2022秋季高等数学B期中模拟考试（更正版）

命题人：DARKO

2022.10

说明：本卷不押题，仅用于高等数学B选课同学复习或模拟考试使用。如正式考试与本卷风格迥异，实属正常现象。本卷不涉及的知识点也可能是重点，请同学们全面复习各个考点。

题 1. （*10*分）多选题，少选错选均不得分，不需要给出解答过程

1.下列各式中总是正确的有哪些

$$\textbf{A}.\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x<\frac{\pi}{2}\qquad \textbf{B}.\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x>1$$

$$\textbf{C}.\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x>\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\qquad \textbf{D}.\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x>\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

2.设$f(x)$上定义在$[1,+\infty)$上的非负单调下降连续函数，定义$s_n=\sum_{k=1}^{n}f(k)$，那么下列各式中总是正确的有哪些

$$\textbf{A}.s_n\le\int_1^n f(x)\mathrm{d}x\qquad \textbf{B}.s_n\le f(1)+\int_1^n f(x)\mathrm{d}x$$

$$\textbf{C}.s_n\ge\int_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x\qquad \textbf{D}.s_n\ge f(1)+\int_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x$$

题 2. （*18*分）求极限，自变量为n的极限视为序列极限，自变量为x的极限视为函数极限。使用洛必达法则不得分。

1.$\lim_{n\to\infty}\frac{1^{2021}+2^{2021}+\cdots+n^{2021}}{n^{2022}}$.

2.$\lim_{x\to+\infty}\left(\sin\frac{1}{x^{2022}}+\cos\frac{1}{x^{1011}}\right)^{x^{2022}}$.

3.$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)-3\sin x}{x^3}$.

题 3. （*12*分）计算积分

1.$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\arctan(\mathrm{e}^x)}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x$.

2.$\int\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$.

题 4. （*8*分）求所有可能的的参数a,b使得$f(x)$在$x=1$处可导，其中

$$f(x)=\begin{cases} ax\mathrm{e}^x+bx^x, & x>1,\\ |x|, & x\le 1.\end{cases}$$

题 5. （*12*分）设$f(x)$是$\mathbb{R}$上以*1*为周期的连续函数，求证：存在$c\in\mathbb{R}$使得$f(c)=f(c+\pi)$。

题 6. （*8*分）计算曲线$y=\int_0^x\sqrt{\sin t}\mathrm{d}t$在$x\in[0,\pi]$部分的弧长。

题 7. （*12*分）考虑方程$x=\tan x$的正实根：

1.证明：方程$x=\tan x$的正实根有无穷多个。

2.如果将方程$x=\tan x$的正实根从小到大排成一列$\{x_n\}$，证明$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=\pi$。

题 8. （*12*分）设$n\in\mathbb{N}^*$，定义序列$x_n=\sqrt[n]{n}$，回答下列问题

1.使用$\varepsilon-N$语言证明$\lim_{n\to\infty}x_n=1$。

2.求所有正实数a使得$\lim_{n\to\infty}n(x_n-1)^a$收敛。

题 9. （*8*分）给定正整数$a>0$，定义函数$f_a(x)=\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^a$，求所有的自然数$n$使得$(f_a)^{(n)}(0)=0$。