

北京大学数学科学学院期末考试参考答案

2020 - 2021 学年第 2 学期

考试科目 高等数学 B2

姓 名 \_\_\_\_\_ 学 号 \_\_\_\_\_

本试题共 7 道大题，满分 100 分

说明：在下面所有题目中， $\mathbb{R}$  代表实数域。

1.(15分) 求出函数  $\frac{1}{2} \ln \frac{1+x^2}{1-x^2}$  在  $x=0$  处的泰勒展开式。

2.(15分) 两小题。

(1) .(8分) 求出无穷积分  $\int_0^{+\infty} \sqrt{x} e^{-x} dx$  的值。

(2) .(7分) 求出瑕积分  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$  的值。

3.(15分) 求出幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) x^n$  的收敛区间, 及其和函数。

4.(15分) 任意取定  $r > 0$ . 证明含参变量  $y$  的无穷积分  $\int_0^{+\infty} e^{-x y^2} \cos x \, dx$  对于  $y \in [r, +\infty)$  是一致收敛的。

5.(10分) 求出函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^x + n}$  的收敛域。

6.(20分) 贯通三小题。

(1).(10分) 设  $p$  是 **非整数** 的实数,  $(-\infty, +\infty)$  上的函数  $f(x)$  以  $2\pi$  为周期, 它在  $[-\pi, \pi)$  等于  $\cos(px)$ . 求出  $f(x)$  的傅里叶级数, 及其和函数。

(2).(3分) 明确写出从上面(1)中  $\cos(px)$  的傅里叶展开式 推出下面等式的详细 **推导过程**: 当  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{t}{\pi}$  **不是整数** 时, 有

$$\frac{1}{\sin t} = \frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{t+n\pi} + \frac{1}{t-n\pi} \right).$$

(3).(7分) 明确写出从上面(2)中  $\frac{1}{\sin t}$  的展开式 推出下面等式的详细 **推导过程**:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$







7.(10分) 设  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  是单调下降的连续函数 (没有假定  $(0, +\infty)$  上导函数  $f'(x)$  的存在),  $C$  和  $D$  都是实数,  $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = C$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = D$ ,  $0 < a < b$ . 求出广义积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx$$

的值。

