ . \tag{7.39}$$

Für ein brauchbares Ergebnis müssen noch die Variablen auf der linken und der rechten Seite vereinheitlicht werden. Da die gesuchte Funktion auf der linken Seite in Abhängigkeit von y angegeben ist, muss unter Berücksichtigung von (7.38-links) x durch einen Term in Abhängigkeit von y angegeben werden. Aus (7.38-links) folgt

$$x = \text{arcsin}(y) \ . \tag{7.40}$$

Einsetzen in (7.39) liefert

$$(\text{arcsin}(y))' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos\left(\text{arcsin}(y)\right)} \ . \tag{7.41}$$

Nun muss noch $\cos(x)$ durch $\sin(x)$ oder $\text{arcsin}(x)$ durch $\arccos(x)$ ausgedrückt werden. Mit

$$\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)} \tag{7.42}$$

folgt

$$(\text{arcsin}(y))' = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2\left(\text{arcsin}(y)\right)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \ . \tag{7.43}$$

Vertauschen der Variablen ergibt die gesuchte Ableitung

$$\underline{(\text{arcsin}(x))' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}} \ . \tag{7.44}$$

Weitere Arkusfunktionen siehe Vorlesung/Übung.

7.3.7 Hyperbel- und Areafunktionen

a) Sinus hyperbolicus

$f(x) = \sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \Rightarrow f'(x) = \cosh(x)$

Denn: $f(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - (-1)\cdot e^{-x}\right) = \cosh(x)$

b) Kosinus hyperbolicus

$f(x) = \cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \Rightarrow f'(x) = \sinh(x)$

Denn: $f(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + (-1)\cdot e^{-x}\right) = \sinh(x)$

c) Tangens hyperbolicus

$f(x) = \tanh(x) = \frac{\left(e^x - e^{-x}\right)}{\left(e^x + e^{-x}\right)} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$

Denn: $f(x) = \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{\cosh(x)\cosh(x) - \sinh(x)\sinh(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{1}{\cosh^2(x)}$

d) Kotangens hyperbolicus

$f(x) = \coth(x) = \frac{\left(e^x + e^{-x}\right)}{\left(e^x - e^{-x}\right)} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sinh^2(x)}$

Denn: $f(x) = \coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{\sinh(x)\sinh(x) - \cosh(x)\cosh(x)}{\sinh^2(x)} = -\frac{1}{\sinh^2(x)}$

e) Areasinus hyperbolicus

$f(x) = \operatorname{arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad x \in \mathbb{R}$

Denn: 2 Methoden

i) Regel Ableitung der Umkehrfunktion $y = \sinh(x) \Rightarrow x = \operatorname{arsinh}(y)$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} =_{UF} \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} = \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Vertauschen der Variablen: $y' = \left(\operatorname{arsinh}(x)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

ii) Direkte Ableitung der Umkehrfunktion $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} && \text{Erweitern mit } \sqrt{x^2+1} \\ &= \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{(x+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}} && \text{Kürzen mit } \sqrt{x^2+1} + x \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

f) Areakosinus hyperbolicus

$$f(x) = \operatorname{arcosh}(x) = \begin{cases} \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \\ \ln(x - \sqrt{x^2 - 1}) \end{cases} \quad x \geq 1 \quad \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \\ -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \end{cases} \quad x > 1$$

Denn: Siehe Vorlesung/Übung

g) Areatangens hyperbolicus

$$f(x) = \operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad |x| < 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1-x^2} \quad |x| < 1$$

Denn: Siehe Vorlesung/Übung

h) Areakotangens hyperbolicus

$$f(x) = \operatorname{arcoth}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \quad |x| > 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1-x^2} \quad |x| > 1$$

Denn: Siehe Vorlesung/Übung

7.3.8 Allgemeine Potenzfunktion

Für die Potenzfunktion gilt

$$f:\ x \to x^\alpha \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}\ . \tag{7.45}$$

Möglichkeiten für α:

$$\alpha = \frac{1}{n}\ , \quad \begin{array}{lll} \alpha \in \mathbb{N} & \text{mit} & D = \mathbb{R} \\ \alpha \in \mathbb{Z} & \text{mit} & D = \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ n \in \mathbb{N} & \text{mit} & D = \mathbb{R}^+ \\ \alpha \in \mathbb{R} & \text{mit} & D = \mathbb{R}^+ \end{array}$$

Beweis: Bereits gezeigt wurde $\alpha = -n$ mit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} (x^\alpha)' &= \left(x^{-n}\right)' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' \\ &\underbrace{=}_{QR} \frac{0 \cdot x^n - 1 \cdot n \cdot x^{n-1}}{x^{2n}} = -n \cdot x^{-n-1} \\ &= \underline{\alpha \cdot x^{\alpha-1}}\ . \end{aligned}$$

Für $\alpha \in R$ sei

$$y = x^\alpha \underbrace{=}_{x>0} \left(e^{\ln(x)}\right)^\alpha = e^{\alpha \cdot \ln(x)}$$

und

$$\begin{aligned} y = e^z \quad &\text{mit} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} = e^z\ , \\ z = \alpha \cdot \ln(x) \quad &\text{mit} \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\alpha}{x}\ . \end{aligned}$$

Damit gilt nach der Kettenregel

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = e^z \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \underline{\alpha \cdot x^{\alpha-1}} \qquad \text{qed.}$$

7.4 Übersicht elementarer Ableitungen

$f(x)$	(Erste) Ableitung $f'(x)$	Bedingungen
c	0	$c \in \mathbb{R}$ **Konstantenregel**
x^a	$a \cdot x^{a-1}$	$a \in \mathbb{R}$ **Potenzregel** $x \neq 0$ für $a < 0$, $x > 0$ für $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$
e^x	e^x	
a^x	$a^x \ln a$	$a > 0$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$\log_a \lvert x \rvert$	$\frac{1}{x \ln a} = \frac{1}{x} \log_a e$	$a \neq 1,\ a, x > 0$
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$	$x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x \rvert < 1$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x \rvert < 1$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	
$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	
$\sinh x$	$\cosh x$	
$\cosh x$	$\sinh x$	
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$	
$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x$	$x \neq 0$
$\operatorname{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	
$\operatorname{arcosh} \lvert x \rvert$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \operatorname{sgn} x$	$\lvert x \rvert > 1$
$\operatorname{artanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\lvert x \rvert < 1$
$\operatorname{arcoth} x$	$-\frac{1}{x^2-1}$	$\lvert x \rvert > 1$

Abgeleitete spezielle Funktionen

$f(x)$	(Erste) Ableitung $f'(x)$	Bedingungen
x	1	$x \in \mathbb{R}$
$\lg x$	$\frac{1}{x} \lg e \approx \frac{0{,}434\,29}{x}$ bzw. $\frac{1}{x \ln 10} \approx \frac{1}{2{,}302\,59x}$	$x > 0$
$\ln \lvert f(x) \rvert$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$ *»logarithmische Ableitung«*	$f(x) \neq 0$

Es gilt: $\operatorname{sgn}(x) = 1$ für $x > 0$, $\operatorname{sgn}(0) = 0$ und $\operatorname{sgn}(x) = -1$ für $x < 0$ (Vorzeichenfunktion).

7.5 Logarithmische Differentation

Seien u und v differenzierbar sowie $u(x) > 0$. Man betrachte

$$f: \; x \;\to\; [u(x)]^{v(x)} \;, \qquad x \in D \;. \tag{7.46}$$

Dann gilt

$$f(x) = [u(x)]^{v(x)} > 0 \quad \text{und}$$

$$\ln(f(x)) = v(x) \cdot \ln(u(x)) \;. \qquad \text{Ableiten mit Produkt- und Ketteregel führt auf}$$

$$\frac{f^{'}(x)}{f(x)} = v^{'}(x) \cdot \ln(u(x)) + v(x) \cdot \frac{u^{'}(x)}{u(x)}$$

$$\Rightarrow f^{'}(x) = \underline{f(x) \cdot \left[v(x) \cdot \frac{u^{'}(x)}{u(x)} + v^{'}(x) \cdot \ln(u(x)) \right]} \;. \tag{7.47}$$

Beispiele

1) $f(x) = x^{\sin(x)} \;, \qquad D = \mathbb{R}^{+}$

$$u(x) = x \;, \quad u^{'}(x) = 1 \;, \quad v(x) = \sin(x) \;, \quad v^{'}(x) = \cos(x)$$

$$\Rightarrow f^{'}(x) = \underline{x^{\sin(x)} \cdot \left[\sin(x) \cdot \frac{1}{x} + \cos(x) \cdot \ln(x) \right]}$$

7.6 Höhere Ableitungen

Sei $f:\ x \to f(x)$ mit $D = I$ ein offenes Intervall,

f differenzierbar $\Rightarrow f'$ existiert, f' differenzierbar $\Rightarrow f''$ existiert, ...

Allgemein: Sei $f^{(0)} := f$ und rekursiv $f^{(n)} := \left(f^{(n-1)}\right)'$ für $n \geq 1$ die n-te Ableitung

Bezeichnung des Terms nach Leibniz:

$$\frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n} := f^{(n)}(x) \qquad \textbf{n-ter Differentialquotient}\ . \tag{7.48}$$

Beispiele

1) $f:\ x \to \sin(x)\ ,\quad D = \mathbb{R}$

$f'(x) = \cos(x)\ ,\quad f''(x) = -\sin(x)\ ,\quad f'''(x) = -\cos(x)\ ,\quad f^{IV}(x) = \sin(x)\ ,$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\frac{\mathrm{d}^n \sin(x)}{\mathrm{d}x^n} = \begin{cases} (-1)^k \cdot \sin(x), & \text{für } n = 2k, \quad k \in \mathbb{N}; \\ (-1)^k \cdot \cos(x), & \text{für } n = 2k+1 \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{7.49}$$

In ähnlicher Weise lässt sich die n-te Ableitung für $f(x) = \cos(x)$ bestimmen (Übungen).

2) $f:\ x \to \ln(x)\ ,\quad D = \mathbb{R}^+$

$(\ln(x))^0 = \ln(x)\ ,\quad (\ln(x))' = \dfrac{1}{x}\ ,\quad (\ln(x))'' = -\dfrac{1}{x^2}\ ,\quad (\ln(x))''' = \dfrac{1 \cdot 2}{x^3}\ ,$

$(\ln(x))^{IV} = -\dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3}{x^4}\ ,\quad (\ln(x))^V = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{x^5}\ ,$

Vermutung:

$A(n):\quad (\ln(x))^n = (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{(n-1)!}{x^n} \quad n \in \mathbb{N}$

Beweis mit vollständiger Induktion:

Ind.-Anfang: $A(1)$ LS: $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$ RS: $(-1)^{1+1}\dfrac{(1-1)!}{x^1} = \dfrac{1}{x}$ ($\Rightarrow$ LS=RS)

Ind.-Vor.: $A(k)$ $\quad (\ln(x))^k = (-1)^{k+1} \cdot \dfrac{(k-1)!}{x^k}$

Ind.-Beh.: $A(k+1)$ $\quad (\ln(x))^{k+1} = (-1)^{k+2} \cdot \dfrac{(k)!}{x^{k+1}}$

Induktionsschluss: Schließe von $A(k)$ auf $A(k+1)$

$$(\ln(x))^k = (-1)^{k+1} \cdot \frac{(k-1)!}{x^k} \qquad \Rightarrow \qquad (\ln(x))^{k+1} = (-1)^{k+2} \cdot \frac{(k)!}{x^{k+1}}$$

Denn:

$$(\ln(x))^{(k+1)} = \left((\ln(x))^{(k)}\right)' = \left((-1)^{k+1} \cdot \frac{(k-1)!}{x^k}\right)' = (-1)^{k+1} \cdot (k-1)! \cdot \left(x^{-k}\right)'$$

$$= (-1)^{k+1} \cdot (k-1)! \cdot (-k) \cdot x^{-k-1} = \frac{(-1)^{k+2} \cdot k!}{x^{k+1}} \qquad \text{q.e.d.}$$

7.7 Physikalische Anwendungen

Im Folgenden erfolgt nur nur eine skalare Betrachtung der physikalischen Größen.

7.7.1 Geschwindigkeit und Beschleunigung

Weg-Zeit-Funktion $s: \ t \ \rightarrow \ s(t)$

Geschwindigkeits-Zeit-Funktion $v: \ t \ \rightarrow \ v(t)$ mit

$$v(t) = \dot{s}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(s(t)\right) \tag{7.50}$$

Beschleunigungs-Zeit-Funktion $a: \ t \ \rightarrow \ a(t)$ mit

$$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(s(t)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(v(t)\right) \ . \tag{7.51}$$

Beispiel

Freier Fall:

$$s(t) = \frac{g}{2} \cdot t^2 \ , \quad \text{Ableitung} \ \rightarrow \ v(t) = g \cdot t \quad \text{Ableitung} \ \rightarrow \ a(t) = g \ .$$

7.7.2 Weitere Anwendungen

1) **Drehung eines Körpers**
Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$, Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}$

$$\dot{\varphi} = \omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \qquad \ddot{\varphi} = \dot{\omega} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \tag{7.52}$$

2) **Transport eines Körpers längs eines Weges** s
Verrichtete Arbeit W, erforderliche Kraft F

$$F = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}s} \tag{7.53}$$

3) **Leistung beim Bewegen eines Körpers**
Erbrachte Leistung P, verrichtete Arbeit W

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \dot{W} \tag{7.54}$$

4) **Elektrische Stromstärke**
Stromstärke I, transportierte Ladung Q durch eine Fläche

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \dot{Q} \tag{7.55}$$

5) **Schnittgrößen beim elastischen Balken**
Streckenlast q, Querkraft Q, Biegemoment M, Ortskoordinate x entlang der Balkenachse

$$Q(x) = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} \ , \qquad q(x) = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}x^2} \ . \tag{7.56}$$

7.8 Regeln für Ableitungen höherer Ordnung

Summenregel und konstanter Faktor

$$(f+g)' = f' + g' \qquad (c \cdot f)' = c \cdot f' \qquad \text{ergibt sukzessive für } n \in \mathbb{N}:$$

$$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)} \qquad (c \cdot f)^{(n)} = c \cdot f^{(n)} \ .$$

Produktregel

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)' &= f' \cdot g + f \cdot g' \\
(f \cdot g)'' &= f'' \cdot g + 2 \cdot f' \cdot g' + f \cdot g'' \\
(f \cdot g)''' &= f''' \cdot g + 3 \cdot f'' \cdot g' + 3 \cdot f' \cdot g'' + f \cdot g''' \ .
\end{aligned}$$

Verallgemeinerung ergibt die

Leibniz-Regel:

$$A(n): \quad (f \cdot g)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(n-i)} \cdot g^{(i)} \ , \qquad n \in \mathbb{N}_0 \ . \tag{7.57}$$

Beispiel

Gesucht ist die dritte Ableitung von

$$f : x \rightarrow x^2 \cdot \sin(x) \; . \tag{7.58}$$

Vergleichen Sie Ihr Ergebnis bei Vorgehen nach der Produktregel und der Leibnizregel.

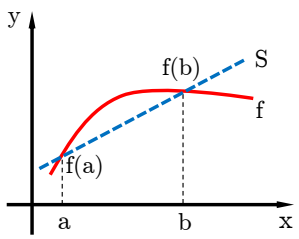
7.9 Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

7.9.1 Vorüberlegung: Sekantengleichung

Zunächst soll die lineare Funktionsgleichung der Sekante einer stetigen Funktion f durch die Punkte $P_1(a; f(a))$ und $P_2(b; f(b))$

$$f_{\text{Sekante}}(x) = c \cdot x + d \tag{7.59}$$

bestimmt werden.



Lösung

Zur Bestimmung von c und d sind zwei Wertepaare der Funktion notwendig. Gewählt werden die Punkte

$$P_1(a, f(a)) \qquad \text{und} \qquad P_2(b, f(b)) \; .$$

Dies ergibt folgendes zu lösendes Gleichungssystem

$$f(a) = c \cdot a + d \tag{7.60a}$$

$$f(b) = c \cdot b + d \; . \tag{7.60b}$$

Wird (7.60b) von (7.60a) abgezogen, so folgt

$$f(a) - f(b) = c \cdot (a - b) \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \; . \tag{7.61}$$

Einsetzen von (7.61) in (7.60a) ergibt

$$f(a) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} \cdot a + d \tag{7.62}$$

und somit

$$d = \frac{f(a) \cdot (a - b) - a \cdot f(a) + a \cdot f(b)}{a - b} \cdot a = f(a) - a \cdot \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \; . \tag{7.63}$$

Einsetzen von (7.61) und (7.63) in (7.59) liefert

$$f_{\text{Sekante}}(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot x + f(a) - a \cdot \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$= \underline{\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) + f(a)} \; . \tag{7.64}$$

7.9.2 Differenzierbarkeit und Stetigkeit

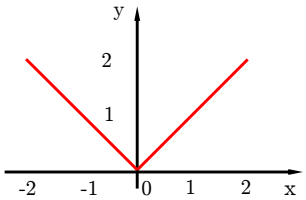
Satz 7.9.1: Jede in x_0 differenzierbare Funktion ist dort auch stetig.

Beweis: f sei in x_0 differenzierbar, dann existiert $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.
Da der Nenner gegen Null geht, kann der Grenzwert nur existieren wenn der Zähler auch gegen Null geht,

$$\lim_{h\to 0}(f(x_0+h)-f(x_0)) = 0 \quad \text{GWS} \quad \Rightarrow \quad \lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0) \quad \Rightarrow \quad f \text{ in } x_0 \text{ stetig.}$$

Keine Äquivalenz (Gleichwertigkeit) beider Eigenschaften:

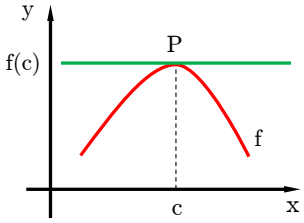
Gegenbeispiel $f : x \to |x|$ ist in x_0 stetig aber nicht differenzierbar, da links- und rechtsseitiger Grenzwert des Differentialquotienten verschieden sind.



7.9.3 Sätze von Fermat und Rolle

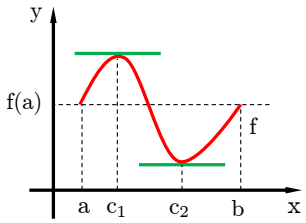
Satz 7.9.2 von Fermat (ohne Beweis): Die Funktion f sei auf dem Intervall I definiert und nehme an der inneren Stelle c von I einen absoluten Extremwert an. Ist f an der Stelle c differenzierbar, dann gilt $f'(c) = 0$. Der Graph von f hat in $P(c; f(c))$ eine waagerechte Tangente.

(Satz von Pierre Fermat, geb. 1601 Beaumont, gest. 1665 Toulouse.)



Satz 7.9.3 von Rolle: Die Funktion f sei auf $[a; b]$ stetig und auf $]a; b[$ differenzierbar, ferner sei $f(a) = f(b)$. Dann existiert (mindestens) ein $c \in]a; b[$ mit $f'(c) = 0$.

(Satz von Michel Rolle, geb. 1652 Ambert, gest. 1719 Paris.)



Beweis: Da f stetig ist, besitzt f in $[a; b]$ ein absolutes Maximum m_1 und ein absolutes Minimum m_2. Zwei Fälle sind möglich:

1) $m_1 = m_2 \quad \Rightarrow \quad f$ auf $[a; b]$ konstant
$\Rightarrow \quad f'(c) = 0$ für alle $c \in]a; b[$ (Ableitung einer Konstanten)

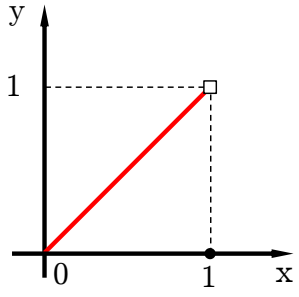
2) $m_1 \neq m_2 \quad \Rightarrow \quad f$ nimmt m_1 oder m_2 an einer inneren Stelle c $\in [a; b]$ an
$\Rightarrow$ Satz von Fermat (Satz 7.9.2) $f'(c) = 0$ q.e.d.

Hinweis zur Stetigkeit als Voraussetzung

Ein Verzicht auf die Stetigkeit als Voraussetzung des Satzes von Rolle (Satz 7.9.3) ist nicht möglich!

Gegenbeispiel:

$$f : x \to f(x) = \begin{cases} x, & \text{für } 0 \le x < 1; \\ 0, & x = 1. \end{cases} \qquad D = [0;1]$$



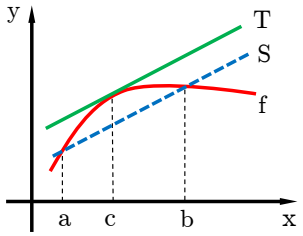
Die Funktion f ist in $]a;b[$ differenzierbar, außerdem gilt $f(0) = f(1) = 0$, f bei $x_0 = 1$ nicht stetig (Sprung).

Es gilt $f'(x) = 1 \neq 0$ für alle $x \in]0;1[$ nirgends $f'(c) = 0$.

7.9.4 Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Satz 7.9.4: Die Funktion f sei auf $[a;b]$ stetig und auf $]a;b[$ differenzierbar. Dann existiert mindestens eine Stelle $c \in]a;b[$ mit

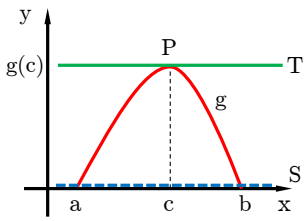
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \; . \tag{7.65}$$



Beweis: Sei f_s die lineare Funktion, deren Graph die Sekante ist

$$f_s(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) \; .$$

Gebildet wird eine neue Funktion $g(x) = f(x) - f_s(x)$.



Die Funktion $g(x)$ erfüllt die Voraussetzungen des Satzes von Rolle (Satz 7.9.3), Bild oben:

1) g stetig auf $[a;b]$ als Differenz zweier stetiger Funktionen

2) g differenzierbar auf $]a;b[$ als Differenz zweier differenzierbarer Funktionen

3) $g(a) = g(b) = 0$ wegen $f(a) = f_s(a)$ und $f(b) = f_s(b)$.

$\Rightarrow$ Nach dem Satz von Rolle existiert ein c mit $g'(c) = 0$

$\Rightarrow$ $g'(c) = f'(c) - f_s'(c) = 0$, wobei mit $f_s'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ folgt

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \text{q.e.d.}$$

Anwendung des Mittelwertsatzes: Tangentenkonstruktion

Es soll die Tangente an einem beliebigen Punkt c einer Parabel konstruiert werden

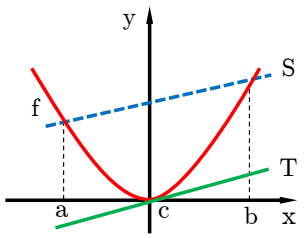
$$f : \rightarrow \; f(x) = t \cdot x^2 \; , \quad t \neq 0 \; . \tag{7.66}$$

Die Funktion f erfüllt die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes, es gilt $f^{'}(x) = 2 \cdot t \cdot x$. Wird ein Intervall $[a; b]$ vorgegeben und eine Sekante bezogen auf die Funktionswerte $f(a)$ und $f(b)$ konstruiert, so gilt für c aus dem Mittelwertsatz

$$f^{'}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{t \cdot b^2 - t \cdot a^2}{b - a} = \frac{t \cdot (b - a) \cdot (b + a)}{b - a} = t \cdot (a + b)$$

Mit $f^{'}(c) = 2 \cdot c \cdot t$ folgt

$$2 \cdot c \cdot t = t \cdot (a + b) \qquad \Leftrightarrow \qquad c = \frac{a + b}{2} \; .$$



Der Wert von c ist offenbar unabhängig von t (Streckung oder Stauchung der Parabel). An der Stelle c ist die Tangente parallel zur Sekante.

Konstruktion der Tangente an einer Stelle c:

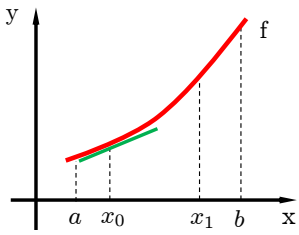
Vorgabe eines zweckmäßigen Intervalls mit dem Mittelpunkt c. Konstruktion der Sekante S, Konstruktion der zu S parallelen Tangente T am Punkt c.

7.10 Funktionsuntersuchung bzw. Kurvendiskussion

Im Folgenden werden Funktionen mit Hilfe der Differentialrechnung auf ihre Eigenschaften untersucht. Man spricht von *Funktionsuntersuchung*. Bezieht man sich auf den Graphen, ist der Begriff *Kurvendiskussion* üblich.

7.10.1 Monotonie

Sei immer $I =]a; b[$.



