# 北京大学数学科学学院2021-22(1)“高等数学B1”期末试题答案

**姓名____________________ 学号____________________ 共 7 道大题**

在下面试题中，$\mathbb{R}$ 记实数域， $\mathbb{R}^n$ 记标准的 $n$ 维欧氏空间。

**1.(10分)** 证明：任给 $x \in \mathbb{R}$，存在 $\theta(x) \in (0,1)$ 使得

$$\arctan\ x \ = \ \frac{x}{1\ +\ (\ \theta(x)\ )^2\ \ x^2} \quad .$$

**2.(20分)** 未定式的极限。

**（1）.(10分)** 求出

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan^4 x}{\sqrt{\ 1-\frac{x\ \sin x}{2}\ }\ -\ \sqrt{\cos x}} \quad .$$

**（2）.(10分)** 设 $n$ 是任给的正整数，对于每个 $1 \le k \le n$，$a_k$ 是任给的 正 实数。 求出

$$\lim_{x\to 0}\ \left(\ \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^x}{n}\ \right)^{\frac{1}{x}} \quad .$$

**3.(15分)** 设正整数 $n \geq 2$. 求出

$$f(x) = \frac{1 - 2x + 5x^2}{(1 - 2x)(1 + x^2)}$$

在 $x = 0$ 点的 $(2n + 1)$ 阶局部泰勒公式。

(注：本题中的正负号需要细心对上正确位置。学生有可能不小心而出错。如果最后的表达式不完全对，只要思路正确，可以给部分分数。改卷的助教们要协调好各自给分标准的前后一致。）

**4.(10分)** 定义三元函数 $f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 为

$$f(x,y,z) \ = \ \begin{cases} \frac{x\,y\,z}{x^2+y^2+z^2} & \text{当} \ \ (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{当} \ \ (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

**（1）.(6分)** 计算出 $f$ 在点 $(0,0,0)$ 处 三个偏导数 $f_x(0,0,0)$ ， $f_y(0,0,0)$ ， $f_z(0,0,0)$ .

**（2）.(4分)** 三元函数 $f$ 在点 $(0,0,0)$ 处 可微吗？ 证明你的结论。

**5.(15分)** 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 和 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 都有连续的二阶导函数。任给 $x\in\mathbb{R}$ , $y\in\mathbb{R}$, 当 $x\neq 0$ 时， 定义

$$h(x,y) \ = \ x\,f(\frac{y}{x}) \ + \ g(\frac{y}{x}) \ .$$

计算出

$$x^2 \ h_{xx}(x,y) \ + \ 2\,xy\,h_{yx}(x,y) \ + \ y^2\,h_{yy}(x,y) \ .$$

**6.(20分)** 设

$$F(x,y,z) \ = \ x^3 \ + \ (y^2-1)\, z^3 \ - \ xyz \ \ .$$

**（1）.(5分)** 证明： 存在 $\mathbb{R}^2$ 中点 $(1\ ,\ 1)$ 的一个邻域 $D$ 以及 $D$ 上唯一的隐函数 $z=z(x,y)$ 满足 $F(\ x,\ y,\ z(x,y)\ )\ \equiv\ 0$ , $z(1,\ 1)\ =\ 1$ .

**（2）.(5分)** 求出 在点 $(1\ ,\ 1)$ 处 函数 $z(x,y)$ 的值 减少最快的方向上的 单位向量 $E$ .

**（3）.(10分)** 设 $\mathbb{R}^3$ 中平面 $x+2y-2z=1$ 的 $z$ 分量为正的 法向量记为 $N$ 。 向量 $(E,\ 0)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中向量。 求出 $N$ 和 $(E,0)$ 的 夹角余弦。

**7.(10分)** 给定正整数 $n \geq 3$ 。求出 半径为 1 的圆的 内接 $n$ 边形所能达到的最大面积。 （注：要求写出解答的详细过程。如果用到教材中没有明确写成定理的某个不等式，则要求写出 从教材中定义和定理出发 推出此不等式的详细过程。）