北京大学数学科学学院期中试题参考答案

2021 - 2022**学年第** 2 **学期**

考试科目 <u>**高等数学B2**</u>

姓　　名 ____________　**学　　号** ________________

本试题共 9 **道大题，满分** 100 **分**

在下面试题中， $\mathbb{R}$ 记实数域， $\mathbb{R}^n$ 记标准的 n 维欧氏空间。

1.(10分) 设 D 是由直线 $y=0,\ y=1,\ y=x,\ y=x+1$ 所围成的有界闭区域。求二重积分 $\iint\limits_D (4y-2x)\,dxdy$.

2.(10分) 设 V 是由平面 $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1$ 所围成的四面体。求三重积分 $\iiint\limits_V \frac{1}{(1+x+y+z)^2}dxdydz$.

3.(10分) 设 E 是椭圆 $\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x^2+\frac{y^2}{4}=1,\ -1\le x\le 1,\ -2\le y\le 2\}$. 求第一型曲线积分 $\int_E |\,x\,y\,|\,ds$.

4.(15分) 设 n 是正整数，从点 $(0,\ 0)$ 到点 $(n\pi,\ 0)$ 的有向曲线 $L_n = \{\ (\ t,\ |sint|\ )\ \mid\ 0 \le t \le n\pi\ \}$. 计算出下面第二型曲线积分 在 $n \to \infty$ 下的极限:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{L_n} e^{y^2-x^2}\cos(2xy)\,dx \ +\ e^{y^2-x^2}\sin(2xy)\,dy$$

5.(10分) 设 S 是曲面 $\{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+z^2=1,\ x \geq 0,\ z \geq 0,\ 0 \leq y \leq 1\}$. 求第一型曲面积分 $\iint\limits_{S} x\, dS$.

6.(10分) 求第二型曲面积分 $\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=1\ \text{外侧}} x\, dydz \ +\ y\, dzdx \ +\ z\, dxdy$.

7.(15分) 假设平面直角坐标系第一像限中有一条曲线 $L = \{\, (\, x\,,\, y(x)\,) \mid x \geq 0\,\}$， 其中 $y(0)=1$， $y(x)$ 是严格递减的、正的、可导函数。任取 L 上一点 M， L 在 M 点的 **切线** 交 x 轴于点 A . 假定 从 M 到 A 的直线段的长度 **恒** 为 1 . 求出 $y=y(x)$ 所满足的一阶常微分方程， 并且解出这个方程的初值问题 $y(0)=1$.

8.(10分) 求二阶常微分方程 $y'' + 4y = \sin 3x$ 的通解。

9.(10分) 两小题。

（1）.(5分) 设 $D = \mathbb{R}^2 - \{ (x, 0) \mid x \geq 0 \}$. 写出一个函数 $T: D \to \mathbb{R}$ 满足 T 在 D 中每点可微，并且

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2} \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} .$$

（2）.(5分) 设 $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{ 0 \}$. 证明 不存在 函数 $U: \Omega \to \mathbb{R}$ 满足 U 在 Ω 中每点可微，并且

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2} \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} .$$