

北京大学数学科学学院期中考试参考答案

2021 - 2022学年第 1 学期

考试科目 高等数学B1

姓 名 _____ 学 号 _____

本试题共 6 道大题, 满分 100 分

请特别注意: 在解答下面所有试题过程中, 不可直接引用由主讲老师划定的教材中本次考试范围之外的高等数学定理和公式。如果有争议, 以主讲老师判定为准。

1.(15分) 导数类基本计算题。

(1) (5分) . 求函数 $f(x) = x^{\arcsin x}$ ($0 < x < 1$) 的导函数 $f'(x)$.

(2) (5分) . 求函数 $f(x) = \int_e^{e^x} \frac{dt}{1 + \ln t}$ ($x > 1$) 的导函数 $f'(x)$.

(3) (5分) . 求函数 $f(x) = \arctan x$ 在 $x = 0$ 点的 3 阶导数 $f'''(0)$.

2.(15分) 积分类基本计算题。

(1) (5分) . 求定积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^2 x} dx .$$

(2) (5分) . 求直角坐标 (x, y) 给出的抛物线 $y = \frac{1}{2} x^2$ 上从点 $(0, 0)$ 到点 $(1, \frac{1}{2})$ 的弧长。

(3) (5分) . 设奇数 $n \geq 3$. 求极坐标 (r, θ) 给出的 n 叶玫瑰线 $r = \sin(n\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 所围的有界图形的面积。

3.(15分) 假设 $x_1 > 0$, 对于每个正整数 n 有 $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{1}{x_n} \right)$. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求出此极限的值。

4.(20分) 设 $x > 0$, 定义

$$p(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t^3 + 2021}} \quad .$$

证明方程 $p(x+1) = p(x) + \sin x$ 有无穷个互不相等的正实数解。

5.(15分) 证明：对于 $[0, 1]$ 上的任何连续函数 $f(x)$ ，等式 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) \sin(nx) dx = 0$ 都成立。（要求写出证明的每步过程和理由。注：本题中没有假定 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 存在。因此，如果本题解答中用到了导数 $f'(x)$ 的存在性，则不能得分。）

6.(20分) (基础概念的深入理解.) 设 $y = f(x) = x^3$, $x = g(t) = t^2$, $y = f(g(t)) = t^6$,
 $\Delta t = 0.1$, $\Delta x = g(1 + 0.1) - g(1) = 0.21$.

(1) **(7分)** 当把 t 作为自变量 时, 函数 $y = f(g(t))$ 的二阶微分记为 $d_t^2 y$, 函数 $x = g(t)$ 的一阶微分记为 $d_t x$.

计算出：当 $t = 1, \Delta t = 0.1$ 时，函数 $y = f(g(t))$ 的二阶微分 $d_t^2 y|_{t=1, \Delta t=0.1}$ ，和函数 $x = g(t)$ 的一阶微分 $d_t x|_{t=1, \Delta t=0.1}$ 。

(2) (7分) 当把 x 作为自变量时，函数 $y = f(x)$ 的二阶微分记为 $d_x^2 y$ ， x (看作 x 的函数) 的一阶微分记为 $d_x x$ 。

计算出：当 $x = 1, \Delta x = 0.21$ 时，函数 $y = f(x)$ 的二阶微分 $d_x^2 y|_{x=1, \Delta x=0.21}$ ，和 x (看作 x 的函数) 的一阶微分 $d_x x|_{x=1, \Delta x=0.21}$ 。

(3) (6分) $\frac{d_t^2 y}{(d_t x)^2}|_{t=1, \Delta t=0.1}$ 与 $\frac{d_x^2 y}{(d_x x)^2}|_{x=1, \Delta x=0.21}$ 相等吗？