北京大学数学科学学院期末试题参考答案

2021 - 2022 学年第 2 学期

考试科目 高等数学 B2

姓　　名 ________　　　　**学　　号** ________

本试题共 8 **道大题，满分** 100 **分**

说明： 在下面所有题目中，$\mathbb{R}$ 代表实数域。

1.(10分) 求函数

$$\frac{\sqrt{|x|}}{2}\ \ln\frac{1\ +\ \sqrt{|x|}}{1\ -\ \sqrt{|x|}}$$

在 $x=0$ 处的幂级数展开式，并指出此幂级数的 收敛域。

参考答案:

(1) **(2分)** 可以直接引用教材第275页中熟知公式： 当 $t\in(-1,1)$ 时，

$$\ln(1+t)\ =\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\ \frac{t^{n+1}}{n+1}$$

（2）**(2分)** t 代入 $\sqrt{|x|}$ 得: 当 $x\in(-1,1)$ 时，

$$\ln(1\ +\ \sqrt{|x|})\ =\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\ \frac{(\sqrt{|x|}\,)^{n+1}}{n+1}$$

（3）**(2分)** t 代入 $-\sqrt{|x|}$ 得: 当 $x\in(-1,1)$ 时，

$$\ln(1\ -\ \sqrt{|x|})\ =\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\ \frac{(-\sqrt{|x|}\,)^{n+1}}{n+1}\ =\ -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{|x|}\,)^{n+1}}{n+1}$$

（4）**(2分)** 结合上面（2）（3）得到：

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{|x|}}{2}\ \ln\frac{1\ +\ \sqrt{|x|}}{1\ -\ \sqrt{|x|}}\ &=\ \frac{\sqrt{|x|}}{2}\ \left(\ \ln(1+\ \sqrt{|x|}\,)-\ \ln(1-\ \sqrt{|x|}\,)\ \right)\\ &=\ \frac{\sqrt{|x|}}{2}\ \left(\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\ \frac{(\sqrt{|x|}\,)^{n+1}}{n+1}\ +\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{|x|}\,)^{n+1}}{n+1}\ \right)\\ &=\ \sqrt{|x|}\ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{|x|}\,)^{2k+1}}{2k+1}\\ &=\ \sum_{\mathbf{k=0}}^{\infty}\frac{\mathbf{x^{k+1}}}{\mathbf{2k+1}}\end{aligned}$$

（5）**(2分)** 它的收敛域是

$$(\ -1\ ,\ 1\,)$$

2.(15分) 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是周期为 2π 的函数， $f(x)$ 在 $(\,-\,\pi\,,\,\pi\,]$ 上等于 e^x . 求 $f(x)$ 的傅里叶级数, 以及此傅里叶级数在 $x\ =\ \pi$ 处 的 收敛值 。

参考答案:

(1) **(2分)**

$$\mathbf{a_0}\ =\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^x\,dx\ =\ \frac{1}{\pi}\,(\,e^{\pi}-e^{-\pi}\,)$$

(2) **(4分)** 当 $n>0$ 时，用 **分部积分** 法求出

$$a_n\ =\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^x\ \cos\ nx\,dx\ \ =\ \frac{1}{\pi}\ \frac{\cos nx\ +\ n\ \sin nx}{1+n^2}\ e^x\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \ (-1)^n \ \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi \, (1+n^2)}$$

(3) **(4分)** 当 $n > 0$ 时，用 **分部积分** 法求出

$$b_n \ = \ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \ \sin \ nx \, dx \ \ = \ \frac{1}{\pi} \ \frac{\sin nx \ - \ n \ \cos nx}{1+n^2} \ e^x \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \ (-1)^{n-1} \ \frac{n \, (e^{\pi} - e^{-\pi})}{\pi \, (1+n^2)}$$

(4) **(2分)** $f(x)$ 的傅里叶级数是

$$\frac{1}{2\pi} \ (\ e^{\pi} - e^{-\pi} \ ) \ + \ \sum_{n=1}^{\infty} (\ (-1)^n \ \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi \, (1+n^2)} \ \cos \ nx \ + \ (-1)^{n-1} \ \frac{n \, (e^{\pi} - e^{-\pi})}{\pi \, (1+n^2)} \ \sin \ nx \ \ )$$