Bekannt: f monoton wachsend auf I

$$x_0 < x_1 \;\Rightarrow\; f(x_0) \leq f(x_1) \quad \text{(streng ohne =).}$$

Skizze zeigt: Für alle $x \in I$ ist $f'(x) > 0$.

Satz: Sei f auf I differenzierbar, dann gilt:

a) Für alle $x \in I$ $\quad f'(x) \left\{ \begin{array}{c} > 0 \\ < 0 \end{array} \right\} \;\Rightarrow\; f$ **streng** monoton $\left\{ \begin{array}{c} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{array} \right\}$. (7.67)

b) f monoton $\left\{ \begin{array}{c} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{array} \right\} \;\Rightarrow\;$ Für alle $x \in I$ $\quad f'(x) \left\{ \begin{array}{c} \geq 0 \\ \leq 0 \end{array} \right\}$. (7.68)

Beweis: Nur 1. Fall von **a)**:

Mit $x_0, x_1 \in I$ und $x_0 < x_1$ sind die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes erfüllt:

$$\Rightarrow \quad \text{es gibt ein } c \in]x_0, x_1[\qquad \text{mit} \qquad f'(c) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

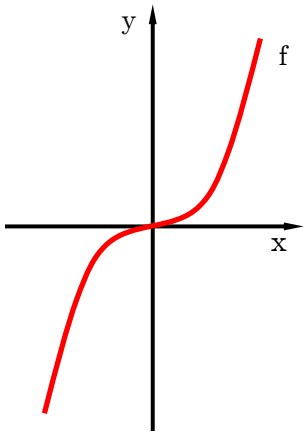
$$\underset{f'(c)>0}{\Rightarrow} \quad f(x_1) > f(x_0) \quad \Rightarrow \quad f \text{ streng monoton wachsend} \qquad \text{q.e.d.}$$

Beispiel:

$f: \; x \to x^3$

$f'(x) = 3 \cdot x^2 > 0$ für $I \subseteq \mathbb{R}^+$ oder $I \subseteq \mathbb{R}^-$

Es gilt sogar $I \subseteq R$, aber $f'(0) = 0$.



Also: Voraussetzungen des Satzes **a)** nur hinreichend, nicht notwendig!

7.10.2 Extremstellen

Definition: Sei f eine Funktion mit dem Definitionsbereich D_f und $x_0 \in D_f$.

a) $f(x_0)$ **absolutes** (globales) $\left\{ \begin{array}{c} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{array} \right\}$ $:\Leftrightarrow$ Für alle $x \in D_f$ $\left\{ \begin{array}{c} f(x) \leq f(x_0) \\ f(x) \geq f(x_0) \end{array} \right\}$.

(7.69)

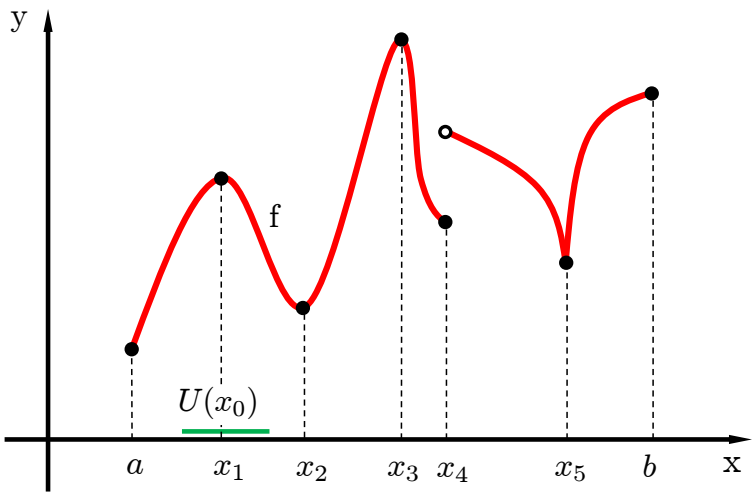
Sei U eine Umgebung von x_0:

b) $f(x_0)$ **relatives** (lokales) $\left\{ \begin{array}{c} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{array} \right\}$ $:\Leftrightarrow$ Für alle $x \in U$ $\left\{ \begin{array}{c} f(x) \leq f(x_0) \\ f(x) \geq f(x_0) \end{array} \right\}$.

(7.70)

x_0 heißt **Extremstelle**.

Beispiel



$D_f = [a, b]$

$f(a)$:
$f(x_1)$:
$f(x_2)$:
$f(x_3)$:
$f(x_4)$:
$f(x_5)$:
$f(b)$:

Satz:

a) f in x_0 differenzierbar: x_0 relative Extremstelle $\Rightarrow$ $f'(x_0) = 0$.

b) f in x_0 zweimal stetig differenzierbar:

$f'(x_0) = 0$ und $\left\{ \begin{array}{c} f''(x_0) < 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{array} \right\}$ $\Rightarrow$ x_0 ist $\left\{ \begin{array}{c} \text{Maximum-} \\ \text{Minimum-} \end{array} \right\}$ stelle von f .

Beweis:

a): Sei x_0 lokale Maximumstelle von $f \Rightarrow$ Für alle $x \in U$

$$\left(x < x_0 \Rightarrow \frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{x - x_0}_{\leq 0}} \geq 0 \right) \quad \text{sowie} \quad \left(x > x_0 \Rightarrow \frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{x - x_0}_{\geq 0}} \leq 0 \right)$$

also

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \qquad \text{sowie} \qquad \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

$$\underset{f \text{ diff.bar bei } x_0}{\Longrightarrow} \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = 0 \ .$$

(analog für x_0 lokale Minimalstelle)

b): Sei $f''(x_0) < 0$, Stetigkeit von $f'' \Rightarrow$ es existiert eine Umgebung $U =]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[$ mit $f''(x) < 0$ für alle $x \in U$:

$\Rightarrow \quad f'$ monoton fallend in U

$\underset{f'(x_0)=0}{\Rightarrow}$ für alle $x \leq x_0 \quad f'(x) \geq 0$ und für alle $x \geq x_0 \quad f'(x) \leq 0$

$\Rightarrow \quad f$ monoton steigend in $]x_0 - \epsilon, x_0[$ und f monoton fallend in $]x_0, x_0 + \epsilon[$

$\Rightarrow \quad f(x) \leq f(x_0)$ in $]x_0 - \epsilon, x_0[$ und $f(x_0) \geq f(x)$ in $]x_0, x_0 + \epsilon[$

$\Rightarrow \quad x_0$ lokale Maximalstelle (analog $f''(x_0) > 0$) q.e.d.

Ergänzung: Was tun bei $f''(x) = 0$?

Gilt $f'(x_0) = 0$ liegt eine waagerechte Tangente vor. Ist ebenfalls $f''(x_0) = 0$ entscheidet die nächstfolgende nichtverschwindende Ableitung $f^{(n)}$ an der Stelle x_0. Dann gilt:

$$f^{(n)}(x_0) \neq 0 \begin{cases} n \text{ ist gerade,} & \Rightarrow \quad \text{Extremwert;} \begin{cases} f^{(n)}(x_0) < 0: & \text{Maximum} \\ f^{(n)}(x_0) > 0: & \text{Minimum} \end{cases} \\ n \text{ ist ungerade,} & \Rightarrow \quad \text{Sattelpunkt.} \end{cases} \tag{7.71}$$

Kandidaten für Extremstellen $x \in D_f$:

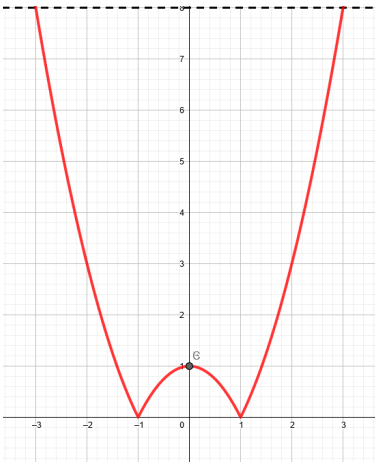
1) f bei x diff.-bar und $f'(x) = 0$

2) f bei x nicht diff.-bar

3) x liegt auf dem Rand von D_f

Beispiel:

$$f: \; x \;\to\; f(x) = |x^2 - 1| \,, \qquad D_f = \{x|\; |x| \leq 3\}$$



oder

$$f(x) = \begin{cases} -(x^2 - 1), & \text{für } |x| \leq 1; \\ x^2 - 1, & \text{für } 1 \leq |x| \leq 3. \end{cases}$$

Ableitungen

$$f'(x) = \begin{cases} -2x, & \text{für } |x| \leq 1; \\ 2x, & \text{für } 1 \leq |x| \leq 3. \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} -2, & \text{für } |x| \leq 1; \\ 2, & \text{für } 1 \leq |x| \leq 3. \end{cases}$$

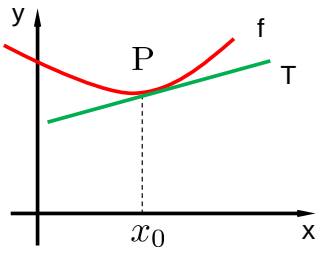
Prüfen der Möglichkeiten

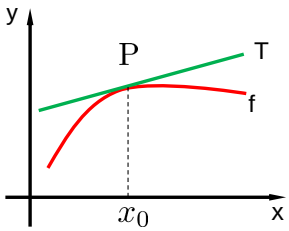
1) Für $x_0 = 0$ gilt: $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = -2$
$\Rightarrow x = 0$ lokale Maximumstelle

2) f bei $x = 1$ und $x = -1$ nicht diff.-bar, $f(x) \geq 0$ für alle x
$\Rightarrow f(1) = 0$ und $f(-1) = 0$ sind globale Minima

3) $x = 3$ und $x = -3$ sind mit $f(3) = f(-3) = 8$ globale Maximalstellen.

7.10.3 Krümmungsverhalten und Wendestellen





f konvexe Krümmung $:\Leftrightarrow$
Tangenten unterhalb des Graphen
(Linkskrümmung)

Anschauung:
Anstieg der Tangenten nimmt zu
$\Rightarrow f'$ monoton wachsend $\Rightarrow f''$ positiv

f konkave Krümmung $:\Leftrightarrow$
Tangenten oberhalb des Graphen
(Rechtskrümmung)

Anschauung:
Anstieg der Tangenten nimmt ab
$\Rightarrow f'$ monoton fallend $\Rightarrow f''$ negativ

Satz: Sei f auf I zweimal differenzierbar, dann gilt:

$$f \text{ auf } I \left\{ \begin{array}{c} \text{konvex} \\ \text{konkav} \end{array} \right\} \quad \Leftrightarrow \quad \text{für alle } x \in I \text{ gilt } \left\{ \begin{array}{c} f''(x) \geq 0 \\ f''(x) \leq 0 \end{array} \right\} . \tag{7.72}$$

(Beweis wie oben bei Max./Min.)

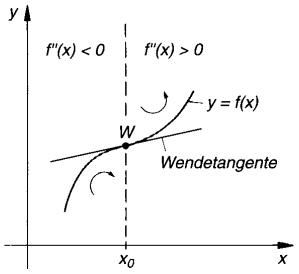
Die **Krümmung** κ ist ein quantitatives Maß für das Krümmungsverhalten:

$$\kappa = \frac{y''}{\sqrt{(1+(y')^2)^3}} \tag{7.73}$$

Sie gibt an, wie stark der Kurvenverlauf in unmittelbarer Nähe eines Punktes von dem einer Geraden abweicht ($\kappa_G = 0$). Die Krümmung an einer Stelle x_0 hat das gleiche Vorzeichen wie die zweite Ableitung an dieser Stelle. Somit kann damit ebenfalls auf das Krümmungsverhalten geschlossen werden. Es gilt:

$$\begin{aligned} \kappa > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \text{Linkskrümmung (konvex)} , \\ \kappa < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \text{Rechtskrümmung (konkav)} . \end{aligned}$$

Zwischen konvexen und konkaven Teilen des Graphen **wendet** die Kurve.



Definition: f sei auf $]x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon[$ differenzierbar, f sei auf $]x_0 - \epsilon; x_0[$ konvex und auf $]x_0; x_0 + \epsilon[$ konkav oder umgekehrt. Dann heißt x_0 *Wendestelle* von f und der Punkt $(x_0, f(x_0))$ *Wendepunkt*.

Satz: f sei hinreichend oft differenzierbar:

1) x_0 Wendestelle: $\Rightarrow \quad f''(x_0) = 0$

2) $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x_0$ Wendestelle

3) $f''(x_0) = f'''(x_0) = 0$ und $f^{(k)}(x_0) \neq 0$,
mit k erstes k für welches $f^{(k)}(x_0) \neq 0$ gilt, und ungerade $\Rightarrow \quad x_0$ Wendestelle.

Ein **Sattelpunkt** (auch *Terassenpunkt* oder *Horizontalwendepunkt* oder *Stufenwendepunkt* genannt) ist ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente. Die hinreichende Bedingung hierfür lautet:

$$f'(x_0) = 0 \ , \qquad f''(x_0) = 0 \qquad \text{und} \qquad f'''(x_0) \neq 0 \ . \tag{7.74}$$

Falls $f'''(x_0) = 0$ muss nach (7.71) (S. 7-26) entschieden werden.

7.10.4 Übersicht

	Funktion	**Graph**
	Funktionsuntersuchung	Kurvendiskussion
1)	Definitionsbereich	Definitionsbereich
2)	Periodizität gerade, ungerade	Achsen-, Punktsymmetrie
3)	Stetigkeit, Unstetigkeitsstellen Pole, $x \to \pm\infty$	Asymptoten
4)	Nullstellen Ableitungen	Achsenschnittpunkte
5)	Extremstellen	Hoch- und Tiefpunkte
6)	Konvexität, Konkavität Wendestellen	Wendepunkte Wendetangente Zeichnen des Graphen

7.11 Regeln von l'Hospital

Die Folgenden Regeln stammen von Guillaume l'Hospital[3] und werden häufig als l'Hospital-Regeln bezeichnet. Eigentlich sind sie aber bereits von Jakob Bernoulli[4] aufgestellt worden und dann von 1696 l'Hospital veröffentlicht worden. Daher werden sie auch als Bernoulli-l'Hospital-Regeln bezeichnet.

Zu berechnen sind Grenzwerte folgender Art:

Bsp.:	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$,	$\lim\limits_{x\to +0} x^x$,	$\lim\limits_{x\to +0} x\cdot\ln(x)$,	$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$,
Typ:	$\dfrac{0}{0}$	0^0	$0\cdot(-\infty)$	$\dfrac{+\infty}{+\infty}$

Satz - l'Hospital'sche Regel (für Typ $\frac{0}{0}$:

Die Funktionen f und g seien in $]x_0, x_0+\epsilon[$ $(\epsilon > 0)$ differenzierbar. Außerdem sei

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} g(x) = 0 \tag{7.75}$$

Existiert dann $\lim\limits_{x\to x_0+0} \frac{f(x)}{g(x)}$, so gilt

$$\lim_{x\to x_0+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \textbf{(l'Hospital'sche Regel)} \ . \tag{7.76}$$

Beweis:
Die Funktionen f und g sind in x_0 rechtseitig stetig und es gilt (7.75). Damit kann der Grenzwert (7.75) $g = 0$ als Funktionswert an der Stelle x_0 definiert werden, also $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Für ein x_1 mit $x_0 < x_1 < x_0 + \epsilon$ wird eine Funktion $h(x)$ definiert:

$$h(x) := f(x_1)\cdot g(x) - g(x_1)\cdot f(x) \ . \tag{7.77}$$

Damit gilt wegen $f(x_0) = g(x_0) = 0$ auch $h(x_0) = 0$. Außerdem gilt $h(x_1) = 0$. Damit erfüllt $h(x)$ die Voraussetzungen des Satzes von Rolle, siehe Abschnitt 7.9, S. 7-19. Danach existiert ein $c \in]x_0, x_1[$ mit

$$0 = h'(c) = f(x_1)\cdot g'(c) - g(x_1)\cdot f'(c) \qquad \text{also} \qquad \frac{f(x_1)}{g(x_1)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \ . \tag{7.78}$$

Für $x_1 \to x_0$ geht auch $c \to x_0$. Also folgt

$$\lim_{x\to x_0+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \ , \qquad \text{was mit (7.76) identisch ist,} \quad \text{q.e.d.}$$

Bemerkungen: Die Regel gilt auch für $x \to x_0 - 0$, $x \to x_0$ und $x \to \pm\infty$. Die Regel gilt auch, wenn f und g für $x \to x_0$ (o.ä.) bestimmt divergent sind, Typ „$\left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)$".

[3] Guillaume l'Hospital, geb. 1661 Paris, gest. 1704 Paris

[4] Johann Bernoulli, geb. 1667 Basel, gest. 1748 Basel, Lehrer von Leonard Euler, Vater von Daniel Bernoulli nach welchem die berühmte Bernoulli-Gleichung der Strömungslehre benannt ist

Grenzwerte vom Typ „$0 \cdot (\pm\infty)$“

Zurückführung auf die Fälle „$\frac{0}{0}$“ und „$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$“:

Sei $\lim\limits_{x \to x_0+0} [f(x) \cdot g(x)]$ vom Typ „$0 \cdot (\pm\infty)$ “, so Umformung

$$\lim_{x \to x_0+0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \text{Typ } \frac{0}{0}\,, \qquad \text{oder} \qquad \lim_{x \to x_0+0} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \quad \text{Typ } \frac{\pm\infty}{\pm\infty}\,. \tag{7.79}$$

Beispiel

$$\lim_{x \to 1} \left[(1-x) \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right] \tag{7.80}$$

Lösung

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1} \left[(1-x) \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right] & \qquad \text{Typ „}0 \cdot (+\infty)\text{“} \\
&= \lim_{x \to 1} \frac{1-x}{\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)}} \qquad \text{Typ „}\frac{0}{0}\text{“} \quad \Rightarrow \quad \text{Ableiten} \\
&= \lim_{x \to 1} \frac{-1}{\frac{-\pi/2}{\tan^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}} \qquad \text{QR mit} \quad \tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)} \\
&= \lim_{x \to 1} \left(\frac{2}{\pi} \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right) = \frac{2}{\pi} \cdot 1 = \underline{\underline{\frac{2}{\pi}}}\,.
\end{aligned}$$

Grenzwerte vom Typ „$(+\infty) - (+\infty)$“

Sei $\lim\limits_{x \to x_0+0} [f(x) - g(x)]$ vom Typ „$(+\infty) - (+\infty)$“, dann erweitern des Bruches

$$\frac{f(x) - g(x)}{1} \qquad \text{mit} \qquad \frac{1}{f(x) \cdot g(x)}\,.$$

Dies ergibt

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x) \cdot g(x)}} \qquad \text{und somit den Typ } \frac{0}{0}\,.$$

Grenzwerte vom Typ „0^0“, „$(+\infty)^0$“ und „$1^{(\pm\infty)}$“

Die Grenzwerte haben alle die Form

$$\lim_{x\to x_0+0} [f(x)]^{g(x)} \quad . \tag{7.81}$$

Man betrachte dazu

$$\ln [f(x)]^{g(x)} = g(x) \cdot \ln(f(x) \quad \text{für } f(x) > 0 \tag{7.82}$$

und somit den Grenzwert

$$\lim_{x\to x_0+0} g(x) \cdot \ln (f(x)) \quad . \tag{7.83}$$

Dieser ist vom Typ „$0 \cdot (\pm\infty)$“ und somit eventuell berechenbar. Existiert der Grenzwert (7.83), so gilt wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion

$$\lim_{x\to x_0+0} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to x_0+0} \exp (g(x) \cdot \ln(f(x)) = \exp \left(\lim_{x\to x_0+0} g(x) \cdot \ln(f(x)) \right) \quad . \tag{7.84}$$

Übersicht Regel von Bernoulli und l'Hospital

Ausdrücke der Form »$\frac{0}{0}$«, »$\frac{\infty}{\infty}$«, »$0\cdot\infty$« oder ähnlich heißen *unbestimmte Ausdrücke*. Die Funktion ist an dieser Stelle (im Folgenden x_0) bestimmt divergent.

Wird $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ ein unbestimmter Ausdruck und falls f und g in der Umgebung $U(x_0)\setminus\{x_0\}$ differenzierbar sind und ist $\forall x\in U(x_0)\setminus\{x_0\}: g(x)\neq 0$, gilt die

Regel von Bernoulli und l'Hospital

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \text{(Keine Quotientenregel anwenden!)}$$

Die Regel gilt auch für $x\to x_0+, x\to x_0-, x\to\infty, x\to-\infty$.

Wenn der neue Grenzwert wieder ein unbestimmter Ausdruck ist, ist das Verfahren zu wiederholen. Unter Umständen kann die Regel auch versagen.

♦ **Beispiel**

$$\varphi(x)=\frac{\sin 2x-2\sin x}{2e^x-x^2-2x-2} \qquad \varphi(0)\text{ hat die Form »}\frac{0}{0}\text{«}$$

$$\lim_{x\to 0}\varphi(x)=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x-2\cos x}{2e^x-2x-2}=\lim_{x\to 0}\frac{-4\sin 2x+2\sin x}{2e^x-2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-8\cos 2x+2\cos x}{2e^x}=-3 \quad \text{d.h. } L=\{-3\}$$ ♦

Ausdrücke der Form »$0\cdot\infty$«, »$\infty-\infty$«, »0^0«, »∞^0«, »$1^{\pm\infty}$«

Diese Ausdrücke lassen sich im Allgemeinen in Ausdrücke »$\frac{0}{0}$« oder »$\frac{\infty}{\infty}$« überführen gemäß nachfolgender Tabelle:

$\varphi(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$	Umgeformter Grenzwert
$f(x)\cdot g(x)$	»$0\cdot\infty$«, »$0\cdot(-\infty)$«	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ oder $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$
$f(x)-g(x)$	»$\infty-\infty$«	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{g(x)}}$
$f(x)^{g(x)}$	»0^0«, »∞^0«, »$1^{\pm\infty}$«	$\lim\limits_{x\to x_0}e^{g(x)\cdot\ln f(x)}$

7.12 Extremwertaufgaben

Beispiel: Zerlegung einer Zahl

Eine positive Zahl ist so in zwei Summanden zu zerlegen, dass ihr Produkt am größten ist.

Sei $t \in \mathbb{R}^+$ und $t = x + y$ sowie das Produkt $P = x \cdot y$.

Wegen $y = t - x$ gilt $P = x \cdot (t - x) = t \cdot x - x^2$. Gesucht ist das absolute Maximum von P:

$$P: \; x \to P(x) = t \cdot x - x^2 \qquad D = \mathbb{R} \; .$$

P ist auf D stetig und beliebig oft differenzierbar und es gilt

$$P'(x) = t - 2 \cdot x \; , \qquad P''(x) = -2 \quad \text{für alle } x \in D \; .$$

Die Berechnung der Nullstelle der ersten Ableitung ergibt

$$P'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t - 2 \cdot x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{t}{2} \; ,$$

$$\text{wobei} \quad P''\left(\frac{t}{2}\right) = -2 < 0 \quad \text{und} \quad P\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{t^2}{4} \quad \text{gilt.}$$

Berechnung 2. Faktor: $y = t - \dfrac{t}{2} = \dfrac{t}{2}$.

Da $P''(t/2) < 0$ ist, hat P bei $x = \frac{t}{2}$ ein relatives Maximum. Da die Funktion $P(x)$ stetig ist und für $x < t/2$ streng monoton wachsend ($P'(x < t/2) > 0$) und für $x > t/2$ streng monoton fallend ($P'(x < t/2) < 0$) handelt es sich um ein absolutes Maximum (ggf. Skizze Graph). Der Funktionswert $P(t/2) = t^2/4$ ist das maximal mögliche Produkt bei der Zelegung einer Zahl t.

7.13 Parameterdarstellung und impliziter Form

7.13.1 Parameterdarstellung

Es liege eine Kurve in Parameterdarstellung vor:

$$\{(x(t); y(t)) \mid t \in I \subseteq \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2 \ . \tag{7.85}$$

Dieser Fall liegt zum Beispiel bei der Parameterbeschreibung eines schiefen Wurfes in der Ebene vor. Als Parameter wird häufig die Zeit t gewählt. Die Funktion $y(t)$ stellt den vertikalen Verlauf des Wurfes und $x(t)$ den horizontalen Verlauf dar. Damit geben $y(t)$ und $x(t)$ jeweils den horizontalen und den vertikalen Abstand zum Koordinatenursprung in Abhängigkeit der Zeit an.

Die Funktionen $x : t \to x(t)$ und $y : t \to y(t)$ seien differenzierbar. Mit den Bezeichnungen

$$y'(x) := \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \ , \qquad \dot{y}(t) := \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \ , \qquad \dot{x}(t) := \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{7.86}$$

gilt dann

$$y'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} \ . \tag{7.87}$$

Die Schreibweise in Leibnizdarstellung verdeutlicht den Zusammenhang

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \ . \tag{7.88}$$

7.13.2 Funktionen in impliziter Darstellung

Gegeben sei die implizite Funktion

$$F(x, y) = 0 \ . \tag{7.89}$$

Der Graph der Funktion (7.89) ist eine Kurve in der xy-Ebene.

