CÁC ĐỊNH LÝ GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH TRONG TÍCH PHÂN

Vũ Tiến Việt

Học viện An ninh nhân dân

Tóm tắt nội dung

Các định lý giá trị trung bình đóng một vai trò quan trọng trong Giải tích Toán học. Chúng tôi xin giới thiệu một số phát triển của các định lý đó trong khoảng thời gian 50 năm trở lại đây. Chúng tôi cũng nêu ra một số áp dụng các định lý giá trị trung bình cho các bài toán tích phân, trong đó có những bài thi Olympic sinh viên Việt Nam.

1 Các định lý kinh điển

Trước hết ta nhắc lại các định lý giá trị trung bình cho hàm khả vi kinh điển là Fermat, Rolle, Lagrange, Cauchy.

1. **Định lý Fermat[1]:**
   Giả sử hàm $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ liên tục trên $[a,b]$, đạt cực trị (địa phương) tại điểm $x_0 \in (a,b)$ và khả vi tại x_0. Khi đó $f'(x_0) = 0$.
2. **Định lý Rolle[2]:** Năm 1691 Rolle đưa ra định lý sau mang tên ông:
   Giả sử hàm $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ liên tục trên $[a,b]$, khả vi trong (a,b)
   và $f(a) = f(b)$. Khi đó tồn tại điểm $c \in (a,b)$ để $f'(c) = 0$.
3. **Định lý Lagrange[3]:**
   Giả sử hàm $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ liên tục trên $[a,b]$, khả vi trong (a,b). Khi đó tồn tại điểm $c \in (a,b)$ sao cho
   $$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$
4. **Định lý Cauchy[4]:**

[1]Pierre de Fermat (1601-1665), nhà toán học người Pháp.
[2]Michel Rolle (1652-1719), nhà toán học người Pháp.
[3]Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), nhà toán học người Pháp.
[4]Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), nhà toán học người Pháp.

Giả sử các hàm $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ liên tục trên $[a,b]$, khả vi trong (a,b), đồng thời $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a,b)$. Khi đó tồn tại điểm $c \in (a,b)$ sao cho

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

5. **Định lý giá trị trung bình tích phân thứ nhất:**
   Xét các hàm f, g khả tích trên $[a,b]$ và gọi $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x), M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Nếu g là hàm không âm (hoặc không dương) trên $[a,b]$ thì

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx \quad \text{với} \quad \mu \in [m, M].$$

   Hơn nữa, nếu $f \in C[a,b]$ thì $\exists \xi \in [a,b]$ sao cho

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

6. **Định lý giá trị trung bình tích phân thứ hai:**
   Xét các hàm f, g khả tích và g là hàm đơn điệu trên $[a,b]$.
   Khi đó $\exists \xi \in [a,b]$ sao cho

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^\xi f(x)dx + g(b) \int_\xi^b f(x)dx.$$

   Nhận xét 1. Các định lý trên đây có ý nghĩa hình học là "tồn tại một hình chữ nhật có diện tích bằng một hình phẳng cho trước".

2 Một áp dụng

Với hàm $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ thì tồn tại $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Theo định lý giá trị trung bình tích phân thứ nhất $\exists c \in [a,b]$ sao cho

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

Với hàm $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$, khả vi trong khoảng (a,b) thì theo định lý Lagrange tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \quad \text{hay} \quad f'(c)(b-a) = f(b) - f(a).$$

Điều này hình như dẫn tới quan hệ

$$\Big[\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx\Big] f'(c)(b-a) = f(c)[f(b) - f(a)].$$

Do đó suy ra

$$f'(c)\int_a^b f(x)dx = f(c)[f(b)-f(a)]. \tag{2.1}$$

Tuy nhiên, ta nghi ngờ tính đúng đắn của (2.1) vì điểm c của định lý giá trị trung bình tích phân và điểm c của định lý Lagrange không chắc là trùng nhau.
Lấy ví dụ sau: Xét $f(x) = x^2$ trên $[0,1]$.
Theo định lý giá trị trung bình tích phân thứ nhất

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{1-0}\int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3} = f(c) = c^2 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Mặt khác, theo định lý Lagrange

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{1^2-0^2}{1-0} = 1 = f'(c) = 2c \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{2}.$$

• Chúng ta sẽ chứng tỏ rằng hệ thức (2.1) là đúng đắn bằng mệnh đề sau đây:

Mệnh đề 1. Giả sử $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[a,b]$, khả vi trong khoảng (a,b). Khi đó tồn tại điểm $c \in (a,b)$ thỏa mãn hệ thức (2.1).