(5) **(3分)** $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上**分段连续、分段单调** 。因此，根据 **狄利克雷** 定理得：
在 $x = \ \pi$ 处， $f(x)$ 的傅里叶级数的 收敛值 是

$$\frac{1}{2}(\ e^{-\pi} + \ e^{\pi})$$

3.(10分) 求无穷积分 $\int_0^{+\infty} \sqrt{x^3} \ e^{-x} \ dx$ 的值，和 瑕积分 $\int_0^1 \sqrt{\frac{x^3}{1-x}} \ dx$ 的值。

参考答案:

(1) **(4分)**

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{x^3} \, e^{-x} \, dx \ = \ \Gamma(\frac{5}{2}) \ = \ \frac{3}{2} \ \frac{1}{2} \, \Gamma(\frac{1}{2}) \ = \ \frac{3}{4} \, \sqrt{\pi}$$

(2) **(6分)**

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x^3}{1-x}} \, dx \ = \ \int_0^1 x^{\frac{3}{2}} (1-x)^{-\frac{1}{2}} \, dx \ = \ B \, (\, \frac{5}{2} \, , \, \frac{1}{2} \,) \ = \ \frac{\Gamma(\frac{5}{2}) \ \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} \ = \ \frac{\frac{3}{4} \ \sqrt{\pi} \, \sqrt{\pi}}{1} \ = \ \frac{3}{4} \, \pi$$

4.(10分) 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1) \, (n+2) \, x^n$ 的 收敛区间, 以及此幂级数的 和函数。

参考答案:

（1）. **(4分)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1) \, (n+2) \, x^n$ 收敛半径是

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)(n+2)}{(n+2)(n+3)} \ = \ 1$$

所以此级数的 **收敛区间** 是

$$(\ -1 \ , \ 1 \ )$$

（2）. **(3分)** 当 $x \in (-1, 1)$ 时，

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2} \ = \ \frac{1}{1 \ - \ x} - 1 - x$$

幂级数 在收敛区间内可以 **逐项求导** , 推出当 $x \in (-1, 1)$ 时，

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2) \, x^{n+1} \ = \ - \ \frac{1}{(1-x)^2} - 1$$

（3）．**(3分)** 同理，再 **逐项求导**，推出当 $x \in (-1,1)$ 时，

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\ (n+2)\, x^n \ = \ \frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{1-x})^{\mathbf{3}}}$$

5.(10分) 任意给定常数 $r>0$. 证明 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2\ e^{-nx}$ 在 $[\, r\, ,\, +\infty\,)$ 上 一致 收敛。

参考答案:

(1). **(5分)**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2\ e^{-(n+1)r}}{n^2\ e^{-nr}} \ = \ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\, e^{-r} \ = \ e^{-r} \ < \ 1$$

根据 **达朗贝尔** 判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2\, e^{-nr}$ **收敛**

(2). **(5分)** 当 $x \geq r > 0$ 时，

$$|\, n^2\, e^{-nx}\, | \ \leq \ |\, n^2\, e^{-nr}\, |$$

根据 **强级数** 判别法 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2\, e^{-nx}$ 在 $[r,+\infty)$ 上 **一致** 收敛。

6.(15分) 求函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ \frac{1}{n^x\ +\ 2n}$$

的 收敛域， 绝对收敛点 x 的全体，条件收敛点 x 的全体。

参考答案:

(1). **(2分)** 对任何 **给定** 的 $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^x+2n} \ = \ 0$$

下面讨论 $\frac{1}{n^x+2n}$ 的单调性。为了清楚起见，把 n 换为 实变量 y .

(2). **(2 分)** 给定 $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$，当 实变量 $y>0$ 时，

$$(y^x+2y)'_y \ = \ x\, y^{x-1}\ +\ 2\ \geq\ 0\ +\ 2\ >\ 0$$

(3). **(2 分)** 给定 $\mathbf{x} < \mathbf{0}$, 当 实变量 y 趋于 $+\infty$ 时， $x\, y^{x-1}$ 趋于 0 . 因此, 当 y **充分大** 时，