Die Ableitung des Terms (7.89) nach x und die Auflösung nach y' liefert die Ableitung von y nach x.

Beispiele siehe Vorlesung.

7.14 Aufgaben zu Kapitel 7

7.14.1 Einführung in die Differentialrechnung

Aufgabe 7.1

Erläutern Sie anhand der entsprechenden Definitionen folgende Begriffe

a) Grenzwert einer Funktion f an der Stelle x_0,

b) Stetigkeit einer Funktion f an der Stelle x_0,

c) Stetigkeit einer Funktion f in einem Intervall $[a; b]$,

d) Erste Ableitung einer Funktion f an der Stelle x_0,

e) Erste Ableitung einer Funktion f in einem Intervall $]a; b[$,

f) Differenzierbarkeit einer Funktion f an der Stelle x_0,

g) Differenzierbarkeit einer Funktion f in einem Intervall $]a; b[$.

Aufgabe 7.2

Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = x^2$ an der Stelle **a)** x_0 = -2 und **b)** x_0 = 4 mit Hilfe des Grenzwertes.

Bestimmen Sie die Ableitung der o.g. Funktion für beliebige x_0 des Definitionsbereiches **c)** mit Hilfe des Grenzwertes und **d)** mit Hilfe der Potenzregel.

Aufgabe 7.3

Berechnen Sie mit Hilfe der Ableitungsregel für die Umkehrfunktion

$$\left(x^{\left(\frac{1}{n}\right)}\right)' \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}\ .$$

Dabei kann die Ableitungsregel für die Ableitung einer Potenzfunktion verwendet werden.

Aufgabe 7.4

Bestimmen Sie die erste Ableitung folgender Funktionen

a) $y = \sqrt{x}$ **b)** $y = \sqrt[3]{x^4}$ **c)** $y = -10 \cdot x^4 + 2 \cdot x^3 - 2$

d) $y = \dfrac{10 \cdot x}{x^2 + 1}$ **e)** $y = 2 \cdot x \cdot \sqrt{x^2 - 1}$.

Aufgabe 7.5

Zeigen Sie mit Hilfe der Quotientenregel, dass gilt

a) $(\tan(x))' = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$ **b)** $(\cot(x))' = -\dfrac{1}{\sin^2(x)} = -\left(1 + \cot^2(x)\right)$.

Aufgabe 7.6

Bestimmen Sie die erste Ableitung folgender Funktionen

a) $y = \dfrac{10}{x^3} - 3 \cdot \log_{10} x + \tan(x)$ **b)** $y = e^t \cdot \cos(t)$ **c)** $y = \ln(x) \cdot \cosh(x)$

d) $y = \dfrac{\ln(x)}{x^2}$ **e)** $y = \sqrt{\sin(x)}$ **f)** $y = \sin(x+2)$ **g)** $y = 5 \cdot \cos(x^2 + 2 \cdot x - 1)^2$.

Aufgabe 7.7

Zeigen Sie mit Hilfe der Ableitungsregel für die Umkehrfunktion, dass gilt

$$(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{für } x \in]-1;1[\ .$$

Aufgabe 7.8

Zeigen Sie mit Hilfe der Ableitungsregel für die Umkehrfunktion, dass gilt

$$(\text{arccot}(x))' = -\frac{1}{1+x^2} \quad \text{für } x \in]0;\pi[\ .$$

Aufgabe 7.9

Zeigen Sie, dass sich für die erste Ableitung von Areakosinus hyperbolicus $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ ergibt, indem Sie die explizite Darstellung dieser Funktion (siehe unten) ableiten. Es gilt

$$\text{arcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \quad (x > 1) \ .$$

Aufgabe 7.10

Berechnen Sie die erste Ableitung von Areatangens hyperbolicus für $|x|$<1,

a) mit Hilfe der Ableitungsregel für die Umkehrfunktion,

b) indem Sie die explizite Darstellung mit Ketten- und Quotientenregel ableiten.

Aufgabe 7.11

Ermitteln Sie alle Punkte der Funktion

$$y = (x-1)^3 \cdot (x+1)$$

zu denen eine zur x-Achse parallele Tangente gehört.

7.14.2 Logarithmische Differentation

Aufgabe 7.12

Berechnen Sie die Ableitung

$$y = (\text{arctan}(x))^x \ .$$

7.14.3 Höhere Ableitungen

Aufgabe 7.13

Berechnen Sie die zweite Ableitung

$$f(x) = \exp\left(\sin^2(x)\right) \ .$$

Aufgabe 7.14

Bestimmen Sie die vierte Ableitung

a) $f(x) = 3 \cdot x^4 - 5 \cdot x^2 + \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ **b)** $f(x) = \frac{x^3}{e^x}$.

Aufgabe 7.15

Berechnen Sie die $n$te-Ableitung indem Sie eine entsprechende Fallunterscheidung vornehmen

$$f(x) = \cos(x) \ .$$

7.14.4 Funktionsuntersuchung und Kurvendiskussion

Aufgabe 7.16

Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Symmetrie, Nullstellen, Pole, Asymptoten, relative Extremwerte und Wendepunkte. Bestimmen Sie den Definitionsbereich und skizzieren Sie die Funktionsgraphen.

a) $y = \frac{x^3}{x-2}$ **b)** $y = \frac{x-1}{x+1}$ **c)** $y = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$.

Aufgabe 7.17

Es soll eine Funktionsuntersuchung für die *Gaußsche Fehlerkurve* durchgeführt werden. Im allgemeinen Fall gilt

$$f : x \to f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right) \ ,$$

wobei μ den Mittelwert und σ^2 die Streuung darstellt. Hier soll zur Vereinfachung $\sigma = 1$ angesetzt werden. Untersuchen Sie die Funktion auf Symmetrieverhalten, Stetigkeit, Monotonieverhalten, Nullstellen, relative Extremwerte und Wendepunkte. Bestimmen Sie zu Beginn den Definitionsbereich. Als weitere Vereinfachung soll nur mit der ersten und zweiten Ableitung gearbeitet werden. Skizzieren Sie auch den Graphen der Funktion.

Aufgabe 7.18

a) Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) = a \cdot e^{-x} - b \cdot e^{-2x}$ die Parameter a und b so, dass die Kurve die Randbedingungen $f(0) = 1$ und $f'(0) = 0$ einhält !
Wenn Sie a) nicht gelöst haben, nehmen Sie als Ergebnis an: a=1, b=1/2 !

b) Bestimmen Sie ihre Nullstelle sowie die Koordinaten ihres Wendepunktes und die Steigung der Tangente durch den Wendepunkt ! (***Exakte Werte, d.h. Exponentialausdrücke umformen !)***

c) Skizzieren Sie die Kurve mit der ungefähren Lage dieser Punkte und der Tangente !
Achsen beschriften ! Lassen Sie erkennbar werden,
ob diese Kurve eine Assymptote hat und welche !

Aufgabe 7.19

Untersuchen Sie folgende Funktion auf Symmetrie, Stetigkeit, Pole, Nullstellen, Asymptoten, relative Extremstellen und Wendestellen. Bestimmen Sie den Definitionsbereich und skizzieren Sie den Funktionsgraphen

$$f :\to f(x) = x^2 \cdot e^{-x} \ .$$

7.14.5 Regeln von Bernoulli l'Hospital

Aufgabe 7.20

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte

$$\textbf{a)} \ \lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x} \qquad \textbf{b)} \ \lim_{x\to \pi/2} \frac{\ln(\sin(x))}{(\pi - 2x)^2} \qquad \textbf{c)} \ \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3}{\ln(x)} \ .$$

[Lsg.: **a)** $\ln(a/b)$, **b)** $-1/8$, **c)** ∞.]

Aufgabe 7.21

Bestimmen Sie folgenden Grenzwerte! Geben Sie vor der Berechnung den Grenzwerttyp an

$$\textbf{a)} \ \lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x \qquad \textbf{b)} \ \lim_{x\to +\infty} x \cdot \left(\sqrt[3]{1 + \frac{2}{x}} - 1\right) \ .$$

[Lsg.: **a)** e^a, **b)** $2/3$.]

7.14.6 Extremwertaufgaben

Aufgabe 7.22

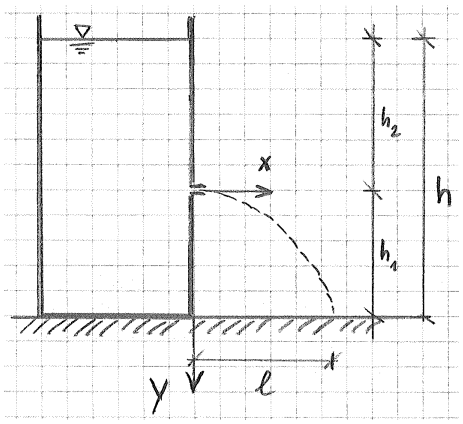
In einem Wasserbehälter liegt die Wassertiefe h vor. Aus der Öffnung in der Höhe h_1 strömt das Wasser mit der Geschwindigkeit

$$v_0 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_2} \quad \text{aus.}$$

Es beschreibt eine quadratische Parabel

$$y = \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{v_0^2} \; .$$

Ermitteln Sie die Höhe h_1, für die der Wasserstrahl am weitesten vom Behälter entfernt auf den Boden auftrifft (l wird maximal).



Aufgabe 7.23 Optimale Balkengeometrie

Ein beiderseits aufliegender Balken mit einem rechteckigen Querschnitt wird durch eine konstante Streckenlast q = const. belastet (Bild A-29). Die Durchbiegung y des Balkens an der (festen) Stelle x ist dabei umgekehrt proportional zum Flächenmoment

$$I = \frac{1}{12}\, a\, b^3$$

$$\left.\begin{array}{ll} a: & \text{Breite} \\ b: & \text{Dicke} \end{array}\right\} \text{des Balkens}$$

Der Balken soll aus einem kreisrunden Baumstamm vom Radius R heraus geschnitten werden und zwar so, dass die Durchbiegung des (belasteten) Balkens *möglichst klein* wird.
Wie sind a und b zu wählen?

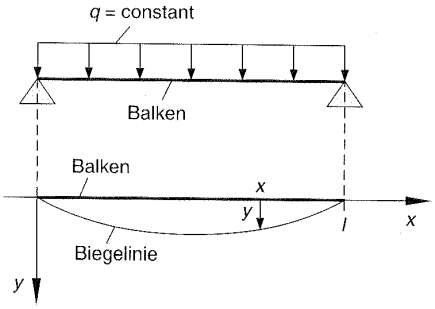
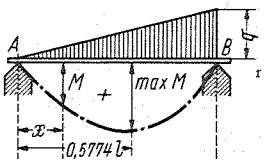


Bild A-29

[Lsg.: $a = R$, $b = \sqrt{3} \cdot R$.]

Aufgabe 7.24 Biegelinie

Berechnen Sie den Ort der maximalen Durchbiegung des dargestellten Balkens. Die Biegelinie mit der dargestellten Belastung in Abhängigkeit von x lautet mit den üblichen Bezeichnungen (l Balkenlänge)



$$y(x) = \frac{q \cdot l^4}{360 \cdot E \cdot I} \cdot \left(\frac{7x}{l} - \frac{10x^3}{l^3} + \frac{3x^5}{l^5} \right) \; .$$

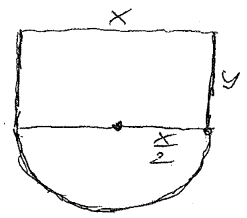
[Lsg.: $x_{max} = 0,519 \cdot l$.]

Aufgabe 7.25 Kegelvolumen

$P(u, v)$ sei ein beliebiger Punkt der Parabel $y = -0,5 \cdot x^2 + 2 \cdot x$ Bestimmen Sie P so, dass das Dreieck ABP mit $A(0; 0))$, $B(u; 0)$ und $P(u, v)$ den größten Flächeninhalt hat. Wird das Dreieck um die x-Achse gedreht, so entsteht ein Kegel. Wie groß ist sein maximales Volumen?

Aufgabe 7.26 Gerinnequerschnitt

Der vorgegebene Querschnitt Q einer durchströmten Rinne besteht aus einem Rechteckquerschnitt mit unten angesetztem Halbkreis. Wie sind die Abmessungen der Rinne zu wählen, damit der Materialverbrauch möglichst gering ist? Berechnen Sie den minimalen benetzten Gerinneumfang in Abhängigkeit von Q und zeigen Sie, dass es sich bei der Extremstelle um ein Minimum handelt. (Hinweis: Es ist der benetzte Umfang zu optimieren!)



Aufgabe 7.27 Abstand von Funktionen

Gegeben sind die Funktionen

$$f \,:\, x \,\rightarrow\, f(x) = x^3 \qquad \text{und} \qquad g \,:\, x \,\rightarrow\, g(x) = x^4$$

im Intervall $[0; 1]$. An welcher Stelle $x \in [0; 1]$ ist $f(x) - g(x)$ am größten? Wie groß ist die maximale Differenz?

Aufgabe 7.28 Minimaler Wendepunkt

Zeigen Sie, dass jede der Funktionen

$$f_t \,:\, x \,\rightarrow\, t \cdot x^3 + (t^2 + 1) \cdot x^2 + x \,, \qquad t \in \mathbb{R}^+ \,,$$

genau eine Wendestelle $x_W(z)$ besitzt. Für welchen Wert von t ist $x_W(t)$ minimal?

Aufgabe 7.29 Zwei Geraden

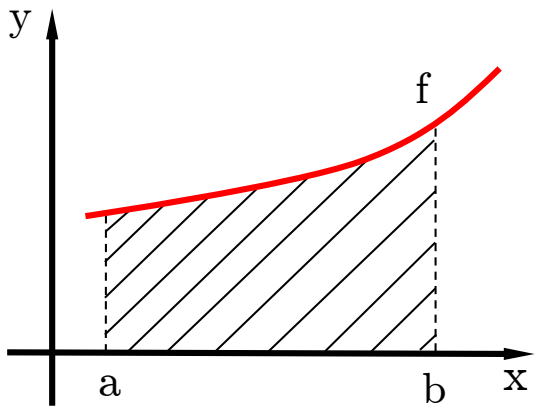
Gegeben ist eine Gerade g_1, die zur x-Achse mit dem Abstand 9 parallel ist, und eine Gerade g_2, mit der Gleichung

$$y = a \cdot x - a^2 \,, \qquad 0 < a < 9 \,.$$

Die y-Achse und die Gerade g_2 begrenzen auf g_1 eine Strecke der Länge d. Für welches a wird d minimal?

Kapitel 8

Integralrechnung



Kapitelinhalt

8.1 Das unbestimmte Integral 8-1

8.1.1 Integrationsregeln 8-1

8.2 Das bestimmte Integral 8-8

8.2.1 Definition, Existenz und Eigenschaften 8-8

8.2.2 Berechnung bestimmter Integrale 8-13

8.3 Anwendungen der Integralrechnung in der Mechanik 8-17

8.3.1 Statisches Moment 8-17

8.3.2 Schwerpunktberechnung 8-18

8.3.3 Momente zweiten Grades 8-21

8.3.4 Biegelinie 8-23

8.3.5 Guldinsche Regeln 8-23

8.3.6 Bogenlänge einer Kurve 8-24

8.4 Näherungsweise Berechnung bestimmter Integrale 8-25

8.4.1 Rechteckformel 8-25

8.4.2 Trapezformel 8-26

8.4.3 Keplersche Fassregel und Simpsonsche Regel 8-28
8.5 Uneigentliche Integrale 8-32
8.5.1 Unendliche Integrationsgrenzen 8-32
8.5.2 Unendlicher Integrand 8-33
8.6 Aufgaben zu Kapitel 8 8-34
8.6.1 Unbestimmte Integrale 8-34
8.6.2 Partielle Integration 8-34
8.6.3 Integration durch Substitution 8-34
8.6.4 Bestimmte Integrale 8-35
8.6.5 Integration nicht stetiger Funktionen 8-35
8.6.6 Uneigentliche Integrale 8-35
8.6.7 Länge eines Bogenstückes 8-35
8.6.8 Flächenbestimmung 8-35
8.6.9 Schwerpunktbestimmung 8-36
8.6.10 Flächenträgheitsmomente 8-37

8.1 Das unbestimmte Integral

8.1.1 Integrationsregeln

8.1.1.1 Stammfunktionen und unbestimmte Integrale

Gesucht sind Funktionen F mit $F' = f$ mit vorgegebenem f.

Definition: Sei I ein offenes Intervall und f auf I definiert. Dann heißt F Stammfunktion von F auf I genau dann, wenn

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{für alle} \quad x \in I \tag{8.1}$$

oder kurz

$$F \quad \text{Stammfunktion von } f \text{ auf } I \;:\Leftrightarrow\; \text{für alle } x \in I \text{ gilt: } F'(x) = f(x)\ . \tag{8.2}$$

Beispiel:

$$F\ :\ x \to \frac{x^3}{3} \quad \text{ist Stammfunktion zu} \quad f\ :\ x \to x^2\ ,\ I = \mathbb{R}\ . \tag{8.3}$$

Satz: Ist F eine beliebige Stammfunktion von f auf I, so ist jede Stammfunktion von f auf I von der Form $F + c$ mit $c \in \mathbb{R}$ (ohne Beweis).

Definition: Die Menge aller Stammfunktionen heißt das **unbestimmte Integral** von f auf I.

Bezeichnung: Falls ein F existiert, so sagt man, das *Integral existiert*:

$$\{F \mid F' = f\} \;=:\; \int f(x)\,\mathrm{d}x\ . \tag{8.4}$$

oder

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c\ , \qquad \text{mit} \quad c \quad \text{Integrationskonstante}\ . \tag{8.5}$$

Es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right) = F'(x) + c' = f(x)\ , \tag{8.6}$$

was eine Probe für die Berechnung des unbestimmten Integrals darstellt.

8.1.1.2 Unbestimmte Integrale elementarer Funktionen

Zu jeder Differentationsregel gehört eine Integrationsregel.

Bsp.: $(\sin(x))' = \cos(x)$ ergibt $\int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) + C$.

Festlegungen: $n, k \in \mathbb{Z}$, $C \in \mathbb{R}$

(1) $\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$ für $n < -1$ gilt zusätzlich $x \neq 0$	(2) $\int x^a\mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$ $a \in \mathbb{R}, a \neq -1, x > 0$
(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln\lvert x\rvert + C \quad x \neq 0$	(4) $\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$
(5) $\int a^x\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad a \in \mathbb{R}_{>0},\ a \neq 1$	(6) $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$
(7) $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$	(8) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \tan x + C \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
(9) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\cot x + C \quad x \neq k\pi$	(10) $\int \sinh x\,\mathrm{d}x = \cosh x + C$
(11) $\int \cosh x\,\mathrm{d}x = \sinh x + C$	(12) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cosh^2 x} = \tanh x + C$
(13) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh^2 x} = -\coth x + C \quad x \neq 0$	(14) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \begin{cases} \arctan x + C_1 \\ -\operatorname{arccot} x + C_2 \end{cases}$
(15) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \begin{cases} \operatorname{artanh} x + C = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + C \text{ für } \lvert x\rvert < 1 \\ \operatorname{arcoth} x + C = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} + C \text{ für } \lvert x\rvert > 1 \end{cases}$	
(16) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arsinh} x + C = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C$	
(17) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C_1 \\ -\arccos x + C_2 \end{cases} \quad \lvert x\rvert < 1$	
(18) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcosh}\lvert x\rvert \cdot \operatorname{sgn} x + C = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2-1}\right\rvert + C \quad \lvert x\rvert > 1$	

Bild 8.1: *Grundintegrale*

8.1.1.3 Allgemeine Integrationsregeln für unbestimmte Integrale

Zu jeder Differentationsregel gehört eine Integrationsregel

1) $$\int k \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = k \cdot \int f(x)\,\mathrm{d}x \tag{8.7}$$

oder: Ein konstanter Faktor kann vor das Integralzeichen gezogen werden.

2) $$\int (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x \tag{8.8}$$

oder: Eine Summe kann gliedweise integriert werden.

3) $$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + c\,, \tag{8.9}$$

falls F Stammfunktion von f, $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

(8.10)

Beweis.

1. Sei $F' = f$, so lautet die Behauptung

$\int \underline{K \cdot f(x)}\,dx = K \cdot (F(x) + c)$. Dies gilt wegen

$(K \cdot (F(x) + c))' = (K \cdot F(x) + K \cdot c)' = K \cdot F(x) = \underline{K \cdot f(x)}$

2. Sei $F' = f$ und $G' = g$, so lautet die Behauptung

$\int (\underline{f(x) + g(x)})\,dx = (F(x) + C_1) + (G(x) + C_2)$. Dies gilt wegen

$(F(x) + G(x) + C_1 + C_2)' = F'(x) + G'(x) = \underline{f(x) + g(x)}$

3. $\left(\frac{1}{a} \cdot F(ax+b) + c\right)' \underset{KR}{=} \frac{1}{a} \cdot F'(ax+b) \cdot a = \underline{f(ax+b)}$

qed.

8.1.1.4 Partielle Integration

Ausgangspunkt ist die Produktregel $(f \cdot g)'$, wobei es üblich ist, u und v zu benutzen:

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \ . \tag{8.11}$$

Daraus ergibt sich die **Regel für die partielle Integration**:

Sind u und v differenzierbare Funktionen auf I und existiert $\int u'(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x$, dann existiert auch $\int u(x) \cdot v'(x)\,\mathrm{d}x$, und es gilt

$$\int u(x) \cdot v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x \ . \tag{8.12}$$

Beweis: Differentation der rechten Seite von (8.12) ergibt

$$\begin{aligned}\left(u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x\right)' \\ &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) - u'(x) \cdot v(x) \\ &= \underline{u(x) \cdot v'(x)}\end{aligned}$$

also den Integranden auf der linken Seite von (8.12) q.e.d.

Merkregel

Die Regel für die partielle Integration (8.12) kann durch Integration direkt aus der Produktregel (8.11) gewonnen werden. Umstellen von (8.12) liefert

$$\begin{aligned}u(x) \cdot v'(x)\,\mathrm{d}x &= (u(x) \cdot v(x))' - u'(x) \cdot v(x) \qquad \text{(Integration)} \\ \int u(x) \cdot v'(x)\,\mathrm{d}x &= \int (u(x) \cdot v(x))'\,\mathrm{d}x - \int u'(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x \\ \int u(x) \cdot v'(x)\,\mathrm{d}x &= u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x \ .\end{aligned}$$

Spezialfall

Ein Sonderfall liegt vor, falls $u(x) = v(x) = f(x)$ gilt. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}\int u(x) \cdot v'(x)\,\mathrm{d}x &= u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x \\ \int f(x) \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x &= f(x) \cdot f(x) - \int f'(x) \cdot f(x)\,\mathrm{d}x \\ 2 \cdot \int f(x) \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x &= (f(x))^2 \\ \int f(x) \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x &= \underline{\frac{(f(x))^2}{2} + c} \ .\end{aligned} \tag{8.13}$$

(8.13) gilt auch, wenn $f(x)$ nicht explizit bekannt ist. Eine Anwendung ist zum Beispiel die Herleitung der Formel für die kinetische Energie bei reinen Rotationsbewegungen eines Starrkörpers. Siehe hierzu Lehrbücher der Technischen Mechanik 3[1]

In einigen Fällen lässt sich (8.13) auch auf zusammengesetzte Funktionen anwenden. Zum Beispiel ergibt sich für

$$f(x) = \sin(x) \qquad f'(x) = \cos(x)$$

nach (8.13)

$$\begin{aligned}
\int f(x) \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x &= \int \underbrace{\sin(x)}_{v} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{u'}\,\mathrm{d}x \\
&= \underbrace{\sin^2(x)}_{v\cdot u} - \int \underbrace{\cos(x)\cdot\sin(x)}_{v'\cdot u}\,\mathrm{d}x \\
\Rightarrow \quad 2 \cdot \int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x &= \sin^2(x) \\
\Rightarrow \quad \int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x &= \underline{\frac{\sin^2(x)}{2} + c}\,.
\end{aligned}$$

Als Probe kann die Ableitung der Stammfunktion berechnet werden. Anwendung der Kettenregel ergibt

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\sin^2(x)}{2} + c\right)' &= \frac{1}{2}\cdot 2 \cdot \sin(x)\cdot\cos(x) \\
&= \underline{\sin(x)\cdot\cos(x)}\ \surd\,.
\end{aligned}$$

[1] z.B. Gross, Hauger, Schröder, Wall: Technische Mechanik, Band 3, Kinetik, 9. Auflage, Springer Verlag, Berlin (2006), S. 141 ff.