Chứng minh. Xét hàm

$$h(x) = [f(x)-f(b)]\int_a^x f(t)dt + [f(x)-f(a)]\int_x^b f(t)dt.$$

Ta thấy $h(x)$ liên tục trên $[a,b]$, khả vi trong (a,b) và $h(a) = h(b) = 0$. Theo định lý Rolle tồn tại điểm $c \in (a,b)$ sao cho $h'(c) = 0$. Thế mà

$$\begin{aligned} h'(x) &= f(x)[f(x)-f(b)] + f'(x)\int_a^x f(t)dt - f(x)[f(x)-f(a)] \\ &\quad + f'(x)\int_x^b f(t)dt \\ &= f'(x)\int_a^b f(t)dt - f(x)[f(b)-f(a)]. \end{aligned}$$

Từ đây suy ra hệ thức (2.1).
Trở lại ví dụ ở trên ta có

$$2c\int_0^1 t^2dt = c^2(1^2-0^2) \quad \text{hay} \quad \frac{2}{3}c = c^2 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{2}{3}.$$

• Ta mở rộng mệnh đề trên cho 2 hàm.

Mệnh đề 2. Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm liên tục trên đoạn $[a,b]$, khả vi trong khoảng (a,b). Khi đó tồn tại điểm $c \in (a,b)$ sao cho

$$f'(c)\int_a^b g(t)dt + g'(c)\int_a^b f(t)dt = f(c)[g(b)-g(a)] + g(c)[f(b)-f(a)]. \tag{2.2}$$

Chứng minh. Xét hàm

$$\begin{aligned}H(x) = [f(x) - f(b)] \int_a^x g(t)dt + [f(x) - f(a)] \int_x^b g(t)dt \\ + [g(x) - g(b)] \int_a^x f(t)dt + [g(x) - g(a)] \int_x^b f(t)dt.\end{aligned}$$

Ta thấy $H(x)$ liên tục trên $[a, b]$, khả vi trong (a, b) và $H(a) = H(b) = 0$.
Theo định lý Rolle tồn tại điểm $c \in (a, b)$ sao cho $H'(c) = 0$. Thế mà

$$\begin{aligned}H'(x) &= f'(x) \int_a^x g(t)dt + g(x)[f(x) - f(b)] + f'(x) \int_x^b g(t)dt - g(x)[f(x) - f(a)] \\ &\quad + g'(x) \int_a^x f(t)dt + f(x)[g(x) - g(b)] + g'(x)[g(x) - g(b)] - f(x)[g(x) - g(a)] \\ &= f'(x) \int_a^b g(t)dt + g'(x) \int_a^b f(t)dt - f(x)[g(b) - g(a)] - g(x)[f(b) - f(a)].\end{aligned}$$

Từ đây suy ra hệ thức (2.2).

3 Các định lý mở rộng

• **Định lý Flett[5].** Năm 1958 Flett đưa ra định lý sau:

Cho hàm $f(x)$ khả vi trên $[a, b]$ và thỏa mãn $f'(a) = f'(b)$ (hai đạo hàm này được hiểu là đạo hàm một phía). Khi đó tồn tại điểm $c \in (a, b)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}.$$

Chứng minh. (Xem [2] hoặc [6]).

Ta có thể giả thiết $f'(a) = f'(b) = 0$, vì có thể thay $f(x)$ bởi $h(x) = f(x) - xf'(a)$, lúc đó $h'(x) = f'(x) - f'(a), h'(a) = h'(b) = 0$ và nếu kết luận đúng với $h(x)$ thì

$$\begin{aligned}h'(c) &= \frac{h(c) - h(a)}{c - a}, \\ \text{hay} \quad f'(c) - f'(a) &= \frac{f(c) - cf'(a) - f(a) + af'(a)}{c - a}, \\ \text{nên} \quad f'(c) &= \frac{f(c) - cf'(a) - f(a) + af'(a)}{c - a} + f'(a) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a},\end{aligned}$$

tức là kết luận đúng cho $f(x)$.