$$(y^x\ +\ 2y)'_y\ =\ x\, y^{x-1}\ +\ 2\ >\ 0$$

结合上面（2）和（3）得到：对于任何给定的 $x \in \mathbb{R}$，当 n **充分大** 后， n^x+2n 是单调**上升** 的，因此

$$\frac{1}{n^x+2n}$$

是单调**下降**的。

(4). **(2 分)** 结合上面（1），（2）和（3），可以用 **莱布尼兹** 判别法推出：对任何 $x \in \mathbb{R}$， 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^x+2n}$ 都是收敛的。即， 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^x+2n}$ 的收敛域是

$$(\ -\infty\, ,\ +\infty\ )$$

(5). **(2 分)** 当 $\mathbf{x}>\mathbf{1}$ 时， $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 收敛，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|(-1)^n\frac{1}{n^x+2n}\right|}{\frac{1}{n^x}} \ = \ 1$$

用 **比较** 判别法的极限形式 得到： 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^x+2n}$ **绝对** 收敛。

(6). **(2 分)** 当 $\mathbf{x<1}$ 时， $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|(-1)^n\frac{1}{n^x+2n}|}{\frac{1}{n}} \;=\frac{1}{2}$$

用 **比较** 判别法的极限形式 得到： $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|(-1)^n\frac{1}{n^x+2n}|$ **发散**。

(7). **(1 分)** 当 $\mathbf{x=1}$ 时，

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^n\frac{1}{n+2n}| \;=\; \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\;\frac{1}{n}$$

发散 。

(8). **(1 分)** 结合上面（4）（5）（6）（7）得到：此级数 **绝对收敛** 点 x 的全体是

$$(\;\mathbf{1},\;\;+\infty\;)$$

(9). **(1 分)** 结合上面（4）（5）（6）（7）得到：此级数 **条件收敛** 点 x 的全体是

$$(\;-\infty,\;\;\mathbf{1}\;]$$

7.(15分) 定义函数 $\theta:[\,0\,,+\infty)\;\to\;[\,0\,,+\infty)$ 为

$$\theta(x)\;=\;\int_0^x\sqrt{\,(t+1)\,(t+2)\,(t+3)\,}\;dt$$

证明 无穷积分

$$\int_0^{+\infty}\cos\,(\,\theta(x)\,)\;dx$$

收敛。（注：本题要求写出 **详细过程和根据**。）

参考答案:

（1）**(3分)**

$$\lim_{x\to+\infty}\theta(x)\;=\;\int_0^{\infty}\sqrt{(t+1)(t+2)(t+3)}\,dt\;=\;+\infty$$

（义为发散于 $+\infty$） 推出: 当 $x\to+\infty$ 时， $\theta(x)$ 可以大于任何给定的正实数 K . 根据 连续函数的**介值** 定理，$\theta(x)$ 可以取 $[\,0\,,K]$ 中任何值. K 是任意给定的正实数，因此 $\theta:[\,0\,,+\infty)\;\to\;[\,0\,,+\infty)$ 是 **满** 的。

（2）**(3分)**

$$\theta'(x)\;=\;(x+1)(x+2)(x+3)\;>\;0$$

推出 $\theta:[\,0\,,+\infty)\;\to\;[\,0\,,+\infty)$ 是严格单调上升的，因此是 **单**的。 结合上面（1）得到：$\theta:[\,0\,,+\infty)\;\to\;[\,0\,,+\infty)$ 是单又满的， 因此存在**反函数**

$$s:[\,0\,,+\infty)\;\to\;[\,0\,,+\infty)$$

使得

$$s(\theta(x))\;=\;x\;\;,\quad\theta(s(t))\;=\;t$$

（3）**(3分)**

$$\theta'(x)\;=\;(x+1)(x+2(x+3)\;>\;0$$

和 $\mathbf{C^1}$ 反函数定理 推出 $s(t)$ 是 $\mathbf{C^1}$ 的。 $\theta(s(t))\;=\;t$ 和 **链式法则** 推出

$$s'(t)\;=\;\frac{1}{\theta'(x)\big|_{x=s(t)}}\;=\;\frac{1}{(\,s(t)+1\,)\,(\,s(t)+2\,)\,(\,s(t)+3\,)}\;>\;\mathbf{0}$$

（4）**(3分)** $s(\theta(x)) = x$ 和上面（1）中 $\lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x)=+\infty$，作严格单调上升函数的 C^1 变换 $t=\theta(x)$ 推出

$$+\infty = \lim_{x\to+\infty} x = \lim_{x\to+\infty} s(\theta(x)) = \lim_{t\to+\infty} s(t)$$