8.1.1.5 Substitutionsmethode bei unbestimmten Integralen

Ziel ist es, ein zu lösendes Integral durch Substitution in ein Grundintegral, bzw. ein Integral, welches in Integraltabellen enthalten ist, zu wandeln. Eventuell ist dies auch erst nach Anwendung weiterer Integrationsmethoden möglich.

Unter der formalen Voraussetzung, dass sich eine differenzierbare Funktion $x = \varphi(u)$ finden lässt, welche umkehrbar ist mit $u = \psi(x)$, gilt die

Substitutionsregel

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u \tag{8.14}$$

mit $x = \varphi(u)$ (nach Integration Rücksubstitution mit $u = \psi(x)$) .

Dabei gilt: $x = \varphi(u) = \psi^{-1}(x)$ bzw. $u = \psi(x) = \varphi^{-1}(u)$.

Auf die Überprüfung der formalen Voraussetzungen der Substitutionsregel kann verzichtet werden, wenn die Ableitung der berechneten Stammfunktion $F'(x)$ wie notwendig den gesuchten Integranden $f(x)$ ergibt, also $F'(x) = f(x)$ erfüllt ist.

Beispiel: Gesucht ist die Stammfunktion mit der Substitutionsmethode nach (8.14) von

$$\int \frac{x}{\sqrt{a \cdot x^2 + b}}\,\mathrm{d}x\ . \tag{8.15}$$

$$\text{Substitution:} \quad u = \psi(x) = a \cdot x^2 + b \tag{8.16a}$$

$$\text{Umkehrfunktion:} \quad \varphi(u) = x = \sqrt{\frac{u-b}{a}} \quad (\text{also } x \geq 0) \tag{8.16b}$$

$$\text{Ableitung Umkehrfkt.:} \quad \varphi'(u) = \frac{1}{2a\sqrt{\frac{u-b}{a}}}\ . \tag{8.16c}$$

Einsetzen von (8.16a), (8.16b) und (8.16c) in (8.14)

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{a \cdot x^2 + b}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\sqrt{\frac{u-b}{a}}}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{2a\sqrt{\frac{u-b}{a}}}\,\mathrm{d}u \qquad \text{(Kürzen)} \\
&= \int \frac{1}{2a \cdot \sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2a}\int u^{-1/2}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{1/2} \cdot u^{1/2} + c = \underline{\frac{1}{a} \cdot \sqrt{u} + c}\ .
\end{aligned} \tag{8.17}$$

Rücksubstitution von (8.17) mit (8.16a) liefert das Ergebnis

$$\int \frac{x}{\sqrt{a \cdot x^2 + b}}\,\mathrm{d}x = \underline{\underline{\frac{1}{a} \cdot \sqrt{a \cdot x^2 + b} + c}}\ . \tag{8.18}$$

Das formale Rechnen mit Differentialen führt häufig zu einer erheblichen Vereinfachung.

Beispiel: Berechnung mit Differentialen von

$$\int \frac{x}{\sqrt{a \cdot x^2 + b}} \, \mathrm{d}x \; . \tag{8.19}$$

Wahl der Substitutionsfunktion

$$u = \psi(x) = a \cdot x^2 + b \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2 \cdot a \cdot x \; , \tag{8.20}$$

Berechnung des Differentials

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{2 \cdot a \cdot x} \; . \tag{8.21}$$

Einsetzen der linken Seite von (8.20) und (8.21) in (8.19) ergibt

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{a \cdot x^2 + b}} \, \mathrm{d}x &= \int \frac{x}{\sqrt{u}} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{2ax} \qquad \text{(Kürzen von } x\text{)} \\ &= \int \frac{1}{2a \cdot \sqrt{u}} \, \mathrm{d}u = \frac{1}{2a} \int u^{-1/2} \, \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{1/2} \cdot u^{1/2} + c = \underline{\frac{1}{a} \cdot \sqrt{u} + c} \; . \end{aligned} \tag{8.22}$$

Rücksubstitution von (8.22) mit der linken Seite von (8.20) liefert wieder das umseitige Ergebnis (8.18)

$$\int \frac{x}{\sqrt{a \cdot x^2 + b}} \, \mathrm{d}x = \underline{\underline{\frac{1}{a} \cdot \sqrt{a \cdot x^2 + b} + c}} \; .$$

Durch das Rechnen mit Differentialen kann unter Umständen auf die Berechnung der Umkehrfunktion $\varphi(u)$ und deren Ableitung $\varphi'(u)$ verzichtet werden.

Weitere Beispiele

Siehe Vorlesung

8.1.1.6 Grenzen beim Integrieren

Differentialrechnung: Die Ableitung einer elementaren Funktion ist wieder elementar.

Integralrechnung: Es gibt Funktionen die nicht geschlossen integrierbar sind, d.h. es existiert dann keine elementare Funktion F, deren Ableitung f ist.

Bsp.: $f : x \rightarrow f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.

8.2 Das bestimmte Integral

8.2.1 Definition, Existenz und Eigenschaften

8.2.1.1 Integralsummen und das bestimmte Integral

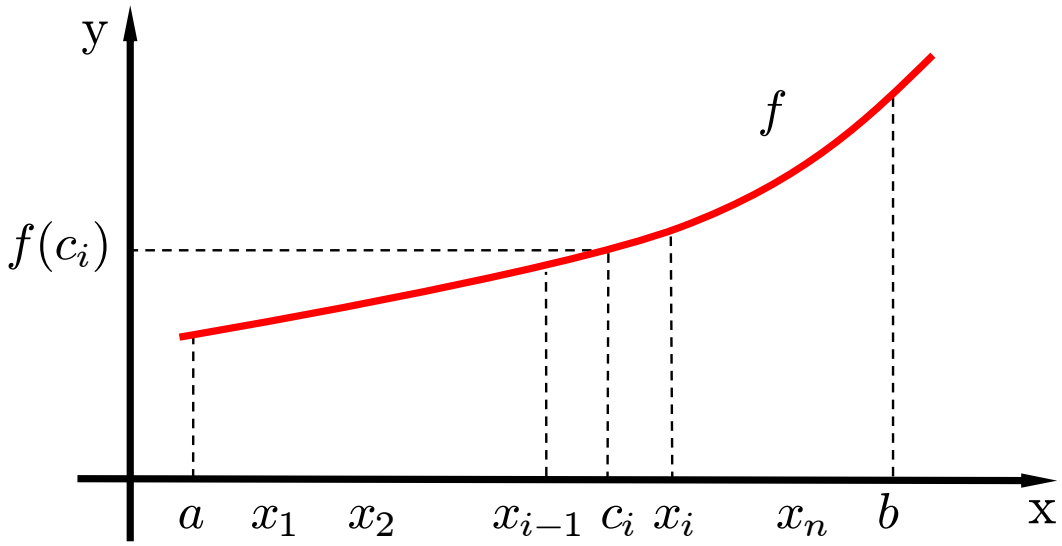


Bild 8.2: *Annährung der Fläche unter der Kurve durch eine Integralsumme*

$$f : x \to f(x) \text{ sei definiert auf } I = [a; b] \ . \tag{8.23}$$

Die Wahl von x_i mit $a = x_0 < x_1 < x_2 ... x_{n-1} < x_n < b$

ergibt eine **Zerlegung** Z von $[a; b]$ in Teilintervalle $[x_0; x_1], [x_1; x_2], ..., [x_{n-1}; x_n]$.

Man setze $\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$.

In jedem Teilintervall $[x_{i-1}; x_i]$ wähle man ein c_i mit

$x_{i-1} \leqq c_i \leqq x_i$ und bilde die Zerlegung

$$S(Z) := f(c_1) \cdot \Delta x_1 + f(c_2) \cdot \Delta x_2 + ... + f(c_n) \cdot \Delta x_n \tag{8.24}$$

oder $S(Z) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i$,

die die zur Zerlegung Z gehörende **Integralsumme** darstellt (diese ist deutbar als Nährungswert des Flächeninhaltes unter dem Graphen von f, falls $f(x) \geqq 0$ für $x \in [a; b]$).

Ist der Grenzwert $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i$ unabhängig von der Zerlegung Z und der Wahl der Zwischenwerte c_i, so heißt er **bestimmtes Integral**.

Bezeichnung (Riemannsches Integral)[2]:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i \ . \tag{8.25}$$

Unabhängigkeit von der Wahl der Integrationsvariablen

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \ ,$$

Beseitigung der Einschränkung a < b:

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x := 0, \quad a > b: \int_a^b f(x)\mathrm{d}x := -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x \ .$$

8.2.1.2 Integrierbare Funktionen

f heißt *integrierbar* auf $[a;b]$, falls das bestimmte Integral von f über $[a;b]$ existiert (d.h. der Grenzwert nach (8.25) existiert).

Bedingungen für die Integrierbarkeit (ohne Beweis): Integrierbar ist

1) jede Funktion, die auf $[a;b]$ stetig ist,

2) jede beschränkte Funktion, die auf $[a;b]$ eine endliche Zahl von Unstetigkeiten besitzt.

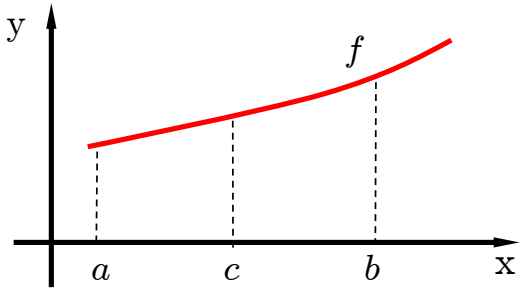
[2] nach Bernhard Riemann, geb. 1826 Nähe Hannover, gest. 1866 Selasca (Lago Maggiore)

8.2.1.3 Eigenschaften des bestimmten Integrals

1) Zerlegung des Integrationsintervalls

Ist f auf $[a;b]$ integrierbar und $c \in]a;b[$, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\ . \tag{8.26}$$



Die Eigenschaft (8.26) gilt auch, wenn $a < c < b$ nicht erfüllt ist. Gilt z.B. $a < b < c$ und ist f auf $[a;c]$ integrierbar, so folgt mit (8.26)

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x\ . \tag{8.27}$$

Umstellung nach dem Integral von a bis b ergibt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x\ . \tag{8.28}$$

und somit bei Vertauschen der Integrationsvariablen im letzten Integral

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\ . \tag{8.29}$$

2) Berücksichtigung von konstanten Faktoren

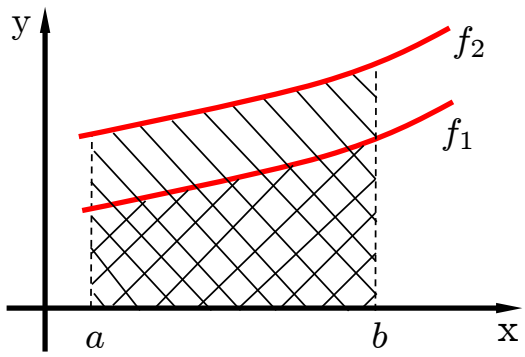
Sind f_1 und f_2 auf $[a;b]$ integrierbar und $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, so ist auch $c_1 \cdot f_1 + c_2 \cdot f_2$ auf $[a;b]$ integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b (c_1 \cdot f_1(x) + c_2 \cdot f_2(x))\,\mathrm{d}x = c_1 \cdot \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x + c_2 \cdot \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x\ . \tag{8.30}$$

3) Vergleich von bestimmten Integralen

Sind f_1 und f_2 auf $[a;b]$ integrierbar und gilt $f_1(x) \leq f_2(x)$ für alle $x \in [a;b]$, so folgt

$$\int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x\ . \quad (8.31)$$



4) Berücksichtigung von Beträgen

Stets gilt $f(x) \leq |f(x)|$ für alle $x \in [a;b]$, also folgt, falls f auf $[a;b]$ integrierbar ist,

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leq \left|\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\ \mathrm{d}x\ . \quad (8.32)$$

8.2.1.4 Mittelwertsatz der Integralrechnung

Satz (ohne Beweis): Ist f auf $[a;b]$ stetig, so gibt es mindestens ein $c \in [a;b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)\cdot f(c)\ . \tag{8.33}$$

Anschaulich wird also das Flächenstück unter der Kurve in ein flächengleiches Rechteck umgewandelt, siehe Bild 8.3.

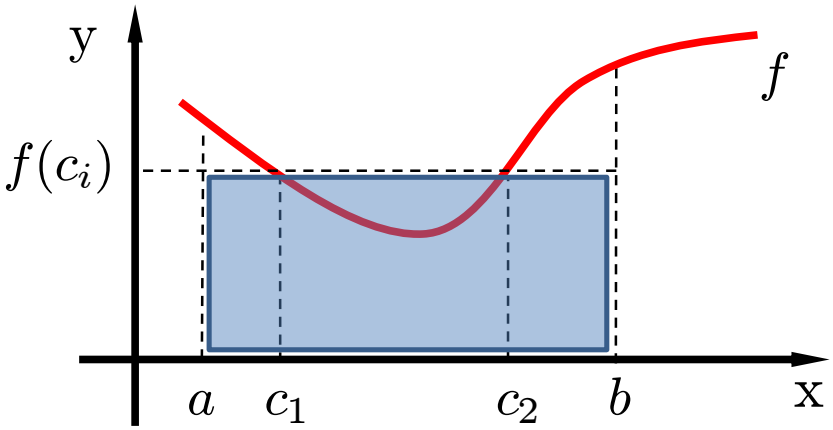


Bild 8.3: *Zum Mittelwertsatz der Integralrechnung*

Ausdruck (8.33) kann nach $f(c)$ umgestellt werden. Es ergibt sich ein gemittelter Funktionswert $\overline{y}$ im Intervall [a;b]

$$\overline{y} = f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\ . \tag{8.34}$$

Der gemittelte Funktionswert $f(c)$ wird auch als *Integralmittelwert*, *Mittelwert 1. Ordnung* oder *linearer Mittelwert* bezeichnet.

8.2.2 Berechnung bestimmter Integrale

8.2.2.1 Bestimmte Integrale mit variabler oberer Grenze - partikuläre Integrale

Sei f auf $[A;B]$ stetig und $a \in [A;B]$ fest, $x \in [A;B]$ variabel, so bilde man durch einen Wechsel der Integrationsvariablen von x auf t

$$F_1(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\ . \tag{8.35}$$

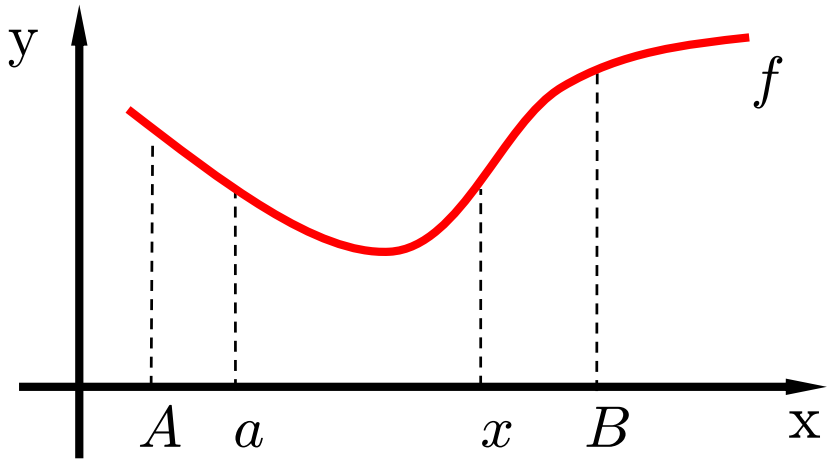


Bild 8.4: *Integrale mit variabler oberer Grenze*

Satz: Ist f auf einem Intervall I stetig, $a \in I$, so ist F_1 mit

$$F_1(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t\ , \quad x \in I$$

differenzierbar, und es gilt $F_1'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$.

Beweis

Zu zeigen ist für jedes $x_0 \in I$

$$F_1'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{F_1(x) - F_1(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)\ . \tag{8.36}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} F_1(x) - F_1(x_0) &= \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x_0}^a f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{x_0}^a f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \underline{\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t}\ . \end{aligned}$$

Anwendung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung ergibt

$$F_1(x) - F_1(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = (x - x_0) \cdot f(c)\ , \quad c \in [x_0; x]\ .$$

Damit gilt

$$\frac{F_1(x) - F_1(x_0)}{x - x_0} = f(c)\ .$$

Da f stetig ist, folgt

$$\lim_{x \to x_0} f(c) = f(x_0)\ , \quad \text{also} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{F_1(x) - F_1(x_0)}{x - x_0} = f(x_0) \qquad \text{q.e.d.}$$

8.2.2.2 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Satz: Ist f auf $[a;b]$ stetig und F eine Stammfunktion von f auf $[a;b]$, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) \;-\; F(a)\;. \tag{8.37}$$

Beweis: Die Funktion

$$F_1 \;:\; x \to F_1(x) \qquad \text{mit} \qquad F_1 = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \tag{8.38}$$

ist nach dem obigen Satz Stammfunktion von f. Für eine beliebige Stammfunktion von f gilt also $F = F_1 + c$ mit $c \in \mathbb{R}$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= (F_1(b) + c) - (F_1(a) + c) = F_1(b) - F_1(a) \\ &= \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \underbrace{\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t}_{=0} = \underline{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t} \qquad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

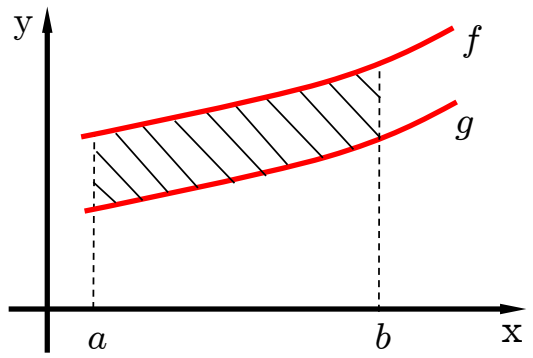
Abkürzende Schreibweise:

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b\;. \tag{8.39}$$

8.2.2.3 Anwendungen des bestimmten Integrals in der Geometrie

Satz (ohne Beweis): Sind f und g stetig auf $[a;b]$ und gilt $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in [a;b]$, so ist die Maßzahl A des Flächeninhaltes des Bereiches, der von den Graphen von f und g und von den Geraden $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird, gleich

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\;\mathrm{d}x\;. \tag{8.40}$$



8.2.2.4 Hinweis zur Flächenberechnung mit Hilfe der Integralrechnung

Flächen im Sinne der Integralrechnung können auch negativ sein. Dies trifft zum Beispiel zu, wenn die Kurve im negativen Bereich verläuft, denn es wird die Fläche *unter* der Kurve bis zur x-Achse berechnet.

Sollen die im üblichen geometrischen Sinne stets positiven Flächen berechnet werden, müssen die Nullstellen der Funktion bestimmt und die Beträge der Teilintegrale dazwischen berechnet werden.

Beispiel

Berechnung der geometrischen Flächengröße der Sinuskurve mit Begrenzung der x-Achse im Intervall $[0; 2\pi]$.

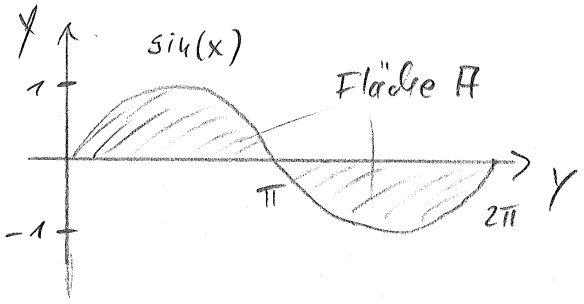


Bild 8.5: *Fläche der Sinuskurve zur x-Achse*

Das Integral ergibt sich zu

$$\int_0^{2\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x = [-\cos(x)]_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) - (-\cos(0)) = -1 + 1 = \underline{\underline{0}}\,. \tag{8.41}$$

Soll die Fläche berechnet werden, so sind die Nullstellen zu bestimmen und die Beträge der Integrale zu berechnen. Die Nullstelle der Sinusfunktion im Intervall $]0; 2\pi[$ ist bei $x_0 = \pi$. Daraus folgt für die Fläche A

$$A = \left|\int_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{\pi}^{2\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x\right| \tag{8.42}$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} A &= |[-\cos(x)]_0^{\pi}| + \left|[-\cos(x)]_{\pi}^{2\pi}\right| \\ &= |-\cos(\pi) - (-\cos(0))| + |-\cos(2\pi) - (-\cos(\pi))| \\ &= |-(-1) - (-1)| + |-(1) - (-(-1))| = |(-2)| + |(-2)| = \underline{\underline{4}}\,. \end{aligned}$$

8.3 Anwendungen der Integralrechnung in der Mechanik

8.3.1 Statisches Moment

8.3.1.1 Statisches Moment eines Massepunktes

Unter dem **statischen Moment** M eines Massepunktes bezüglich einer Achse versteht man das Produkt aus dem Abstand l des Massepunktes von der Achse und der Masse m.

Unter dem statischen Moment einer kontinuierlich verteilten Masse versteht man

$$M = \int\limits_{\text{Masse}} l \, \mathrm{d}m = \int\limits_{\text{Volumen}} (\varrho \cdot l) \, \mathrm{d}V \; . \tag{8.43}$$

Für das statische Moment ist auch der Begriff Moment 1. Grades üblich. Bezogen auf eine Fläche spricht man dann vom Flächenmoment 1. Grades.

8.3.1.2 Statisches Moment einer ebenen homogenen Fläche

Für das statische Moment einer Fläche bezüglich einer Achse sind unterschiedliche Bezeichnungen üblich. Hier soll S_x bzw. S_y verwendet werden.

- bezüglich der x-Achse

Statisches Moment S_x der Fläche unter der Kurve $y = f(x)$ zwischen a und b:

$$S_x = \frac{1}{2} \int\limits_a^b y^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int\limits_a^b (f(x))^2 \, \mathrm{d}x \tag{8.44}$$

Statisches Moment S_x der Fläche zwischen den Kurven $y_2 = f(x)$ und $y_1 = g(x)$, wobei $y_2 \geq y_1$ in $[a; b]$, zwischen a und b:

$$S_x = \frac{1}{2} \int\limits_a^b \left(y_2^2 - y_1^2\right) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int\limits_a^b \left(f^2(x) - g^2(x)\right) \, \mathrm{d}x \tag{8.45}$$

- bezüglich der y-Achse

Statisches Moment S_y der Fläche unter der Kurve $y = f(x)$ zwischen a und b:

$$S_y = \int\limits_a^b (x \cdot y) \, \mathrm{d}x = \int\limits_a^b (x \cdot f(x)) \, \mathrm{d}x \tag{8.46}$$

Statisches Moment S_y der Fläche zwischen den Kurven $y_2 = f(x)$ und $y_1 = g(x)$, wobei $y_2 \geq y_1$ in $[a; b]$, zwischen a und b:

$$S_y = \int\limits_a^b x \cdot (y_2 - y_1) \, \mathrm{d}x = \int\limits_a^b x \cdot (f(x) - g(x)) \, \mathrm{d}x \tag{8.47}$$

8.3.2 Schwerpunktberechnung

8.3.2.1 Allgemeine Überlegungen

Zum Begriff des Schwerpunktes gibt es verschiedene Herangehensweisen. Beispiel: Im Sinne der klassischen Mechanik ist der Schwerpunkt der Punkt, an dem die Masse des Körpers die gleiche Wirkung auf andere Körper hätte, wenn sie in diesem Punkt vereint wäre. Umgekehrt kann man die Gravitationskraft, die auf alle Massenpunkte des Körpers wirkt, durch eine einzige Kraft darstellen, die im Schwerpunkt angreift.

Diese Aussage hat zur Folge, dass, wenn ein Körper nur im Schwerpunkt unterstützt wird, keine Momente an diesem Unterstützungspunkt wirken. Beispiel: Wo muss das Stativ eines Fotoapparates angeschraubt werden, damit er nicht zur Seite wegklappt?

Wird ein Körper durch eine Kraft, welche direkt am Schwerpunkt angreift, angehoben, so führt der Körper keinerlei Drehbewegungen aus. Die Summe der angreifenden Momente ist Null.

Der Schwerpunkt eines Körpers muss nicht im Inneren eines Körpers liegen. Z.B. liegt der Schwerpunkt eines Stahlwinkels zwischen beiden Schenkeln in der Nähe der Verbindungsstelle. Soll ein Stahlwinkel drehungsfrei angehoben werden, so müsste an diese Stelle eine Lasche geschweißt werden. Dies würde allerdings die Lage des Schwerpunktes (leicht) verändern.

