

北京大学数学科学学院期末考试参考答案

2020 - 2021 学年第 1 学期

考试科目 高等数学B1 考试时间 2021年 1 月14 日上午

姓 名 学 号

本试题共 6 道大题, 满分 100 分

1.(15分) (极限题) 下面的极限存在吗? 如果存在, 求出极限值。 如果不存在, 写出理由。

(1) (5分) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x - 2 + x^2}{x^4}$

(2) (5分) 二元函数的极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^5 y^3}{x^8 + y^8}$

(3) (5分) 二元函数的极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x + \sin y) \cos \frac{1}{|x| + |y|}$

2.(15分) (极值题) 求出闭区间 $[-1, 1]$ 上的一元函数 $f(x) = x^{\frac{2}{3}} - (x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}$ 达到最小值的所有 $[-1, 1]$ 上的点。

3.(20分) （泰勒多项式题）

（1）（15分） 设 a, b 是实数, $b \neq 0$. 求出二元函数 $f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$ 在点 (a, b) 处的二阶泰勒多项式。

（2）（5分） 设 $a < b$, n 为正整数, 函数 $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 在 (a, b) 中每点都有 $(n+1)$ 阶导数, 定义二元函数 $T: (a, b) \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 为

$$T(x, y) = f(x) - f(y) - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(y)}{k!} (x - y)^k$$

求出 $T(x, y)$ 对 y 的一阶偏导函数 $\frac{\partial T(x, y)}{\partial y}$.

4.(10分) (隐函数题) 证明: 对任意给定的实数 p , 存在点 1 的开邻域 U , 存在点 1 的开邻域 W , 存在唯一的函数 $y = f(x)$, $x \in U$, $f(x) \in W$ 满足方程 $x^p + y^p - 2xy = 0$.

5.(15分) (应用题) 设在空间 \mathbb{R}^3 中 Oxy 平面之外的点 (x, y, z) 处的电势 $V = \left(\frac{2y}{z}\right)^x$. 求出在点 $(1, \frac{1}{2}, 1)$ 处, 电势 V 下降最快的方向上的单位向量。

6.(25分) (空间解析几何与多元函数综合题) 设空间 \mathbb{R}^3 中的平面 $K: x + 2y + 3z = 6$ 与 x 轴, y 轴, z 轴分别交于三点 A, B, C . \mathbb{R}^3 中一个动点 H 与平面 K 保持恒定的距离 1 , H 在平面 K 上的垂直投影记为 M . 假设 M 是在以 A, B, C 为顶点的三角形 $\triangle ABC$ 之中, M 到三条边 BC, CA, AB 的距离分别记为 p, q, r .

(1) (5分) 求出三角形 $\triangle ABC$ 的面积。

(2) (5分) 用 p, q, r 表示以 A, B, C, H 为四个顶点的四面体的表面积 $S(p, q, r)$.

(3) (5分) 写出变量 p, q, r 必须满足的约束条件。

(4) (10分) 求出以 p, q, r 为变量的函数 $S(p, q, r)$ 的条件极值的稳定点。