因此上面（3）推出

$$\lim_{\mathbf{t}\to+\infty} \mathbf{s}'(\mathbf{t}) = \frac{1}{(\lim\limits_{t\to+\infty} s(t)+1)(\lim\limits_{t\to+\infty} s(t)+2)(\lim\limits_{t\to+\infty} s(t)+3)} = \mathbf{0}$$

（5）**(3分)** 作严格单调上升函数的 C^1 变换 $t=\theta(x)$ ，即 $x=s(t)$ 得到：

$$\int_0^{+\infty} \cos(\,\theta(x)\,)\ dx = \int_0^{+\infty} (\cos\ \mathbf{t})\ \mathbf{s}'(\mathbf{t})\ dt$$

上面（3）中

$$s'(t) = \frac{1}{(\,s(t)+1\,)\,(\,s(t)+2\,)\,(\,s(t)+3\,)} > \mathbf{0}$$

推出 $\mathbf{s}(\mathbf{t})$ 严格单调上升的， 此 和 等式

$$\frac{1}{(\,s(t)+1\,)\,(\,s(t)+2\,)\,(\,s(t)+3\,)} = s'(t)$$

又推出 $\mathbf{s}'(\mathbf{t})$ 是 **严格单调下降**的。 上面（4）中

$$\lim_{\mathbf{t}\to+\infty} \mathbf{s}'(\mathbf{t}) = \mathbf{0}$$

又有

$$\left|\int_0^A \cos\ t\,dt\right| = |\sin A| \le 1$$

此上界 1 与 A **无关** 。因此 **狄利克雷** 判别法的条件得到满足，所以可以用狄利克雷判别法得到：无穷积分

$$\int_0^{+\infty} \cos(\,\theta(x)\,)\ dx$$

收敛。

8.(15分) 设 n 是正整数。

(1).(5分) 任给常数 $a>0$. 证明含参变量 t 的无穷积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(\,t\ +\ x^2\,)^n}\,dx$$

在 $[\,a\,,+\infty\,)$ 上 一致 收敛。

(2).(10分) 对于每个 $t\in(\,0\,,+\infty\,)$， 求出

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(\,t\ +\ x^2\,)^n}\,dx$$

的值。

（注：本大题要求写出 **详细过程和根据**。）

参考答案:

（1）**(5分)**

(1.1) **(1分)** 任意 **取定** $\mathbf{a}>\mathbf{0}$. n 是**正整数** 推出:

对于任意 $\mathbf{t}\ge\mathbf{a}>\mathbf{0}$ 和 任意 $\mathbf{0}\le\mathbf{x}\le\mathbf{1}$ ， 有

$$\frac{1}{(t+x^2)^n} \le \frac{1}{(a+x^2)^n}$$

(1.2) **(2分)** 对于任意 $\mathbf{t}\ge\mathbf{a}>\mathbf{0}$ 和 任意 $\mathbf{x}\ge\mathbf{1}$ ， 有 $a+x^2\ge1$， 因此

$$\frac{1}{(t+x^2)^n} \le \frac{1}{(a+x^2)^n} \le \frac{1}{a+x^2}$$

(1.3) **(2分)**

$$\int_0^1 \frac{1}{(a+x^2)^n} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{a+x^2} dx$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{(a+x^2)^n} dx + \frac{1}{\sqrt{a}} \ arctan(\frac{x}{\sqrt{a}}) |_1^{+\infty}$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{(a+x^2)^n} dx + \frac{1}{\sqrt{a}} \ (\frac{\pi}{2} - \ arctan(\frac{1}{\sqrt{a}}) \ )$$

收敛 。因此，根据 **M-判别法** （教材第306页中定理1 ） 得到 含参变量 t 的无穷积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(\ t \ + \ x^2 \ )^n} \ dx$$

在 $[\ a\ , +\infty\ )$ 上 一致 收敛。

（2）**(10分)** 对于 任意给定 的正整数 n , 对于 **任意取定** 的 **正** 实数 $a < b$ ：

(2.1) **(1分)** 上面（1.3) 推出： 无穷积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+x^2)^n} \ dx$ 在 $[\ a\ , \ b\ ]$ 上 **点点收敛**。