Vereinfacht geht man dabei immer von einem homogenen, also gleichmäßigen Gravitationsfeld aus. Die physikalischen Gesetzmäßigkeiten sind in der Regel allgemeiner gefasst. Bei den folgenden Überlegungen soll immer ein gleichmäßiges Gravitationsfeld vorliegen.

Die Koordinaten des **Massenmittelpunktes** r_{MMP} ergeben sich dann aus

$$r_{MMP} = \frac{1}{M} \iiint\limits_{\text{Masse}} r \, \mathrm{d}m \ . \tag{8.48}$$

Bei (8.48) handelt es sich um eine Mittelwertformel, bei der über die Masse M des Körpers gemittelt wird.

Satz: In einem homogenen Gravitationsfeld mit konstanter Beschleunigung g sind Schwerpunkt und Massenmittelpunkt identisch.

Für homogene Körper mit konstanter Dichte ϱ ist der Massenmittelpunkt mit dem **Volumenmittelpunkt** r_{VMP} identisch, da ϱ vor das Integral in (8.48) geschrieben und gekürzt werden kann. Es gilt

$$r_{VMP} = \frac{1}{V} \iiint\limits_{\text{Volumen}} r \, \mathrm{d}V \ . \tag{8.49}$$

Für flächenhaft verteilte Massen, z.B. für die Oberfläche einer Hohlkugel, mit einer konstanten Flächendichte $\varrho_A = dm/dA$, wobei dA ein Flächenelement ist, ergibt sich aus (8.48) der **Flächenmittelpunkt**

$$r_{FMP} = \frac{1}{A} \iint\limits_{\text{Fläche}} r \, \mathrm{d}A \; . \tag{8.50}$$

Der Schwerpunkt der flächenhaft verteilten Masse ist dann mit r_{FMP} identisch.

Entsprechend gilt für Massenverteilungen längs einer Linie mit der Länge L bei konstanter Liniendichte $\varrho_L = dm/dL$, wobei dL ein Linienelement ist, für den Linienmittelpunkt

$$r_{LMP} = \frac{1}{L} \int\limits_{\text{Linienlänge}} r \, \mathrm{d}L \; . \tag{8.51}$$

Hier ist dann der Massenmittelpunkt mit dem Linienmittelpunkt identisch.

8.3.2.2 Schwerpunktkoordinaten mit Hilfe des Statischen Momentes

Abgekürzt können die Schwerpunktkoordinaten SP_i als Quotient eingeführt werden:

$$\text{Linie: } SP_i = \frac{\text{Moment 1. Grades}}{\text{Linienlänge}} \; , \tag{8.52}$$

$$\text{Fläche: } SP_i = \frac{\text{Moment 1. Grades}}{\text{Flächengröße}} \; , \tag{8.53}$$

$$\text{Volumen: } SP_i = \frac{\text{Moment 1. Grades}}{\text{Volumen}} \; , \tag{8.54}$$

wobei sich das Moment ersten Grades jeweils auf eine Länge, eine Fläche oder ein Volumen bezüglich der anderen Koordinatenachse bezieht.

8.3.2.3 Flächenschwerpunkt von durch zwei Kurven begrenzten Flächen

Flächenschwerpunktskoordinaten der Fläche, begrenzt durch die Kurve $y = f(x)$ und der x-Achse zwischen a und b:

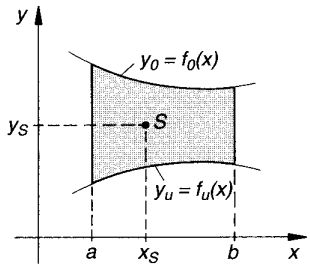
$$x_S = \frac{\int\limits_a^b (x \cdot y)\ \mathrm{d}x}{\int\limits_a^b y\ \mathrm{d}x} = \frac{1}{A} \int\limits_a^b (x \cdot y)\ \mathrm{d}x\ , \tag{8.55a}$$

$$y_S = \frac{\int\limits_a^b y^2\ \mathrm{d}x}{2\int\limits_a^b y\ \mathrm{d}x} = \frac{1}{2A} \int\limits_a^b y^2\ \mathrm{d}x\ . \tag{8.55b}$$

Flächenschwerpunktskoordinaten der Fläche begrenzt durch die Kurven y_o und y_u zwischen a und b:

$$x_S = \frac{\int\limits_a^b x \cdot (y_o - y_u)\ \mathrm{d}x}{\int\limits_a^b (y_o - y_u)\ \mathrm{d}x} = \frac{1}{A} \int\limits_a^b x \cdot (y_o - y_u)\ \mathrm{d}x\ , \tag{8.56a}$$

$$y_S = \frac{\int\limits_a^b (y_o^2 - y_u^2)\ \mathrm{d}x}{2\int\limits_a^b (y_o - y_u)\ \mathrm{d}x} = \frac{1}{2A} \int\limits_a^b \left(y_o^2 - y_u^2\right)\ \mathrm{d}x\ . \tag{8.56b}$$



8.3.2.4 Teilschwerpunktsatz für Flächen

Liegen insgesamt k Teilflächen vor und stellen die Punkte (x_i, y_i) die Schwerpunktkoordinaten der Fläche A_i dar, so gilt

$$x_S = \frac{\sum\limits_{i=1}^k x_i \cdot A_i}{\sum\limits_{i=1}^k A_i} = \frac{1}{A_{ges}} \sum_{i=1}^k x_i \cdot A_i\ , \tag{8.57a}$$

$$y_S = \frac{\sum\limits_{i=1}^k y_i \cdot A_i}{\sum\limits_{i=1}^k A_i} = \frac{1}{A_{ges}} \sum_{i=1}^k y_i \cdot A_i\ , \tag{8.57b}$$

wobei A_{ges} die Gesamtfläche darstellt.

8.3.3 Momente zweiten Grades

8.3.3.1 Einführung

Unter dem **Moment zweiten Grades** I einer ebenen Fläche A bezüglich einer Achse versteht man das Flächenintegral bezogen auf das Abstandsquadrat l^2 von der Bezugsachse.

Moment zweiten Grades einer Fläche

$$I = \int\limits_{\text{Fläche}} l^2 \, \mathrm{d}A \tag{8.58}$$

Für das Moment zweiten Grades ist auch der Begriff *Flächenträgheitsmoment* oder *Flächenmoment zweiten Grades* üblich.

8.3.3.2 Moment zweiten Grades der Fläche unter einer Kurve

Flächenträgheitsmoment I_y der Fläche unter der Kurve $y = f(x)$ zwischen a und b bezüglich der **y-Achse**:

$$I_y = \int\limits_a^b \left(x^2 \cdot y\right) \, \mathrm{d}x = \int\limits_a^b \left(x^2 \cdot f(x)\right) \, \mathrm{d}x \; . \tag{8.59}$$

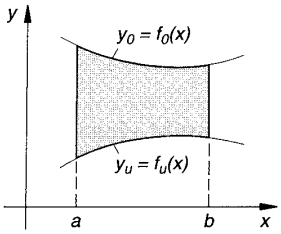
Flächenträgheitsmoment I_x der Fläche unter der Kurve $y = f(x)$ zwischen a und b bezüglich der **x-Achse**:

$$I_x = \frac{1}{3} \int\limits_a^b y^3 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \int\limits_a^b \left(f(x)\right)^3 \, \mathrm{d}x \; . \tag{8.60}$$

Wird die Fläche nicht durch die x-Achse begrenzt, sondern durch die Kurve y_u, so gilt

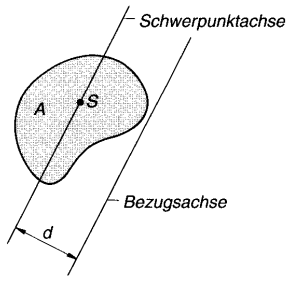
$$I_y = \int\limits_a^b x^2 \left(y_o - y_u\right) \, \mathrm{d}x = \int\limits_a^b x^2 \left(f_o(x) - f_u(x)\right) \, \mathrm{d}x, \tag{8.61a}$$

$$I_x = \frac{1}{3} \int\limits_a^b y_o^3 - y_u^3 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \int\limits_a^b \left(f_o^3(x) - f_u^3(x)\right) \, \mathrm{d}x \; . \tag{8.61b}$$



8.3.3.3 Satz von Steiner

Ist die Bezugsachse um den Abstand d zu einer parallelen Schwerpunktachse verschoben, so gilt der Satz von Steiner



$$I = I_{SP} + d^2 \cdot A \ , \tag{8.62}$$

mit der betrachteten Gesamtfläche A und I_{SP} als Flächenträgheitsmoment bezüglich der zur Bezugsachse parallelen Schwerpunktachse.

8.3.4 Biegelinie

Die Verbindungslinie der Querschnittsschwerpunkte eines gebogenen Balkens wird Biegelinie genannt. Eine Gleichgewichtsbetrachtung für kleine Verformungen ergibt für einen Balken konstanten Querschnitts

$$w''(x) = -\frac{M(x)}{E \cdot I_y} \ , \tag{8.63}$$

wobei $M(x)$ das wirkende Moment an der Stelle x, E der Elastizitätsmodul und I_y das Flächenträgheitsmoment darstellt. Die Größe $w(x)$ stellt die Auslenkung im Vergleich zum unbelasteten Zustand dar, $w''(x)$ ist folglich die Krümmung der Biegelinie. Das Produkt $E \cdot I_y$ heißt Biegesteifigkeit. Je größer die Biegesteifigkeit ist, desto geringer ist die Durchbiegung des Balkens. Ziel ist es meistens, mit möglichst wenig Materialeinsatz eine möglichst große Biegesteifigkeit zu erreichen.

(8.63) stellt eine Differentialgleichung 2. Ordnug dar. Um die Durchbiegung $w(x)$ zu berechnen, muss zweimal integriert werden. Die dabei entstehenden Integrationskonstanten ergeben sich aus den vorliegenden Randbedingungen der zu lösenden Aufgabe.

8.3.5 Guldinsche Regeln

Folgende Regeln sind nach Paul Guldin[3] benannt. Die Regeln tauchen allerdings auch schon in den Werken von Pappos von Alexandria[4] auf.

8.3.5.1 Volumen

Das Volumen V eines Rotationskörpers ist gleich dem Produkt aus der erzeugenden Fläche A und dem Weg ihres Schwerpunktes bei einem Umlauf:

$$V = 2 \cdot \pi \cdot x_S \cdot A \ . \tag{8.64}$$

8.3.5.2 Oberfläche

Die Mantelfläche A eines Rotationskörpers ist gleich dem Produkt aus der Länge L des erzeugenden Kurvenstückes und dem Weg seines Schwerpunktes bei einem Umlauf:

$$A = 2 \cdot \pi \cdot x_S \cdot L \ . \tag{8.65}$$

[3] Paul Guldin, geb. 12. Juni 1577 in St. Gallen, gest. 3. November 1643 in Graz, Astronom und Professor für Mathematik in Graz und Wien

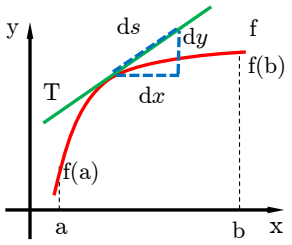
[4] Pappos (latinisiert Pappus) von Alexandria, griechischer Geometer, ca. 300 n. Chr., einer der letzten bedeutenden Mathematiker der Antike

8.3.6 Bogenlänge einer Kurve

Gesucht ist die Länge eines ebenen Bogenstückes, welches im Intervall $[a, b]$ durch die Funktion $f(x)$ beschrieben wird.

Aus dem Steigungsdreieck der Tangente folgt unmittelbar aus dem Satz des Phytagoras für einen infinitesimalen Abschnitt

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s &= \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} \qquad (\mathrm{d}x \text{ ausklammern}) \\ &= \sqrt{1 + \frac{(\mathrm{d}y)^2}{(\mathrm{d}x)^2}} \cdot \mathrm{d}x = \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2} \cdot \mathrm{d}x \\ &= \sqrt{1 + (y')^2} \cdot \mathrm{d}x = \sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot \mathrm{d}x \ . \end{aligned}$$



Integration über sämtliche Abschnitte führt auf die **Bogenlänge eines ebenen Kurvenstückes**

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \mathrm{d}x \ . \tag{8.66}$$

8.4 Näherungsweise Berechnung bestimmter Integrale

8.4.1 Rechteckformel

Satz 1: Das Intervall $[a, b] = [x_0, x_n]$ werde durch $x_1, x_2, ...x_{n-1}$ in n gleiche Teile der Länge h zerlegt. Es gilt also $n \cdot h = b - a$.
Ist f auf $[a, b]$ integrierbar mit $y_i = f(x_i)$, $i = 0; 1; 2; ...; n$, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx h \cdot (y_0 + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}) \quad \textbf{(Rechteckformel)}\ . \tag{8.67}$$

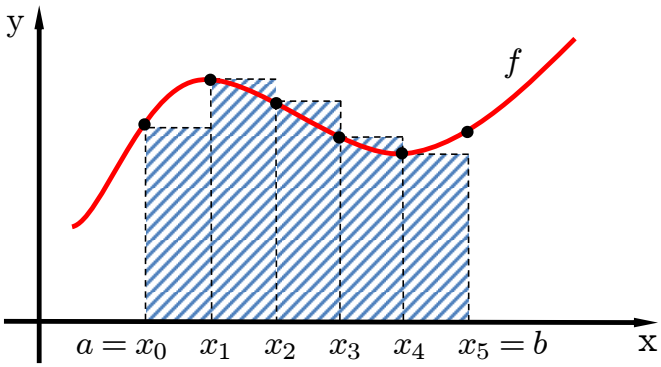


Bild 8.6: *Näherungsweise Integration mit Hilfe der Rechteckformel*

Beweis: Der Graph von f wird durch ein *Treppenpolygon* ersetzt. Zugehörige Funktion f^*:

$$\begin{aligned} f^*(x) &= f(a) && \text{für } a \leqq x < x_1 \\ f^*(x) &= f(x_1) && \text{für } x_1 \leqq x < x_2 \\ &\dots \\ f^*(x) &= f(x_{n-1}) && \text{für } x_{n-1} \leqq x < b \end{aligned}$$

Berechnung von $\int_a^b f^*(x)\,\mathrm{d}x$:

$$\begin{aligned} \int_a^b f^*(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^{x_1} f^*(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} f^*(x)\,\mathrm{d}x + ... + \int_{x_{n-1}}^{x_n=b} f^*(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{(Einsetzen von } f^*(x)) \\ &= \int_a^{x_1} f(a)\,\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} f(x_1)\,\mathrm{d}x + ... + \int_{x_{n-1}}^{x_n=b} f(x_{n-1})\,\mathrm{d}x \\ &= f(a) \cdot \underbrace{(x_1 - a)}_{h} + f(x_1) \cdot \underbrace{(x_2 - x_1)}_{h} + ... + f(x_{n-1} \cdot \underbrace{(b - x_{n-1})}_{h} \\ &= h \cdot (y_0 + y_1 + ... + y_{n-1}) \qquad \text{qed.} \end{aligned} \tag{8.68}$$

Die Summe (8.68) ist die *Integralsumme* nach Abschnitt 8.2.1.1 und somit eine Näherung des bestimmten Integrals.

8.4.2 Trapezformel

Satz 2: Das Intervall $[a, b] = [x_0, x_n]$ werde durch $x_1, x_2, ...x_{n-1}$ in n gleiche Teile der Länge h zerlegt. Es gilt also $n \cdot h = b - a$.
Ist f auf $[a, b]$ integrierbar mit $y_i = f(x_i)$, $i = 0; 1; 2; ...; n$, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{n} \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1} \right) \quad \textbf{(Trapezformel)} \,. \tag{8.69}$$

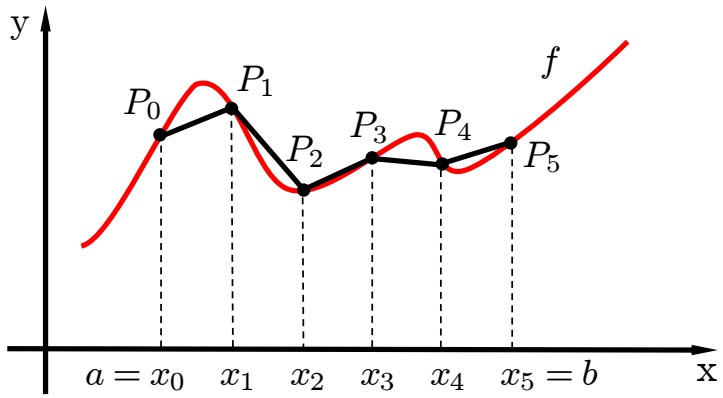


Bild 8.7: *Näherungsweise Integration mit Hilfe der Trapezformel*

Beweis: Der Graph von f wird durch das *Sehnenpolygon* ersetzt. Zugehörige Funktion f^*, wobei der Graph durch eine Gerade durch die Punkte P_i und P_{i+1} ersetzt wird,

$$\begin{aligned}
P_0P_1 \;:\; f^*(x) &= \frac{y_1 - y_0}{h} \cdot (x - x_0) + y_0 && \text{für } x_0 \leqq x < x_1 \\
P_1P_2 \;:\; f^*(x) &= \frac{y_2 - y_1}{h} \cdot (x - x_1) + y_1 && \text{für } x_1 \leqq x < x_2 \\
&\ldots \\
P_{n-1}P_n \;:\; f^*(x) &= \frac{y_n - y_{n-1}}{h} \cdot (x - x_{n-1}) + y_{n-1} && \text{für } x_{n-1} \leqq x < x_n
\end{aligned}$$

Berechnung von $\int\limits_a^b f^*(x)\,\mathrm{d}x$:

$$\begin{aligned}
\int\limits_a^b f^*(x)\,\mathrm{d}x &= \int\limits_{x_0}^{x_1} f^*(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{x_1}^{x_2} f^*(x)\,\mathrm{d}x + \ldots + \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n=b} f^*(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{(Summendarstellung)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f^*(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{(Ersetzen von } f^*\text{)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\underbrace{\frac{y_i - y_{i-1}}{h}}_{\text{konstant}} \cdot (x - x_{i-1}) + y_{i-1} \right) \mathrm{d}x \quad \text{(Integrieren)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{y_i - y_{i-1}}{h} \cdot \frac{(x - x_{i-1})^2}{2} + y_{i-1} \cdot x \right]_{x_{i-1}}^{x_i} \quad \text{(Grenzen einsetzen)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{h} \cdot \frac{(\overbrace{x_i - x_{i-1}}^{h})^2}{2} + y_{i-1} \cdot x_i \right) \right. \\
&\qquad \left. - \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{h} \cdot \frac{(\overbrace{x_{i-1} - x_{i-1}}^{0})^2}{2} + y_{i-1} \cdot x_{i-1} \right) \right\} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left((y_i - y_{i-1}) \cdot \frac{h}{2} + y_{i-1} \cdot h \right) \quad \text{(Zusammenfassen)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (y_i + y_{i-1}) \cdot \frac{h}{2} \quad \text{(Aufteilen in zwei Summen)} \\
&= \frac{h}{2} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} y_i + \sum_{i=0}^{n-1} y_i \right] \quad \text{(Summationsindex vereinheitlichen und zsf.)} \\
&= \frac{h}{2} \cdot \left[y_0 + y_n + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right] \quad \text{(Summenzeichen auflösen)} \\
&= \underline{h \cdot \left[\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} \right]} \qquad \text{qed.}
\end{aligned}$$

8.4.3 Keplersche Fassregel und Simpsonsche Regel

Zunächst wird der Spezialfall der Keplerschen Fassregel betrachtet.[5] Dabei wird der Funktionsverlauf durch eine Parabel $f^* = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2$ angenähert, siehe Bild 8.8.

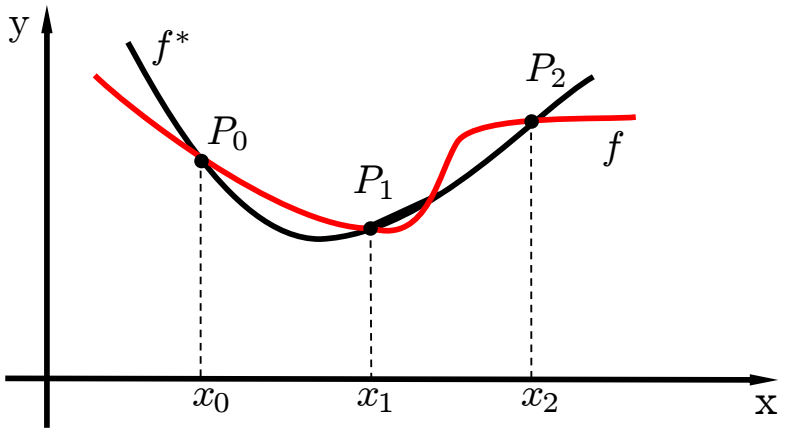


Bild 8.8: *Keplersche Fassregel: Annährung der Funktion f durch f^**

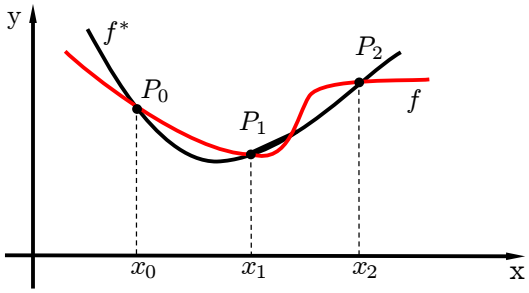
Satz 3: das Intervall $[a, b] = [x_0, x_2]$ werde durch $x_1 = \frac{a+b}{2}$ in zwei gleiche Teile der Länge $h = \frac{b-a}{2}$ zerlegt. Ist f auf $[a, b]$ integrierbar, so gilt:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{6} \cdot (y_0 + 4 \cdot y_1 + y_2) \qquad \textbf{(Keplersche Fassregel)}\ . \tag{8.70}$$

[5] Johannes Kepler (1571-1630)

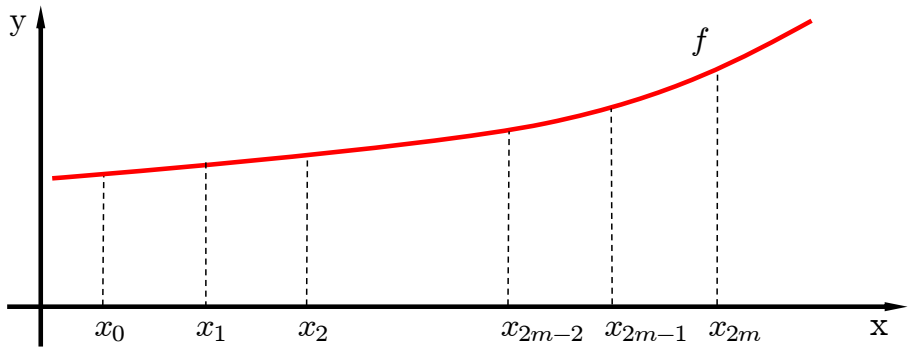
Beweis

Graph von f wird ersetzt durch Graph von $f^* = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2$ (Parabel). Der Graph von f^* gehe durch $P_0(x_0, f(x_0))$, $P_1(x_1, f(x_1))$ und $P_2(x_2, f(x_2))$. Daraus folgt:



$$
\begin{aligned}
\int_a^b f^*(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{x_1}^{x_2} \left(c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2\right)\,\mathrm{d}x \quad \text{(Integrieren)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[c_0 \cdot x + \frac{c_1}{2} \cdot x^2 + \frac{c_2}{3} \cdot x^3\right]_a^b \quad \text{(Grenzen einsetzen)} \\
&= c_0 \cdot (b-a) + \frac{c_1}{2} \cdot (b^2 - a^2) + \frac{c_2}{3} \cdot (b^3 - a^3) \quad \text{(Ausmultiplizieren)} \\
&= c_0 \cdot (b-a) + \frac{c_1}{2} \cdot (b-a) \cdot (b+a) + \frac{c_2}{3} \cdot (b-a) \cdot (b^2 + a \cdot b + a^2) \\
&= \frac{b-a}{6} \cdot \left(6c_0 + 3c_1 \cdot (b+a) + 2c_2 \cdot (b^2 + a \cdot b + a^2)\right) \\
&= \frac{b-a}{6} \cdot \{(c_0 + c_0 + 4c_0) + (c_1 a + c_1 b + 2c_1 \cdot (a+b)) + \\
&\qquad \left(c_2 a^2 + c_2 b^2 + c_2 (a+b)^2\right)\} \quad \text{(Umsortieren)} \\
&= \frac{b-a}{6} \cdot \left\{(c_0 + c_1 a + c_2 a^2) + (c_0 + c_1 b + c_2 b^2) + \right. \\
&\qquad \left. +4\left(c_0 + c_1 \frac{a+b}{2} + c_1 \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right)\right\} \\
&= \frac{b-a}{6} \cdot \left(f^*(a) + f^*(b) + 4 \cdot f^*\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) \quad \text{(gemeinsame Punkte } f \text{ und } f^*\text{)} \\
&= \underline{\frac{b-a}{6} \cdot \left(f(a) + f(b) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)} \qquad \text{qed.}
\end{aligned}
$$

Übergang zur ***Simpsonschen Regel***[6] durch Einteilung des Intervalls $[a, b]$ in eine gerade Anzahl von Teilintervallen $n = 2m$ mit $m \geqq 2$.



