

北京大学 20/21 学年第二学期  
高等数学 (B) 期中试题

1. (10 分) 计算二重积分:

$$\iint_D \ln(1+x^2+y^2) dx dy, \quad D: x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0.$$

2. (10 分) 计算三重积分:

$$\iiint_{\Omega} (y^2+z^2) dV, \quad \Omega: 0 \leq z \leq x^2+y^2 \leq 1.$$

3. (10 分) 设曲线  $C$  为椭圆  $x^2/16+y^2/9=1$  沿逆时针方向. 计算曲线积分:

$$\oint_C \frac{x dy - y dx}{x^2+y^2}.$$

4. (10 分) 计算曲面积分:

$$\iint_S (x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2) dS,$$

其中  $S$  为圆锥面  $z = \sqrt{x^2+y^2}$  被柱面  $x^2+y^2=1$  截下部分。

5. (15 分) 计算曲面积分:

$$\oiint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy,$$

其中  $S$  为抛物面  $z = x^2 + y^2$  被平面  $z = 4$  所截部分的外侧。

6. (10 分) 求下面常微分方程的所有解:  $y' = xy + 3x + 2y + 6$ .

7. (15 分) 求下面常微分方程的通解:  $y'' - 4y' + 3y - 4e^x = 0$ .

8. (10 分) 设平面有界闭区域  $D$  为

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}, \quad a, b > 0.$$

设曲线  $L$  为  $D$  的边界, 函数  $P(x, y), Q(x, y)$  在  $D$  上有连续的一阶偏导数. 记  $\mathbf{F} = (P, Q)$ ,  $\mathbf{n}$  为曲线  $L$  的单位外法向量. 证明:

$$\oint_{L^+} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \iint_D \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy.$$

9. (10 分) 设  $f(x)$  为  $\mathbb{R}$  上的连续函数. 证明:

$$\iint_S f(x+y+z) dS = 2\pi \int_{-1}^1 f(\sqrt{3}\xi) d\xi,$$

其中  $S$  为单位球面  $x^2+y^2+z^2=1$ 。