Ta xét hàm

$$g(x) = \begin{cases} f'(a) = 0 & \text{khi} \quad x = a \\ \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{khi} \quad a < x \leqslant b \end{cases}$$

[5]T.M. Flett, giáo sư đại học Liverpool, UK.

Khi đó $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)=0=g(a)$, nên $g(x)$ liên tục trên $[a,b]$. Rõ ràng $g(x)$ khả vi trong $(a,b]$ và

$$g'(x)=\frac{f'(x)}{x-a}-\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}.$$

Ta thấy: +) Nếu $g(b)=0$, thì theo định lý Rolle $\exists c\in(a,b)$ sao cho $g'(c)=0$, tức là

$$\frac{f'(c)}{c-a}-\frac{f(c)-f(a)}{(c-a)^2}=0 \quad \text{hay} \quad f'(c)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}.$$

+) Nếu $g(b)>0$, thì $g'(b)=-\dfrac{f(b)-f(a)}{(b-a)^2}=-\dfrac{g(b)}{b-a}<0.$

Suy ra $\exists x_1\in(a,b)$ để $g(x_1)>g(b)$ (bởi vì nếu $g(x)\leqslant g(b),\forall x\in(a,b)$ thì sẽ dẫn tới $g'(b)\geqslant 0$, mâu thuẫn với $g'(b)<0$).

Lúc này $g(a)=0<g(b)<g(x_1)$ và do $g(x)$ liên tục, nên phải tồn tại $x_2\in(a,b)$ để $g(x_2)=g(b)$. Sử dụng định lý Rolle cho hàm $g(x)$ trên $[x_2,b]$ thì tồn tại điểm $c\in(x_2,b)\subset(a,b)$ sao cho $g'(c)=0$, dẫn tới kết luận như trên.

+) Nếu $g(b)<0$ ta chứng minh tương tự.

- **Định lý Meyer[6].** Năm 1977 Meyer đưa ra định lý sau:

Giả sử $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ là hàm khả vi trên $[a,b]$ và thỏa mãn $f'(a)=f'(b)$. Khi đó tồn tại điểm $c\in(a,b)$ sao cho

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}.$$

Chứng minh. (Xem [2] hoặc [6]).

Ta xét hàm

$$m(x)=\begin{cases}\dfrac{f(b)-f(x)}{b-x} & \text{khi} \quad a\leqslant x<b\\ f'(b) & \text{khi} \quad x=b\end{cases}$$

Dễ thấy $m(x)$ liên tục và khả vi. Nếu $m(x)$ đạt cực trị tại $c\in(a,b)$ thì theo định lý Fermat $m'(c)=0$, dẫn đến kết luận của định lý.

Nếu $m(x)$ đạt cực trị tại a hoặc b thì không giảm tổng quát ta giả thiết $m(a)\leqslant m(x)\leqslant m(b),\forall x\in[a,b]$. Khi đó $f(x)\leqslant f(b)-(b-x)m(a),\forall x\in[a,b]$ và

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}&\leqslant\frac{f(b)-f(a)-(b-x)m(a)}{x-a}\\&=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=m(a).\end{aligned}$$

Lấy giới hạn khi $x\to a+0$ ta được $f'(a)\leqslant m(a)$, nên $m(b)=f'(b)=f'(a)\leqslant m(a)$.

Dẫn tới $m(x)$ là hàm hằng, do đó $m'(x)\equiv 0$ và ta có kết luận của định lý.

- **Định lý Sahoo và Riedel[7].** Năm 1998 Sahoo và Riedel đưa ra định lý:

[6]R.E. Meyer (1919-2008), giáo sư đại học Wisconsin–Madison, USA.

[7]P.K. Sahoo và T. Riedel, các giáo sư đại học Louisville, USA.