Anwendung der Fassregel (8.70) auf zwei benachbarte Intervalle ergibt:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,\mathrm{d}x + \ldots + \int_{x_{2m-2}}^{x_{2m}} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &\approx \frac{x_2 - x_0}{6} \cdot (y_0 + 4 \cdot y_1 + y_2) + \frac{x_4 - x_2}{6} \cdot (y_2 + 4 \cdot y_3 + y_4) + \\ &\qquad \ldots + \frac{x_{2m} - x_{2m-2}}{6} \cdot (y_{2m-2} + 4 \cdot y_{2m-1} + y_{2m}) \ .\end{aligned}$$

Wegen $x_2 - x_0 = x_4 - x_2 = \ldots = x_{2m} - x_{2m-2} = \frac{b-a}{m}$ folgt

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx & \frac{b-a}{6m} \cdot (y_0 + 4 \cdot (y_1 + y_3 + \ldots + y_{2m-1}) \\ & +2 \cdot (y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m-2}) + y_{2m}) \qquad m \geqq 2 \quad \textbf{(Simpson-Regel)} \ .\end{aligned} \tag{8.71}$$

Die Keplersche Fassregel ist ein Spezialfall von (8.70), wobei für $m = 1$ nicht (8.71) angewendet werden darf, da in der obigen Herleitung $m \geqq 2$ gilt. Um zu zeigen, dass die Keplersche Fassregel ein Sonderfall von (8.71) darstellt, ist eine separate Rechnung erforderlich.

Fehlerabschätzung

Satz (ohne Beweis): Wird $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ näherungsweise durch die Simpsonsche Regel berechnet, wobei $[a, b]$ in $n = 2m$ gleiche Teile zerlegt wird, so gilt für den Fehler R die Abschätzung

$$|R| \leq \frac{(b-a)^5}{180 \cdot n^4} \cdot M \ , \tag{8.72}$$

wobei M eine obere Schranke von $|f^{(IV)}(x)|$ auf $[a, b]$ ist.

[6] Thomas Simpson (1710-1761), englischer Mathematiker

Folgerungen:

Werden von der Berechnung, welche den Fehler R_1 ergab, alle Teilintervalle nochmals halbiert, so gilt für R_2

$$|R_2| \leq \frac{(b-a)^5}{180 \cdot (2n)^4} \cdot M = \frac{1}{2^4} \cdot \frac{(b-a)^5}{180 \cdot (n)^4} \cdot M = \frac{1}{16} \cdot |R_1| \; . \tag{8.73}$$

Ist f eine ganzrationale Funktion vom Grad 1, 2 oder 3 drei so gilt

$$f^{(IV)}(x) = 0$$

für alle x. Damit ist für diese Funktionen M als obere Schranke der vierten Ableitung ebenfalls null $(M = 0)$ und damit gilt nach (8.73) auch $R = 0$. Somit liefert die Simpsonsche Regel in diesen Fällen den exakten Wert.

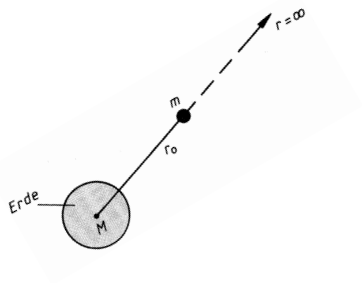
8.5 Uneigentliche Integrale

In physikalischen Anwendungen treten gelegentlich vereinzelt Integrale mit einem unendlichen Integrationsintervall auf. Um diesen einen Wert zuweisen zu können, muss der Integralbegriff erweitert werden. Formal lässt sich die Fragestellung auf die Berechnung folgender Integraltypen zurückführen

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x\ , \qquad \int_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x\ , \qquad \int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x\ . \tag{8.74}$$

Integrale vom Typ (8.74) werden als *uneigentliche Integrale* bezeichnet.

Beispielsweise führt die Fragestellung, dass im Gravitationsfeld der Erde eine Masse m aus der Entfernung r_0 ins Unendliche $(r = \infty)$ gebracht werden soll bei der Berechnung der dabei aufzuwendenden Arbeit W auf das uneigentliche Integral



$$W = \int_{r_0}^\infty G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}\,\mathrm{d}r = G \cdot m \cdot M \cdot \int_{r_0}^\infty \frac{1}{r^2}\,\mathrm{d}r\ . \tag{8.75}$$

Auch kann die Berechnung des Flächeninhaltes A zwischen einer Kurve und der x-Achse auf ein uneigentliches Integral führen. Die Berechnung der Fläche unter der Kurve in Bild 8.9 führt auf das Integral

$$A = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\ . \tag{8.76}$$

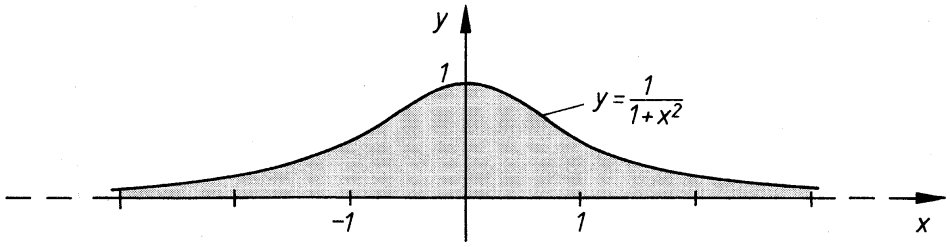


Bild 8.9: *Flächenberechnung unter der Kurve führt auf das uneigentliche Integral (8.76)*

8.5.1 Unendliche Integrationsgrenzen

Sei $f\ :\ x\ \rightarrow\ f(x)$ mit $D = [a, \infty[$ und auf jedem Intervall $[a, B[$ integrierbar mit $a < B$. Existiert der Grenzwert

$$\lim_{B\to\infty} \int_a^B f(x)\,\mathrm{d}x \tag{8.77}$$

so setzt man

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{B\to\infty} \int_a^B f(x)\,\mathrm{d}x\ . \tag{8.78}$$

Existiert der Grenzwert, so nennt man das uneigentliche Integral konvergent, andernfalls divergent. Sinngemäß wird diese Festlegung auf die Fälle

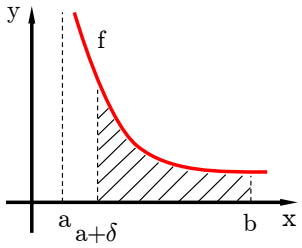
$$\int_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \tag{8.79}$$

übertragen.

8.5.2 Unendlicher Integrand

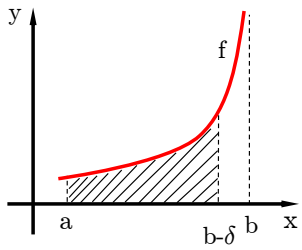
Sei $f:\ x\ \to\ f(x)$ mit $D =]a,b]$ auf jedem Intervall $[a+\delta, b]$ integrierbar. Die Funktion f sei für $x = a$ nicht erklärt, z.B. vorliegen einer Polstelle. Existiert der Grenzwert

$$\lim_{\delta\to+0} \int_{a+\delta}^b f(x)\,\mathrm{d}x\ , \tag{8.80}$$



so setzt man

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{\delta\to+0} \int_{a+\delta}^b f(x)\,\mathrm{d}x\ . \tag{8.81}$$



Analog sei $f(x)$ bei $x = b$ nicht definiert, so setzt man

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{\delta\to+0} \int_a^{b-\delta} f(x)\,\mathrm{d}x\ . \tag{8.82}$$

8.6 Aufgaben zu Kapitel 8

8.6.1 Unbestimmte Integrale

Aufgabe 8.1

Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale

a) $\int x^3 \, \mathrm{d}x$ **b)** $\int \sqrt[5]{x^2} \, \mathrm{d}x$ **c)** $\int x^{-7} \, \mathrm{d}x$ **d)** $\int -\frac{\sqrt[3]{x}}{x^2} \, \mathrm{d}x$.

Aufgabe 8.2

Berechnen Sie

a) $\int \left(x^3 + 7 \cdot x^2 + \sqrt{x} - 8\right) \, \mathrm{d}x$ **b)** $\int \left(\frac{5 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 4}{\sqrt{x}}\right) \, \mathrm{d}x$.

8.6.2 Partielle Integration

Aufgabe 8.3

Berechnen Sie folgende Integrale mit Hilfe partieller Integration

a) $\int x \cdot e^{3x} \mathrm{d}x$ **b)** $\int x^2 \cdot \sin(4 \cdot x) \mathrm{d}x$ **c)** $\int (f'(x) \cdot f(x)) \, \mathrm{d}x$.

Aufgabe 8.4

Zeigen Sie durch unterschiedliche Anwendung der partiellen Integration, dass sich die jeweils ergebenden Stammfunktionen um den Betrag 1 unterscheiden:

$$\int (\sin(x) \cdot \cos(x)) \, \mathrm{d}x \ .$$

Wenden Sie auf die Ergebnisse ggf. ein Additionstheorem an. Überprüfen Sie Ihre jeweiligen Stammfunktionen durch Ableiten.

8.6.3 Integration durch Substitution

Aufgabe 8.5

Berechnen Sie mit Hilfe der Integration durch Substitution

a) $\int (4 \cdot x + 3)^3 \, \mathrm{d}x$ **b)** $\int \left(\frac{2}{(x-2)^2}\right) \, \mathrm{d}x$ **c)** $\int \left(3 \cdot x - (x-2)^3\right) \mathrm{d}x$

d) $\int \left(\frac{2}{5} \cdot \sqrt[3]{4 - 15 \cdot x}\right) \, \mathrm{d}x$ **e)** $\int \sqrt{x-6} \, \mathrm{d}x$.

8.6.4 Bestimmte Integrale

Aufgabe 8.6

Berechnen Sie folgende bestimmte Integrale

$$\textbf{a)} \int_1^5 \left(x^4 + \frac{1}{x^2}\right) \mathrm{d}x \quad \textbf{b)} \int_0^2 \left(1 - x^3\right) \mathrm{d}x \quad \textbf{c)} \int_0^3 (3 \cdot \sin(x))\, \mathrm{d}x$$

$$\textbf{d)} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(x))\, \mathrm{d}x \quad \textbf{e)} \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) \mathrm{d}x \quad \textbf{f)} \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{1+x^2}\right) \mathrm{d}x\ .$$

8.6.5 Integration nicht stetiger Funktionen

Aufgabe 8.7

Von der auf [0;6] stückweise stetigen Funktion

$$f : x \to f(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 \le x \le 3 \\ 8 - x & \text{für } 3 < x \le 6 \end{cases}$$

berechne man $F_1(x) = \int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t$ für jedes $x \in [0; 6]$ und weise nach, dass F_1 an der Stelle x_0 = 3 stetig ist. Skizzieren Sie zunächst den Graphen der Funktion.

8.6.6 Uneigentliche Integrale

Aufgabe 8.8

Berechnen Sie

$$A = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^3}\, \mathrm{d}x\ , \quad B = \int_0^{\infty} \sqrt{x}\, \mathrm{d}x\ , \quad C = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, \mathrm{d}x\ .$$

[Lösung: $A = 0,5$, B konvergiert nicht, $C = \pi$.]

8.6.7 Länge eines Bogenstückes

Aufgabe 8.9

Um wieviel Prozent ist das Kurvenstück von 0 bis 1 der quadratischen Parabel $y = x^2$ länger als die Diagonale eines Quadrates der Kantenlänge 1, bezogen auf die Diagonale? Hinweis: Verwenden Sie ggf. eine Integraltafel. [Lösung: 4,6%]

8.6.8 Flächenbestimmung

Aufgabe 8.10

Man bestimme die Maßzahl A des Flächeninhaltes des Flächenstückes, welches von den Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ eingeschlossen wird, wobei $f(x) = 0,5 \cdot x^2$ und $g(x) = 2 \cdot x$.

Aufgabe 8.11

Man bestimme die Maßzahl A des Flächeninhaltes zwischen den Kurven von $f(x)$ und $g(x)$ zwischen a und b, wobei a = 0, b = 4, $f(x) = 0,25 \cdot x^2 + 1$ und $g(x) = -x$.

8.6.9 Schwerpunktbestimmung

Aufgabe 8.12

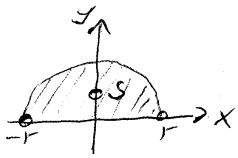
Bestimmen Sie die Schwerpunktkoordinaten $(x_S; y_S)$ eines Viertelkreises mit dem Radius r!

Aufgabe 8.13

Zu bestimmen ist die Lage des Schwerpunktes der Fläche, die von den beiden Kurven mit den Funktionsgleichungen $y = x^2 - 4x - 2$ und $y = 4 - x^2$ eingeschlossen wird.

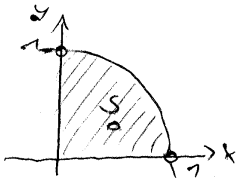
Aufgabe 8.14

Berechnen Sie die Schwerpunktkoordinaten eines Halbkreises mit dem Radius r!



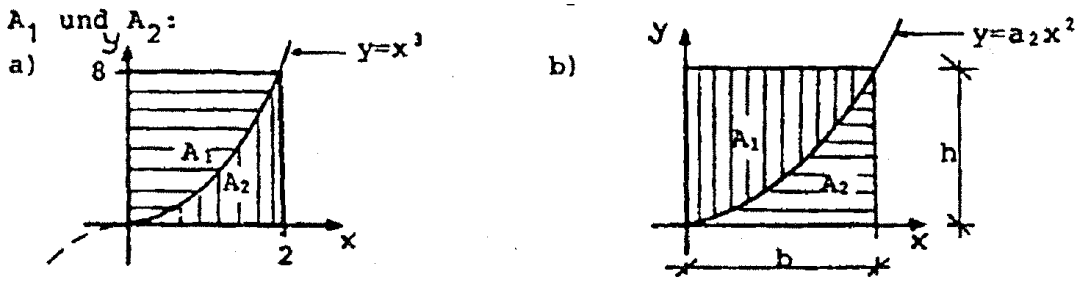
Aufgabe 8.15

Berechnen Sie die Schwerpunktkoordinaten einer Parabelfläche zwischen 0 und 1, welche durch die Funktionsgleichung $y = 1 - x^2$ beschrieben wird!



Aufgabe 8.16

Gesucht sind die Schwerpunkte der schraffierten Flächen A_1 und A_2 Ein Lösungsweg besteht darin zunächst die statischen Momente S_x und S_y für jede Fläche zu berechnen. Die Funktionsgleichung lautet für a) $y = x^3$ und für b) $y = a_2 \cdot x^2$.



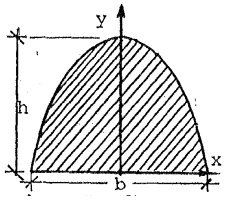
Aufgabe 8.17

Berechnen Sie die Schwerpunktkoordinaten einer Sinusfläche zwischen 0 und π, welche durch die Funktionsgleichung $y = \sin(x)$ beschrieben wird!

8.6.10 Flächenträgheitsmomente

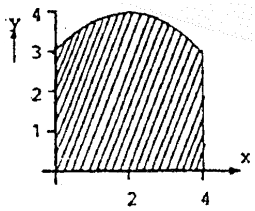
Aufgabe 8.18

Berechnen Sie das Flächenträgheitsmoment der schraffierten Fläche bezüglich der x- und der y-Achse! Die obere Randkurve beschreibt eine Parabel, wobei der Scheitelpunkt auf der y-Achse liegt.



Aufgabe 8.19

Berechnen Sie die Lage des Schwerpunktes und das statische Moment S_x der schraffierten Fläche. Die obere Randkurve ist eine quadratische Parabel mit dem Scheitelpunkt (2;4)!



Aufgabe 8.20

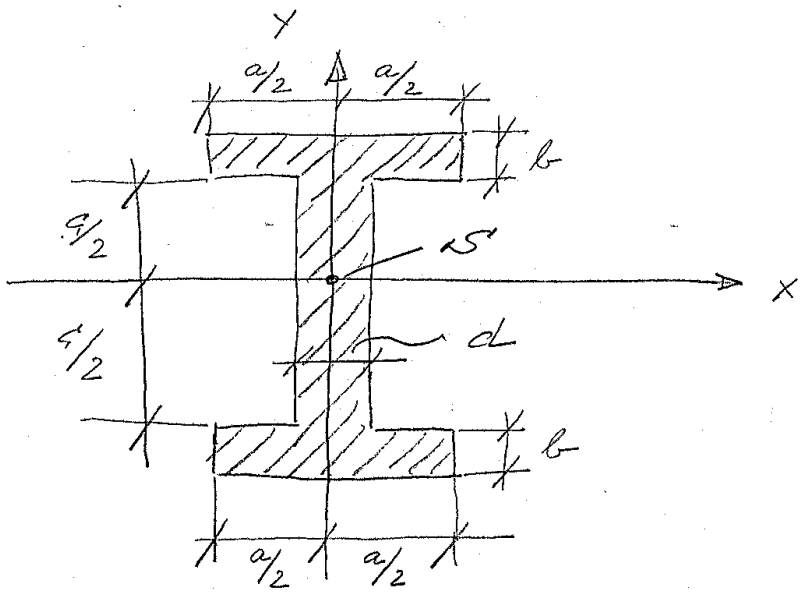
Gesucht sind die statischen Momente S_x und S_y für die Fläche die von den Kurven mit den Gleichungen $y = x^2$ und $y = \sqrt{x}$ eingeschlossen wird.

Aufgabe 8.21

Ein Querschnittsprofil wird von einer Parabel mit der Gleichung $y = x^2$ und der Geraden $y = 4$ berandet. Man ermittle das Flächenträgheitsmoment:
a) bzgl. der x-Achse und **b)** bzgl. der y-Achse, **c)** bzgl. der zur x-Achse parallelen Achse durch den Schwerpunkt und **d)** bzgl. der Geraden $y = 4$!

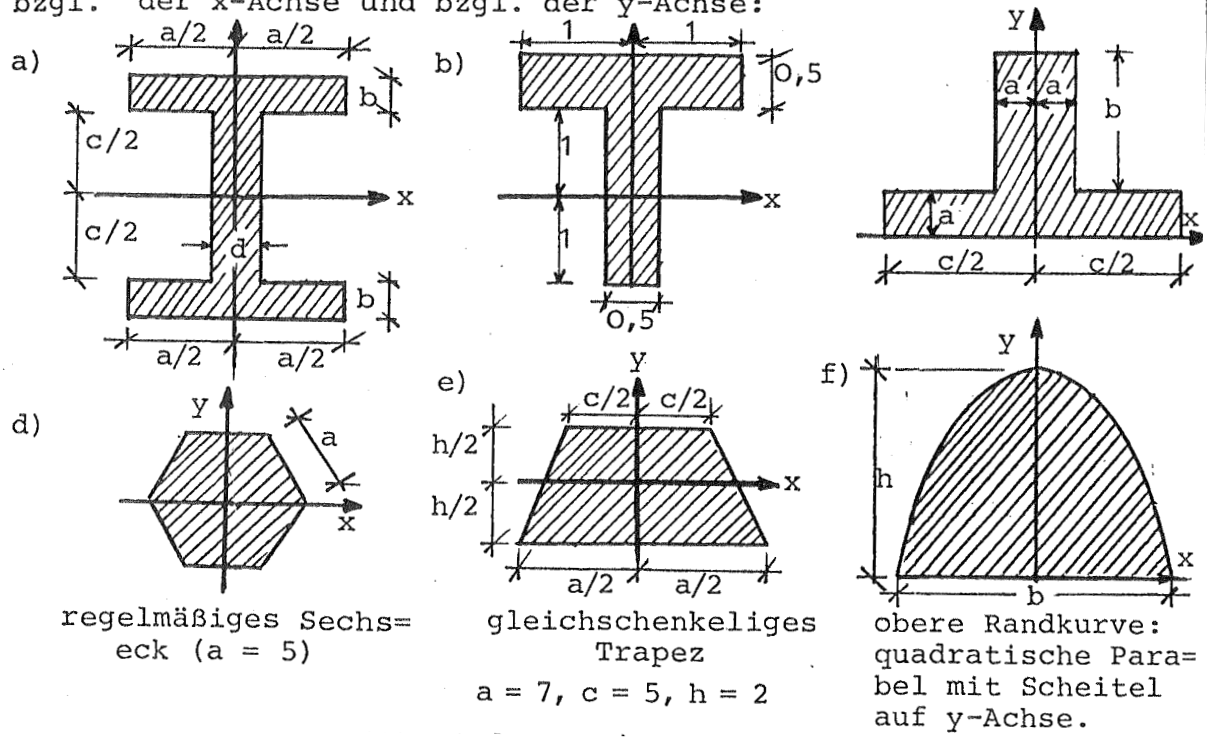
Aufgabe 8.22

Berechnen Sie die Flächenträgheitsmomente I_x und I_y des folgenden Profils.



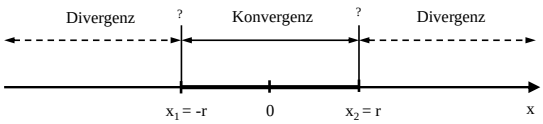
Aufgabe 8.23

Man berechne die Flächenträgheitsmomente der abgebildeten Profile bzgl. der x-Achse und bzgl. der y-Achse:



Kapitel 9

Unendliche Reihen



Kapitelinhalt

9.1 Allgemeine Eigenschaften 9-1
9.1.1 Einführung 9-1
9.1.2 Konvergenz und Divergenz 9-2
9.2 Potenzreihen 9-4
9.3 Taylorreihen 9-6
9.3.1 MacLaurinsche Reihe 9-6
9.3.2 Entwicklung elementarer Funktionen 9-7
9.3.3 Taylorsche Reihe 9-10
9.4 Fourierreihen 9-11
9.4.1 Periodische Vorgänge in der Physik 9-11
9.4.2 Allgemeiner periodischer Vorgang 9-12
9.4.3 Berechnung der Koeffizienten 9-12
9.4.4 Eigenschaften von Fourierreihen 9-15
9.4.5 Fourierreihe eines Rechteckimpulses 9-16
9.5 Aufgaben zu Kapitel 9 - Unendliche Reihen 9-20
9.5.1 Konvergenz 9-20
9.5.2 Konvergenzradius und Konvergenzbereich 9-20
9.5.3 MacLaurinsche Reihe 9-20
9.5.4 Taylor-Reihe 9-20

9.1 Allgemeine Eigenschaften

9.1.1 Einführung

Wiederholung

Zahlenfolge: $\langle a_n \rangle = \langle a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... \rangle$, mit a_n allgemeines Glied der Zahlenfolge.

Beispiel:

$$\begin{aligned} \langle a_n \rangle &= \langle 1 - \frac{(-1)^n}{n} \rangle \\ &= \left\langle 0; \frac{3}{2}; \frac{2}{3}; \frac{5}{4}; \frac{4}{5}; \frac{7}{6}; \frac{6}{7}; \frac{9}{8}; \frac{8}{9}; \frac{11}{10}; ... \right\rangle \ . \end{aligned} \tag{9.1}$$

Zahlenfolge ist ein Spezialfall einer Funktion:

$$f \ : \ n \to \ f(n) = a_n \ , \quad D = \mathbb{N}, \ W = \mathbb{R} \quad \text{(reelle Zahlenfolge)} \tag{9.2}$$

Gliedern der Zahlenfolge entsprechen Punkte in der Zahlenebene.

Def. Grenzwert: g heißt Grenzwert von $\langle a_n \rangle$, wenn für jedes positives ϵ für fast alle n gilt:

$$|a_n - g| < \epsilon, \qquad \text{Schreibweise:} \quad g = \lim_{n \to \infty} a_n \ . \tag{9.3}$$

Zur graphischen Veranschaulichung des Grenzwertes siehe Bild 9.1.

