# 北京大学高等数学B第一次模拟考试

命题人：谢彦桐

北京大学数学科学学院

April 1, 2022

说明：题目1-3和5-8各10分，题4题9各15分

**题 1.** 计算二重积分$I=\iint_D(\sqrt{x}+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$是由直线$x=1,y=x,y=2x$围成区域。

**题 2.** 计算三重积分$I=\iiint_\Omega\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$是球$x^2+y^2+z^2\leq 2x$。

**题 3.** 计算第二型曲线积分$I=\int_L\frac{\mathrm{d}y-\mathrm{d}x}{x-y+1}$，其中$L$是圆周$x^2+y^2-2x=0$在$y\leq 0$的部分沿逆时针方向。

**题 4.** 计算第二型曲面积分$I=\iint_S y(x-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(y^2+xz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$S$是球面$x^2+y^2+z^2=5$在$z\geq 1$的部分，取外侧。

**题 5.** 求解常微分方程$xy'+2y=\sin x$满足$y\left(\pi\right)=\frac{1}{\pi}$的特解。

**题 6.** 求解常微分方程通解$y''+2y'=3+4\sin 2x$。

**题 7.** 参数$a>0$，设空间中的圆柱$x^2+z^2=a^2$和$y^2+z^2=a^2$相交得到的区域为$\Omega$，$\Omega$在第一卦限的部分如图所示（$\Omega$在八个卦限的部分都需要考虑），求$\Omega$的体积。

**题 8.** 设$u(x,y)$是闭矩形$D=[a,b]\times[c,d]$上的连续函数，在$D$上存在连续的二阶偏导数，并且$u(x,y)=0$对$(x,y)\in\partial D$成立，证明：

$$\iint_D|u(x,y)|^2\mathrm{d}\sigma\leq\left(\iint_D\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\right|\mathrm{d}\sigma\right)\left(\iint_D\left|\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right|\mathrm{d}\sigma\right). \tag{1}$$

**题 9.** 在如下的常微分方程我们想求解定义在闭区间$[0,L]$的函数：

$$\begin{cases} u''(x)+\lambda u(x)=0, \\ -a_1u'(0)+a_2u(0)=b_1u'(L)+b_2u(L)=0, \end{cases} \tag{2}$$

其中参数$a_1,a_2,b_1,b_2,L$都是给定的函数。对于大多数$\lambda$上述常微分方程并没有解。如果对某些$\lambda$上述常微分方程存在不恒等于*0*的解，我们称$\lambda$为一个**本征值**，对应的非零解

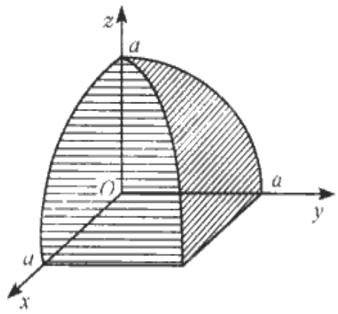


图 1: 题7的几何体$\Omega$示意图。

解$u_\lambda(x)$称为**本征函数**。回答下列问题

***1.***对$a_1=-1, b_1=1$且$a_2=b_2=0$的情形，证明：*0*是本征值。

***2.***对$a_1=-1, b_1=1$且$a_2=b_2=0$，以及$a_1=b_1=0$且$a_2=b_2=1$的情形，求解所有本征值和及每个本征值对应的所有本征函数。

***3.***如果$a_1, a_2, b_1, b_2$都是正数，请不通过求解方程证明：所有本征值都是正数。

***4.***如果$a_1, a_2, b_1, b_2$都是正数，设$\lambda$和$\mu$是两个不同的本征值，对应本征函数为$u_\lambda$和$u_\mu$，证明：$\int_0^L u_\lambda(x)u_\mu(x)\mathrm{d}x=0$。