(2.2) **(1分)** 在上面（1.3) 中把 n 换为 $n+1$ 推出： 含参变量 t 的无穷积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} (\ \frac{1}{(t+x^2)^n} \ ) \ dx \ = \ -n \ \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+x^2)^{n+1}} \ dx$$

对于 $t \in [\ \mathbf{a}\ , \ \mathbf{b}\ ] \subset [\ a\ , \ +\infty\ )$ 是**一致** 收敛的。

(2.3) **(3分)** 因此，根据 含参变量的无穷积分 与 对参变量求导 **次序交换** 定理 （教材第309页中定理5） 得到： 对于 任意给定 的正整数 n， 对于 $t \in [\ \mathbf{a}\ , \ \mathbf{b}\ ]$， 有

$$\frac{d}{dt} (\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+x^2)^n} \ dx \ ) \ = \ \int_0^{+\infty} \ \frac{\partial}{\partial t} (\ \frac{1}{(t+x^2)^n} \ ) \ dx \ = \ -n \ \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+x^2)^{n+1}} \ dx$$
$$= \ -\frac{1}{n} \ \frac{d}{dt} (\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+x^2)^n} \ dx \ )$$

设

$$J_n(t) \ = \ \int_0^{+\infty} \ \frac{1}{(\ t \ + \ x^2 \ )^n} \ dx$$

则有

$$J_{n+1}(t) \ = \ -\frac{1}{n} \ \frac{dJ_n(t)}{dt}$$

(2.4) **(2分)**

$$J_{\mathbf{1}}(t) \ = \ \int_0^{+\infty} \frac{1}{t+x^2} \ dx \ = \ \frac{1}{\sqrt{t}} \ arctan(\ \frac{x}{\sqrt{t}} \ ) |_0^{+\infty} \ = \ \frac{\pi}{2} \ t^{-\frac{1}{2}}$$

(2.5) **(3分) 反复** 用上面（2.3）得到：对于 $t \in [\ \mathbf{a}\ , \ \mathbf{b}\ ]$， 正整数 n， 有

$$J_{n+1}(t) \ = \ -\frac{1}{n} \ \frac{dJ_n(t)}{dt} \ = \ (-\frac{1}{n}) \cdots (-\frac{1}{2}) \ (-\frac{1}{1}) \ \frac{d^n J_1(t)}{dt^n}$$
$$= \ (-\frac{1}{n}) \cdots (-\frac{1}{2}) \ (-\frac{1}{1}) \ \frac{d^n}{dt^n} \ (\frac{\pi}{2} \ t^{-\frac{1}{2}} \ )$$
$$= \ \frac{\pi}{2} \ (-\frac{1}{n}) \cdots (-\frac{1}{2}) \ (-\frac{1}{1}) \qquad (-\frac{1}{2}) \ (-\frac{1}{2} - 1) \cdots (-\frac{1}{2} - (n-1)) \ t^{-\frac{1}{2}-n}$$
$$= \ \frac{\pi}{2} \ (-\frac{1}{n}) \cdots (-\frac{1}{2}) \ (-\frac{1}{1}) \qquad (-\frac{1}{2}) \ (-\frac{3}{2}) \cdots (-\frac{2n-1}{2}) \ t^{-\frac{1}{2}-n}$$

$$= \frac{\pi}{2} \frac{1}{n} \cdots \frac{1}{2} \frac{1}{1} \quad \frac{1}{2} \frac{3}{2} \cdots \frac{2n-1}{2} \; t^{-\frac{1}{2}-n}$$

$$= \frac{\pi}{2^{n+1}} \frac{(2n-1)!!}{n!} \frac{1}{t^{n+\frac{1}{2}}}$$

因为 a , b 是**任意** 给定的正数，所以 对于**任意** $t > 0$ ， 上面（2.5）中 $\mathbf{n+1}$ **换为** $\mathbf{n}$ 得到：
当正整数 $n \geq 2$ 时

$$\mathbf{J_n(t)} = \frac{\pi}{\mathbf{2^n}} \frac{(\mathbf{2n-3})!!}{(\mathbf{n-1})!} \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{t^{2n-1}}}}$$

$$\mathbf{J_1(t)} = \frac{\pi}{\mathbf{2}} \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{t}}}$$