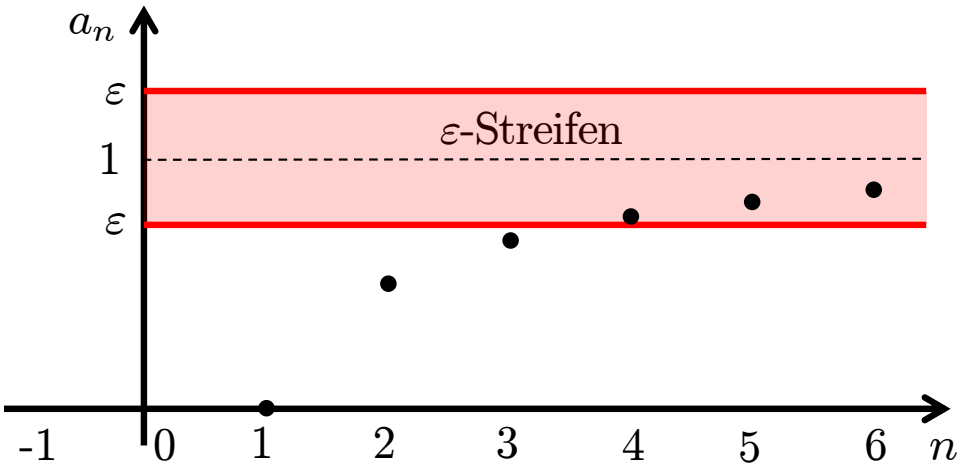


Bild 9.1: *Veranschaulichung des Grenzwertes einer Folge*

Eine **konvergente Zahlenfolge** besitzt genau einen Grenzwert.

Eine **Nullfolge** besitzt den Grenzwert Null.

$$\begin{aligned} \text{Beispiel:} \quad \langle a_n \rangle &= \left\langle \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \frac{1}{27}; ... \right\rangle \ . \end{aligned} \tag{9.4}$$

(9.4) ist eine Nullfolge, da

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad \text{wegen} \quad \frac{1}{3^n} \to 0 \ .$$

Definition einer unendlichen Reihe:

Gegeben ist eine Zahlenfolge $\langle a_n \rangle = \langle a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... \rangle$: Man bilde die Partialsummen

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \quad S_2 = a_1 + a_2 + a_3, \quad , ...,$$

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad n\text{-te Partialsumme} \ . \tag{9.5}$$

Def.: Die Folge $\langle s_n \rangle$ der Parialsummen der Folge $\langle a_n \rangle$ heißt **unendliche Reihe**.

Übliche Schreibweise

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ . \tag{9.6}$$

Daraus folgt: Eine unendliche Reihe ist eine spezielle Zahlenfolge.

Damit gelten alle Sätze über Zahlenfolgen in spezialisierter Form auch für unendliche Reihen.

9.1.2 Konvergenz und Divergenz

9.1.2.1 Einführung

Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konvergent} \quad : \quad \Leftrightarrow \quad \langle s_n \rangle \ \text{hat Grenzwert } s \ , \qquad \text{also} \ ,$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = s \qquad \text{oder auch}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \qquad \text{mit } s \text{ Summe der Reihe.} \tag{9.7}$$

Hat $\langle s_n \rangle$ keinen Grenzwert, so ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **divergent**.

Zusätzlich wird eingeführt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textbf{absolut konvergent} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad \text{konvergent} \ . \tag{9.8}$$

Satz ohne Beweis:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad \text{konvergent} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konvergent} \ , \tag{9.9}$$

d.h. aus der absoluten Konvergenz folgt die (gewöhnliche) Konvergenz, aber nicht umgekehrt (Gegenbeispiel folgt).

Beispiele siehe Vorlesung

9.1.2.2 Notwendiges Kriterium

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konvergent} \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \ . \tag{9.10}$$

Die Umkehrung gilt nicht! Ein Gegenbeispiel ist die harmonische Reihe (wird noch gezeigt).

9.1.2.3 Quotienten- und Wurzelkriterium

Die folgenden beiden Kriterien sind hinreichend. Ist der entsprechende Grenzwert q kleiner 1, so folgt jeweils, dass die zugehörige unendliche Reihe konvergent ist:

Quotientenkriterium

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q < 1 \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konvergent} \ , \tag{9.11}$$

Wurzelkriterium

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q < 1 \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konvergent} \ . \tag{9.12}$$

Gilt $q > 1$, so ist die Reihe divergent.

Gilt $q = 1$, so ist keine Entscheidung möglich.

Beispiele siehe Vorlesung

9.1.2.4 Kriterium von Leibniz für alternierende Reihen

Eine **alternierende Reihe** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ ist konvergent, wenn gilt

1) $\langle a_n \rangle$ ist echt monoton fallend,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, oder $\langle a_n \rangle$ ist Nullfolge .

Beispiele siehe Vorlesung

9.2 Potenzreihen

Die Glieder einer Folge werden nun mit den Potenzfunktionen verknüpft. Die (unendlichen) Summen dieser Reihen ergeben sich zu

$$S(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n \ . \tag{9.13}$$

Beispiele:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot x^n = x + 2 \cdot x^2 + 3 \cdot x^3 + ... \ , \qquad \text{mit} \quad a_n = n$$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... \qquad \text{mit} \quad a_n = \frac{1}{n!}$$

Für die allgemeine Form einer Potenzereihe wird x durch $(x - x_0)$ ersetzt. Damit folgt aus (9.13)

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n \qquad \text{mit } x_0 \textbf{ Entwicklungspunkt} \ . \tag{9.14}$$

Die Rücksubstitution $z = x - x_0$ oder die Wahl von $x_0 = 0$ ergibt die obigen Spezialfälle.

Meistens wird der Fall $x_0 = 0$ betrachtet. Bei den folgenden Überlegungen wird $x_0 = 0$ gewählt.

Die ersten vier Partialsummen an einer Stelle x_1 ergeben sich zu:

$$\begin{aligned}
P_0(x_1) &= a_0 \\
P_1(x_1) &= a_0 + a_1 \cdot x_1 \\
P_2(x_1) &= a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_1^2 \\
P_3(x_1) &= a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_1^2 + a_3 \cdot x_1^3 \\
&\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{9.15}$$

Die Betrachtung des Partialsummenfolgegrenzwertes $S(x)$ führt auf den Begriff des Konvergenzbereiches.

Definition Konvergenzbereich: Menge aller x, für die die Reihe $S(x)$ konvergiert.

Jede Potenzreihe konvergiert für $x = 0$.

Man kann zeigen, dass Folgendes gilt:

Für Potenzreihen gibt es einen nicht negativen **Konvergenzradius** r mit

1) Die Potenzreihe konvergiert für alle x mit $|x| < r$,

2) Die Potenzreihe divergiert für alle x mit $|x| > r$,

d.h. der Konvergenzbereich ist ein offenes Intervall $]-r, +r[$. An den Endpunkten des Intervalls muss speziell untersucht werden.

Spezialfälle: $r = 0$, Potenzreihe konvergiert nur für $x = 0$,
$r = \infty$, Potenzreihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.

Berechnung des Konvergenzradius r

Nach dem Quotienkriterium gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| < 1 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} b_n \ \text{ konvergiert .} \tag{9.16}$$

Die Anwendung auf eine Potenzreihe mit $b_n = a_n \cdot x^n$ und $b_{n+1} = a_{n+1} \cdot x^{n+1}$ ergibt

$$\left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \left| \frac{a_{n+1} \cdot x^{n+1}}{a_n \cdot x^n} \right| = |x| \cdot \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \qquad \text{Grenzwertsatz anwenden:}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

$$|x| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| .$$

Damit ergibt sich für den Konvergenzradius r:

$$\underline{r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|} . \tag{9.17}$$

Eine weitere Berechnungsmöglichkeit ergibt sich aus dem Wurzelkriterium

$$\underline{r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}} . \tag{9.18}$$

(9.17) und (9.18) gelten auch für $x_0 \neq 0$. Die Reihe konvergiert dann im Intervall $|x - x_0| < r$.

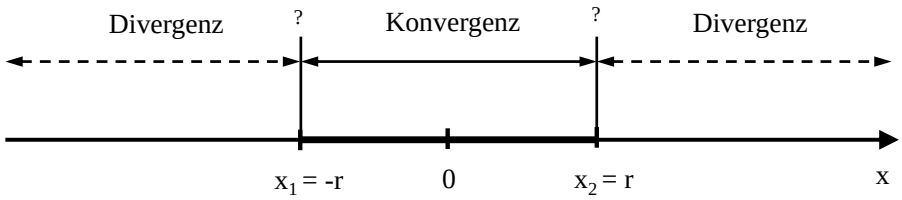


Bild 9.2: *Konvergenzradius r für $x_0 = 0$ (zum Konvergenzverhalten $|x| = r$ später)*

Eigenschaften von Potenzreihen (ohne Beweis):

1) Eine Potenzeihe konvergiert in $]-r,+r[$ **absolut**.

2) Eine Potenzeihe darf in $]-r,+r[$ gliedweise differenziert und integriert werden. Der Konvergenzradius r bleibt dabei erhalten.

3) Zwei Potenzeihen dürfen im gemeinsamen Konvergenzbereich **gliedweise** addiert und multipliziert werden, ohne dass sich die Konvergenzeigenschaften im *gemeinsamen* Konvergenzbereich ändern.

9.3 Taylorreihen

9.3.1 MacLaurinsche Reihe

Ziel: Darstellung einer Funktion f durch eine Potenzreihe.

Voraussetzung: Funktion sei in einer Umgebung von $x_0 = 0$ beliebig oft differenzierbar.

Ansatz:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot x^i = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + ... \tag{9.19}$$

Bestimmung der Koeffizienten a_i durch Ableiten (Angabe der Werte für $x = 0$):

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + ... & f(0) &= a_0 & &= 0! \cdot a_0 \\
f'(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + ... & f'(0) &= a_1 & &= 1! \cdot a_1 \\
f''(x) &= 1 \cdot 2a_2 + 2 \cdot 3a_3 x + 3 \cdot 4a_4 x^2 + ... & f''(0) &= 1 \cdot 2 \cdot a_2 & &= 2! \cdot a_2 \\
f'''(x) &= 1 \cdot 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4 x + ... & f'''(0) &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_3 & &= 3! \cdot a_3 \\
&... & & & &
\end{aligned}$$

Mit vollständiger Induktion folgt

$$a_0 = \frac{f(0)}{0!}\ , \quad a_1 = \frac{f'(0)}{1!} \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2!}\ , \quad a_3 = \frac{f'''(0)}{3!}\ , \quad .... \quad , a_i = \frac{f^{(i)}(0)}{i!}\ , \quad ....$$

Definition: Sei f eine an der Stelle x_0 beliebig oft diffrenzierbare Funktion. Dann heißt

$$T(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \cdot x^i \tag{9.20}$$

die **MACLAURINsche Reihe** von f[1].

[1] nach Colin MacLaurin (1698-1746), in der Literatur findet man unterschiedliche Schreibweisen für MacLaurin (Maclaurin, Mac Laurin)

Bemerkungen:

1) $x_0 = 0$ heißt Entwicklungspunkt der Reihe.

2) Man kann zeigen: Ist r der Konvergenzradius von $T(x)$, so gilt

$$T(x) = f(x) \qquad \text{für } |x| < r \ . \tag{9.21}$$

9.3.2 Entwicklung elementarer Funktionen

9.3.2.1 Exponentialfunktionen

Für die Ableitungen der Exponentialfunktion

$$f \ : \ x \ \to \ e^x \ , \qquad D = \mathbb{R} \qquad \text{gilt}$$
$$f^{(i)}(x) = e^x \quad \text{und} \quad f^{(i)}(0) = 1 \quad \text{für} \quad i = 0; 1; 2; ...$$

Damit ergibt sich die MacLaurinreihe von e^x zu

$$e^x = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} ... = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \tag{9.22}$$

mit dem Konvergenzradius nach (9.17)

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty \ . \tag{9.23}$$

Damit konvergiert (9.22) für alle $x \in \mathbb{R}$.

Für

$$f \ : \ x \ \to \ e^{-x} \ , \qquad D = \mathbb{R} \qquad \text{folgt}$$
$$f^{(i)}(x) = (-1)^i \cdot e^{-x} \quad \text{und} \quad f^{(i)}(0) = (-1)^i \quad \text{für} \quad i = 0; 1; 2; ...$$

Ersetzen von x durch $-x$ in (9.22) ergibt

$$e^{-x} = 1 - \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} ... = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \cdot \frac{x^i}{i!} \ . \tag{9.24}$$

Eine analoge Herleitung des Konvergenzradius ergibt ebenfalls $r = \infty$. Damit konvergiert auch (9.24) für alle $x \in \mathbb{R}$.

9.3.2.2 Trigonometrische Funktionen

Für $f \ : \ x \ \to \ \sin(x)$, $D = \mathbb{R}$, folgt für die Ableitungen an der Stelle $x = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x) & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \cos(x) & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= -\sin(x) & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= -\cos(x) & f'''(0) &= -1 \\ f^{(IV)}(x) &= \sin(x) & f^{(IV)}(0) &= 0 \ . \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\sin(x) = \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} ... = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \cdot \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} \ . \tag{9.25}$$

Für den Konvergenzradius folgt nach (9.17)

$$\begin{aligned} r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(2n+1)!}}{\frac{1}{(2n+3)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)!}{(2n+1)!} \\ &= \lim_{n\to\infty} (2n+2) \cdot (2n+3) = \underline{\infty} \ . \end{aligned} \tag{9.26}$$

Damit konvergiert (9.25) für $x \in \mathbb{R}$.

Da die Sinusfunktion ungerade ist, tauchen in (9.25) nur ungerade Potenzen auf.

Für die Herleitung der MacLaurinschen Reihe der Kosinusfunktion können drei Wege gewählt werden, a) wie oben, b) Differentation von (9.25) und c) Integration von (9.25). Die Differentationsmethode ergibt

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - ... \right) \\ &= 1 - \frac{3 \cdot x^2}{3!} + \frac{5 \cdot x^4}{5!} - \frac{7 \cdot x^6}{7!} + \frac{9 \cdot x^8}{9!} - ... \end{aligned}$$

Damit folgt für die Reihendarstellung der Kosinusfunktion

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - ... = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \cdot \frac{x^{2i}}{(2i)!} \ . \tag{9.27}$$

Für den Konvergenzradius ergibt sich auch hier $r = \infty$. Damit konvergiert (9.27) ebenfalls für alle x. Da die Kosinusfunktion gerade ist, tauchen in (9.27) nur gerade Potenzen auf.

9.3.2.3 Eulerformel

Wie oben gezeigt wurde, gilt für $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^9}{9!} + ... \tag{9.28a}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - + ... \tag{9.28b}$$

$$\sin(x) = x^1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - + ... \tag{9.28c}$$

Einsetzen von $x = \varphi$ bzw. $x = j\varphi$ und Beachtung von $j^2 = -1$ ergibt für die Reihen (9.28)

$$\begin{aligned} e^{j\varphi} &= 1 + \frac{(j\varphi)^1}{1!} + \frac{(j\varphi)^2}{2!} + \frac{(j\varphi)^3}{3!} + \frac{(j\varphi)^4}{4!} + \frac{(j\varphi)^5}{5!} + \frac{(j\varphi)^6}{6!} + \frac{(j\varphi)^7}{7!} + \frac{(j\varphi)^8}{8!} + ... \\ &= 1 + j \cdot \varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - j \cdot \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + j \cdot \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^6}{6!} - j \cdot \frac{\varphi^7}{7!} + \frac{\varphi^8}{8!} + j \cdot \frac{\varphi^9}{9!} + ... \end{aligned} \tag{9.29a}$$

$$\cos(\varphi) = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \frac{\varphi^8}{8!} - + ... \tag{9.29b}$$

$$j \cdot \sin(\varphi) = j \cdot \varphi - j \cdot \frac{\varphi^3}{3!} + j \cdot \frac{\varphi^5}{5!} - j \cdot \frac{\varphi^7}{7!} + j \cdot \frac{\varphi^9}{9!} - + ... \tag{9.29c}$$

Es ist zu erkennen, dass die Summe von (9.29b) und (9.29c) die Exponentialfunktion (9.29a) ergibt und somit

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi) \tag{9.30}$$

gilt. Ein Faktor k vor den Funktionen kann entsprechend ausgeklammert werden, so dass ebenso gilt

$$k \cdot e^{j\varphi} = k \cdot (\cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)) \ . \tag{9.31}$$

9.3.3 Taylorsche Reihe

Der Entwicklungspunkt der MacLaurin-Reihe ist nun ein beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + ... \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^i(x_0)}{i!}(x-x_0)^i \ , \qquad (x = x_0 \text{ ergibt die MacLaurin-Reihe}). \end{aligned} \tag{9.32}$$

Konvergenzradius r: Reihe konvergiert für $|x - x_0| < r$ oder im Intervall $x_0 - r < x < x_0 + r$.

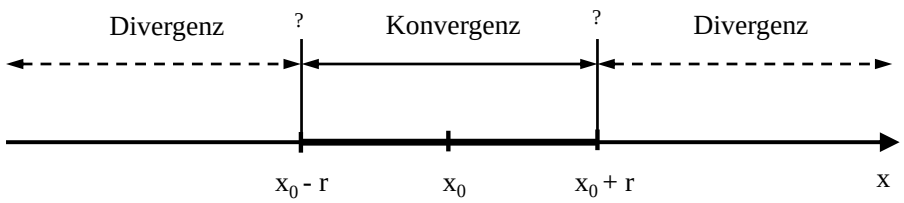


Bild 9.3: *Konvergenzbereich für einen Entwicklungspunkt x_0*

Beispiel Logarithmusfunktion

Entwicklung der Logarithmusfunktion um $x_0 = 1$, da $\ln(0)$ nicht erklärt ist,

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x) & f(1) &= 0 \\ f'(x) &= x^{-1} & f'(1) &= 1 \\ f''(x) &= -x^{-2} & f''(1) &= -1 \\ f'''(x) &= 2 \cdot x^{-3} & f'''(1) &= 2 \\ f^{(IV)}(x) &= -2 \cdot 3x^{-4} & f^{(IV)}(1) &= -2 \cdot 3 \ . \end{aligned}$$

Beweisen der Formel für allgemeines i mit vollständiger Induktion. Für die Taylorreihe mit $x_0 = 1$ ergibt sich mit $(x - x_0) = (x - 1)$

$$\begin{aligned} \ln(x) &= \frac{1}{1!}(x-1)^1 + \frac{-1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 + \frac{-2 \cdot 3}{4!}(x-1)^4 ... \\ &= \frac{(x-1)^1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + ... \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\ln(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \cdot \frac{(x-1)^i}{i} \ . \tag{9.33}$$

Als Konvergenzradius ergibt sich wie oben $r = 1$ und damit der Konvergenzbereich $0 < x < 2$.

9.4 Fourierreihen

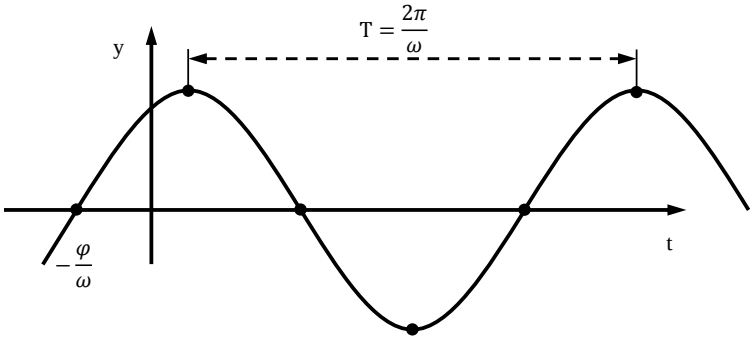
9.4.1 Periodische Vorgänge in der Physik

a) Sinusförmige Vorgänge:

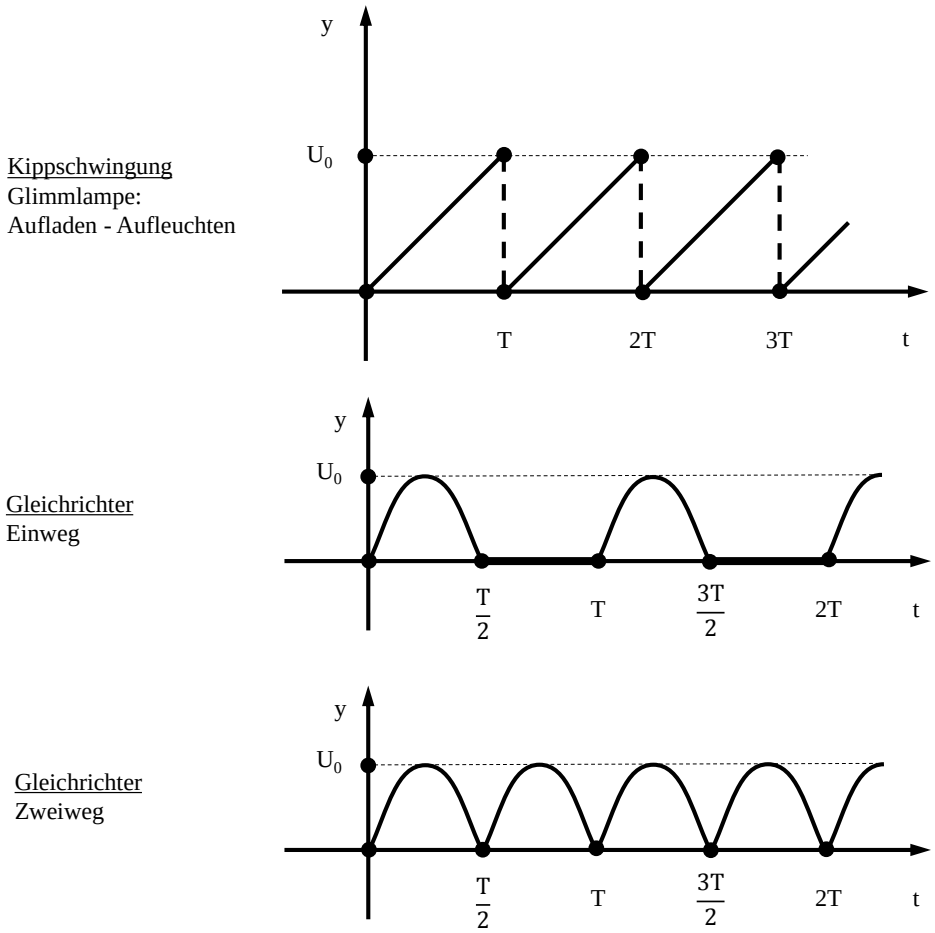
Zum Beispiel: Weg-Zeitfunktion einer Masse an einer Feder oder eine Wechselspannung werden beschrieben durch

$$y = C_1 \cdot \sin(\omega \cdot t) + C_2 \cdot \cos(\omega \cdot t) \qquad \text{oder} \qquad y = \sin(\omega \cdot t + \varphi)\ . \tag{9.34}$$

Bezeichnung: Harmonische Schwingung (Schwingungsdauer $T = \frac{2\pi}{\omega}$, Kreisfrequenz ω).



b) Nicht sinusförmig



9.4.2 Allgemeiner periodischer Vorgang

Gegeben sei eine periodische nicht sinusförmige Funktion der Periode $T = 2\pi$.

Die Voraussetzungen von f werden später präzisiert.

Idee von Fourier

Kombination von f aus sinusförmigen Einzelschwingungen der Kreisfrequenzen ω_0, $2\omega_0$, $3\omega_0$, ... in Form einer unendlichen Reihe:[2]

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{a_0}{2} &+ a_1 \cdot \cos(x) + a_2 \cdot \cos(2x) + a_3 \cdot \cos(3x) + ... \\ &+ b_1 \cdot \sin(x) + b_2 \cdot \sin(2x) + b_3 \cdot \sin(3x) + ... \end{aligned}$$

oder

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)\right) \ , \tag{9.35}$$

wobei $\frac{a_0}{2}$ das konstante Glied und a_n bzw. b_n die Fourierkoeffizienten darstellen.

9.4.3 Berechnung der Koeffizienten

Methode: Multiplikation von (9.35) mit geeigneten Faktoren und anschließend gliedweises Integrieren über das Intervall $[0, 2\pi]$.

[2] Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830), französischer Mathematiker

Benutzte Integrale:

$$\int_0^{2\pi} \cos(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\cdot[\sin(nx)]_0^{2\pi} = 0 \tag{9.36a}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n}\cdot[\cos(nx)]_0^{2\pi} = 0 \tag{9.36b}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \left[\dfrac{\sin(n-m)x}{2(n-m)} + \dfrac{\sin(n+m)x}{2(n+m)}\right]_0^{2\pi} = 0 & n \neq m, \\ \left[\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4n}\cdot\sin(nx)\right]_0^{2\pi} = \pi & n = m; \end{cases} \tag{9.36c}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} -\left[\dfrac{\cos(n-m)x}{2(n-m)} + \dfrac{\cos(n+m)x}{2(n+m)}\right]_0^{2\pi} = 0 & n \neq m, \\ \left[\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2n}\sin^2(nx)\right]_0^{2\pi} = 0 & n = m: \end{cases} \tag{9.36d}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \left[\dfrac{\sin(n-m)x}{2(n-m)} - \dfrac{\sin(n+m)x}{2(n+m)}\right]_0^{2\pi} = 0 & n \neq m, \\ \left[\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4n}\cdot\sin(nx)\right]_0^{2\pi} = \pi & n = m. \end{cases} \tag{9.36e}$$

Zur Berechnung der Integrale in (9.36) wurden folgende Additionstheoreme benutzt

$$\begin{aligned} (9.36c) \quad &: \quad \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) = \frac{1}{2}\cdot(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)) \\ (9.36d) \quad &: \quad \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) = \frac{1}{2}\cdot(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)) \\ (9.36e) \quad &: \quad \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta) = \frac{1}{2}\cdot(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)) \ . \end{aligned}$$

Die Integrale (9.36c) und (9.36e) für den Fall $m = n$ können mit partieller Integration berechnet werden.

