北京大学 22/23 学年第 2 学期

高数 B 期中试题

2023.04.16

以下每小题10分.

1. 求方程 $\left(xy-x^3y^3\right)\mathrm{d}x+\left(1+x^2\right)\mathrm{d}y=0$ 满足条件 $y(0)=1$ 的解.
2. 求方程 $x^2y''-3xy'+4y=0 \quad (x>0)$ 的满足条件 $y(1)=1,\ y'(1)=1$ 的解, 其中 $y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, y''=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$
3. 求方程 $y''+y'-2y=x+e^x+\sin x$ 的满足条件 $y(0)=-\frac{7}{20},\ y'(0)=\frac{38}{15}$ 的解, 其中 $y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, y''=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.
4. 设 $I(R)=\oint_{x^2+y^2=R^2}\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{\left(x^2+xy+y^2\right)^2}$, 证明 $\lim_{R\to+\infty}I(R)=0$. 其中积分方向为逆时针方向.
5. 设 L 为空间曲线 $\begin{cases}x^2+y^2=1\\x+z=1\end{cases}$, 其正向为自 z 轴正向看下来的逆时针方向. 计算积分 $I=\int_L\left(y-z+\sin^2x\right)\mathrm{d}x+\left(z-x+\sin^2y\right)\mathrm{d}y+\left(x-y+\sin^2z\right)\mathrm{d}z$.
6. 计算积分 $I=\iint_D(x+y+xy)^2\,\mathrm{d}\sigma$, 其中 $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leqslant 1\right\}$.
7. 计算积分 $I=\iint_D\left(\frac{3x^2\sin y}{y}+2e^{x^2}\right)\mathrm{d}\sigma$, 其中 D 由 $y=x, y=x^3$ 围成.
8. 计算积分 $I=\iiint_\Omega\frac{(x+y+z)^2\sqrt{1+x^2+y^2}}{(x^2+y^2+z^2)(1+x^2+y^2+z^2)}\mathrm{dv}$, 其中 dv 即 $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \Omega$ 是由曲面 $z=\sqrt{1+x^2+y^2}, z=\sqrt{3\left(1+x^2+y^2\right)}, x^2+y^2=1$ 所围成的区域.
9. 计算积分 $I=\oint_\Gamma\left(\frac{y^2+y+4x^2}{4x^2+y^2}+\sin x^2\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{4x^2-x+y^2}{4x^2+y^2}+\sin y^2\right)\mathrm{d}y$, 其中 Γ 是 $x^2+y^2=9(y\geqslant 0), \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1(y\leqslant 0)$ 所组成的闭曲线的逆时针方向.
10. 设曲面 S 是柱体 $\Omega=\left\{(x,y,z) \mid x^2+y^2\leqslant 1, 0\leqslant z\leqslant 1\right\}$ 的表面的外侧（同时包含上表面、下表面、侧面）. 计算下列积分:
    - (a) $I_1=\iint_S(y-z)|x|\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z-x)|y|\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(x-y)z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
    - (b) $I_2=\iint_S(y-z)x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z-x)y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(x-y)z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
    - (c) $I_3=\iint_S(y-z)x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z-x)y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(x-y)z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$