Giả sử $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ là hàm khả vi trên $[a, b]$. Khi đó tồn tại điểm $c \in (a, b)$ sao cho

$$f(c) - f(a) = f'(c)(c-a) - \frac{1}{2} \cdot \frac{f'(b) - f'(a)}{b-a}(c-a)^2.$$

- **Định lý Pawlikowska[8].** Năm 1999 Pawlikowska đưa ra định lý sau:

Cho $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ là hàm khả vi cấp n trên $[a, b]$ và $f^{(n)}(a) = f^{(n)}(b)$. Khi đó tồn tại $\xi \in (a, b)$ sao cho

$$\frac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{i!}(\xi - a)^{i-1} f^{(i)}(\xi).$$

- **Định lý Riedel và Sablik[9].** Năm 2004 Riedel và Sablik đưa ra định lý:

Giả sử $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ là hàm khả vi trên $[a, b]$. Khi đó tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$\frac{1}{c-a}\Big[f'(c) - \frac{f(c) - f(a)}{c-a}\Big] + \frac{1}{c-b}\Big[f'(c) - \frac{f(c) - f(b)}{c-b}\Big] = \frac{f'(b) - f'(a)}{b-a}.$$

- **Định lý Çakmak và Tiryaki[10].**

Năm 2011 Devrim Çakmak và Tiryaki đưa ra định lý:

Giả sử $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ là hàm khả vi. Khi đó tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$f(b) - f(c) = f'(c)(b-c) - \frac{1}{2} \cdot \frac{f'(b) - f'(a)}{b-a}(b-c)^2.$$

Ghi chú. Chứng minh của các định lý này có thể xem trong [2] hoặc [6].

Nhận xét 2. Định lý Meyer là một cách bổ sung cho đầy đủ của định lý Flett và chứng minh của định lý Meyer dựa theo cách chứng minh thứ hai của định lý Flett.

Khi $f'(a) = f'(b)$ thì định lý Sahoo và Riedel trở thành định lý Flett, còn định lý Çakmak và Tiryaki trở thành định lý Meyer.

Định lý Lagrange nói rằng tồn tại tiếp tuyến của đồ thị hàm $f(x)$ song song với đường thẳng AB.

Định lý Flett nói rằng tồn tại tiếp tuyến của đồ thị hàm $f(x)$ đi qua điểm A, định lý Meyer nói rằng tồn tại tiếp tuyến của đồ thị hàm $f(x)$ đi qua điểm B.

4 Một số bài toán áp dụng

Bài toán 1. Cho hàm $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ liên tục thỏa mãn $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx$.

Chứng minh rằng tồn tại điểm $\alpha \in (0, 1)$ sao cho $\displaystyle\int_0^\alpha f(x)dx = 0$.

Lời giải. Xét hàm $h(t) = t\displaystyle\int_0^t f(x)dx - \int_0^t xf(x)dx,\ t \in [0, 1]$.

Ta có $h(0) = h(1) = 0$ và $h'(t) = \displaystyle\int_0^t f(x)dx$.

Theo định lý Rolle tồn tại $\alpha \in (0, 1)$ sao cho $h'(\alpha) = 0$.

Suy ra điều cần chứng minh.

[8]Iwona Pawlikowska, PhD Mathematics, Memphis, TN, United States.

[9]M. Sablik, giáo sư đại học Silesia, Katowice, Polska.

[10]D. Çakmak và A. Tiryaki, các giáo sư đại học Gazi, Türkiye.

Bài toán 2. Cho hàm $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ liên tục thỏa mãn $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx$.

Chứng minh rằng với mỗi số $a \in \mathbb{R}$ tồn tại điểm $c \in (0,1)$ sao cho

$$f(c) = a\int_0^c f(x)dx.$$

Lời giải. Với $t \in [0,1]$ ta xét hàm $g(t) = e^{-at}\int_0^t f(x)dx$.

Theo bài 1 tồn tại $\alpha \in (0,1)$ sao cho $\int_0^\alpha f(x)dx = 0$.

