2022秋季高等数学B期末模拟考试

命题人：DARKO

2022.12

说明：本卷不押题，仅用于高等数学B选课同学复习或模拟考试使用。如正式考试与本卷风格迥异，实属正常现象。本卷不涉及的知识点也可能是重点，请同学们全面复习各个考点。

题 1. （*14*分）证明方程$-2x+y-x^2+y^2+z+\sin z=0$在$(0,0,0)$附近确定隐函数$z=f(x,y)$，并写出$z=f(x,y)$在$(0,0)$处的泰勒公式（展开到一次）。

题 2. （*16*分）求函数极限

1.$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{\sin(x^2)\left(\cos x-\mathrm{e}^{x^2}\right)}$

2.$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{\sin x}\right)$

题 3. （*16*分）回答下列问题

*1.*设平面$x+y+z=3$和平面$x-2y-z+2=0$的交线为L，求过点$(1,2,3)$且与直线L垂直的平面的一般式方程。

*2.*设向量$\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{OB}$夹角为$\frac{\pi}{3}$，满足$\left|\overrightarrow{OA}\right|=1$和$\left|\overrightarrow{OB}\right|=2$，定义$\overrightarrow{OA}=(1-\lambda)\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{OQ}=\lambda\overrightarrow{OB}$，求$\lambda\in[0,1]$使得$\left|\overrightarrow{PQ}\right|$最小值。

题 4. （*10*分）设二元函数$f(x,y)=\begin{cases}\frac{y^2}{x^4+y^2}, & y\neq 0,\\ 1, & y=0,\end{cases}$ 讨论$f(x,y)$在原点的两个偏导数以及全微分的存在性，如存在求出其值，如不存在说明理由。

题 5. （*12*分）求$f(x,y)=2x^3-3x^2-6xy(x-y-1)$在$\mathbb{R}^2$所有极值点。

题 6. （*10*分）设参数$a>\mathrm{e}$，且正实数$0<x<y<\frac{\pi}{2}$，证明：$a^y-a^x>a^x\ln a(\cos x-\cos y)$。

题 7. （*12*分）求$f(x)=x\sin\left(x^2-2x\right)$在$x=1$的局部泰勒公式，并计算$f^{(n)}(1)$，其中$n\in\mathbb{N}^*$。

题 8. （*10*分）设$f(x)$是在闭区间$[P,Q]$定义的函数，且在开区间(P,Q)二阶可导，满足$f''(x)\geq 1$对一切$x\in(P,Q)$成立。求证：存在图像$y=f(x)$上的三个点A,B,C使得三角形$\triangle ABC$面积大于$\frac{(Q-P)^3}{16}$。