Berechnung von a_0

Gliedweise Integration von (9.35) über $[0; 2\pi]$

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x}_{\frac{a_0}{2}\cdot 2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cdot\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos(nx)\,\mathrm{d}x}_{(9.36a):\ =0} + b_n\cdot\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin(nx)\,\mathrm{d}x}_{(9.36b):\ =0}\right] . \tag{9.37}$$

Damit ergibt sich

$$\underline{a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x} \ . \tag{9.38}$$

Berechnung von a_n , $n = 1; 2; 3; ...$

Multiplikation von (9.35) mit $\cos(mx)$ und gliedweise Integration über $[0; 2\pi]$

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(mx)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi} \cos(mx)\,\mathrm{d}x}_{\text{(9.36a): } =0}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(nx)\cdot\cos(mx)\,\mathrm{d}x}_{\text{(9.36c): } =0,\ n\neq m;\quad =\pi,\ n=m} + b_n \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin(nx)\cdot\cos(mx)\,\mathrm{d}x}_{\text{(9.36d): } =0}\right] . \tag{9.39}$$

Damit ergibt sich

$$\underline{a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot\cos(nx)\,\mathrm{d}x} . \tag{9.40}$$

Berechnung von b_n , $n = 1; 2; 3; ...$

Multiplikation von (9.35) mit $\sin(mx)$ und gliedweise Integration über $[0; 2\pi]$

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(mx)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi} \sin(mx)\,\mathrm{d}x}_{\text{(9.36b): } =0}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(nx)\cdot\sin(mx)\,\mathrm{d}x}_{\text{(9.36d): } =0} + b_n \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin(nx)\cdot\sin(mx)\,\mathrm{d}x}_{\text{(9.36e): } =0,\ n\neq m;\quad =\pi,\ n=m}\right] , \tag{9.41}$$

Damit ergibt sich

$$\underline{b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot\sin(nx)\,\mathrm{d}x} . \tag{9.42}$$

Voraussetzungen für f

Nun können die Voraussetzungen für die Entwickelbarkeit einer Funktion in einer Fourierreihe formuliert werden:

1) Zerlegung von $[0; 2\pi]$ in endlich viele Teilintervalle, in denen f **stetig und monoton** ist.

2) An den Unstetigkeitsstellen, die endliche Sprungstellen sein müssen, existiert der links- und rechtseitige Grenzwert.

Unter den Voraussetzungen 1) und 2) lässt sich zeigen:

Satz: Die Fourier-Reihe (9.35) von f konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$,

a) an einer Stetigkeitsstelle $\overline{x}$ stimmt sie mit f überein

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(n\overline{x}) + b_n \cdot \sin(n\overline{x}) = f(\overline{x}) \ ,$$

b) an einer Sprungstelle ist sie das arithmetische Mittel aus rechts und linksseitigem Grenzwert

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(n\overline{x}) + b_n \cdot \sin(n\overline{x}) = \frac{1}{2} \cdot \left(\lim_{x \to \overline{x}+} f(x) + \lim_{x \to \overline{x}-} f(x) \right) \ .$$

9.4.4 Eigenschaften von Fourierreihen

Gerade Funktionen

Für gerade Funktionen f gilt für alle x: $f(x) = f(-x)$ und somit

$$\begin{aligned} &\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx) \\ &\qquad = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(n(-x)) + b_n \cdot \sin(n(-x)) \ , \\ \sin(-x) = -\sin(x) \quad &\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(nx) = -\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(nx) \\ \Rightarrow \quad 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(nx) = 0 \quad &\Rightarrow \text{(kann man zeigen)} \quad b_n = 0 \ , n > 0 \ . \end{aligned} \tag{9.43}$$

Es folgt für die Darstellung von geraden Funktionen:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(nx) \qquad \text{(Sinusglieder entfallen)} \tag{9.44}$$

Ungerade Funktionen

Für ungerade Funktionen f gilt für alle x: $f(x) = -f(-x)$. Analog wie oben lässt sich zeigen: $a_n = 0, \ n > 0$.

Es folgt für die Darstellung von ungeraden Funktionen:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(nx) \qquad \text{(Kosinusglieder entfallen)} \ . \tag{9.45}$$

9.4.5 Fourierreihe eines Rechteckimpulses [Papula]

Als Beispiel soll ein Rechteckimpuls als Fourierreihe dargestellt werden. Man bezeichnet dies als **harmonische Analyse** oder auch **Fourier-Analyse**. Aus physikalischer Sicht bedeutet dies, eine Zerlegung eines periodischen Vorganges in seine harmonischen Bestandteile. Dazu müssen die Fourier-Koeffizienten bestimmt werden.

Beispiel

Wir entwickeln die in Bild II-6 dargestellten *Rechteckkurve* mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le \pi \\ & \text{für} \\ -1 & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

und der Periode $p = 2\pi$ in eine Fourier-Reihe.

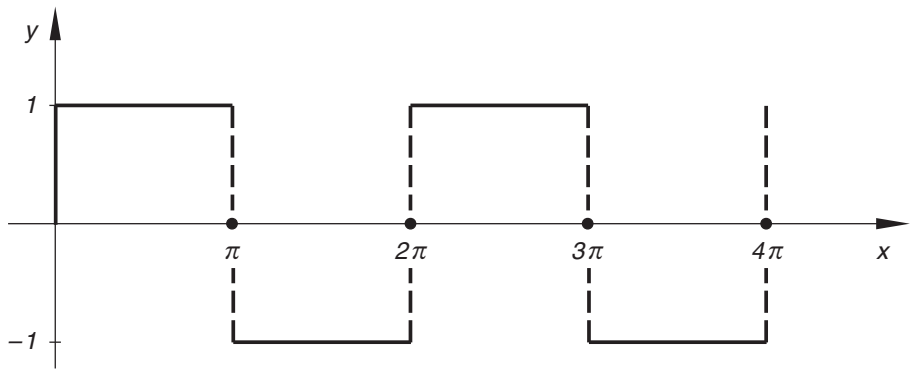


Bild II-6 Rechteckkurve (Rechteckimpuls)

Da $f(x)$ eine *ungerade* Funktion ist, reduziert sich ihre Entwicklung auf

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(nx)$$

(nur Sinusglieder). Die Berechnung der Fourierkoeffizienten b_n geschieht nach der Formel (II-24), wobei wir die Integration abschnittsweise durchführen müssen:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(nx)\, dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(nx)\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-1) \cdot \sin(nx)\, dx \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} \sin(nx)\, dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin(nx)\, dx \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left[-\frac{1}{n}\cdot\cos(n\,x)\right]_0^{\pi} - \left[-\frac{1}{n}\cdot\cos(n\,x)\right]_{\pi}^{2\pi}\right] =$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left[\left[-\cos(n\,x)\right]_0^{\pi} + \left[\cos(n\,x)\right]_{\pi}^{2\pi}\right] =$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left[-\cos(n\pi) + \underbrace{\cos 0}_{1} + \underbrace{\cos(n\,2\pi)}_{1} - \cos(n\pi)\right] =$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left[2 - 2\cdot\cos(n\pi)\right] = \frac{2}{n\pi}\left[1 - \cos(n\pi)\right]$$

Der Wert des Summanden $\cos(n\pi)$ hängt dabei noch davon ab, ob n *gerade* oder *ungerade* ist (Fallunterscheidung):

$$\cos(n\pi) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad n = \text{gerade, d. h. } n = 2, 4, 6, \ldots \\ -1 & \phantom{\text{für}} \quad n = \text{ungerade, d. h. } n = 1, 3, 5, \ldots \end{cases}$$

Die Fourierkoeffizienten *verschwinden* daher für *gerades* n, d. h. für $n = 2\,k$ $(k \in \mathbb{N}^*)$:

$$b_{2k} = \frac{2}{2\,k\,\pi}(1 - 1) = 0$$

Für *ungerades* n, d. h. für $n = 2\,k - 1$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ besitzen die Fourierkoeffizienten dagegen den Wert

$$b_{2k-1} = \frac{2}{(2\,k - 1)\,\pi}(1 + 1) = \frac{4}{(2\,k - 1)\,\pi} = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{2\,k - 1}$$

Die *Fourier-Reihe* der *Rechteckkurve* besitzt damit die Gestalt

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{2\,k - 1}\cdot\sin(2\,k - 1)\,x = \frac{4}{\pi}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2\,k - 1)\,x}{2\,k - 1} =$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[\sin x + \frac{1}{3}\cdot\sin(3\,x) + \frac{1}{5}\cdot\sin(5\,x) + \ldots\right]$$

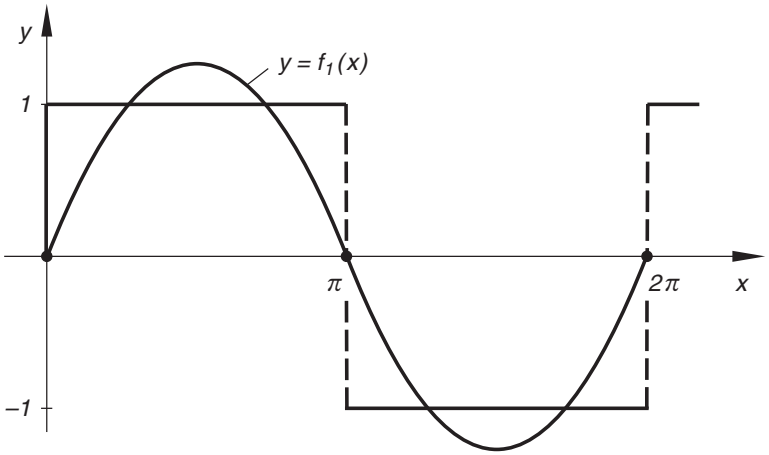
Durch *Abbruch* dieser Reihe nach dem 1., 2. bzw. 3. Glied erhalten wir die folgenden *Näherungsfunktionen*:

1. *Näherung:* $f_1(x) = \dfrac{4}{\pi}\cdot\sin x$

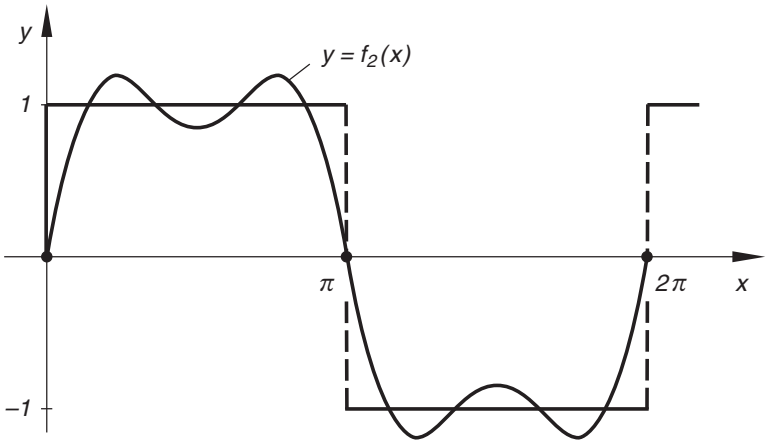
2. *Näherung:* $f_2(x) = \dfrac{4}{\pi}\left[\sin x + \dfrac{1}{3}\cdot\sin(3\,x)\right]$

3. *Näherung:* $f_3(x) = \dfrac{4}{\pi}\left[\sin x + \dfrac{1}{3}\cdot\sin(3\,x) + \dfrac{1}{5}\cdot\sin(5\,x)\right]$

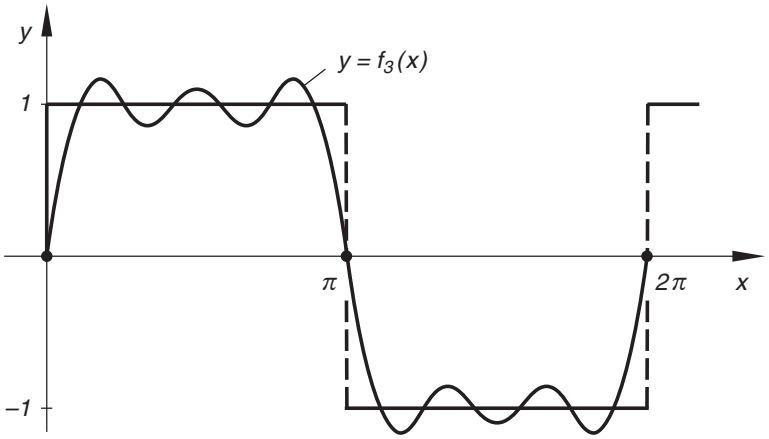
Bild II-7, a) bis c) zeigt den Verlauf dieser Näherungskurven im direkten Vergleich mit der Rechteckkurve. Die Approximation wird dabei (erwartungsgemäß) mit zunehmender Anzahl der Glieder immer besser.



a) 1. Näherung



b) 2. Näherung



c) 3. Näherung

Bild II-7 Näherungsfunktionen der Rechteckkurve

Bild II-8 zeigt die Rechteckkurve und ihre ersten drei Näherungskurven.

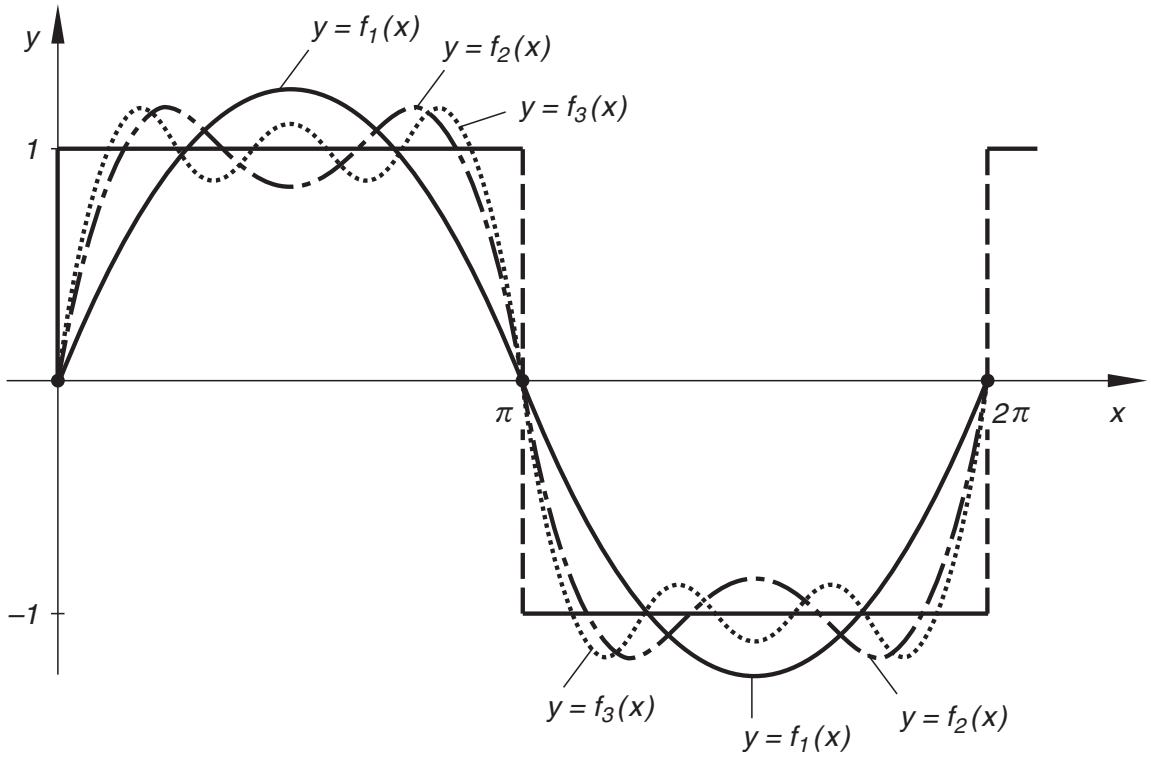


Bild II-8 Rechteckkurve im direkten Vergleich mit ihren ersten drei Näherungsfunktionen

9.5 Aufgaben zu Kapitel 9 - Unendliche Reihen

9.5.1 Konvergenz

Aufgabe 9.24

Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \cdot 3^{2n+1}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 \cdot 4^{3n-1}}$ **d)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$.

9.5.2 Konvergenzradius und Konvergenzbereich

Aufgabe 9.25

Bestimmen Sie Konvergenzradius und Konvergenzbereich folgender Reihen

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n}$ **c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n+1} \cdot x^n$ **d)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!} \cdot x^n$.

[Lösung: $r_a = 1$; $r_b = 5$; $r_c = 1$; $r_d = \infty$]

9.5.3 MacLaurinsche Reihe

Aufgabe 9.26

Entwickeln Sie in einer MacLaurin Reihe:

a) $f(x) = \cos(x)$ durch Integration der Reihe von $\sin(x)$,

b) $\ln(1 + x^2)$ **c)** $f(x) = \cosh(x)$ **d)** $f(x) = \sinh(x)$.

Im Aufgabenteil **d)** stehen vier Möglichkeiten zur Verfügung: $\alpha)$ direkt, $\beta)$ Differentation der Reihe von $\cosh(x)$, $\gamma)$ Integration der Reihe von $\cosh(x)$ und $\delta)$ Definitionsgleichnung. Bestimmen Sie für **b)**, **c)** und **d)** jeweils die Konvergenzradien.
(Lösung: $r_b = \infty$; $r_c = \infty$; $r_d = 1$)

9.5.4 Taylor-Reihe

Aufgabe 9.27

Entwickeln Sie folgende Terme in einer Taylor-Reihe (ersten 4 Ableitungen):

a) $\sin(x)$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ **b)** $\sqrt{x}$, $x_0 = 1$ **c)** $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x}$, $x_0 = 1$.

Literaturhinweise Mathematik I+II

Formelsammlungen

Bartsch, Hans-Jochen (2014) *Taschenbuch mathematischer Formeln für Ingenieure und Naturwissenschaftler*, Carl Hanser Verlag GmbH & CO. KG; 23. neu bearbeitete Auflage, ISBN-10: 3446438009, ISBN-13: 978-3446438002 (19,99 Euro)

Papula, Lothar (2014) *Mathematische Formelsammlung für Ingenieure und Naturwissenschaftler* Vieweg+Teubner Verlag; 11. Auflage, ISBN-10: 3658056193, ISBN-13: 978-3658056193 (29,99 Euro)

Stöcker, H. (2007) Taschenbuch mathematischer Formeln und moderner Verfahren, Harri Deutsch Verlag, 4. Auflage, ISBN-10: 3817118112, ISBN-13: 978-3817118113 (19,95 Euro)

Lehr- und Übungsbücher

Papula, Lothar (2011) *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1,* Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium [Taschenbuch] Vieweg+Teubner Verlag, 13. Auflage, ISBN-10: 383481749X, ISBN-13: 978-3834817495 (29,95 Euro)

Papula, Lothar (2012) *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 2,* Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium [Taschenbuch] Vieweg+Teubner Verlag, 13. Auflage, ISBN-10: 3834815896, ISBN-13: 978-3834815897 (34,95 Euro)

Papula, Lothar (2011) *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 3,* Vektoranalysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mathematische Statistik, Fehler- und Ausgleichsrechnung [Taschenbuch] Vieweg+Teubner Verlag, 6. Auflage, ISBN-10: 3834812277, ISBN-13: 978-3834812278 (34,99 Euro)

Papula, Lothar (2010) *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler - Klausur- und Übungsaufgaben,* 632 Aufgaben mit ausführlichen Lösungen zum Selbststudium und zur Prüfungsvorbereitung, Vieweg+Teubner Verlag, 4. Auflage, ISBN-10: 3834813052, ISBN-13: 978-3834813053 (34,00 Euro)

Stingl, Peter (2009) *Mathematik für Fachhochschulen: Technik und Informatik*, Carl Hanser Verlag GmbH & CO. KG, 8. Auflage, ISBN-10: 3446420657, ISBN-13: 978-3446420656 (29,90 Euro)

Nachschlagewerke

Bronstein, Ilja N., K.A. Semendjajew, Gerhard Musiol und Heiner Muehlig (2013) *Taschenbuch der Mathematik* 9. korrigierte Auflage, Verlag Europa Lehrmittel, ISBN mit CD: 978-3-8085-5673-3; ISBN ohne CD: 978-3-8085-5671-9 (ohne CD 29,29 Euro, mit CD 39,90 Euro)

Index

äquivalente Vektoren, 2-3

Beschränktheit, 5-3
Beweismethoden, 1-5
Biegelinie, 8-23
Biegesteifigkeit, 8-23
Binomischer Lehrsatz
- Beweis, 1-13
binomischer Satz, 1-9

charakteristische Gleichung, 3-38

Determinante, 3-22
Differentialquotient, 7-3
- n-ter, 7-16
Differentialrechnung, 7-I

Eigenschaften von Funktionen
- Aufgaben, 5-36
Eigenvektor, 3-38
Eigenwerte, 3-38
Euler'sche Zahl, 5-18
Eulersche Zauberformel, 4-14
exzentrische Anamolaie, 5-33

Formel von Moivre, 5-28
Fourier-Analyse, 9-16
freie Parameter, 3-9
Funktionen
- ganzrationale, 5-7
- gebrochenrationale, 5-11
- rationale, 5-7
Funktionsuntersuchung, 7-23

ganzrationale Funktionen, 5-7
goniometrische Form
- komplexer Zahlen, 4-9
Grad einer Nullstelle, 5-8
Guldinsche Regeln, 8-23
- Oberfläche, 8-23
- Volumen, 8-23

harmonische Analyse, 9-16
Hauptwert, 5-24
Horizontalwendepunkt, 7-28
Horner Schema, 5-9
- Aufgaben, 5-37
Hyperbolischer Pythagoras, 5-27

Induktionsbehauptung, 1-8
Induktionschluss, 1-8
Induktionsvoraussetzung, 1-8
Integralmittelwert, 8-12
Integralrechnung, 8-I

Kegelschnitte, 5-13
Kombinatorik, 1-9
Komplexe Zahlen, 4-I
Krümmungsverhalten, 7-27
Kreisgleichung, 5-14
Kurvendiskussion, 7-23

l'Hospitalsche Regeln, 7-30
Lineare Algebra, 3-I
linearer Mittelwert, 8-12
Linearfaktoren, 5-8

Matrix, 3-13
Mengen, 1-I
Mittelwert 1. Ordnung, 8-12
Monotonie, 5-3
Multiplikationssatz für Determinanten, 3-29

Normalparabel, 5-36

Ortsvektor, 2-4

Parallelogrammregel, 2-6
Pascalsches Dreieck, 1-11
Periodizizät, 5-4
Permutationen, 1-9

Pol und Lücke
- Aufgaben, 5-37
Polarform
- komplexer Zahlen, 4-9
Polynomdivision, 5-8
Polynomdivison
- Aufgaben, 5-37
Polynomfunktionen, 5-7
Potenzfunktionen, 5-7
Produktmengen, 1-4
Produktregel, 7-5

Quotientenregel, 7-5

Rang eines Gleichungssystems, 3-7
Regeln von l'Hospital, 7-30
Reihen, 9-I
Relationen, 5-1

Sattelpunkt, 7-28
Satz von Moivre, 4-12
Satz von Steiner, 8-22
schiefer Wurf, 5-34
Schmiegefunktion, 5-12
Sehnenpolygon, 8-27
Sekante, 7-2
Simpsonschen Regel, 8-30
skalare Größe, 2-2
Stetigkeit, 6-I
Stufenwendepunkt, 7-28
Symmetrie, 5-4

Tangente, 7-2
Treppenpolygon, 8-25
Trigonometrische Funktionen
- Aufgaben, 5-38

Umkehrfunktion, 5-5
- Aufgaben, 5-36
Umkehrung, 5-5
uneigentliche Integrale, 8-32

Vektorraum, 3-14
Vektorraume, 2-I
vollständige Induktion, 1-8

Wendepunkt, 7-27, 7-28
Wendestelle, 7-27, 7-28
Wirkungslinie eines Vektors, 2-2

Zahlenfolgen, 6-I, 6-1
Zeiger
- einer komplexen Zahl, 4-7