Như vậy $g(0) = g(\alpha) = 0$ và ta có

$$g'(t) = e^{-at}\Big[f(t) - a\int_0^t f(x)dx\Big].$$

Theo định lý Rolle tồn tại $c \in (0,\alpha) \subset (0,1)$ sao cho $g'(c) = 0$.

Suy ra điều cần chứng minh.

Nhận xét 3. Lấy $a = 2018$ ta được bài B.3 trong đề thi Giải tích OLP-2018.

Bài toán 3. Cho hàm $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ liên tục thỏa mãn $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx$.

Chứng minh rằng tồn tại điểm $\alpha \in (0,1)$ sao cho $\int_0^\alpha xf(x)dx = 0$.

Lời giải. Xét hàm $h(t) = t\int_0^t f(x)dx - \int_0^t xf(x)dx,\ t \in [0,1]$.

Ta thấy $h(0) = h(1) = 0$ và $h'(t) = \int_0^t f(x)dx$.

Theo định lý Rolle tồn tại $b \in (0,1)$ sao cho $h'(b) = 0$.

Do $h'(0) = h'(b) = 0$, nên theo định lý Flett tồn tại $\alpha \in (0,b) \subset (0,1)$ sao cho

$$h'(\alpha) = \frac{h(\alpha) - h(0)}{\alpha - 0} = \frac{h(\alpha)}{\alpha}, \quad \text{hay} \quad \alpha h'(\alpha) = h(\alpha).$$

Tức là

$$\alpha\int_0^\alpha f(x)dx = \alpha\int_0^\alpha f(x)dx - \int_0^\alpha xf(x)dx,$$

suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 4. Cho hàm $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ liên tục thỏa mãn $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx$.

Chứng minh rằng với mỗi số $a \in \mathbb{R}$ tồn tại điểm $c \in (0,1)$ sao cho

$$cf(c) = a\int_0^c xf(x)dx.$$

Lời giải. Với $t \in [0,1]$ ta xét hàm $g(t) = e^{-at}\int_0^t xf(x)dx$.

Theo bài 3 tồn tại $\alpha \in (0,1)$ sao cho $\int_0^\alpha xf(x)dx = 0$.

Như thế ta có $g(0) = g(\alpha) = 0$ và

$$g'(t) = e^{-at}\Big[tf(t) - a\int_0^t xf(x)dx\Big].$$

Theo định lý Rolle tồn tại $c \in (0,\alpha) \subset (0,1)$ sao cho $g'(c) = 0$.
Suy ra điều cần chứng minh.

Bài toán 5. Cho hàm $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ khả vi thỏa mãn $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx$.
Chứng minh rằng với mỗi số $a \in \mathbb{R}$ tồn tại điểm $c \in (0,1)$ sao cho

$$f(c) = af'(c)\int_0^c f(x)dx.$$

Lời giải. Với $t \in [0,1]$ ta xét hàm

$$h(t) = e^{-af(t)}\int_0^t f(x)dx.$$

Theo bài 1 tồn tại $\alpha \in (0,1)$ để $\displaystyle\int_0^\alpha f(x)dx = 0$. Ta có $h(0) = h(\alpha) = 0$ và

$$h'(t) = e^{-af(t)}\Big[f(t) - af'(t)\int_0^t f(x)dx\Big].$$

Theo định lý Rolle tồn tại $c \in (0,\alpha) \subset (0,1)$ sao cho $h'(c) = 0$.
Suy ra điều cần chứng minh.

Nhận xét 4. Lấy $a = 2018$ ta được bài A.2 trong đề thi Giải tích OLP-2018.

Bài toán 6. Cho hàm $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ khả vi thỏa mãn $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx$.
Chứng minh rằng với mỗi số $a \in \mathbb{R}$ tồn tại điểm $c \in (0,1)$ sao cho

$$cf(c) = af'(c)\int_0^c xf(x)dx.$$

Lời giải. Với $t \in [0,1]$ ta xét hàm $h(t) = e^{-af(t)}\displaystyle\int_0^t xf(x)dx$.
Theo bài 3 tồn tại $\alpha \in (0,1)$ để $\displaystyle\int_0^\alpha xf(x)dx = 0$. Ta có $h(0) = h(\alpha) = 0$ và

$$h'(t) = e^{-af(t)}\Big[tf(t) - af'(t)\int_0^t xf(x)dx\Big].$$

Theo định lý Rolle tồn tại $c \in (0,\alpha) \subset (0,1)$ sao cho $h'(\beta) = 0$.
Suy ra điều cần chứng minh.

