

北京大学数学科学学院期末试题参考答案

2021 - 2022 学年第 2 学期

考试科目 高等数学 B2

姓 名 \_\_\_\_\_ 学 号 \_\_\_\_\_

本试题共 8 道大题，满分 100 分

说明：在下面所有题目中， $\mathbb{R}$  代表实数域。

1.(10分) 求函数

$$\frac{\sqrt{|x|}}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{|x|}}{1 - \sqrt{|x|}}$$

在  $x = 0$  处的幂级数展开式，并指出此幂级数的收敛域。

2.(15分) 设  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  是周期为  $2\pi$  的函数， $f(x)$  在  $(-\pi, \pi]$  上等于  $e^x$ 。求  $f(x)$  的傅里叶级数，以及此傅里叶级数在  $x = \pi$  处的收敛值。

3.(10分) 求无穷积分  $\int_0^{+\infty} \sqrt{x^3} e^{-x} dx$  的值, 和 瑕积分  $\int_0^1 \sqrt{\frac{x^3}{1-x}} dx$  的值。

4.(10分) 求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)x^n$  的收敛区间, 以及此幂级数的和函数。

5.(10分) 任意给定常数  $r > 0$ . 证明 函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-nx}$  在  $[r, +\infty)$  上一致收敛。

6.(15分) 求函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^x + 2n}$$

的收敛域, 绝对收敛点  $x$  的全体, 条件收敛点  $x$  的全体。

**7.(15分)** 定义函数  $\theta: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  为

$$\theta(x) = \int_0^x \sqrt{(t+1)(t+2)(t+3)} \, dt$$

证明 无穷积分

$$\int_0^{+\infty} \cos(\theta(x)) \, dx$$

收敛。（注：本题要求写出 **详细过程和根据**。）

**8.(15分)** 设  $n$  是正整数。

**(1).(5分)** 任给常数  $a > 0$ . 证明含参变量  $t$  的无穷积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t + x^2)^n} dx$$

在  $[a, +\infty)$  上一致收敛。

**(2).(10分)** 对于每个  $t \in (0, +\infty)$ , 求出

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t + x^2)^n} dx$$

的值。

(注: 本大题要求写出详细过程和根据。)



