

北京大学数学科学学院期中试题参考答案

2022 - 2023 学年第 1 学期

考试科目 高等数学B1

姓 名 _____ 学 号 _____

本试题共 6 道大题，满分 100 分

1.(20分)

(1) (6分) . 求出序列极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 + \cos n}$$

(2) (7分) . 求出序列极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \left(\frac{k}{n} - \frac{1}{2(n^k)} \right)$$

(3) (7分) . 求出函数极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan^2 x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$$

(注：在解本小题中，不可直接引用期中考试范围之外的洛必达法则和高阶泰勒公式。)

2.(20分)

(1) (6分) . 设 $x > 0$. 求出函数

$$f(x) = x^{\sqrt{x}}$$

的导函数 $f'(x)$.

(2) (7分) . 设 $x < 1$. 求出函数

$$g(x) = \int_0^{\sin x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}}$$

的导函数 $g'(x)$.

(3) (7分) . 设 $x \neq \pm 1$. 求出函数

$$h(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

4 阶导函数 $h^{(4)}(x)$.

4.(15分) 设 K 是由曲线弧 $y = e^x$ ($0 \leq x \leq 1$) 及直线 $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ 所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体。 求出 K 的侧面积。

5.(10分) 设 a 为正实数, b 为正实数, c 为正实数, $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数,

$$f(0) = -a, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = c.$$

证明 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上至少有两个不同的实数根 r_1 , r_2 , $r_1 \neq r_2$.

6.(20分) 设

$$A(r) = \int_0^{2\pi} \ln(1 - 2r \cos x + r^2) dx .$$

(1) (12分). 证明: 对于 $r \in (-1, 1)$, 有 $2A(r) = A(r^2)$.

(2) (4分). 证明: $A(r)$ 在 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 上为有界函数 .

(3) (4分). 对于任意 $r \in (-1, 1)$, 从上面 (1) 和 (2) 出发推算出 $A(r)$ 的值。

(注: 本题要求写出详细过程。)