Bài toán 7. Cho hàm $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ liên tục sao cho $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx$.
Chứng minh rằng với mỗi số $a \in \mathbb{R}$ tồn tại điểm $c \in (0,1)$ sao cho

$$cf(c) + a\int_0^c f(x)dx = 0.$$

Lời giải. Xét hàm $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Ta có $F(0) = 0,\ F'(x) = f(x)$ và

$$\begin{aligned} F(1) &= \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x) = \int_0^1 xF'(x)dx \\ &= xF(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 F(x)dx = F(1) - \int_0^1 F(x)dx. \end{aligned}$$

Do đó $\int_0^1 F(x)dx = 0 \quad (*)$.

Hàm $F(x)$ liên tục trên $[0,1]$. Ta nhận thấy rằng nếu $F(x) > 0, \forall x \in (0,1)$ thì $\int_0^1 F(x)dx > 0$, nếu $F(x) < 0, \forall x \in (0,1)$ thì $\int_0^1 F(x)dx < 0$, đều trái với $(*)$.

Vậy phải tồn tại $b \in (0,1)$ để $F(b) = 0$.

Lại xét hàm $g(x) = x^a F(x)$. Ta có $g'(x) = ax^{a-1}F(x) + x^a f(x),\ g(0) = g(b) = 0$.

Theo định lý Rolle tồn tại $c \in (0,b) \subset (0,1)$ sao $g'(c) = 0$. Từ đó

$$ac^{a-1}\int_0^c f(x)dx + c^a f(c) = 0 \qquad \text{hay} \qquad cf(c) + a\int_0^c f(x)dx = 0.$$

Bài toán 8. Cho hàm $f(x)$ khả vi trên $[0,1]$ và thỏa mãn

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx = 0.$$

Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0,1)$ sao cho $f'(c) = 0$.

Lời giải. Xét hàm $g(x) = \int_0^x f(t)dt, t \in [0,1]$ thì $g'(x) = f(x)$.

Ta có $g(0) = 0$ và $g(1) = \int_0^1 f(t)dt = 0$. Theo định lý Rolle tồn tại $c_1 \in (0,1)$ sao cho $g'(c_1) = 0$, tức là $f(c_1) = 0$.

Xét hàm $h(x) = \int_0^x tf(t)dt, t \in [0,1]$ thì $h'(x) = xf(x)$.

Ta có $h(0) = 0$ và $h(1) = \int_0^1 tf(t)dt = 0$. Theo định lý Rolle tồn tại $c_2 \in (0,1)$ sao cho $h'(c_2) = 0$, tức là $c_2 f(c_2) = 0$, hay $f(c_2) = 0$.

Lại sử dụng định lý Rolle cho hàm $f(x)$ trên đoạn $[c_1, c_2]$ (hoặc đoạn $[c_2, c_1]$) thì tồn tại $c \in (c_1, c_2) \subset (0,1)$ (hoặc $c \in (c_2, c_1) \subset (0,1)$) sao cho $f'(c) = 0$.

Lưu ý. Nếu xảy ra trường hợp $c_1 = c_2 = \alpha \in (0,1)$ thì có 2 khả năng:

+) Khả năng 1: Tồn tại $\beta \in (0,1), \beta \neq \alpha, f(\beta) = 0$ thì ta áp dụng định lý Rolle cho $f(x)$ trên $[\alpha, \beta] \subset (0,1)$ (hoặc $]\beta, \alpha] \subset (0,1)$). Kết luận của bài toán vẫn đúng.

