期中答案

1. 计算二重积分 $I=\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)\,dxdy$. $D: x^2+y^2\le 1$, $x\ge 0$, $y\ge 0$.

解. 利用极坐标

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \ln(1+r^2)\cdot r\,dr$$

$$=\frac{\pi}{4}\int_1^2 \ln t\,dt \quad (t=1+r^2)$$

$$=\frac{\pi}{4}(2\ln 2-1).$$

2. 计算三重积分 $I=\iiint\limits_\Omega (y^2+z^2)\,dV$. $\Omega: 0\le z\le x^2+y^2\le 1$

解:
$$I=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} dxdy \int_0^{x^2+y^2} (y^2+z^2)\,dz$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \frac{1}{3}(x^2+y^2)^3+y^2(x^2+y^2)\,dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{1}{3}r^7+r^5\sin^2\theta\,dr=\frac{\pi}{4}.$$

3. 设曲线C为椭圆 $x^2/16+y^2/9=1$, 沿逆时针方向.
计算曲线积分 $I=\oint_C \frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}$.

解: $P(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$ $Q(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2}$.

当 $(x,y)\ne(0,0)$ 时. 有 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

取单位圆周 $x^2+y^2=1$. 逆时针方向. 则利用 Green 公式

$$I=\oint\limits_{\substack{x^2+y^2=1\\ \text{逆时针}}} \frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\frac{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\,d\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=2\pi.$$

4. 计算曲面积分 $I=\iint_S (x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)\,dS$.

其中 S 为圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=1$ 截下部分.

解：曲面 S 为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$. $(x^2+y^2\le 1)$.

则 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{z}$. $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{z}$ 故 $dS=\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}\,dxdy$

$$=\sqrt{2}\,dxdy.$$

故 $$I=\iint_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{2}[x^2y^2+(x^2+y^2)^2]\,dxdy$$

$$=\sqrt{2}\int_0^1 r^4\cdot r\,dr\int_0^{2\pi}(\cos^4\theta+\sin^4\theta+3\cos^2\theta\sin^2\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{3\sqrt{2}}{8}\pi$$

5. 计算曲面积分 $I=\oiint_S x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy$.

其中 S 为抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $z=4$ 所截部分的外侧.

解：由高斯公式. 记 S_1 为曲面 $\begin{cases} z=4 \\ x^2+y^2\le 2\end{cases}$ 朝上方向.

$$I+\oiint_{S_1^*} z\,dxdy=\iiint_V 3\,dxdydz.$$

V 为 $z=x^2+y^2$ 与 $z=4$ 所围立体.

$$I=\iint_{x^2+y^2\le 4}dxdy\int_{x^2+y^2}^4 dz-\iint_{x^2+y^2\le 4}4\cdot dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2(4r-r^3)dr-16\pi$$

$$=-8\pi.$$

6. 求微分方程的所有解. $y' = xy + 3x + 2y + 6$.

解. $\dfrac{dy}{dx} = (x+2)\cdot(y+3)$. 变量分离 $\dfrac{dy}{y+3} = (x+2)\,dx$.

得 $\ln|y+3| = \frac{1}{2}x^2 + 2x + C'$.

即 $y+3 = C\cdot e^{(\frac{1}{2}x^2+2x)}$. $C \neq 0$.

但 $y \equiv -3$ 也为方程的特解. 故方程的所有解为

$$y = C\cdot e^{(\frac{1}{2}x^2+2x)} - 3 \qquad \forall C \in \mathbb{R}.$$

7. 求微分方程的通解 $y'' - 4y' + 3y - 4e^x = 0$.

解: 齐次方程 $y'' - 4y' + 3y = 0$ 的通解为

$$C_1\cdot e^{3x} + C_2\cdot e^x. \qquad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

非齐次方程的特解形如 $A\cdot xe^x$. 代入得

$$y' = Ae^x + Axe^x \qquad y'' = 2Ae^x + Axe^x.$$

代入解得 $A = -2$. 故通解为

$$y = C_1 e^{3x} + C_2\cdot e^x - 2xe^x.$$

8. 设区域D为 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\}$. $a, b > 0$.

L为D的边界. 设 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上有连续的一阶偏导数.

记 $\vec{F} = (P, Q)$. $\vec{n}$ 为 L 的单位外法向量. 证明

$$\oint_{L^+} \vec{F}\cdot\vec{n}\, ds = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dxdy.$$

证明: 令 $\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$. 则 $\begin{cases} x'(\theta) = -a\sin\theta \\ y'(\theta) = b\cos\theta \end{cases}$ 3/

$$\vec{n} = \left(\frac{b\cos\theta}{\sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}}, \frac{a\sin\theta}{\sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}}\right).$$

$$ds = \sqrt{(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2}\, d\theta = \sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}\, d\theta$$

故 $\oint_{L^+} \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = \int_0^{2\pi}\left(\frac{b\cos\theta\cdot P}{\sqrt{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}} + \frac{a\sin\theta\cdot Q}{\sqrt{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}}\right)\cdot\sqrt{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}\,d\theta$

$$= \int_0^{2\pi} P\cdot(b\cos\theta) + Q\cdot(a\sin\theta)\,d\theta$$

$$= \oint_{L^+} P\,dy - Q\,dx$$

(Green公式) $= \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)dx\,dy$.

~~9. n维单位球面 $\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1\}$~~
~~广义球面积分~~

9. 设 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的一元连续函数. 证明

$$\iint_S f(x+y+z)\,dS = 2\pi\int_{-1}^{1} f(\sqrt{3}\,\xi)\,d\xi.$$

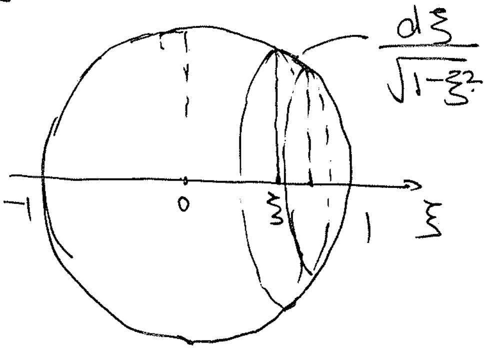
其中 ~~球面~~ S 为 $x^2+y^2+z^2=1$.

证明: 对空间做正交变换 $(x,y,z)\longmapsto(\xi,\eta,\varphi)$.

其中 $\xi = \frac{1}{\sqrt{3}}(x+y+z)$.

则此时通过计算旋转体的侧面积

$$dS = 2\pi\sqrt{1-\xi^2}\cdot\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}.$$



得 $\iint_S f(x+y+z)\,dS$

$$= \int_{-1}^{1} f(\sqrt{3}\,\xi)\cdot 2\pi\,d\xi.$$