+) Khả năng 2: $f(x) \neq 0, \forall x \in [0,1], x \neq \alpha$ thì do tính liên tục của $f(x)$ ta có thể giả thiết $f(x) < 0, \forall x \in [0,\alpha)$ và $f(x) > 0, \forall x \in (\alpha, 1]$. Từ đó

$$\begin{aligned} &x < \alpha, xf(x) > \alpha f(x), \forall x \in [0,\alpha) \ \Rightarrow \int_0^\alpha xf(x)dx > \alpha\int_0^\alpha f(x)dx, \\ &x > \alpha, xf(x) > \alpha f(x), \forall x \in (\alpha,1] \ \Rightarrow \int_\alpha^1 xf(x)dx > \alpha\int_\alpha^1 f(x)dx, \\ &\Rightarrow \int_0^1 xf(x)dx > \alpha\int_0^1 f(x)dx = 0, \text{ trái giả thiết của đề bài!} \end{aligned}$$

Vậy không thể xáy ra khả năng này!

Bài toán 9 (OLP-2010, xem [1]). Cho hàm $f(x)$ khả vi trên $[0,1]$ và thỏa mãn

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx = 1.$$

Chứng minh rằng tồn tại điểm $c \in (0,1)$ sao cho $f'(c) = 6$.
Lời giải. Xét hàm $g(x) = 6x - 2$. Dễ dàng thấy rằng

$$\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 xg(x)dx = 1.$$

Suy ra $\int_0^1 [f(x) - g(x)]dx = 0$. Hàm $h(x) = f(x) - g(x)$ liên tục trên $[0,1]$ và có tích phân $\int_0^1 h(x)dx = 0$, nên không thể xảy ra trường hợp $h(x) > 0, \forall x \in (0,1)$ hoặc trường hợp $h(x) < 0, \forall x \in (0,1)$.

Như thế phương trình $h(x) = 0$ phải có ít nhất một nghiệm trong $(0,1)$.

Giả sử rằng $h(x) = 0$ chỉ có một nghiệm $x = a \in (0,1)$.

Xảy ra hai khả năng sau:

+) Nếu $h(x) < 0, \forall x \in (0,a)$, thì $h(x) > 0, \forall x \in (a,1)$. Khi đó

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xf(x)dx - 1 &= \int_0^1 xf(x)dx - \int_0^1 xg(x)dx \\
&= \int_0^1 x[f(x) - g(x)]dx = \int_0^1 xh(x)dx \\
&= \int_0^a xh(x)dx + \int_a^1 xh(x)dx > \int_0^a ah(x)dx + \int_a^1 ah(x)dx \\
&= a\Big[\int_0^a h(x)dx + \int_a^1 h(x)dx\Big] = a\int_0^1 h(x)dx = 0.
\end{aligned}$$

Suy ra $\int_0^1 xf(x)dx > 1$, mâu thuẫn với giả thiết của đề bài!

+) Nếu $h(x) > 0, \forall x \in (0,a)$, thì $h(x) < 0, \forall x \in (a,1)$. Khi đó

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xf(x)dx - 1 &= \int_0^1 xf(x)dx - \int_0^1 xg(x)dx \\
&= \int_0^1 x[f(x) - g(x)]dx = \int_0^1 xh(x)dx \\
&= \int_0^a xh(x)dx + \int_a^1 xh(x)dx < \int_0^a ah(x)dx + \int_a^1 ah(x)dx \\
&= a\Big[\int_0^a h(x)dx + \int_a^1 h(x)dx\Big] = a\int_0^1 h(x)dx = 0.
\end{aligned}$$

Suy ra $\int_0^1 xf(x)dx < 1$, mâu thuẫn với giả thiết của đề bài!

Vậy $h(x) = 0$ phải có ít nhất hai nghiệm trong $(0,1)$.

Giả sử hai nghiệm đó là $a, b \in (0,1)$ và $a < b$. Ta có $h(a) = h(b) = 0$, nên $f(b) - f(a) = g(b) - g(a)$. Theo định lý Lagrange tồn tại $c \in (a,b) \subset (0,1)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = 6.$$

Nhận xét 5. Bài 8 được đưa về bài 9 nếu thay hàm $f(x)$ bởi hàm $f(x) + 6x - 2$ và bài 9 được đưa về bài 8 nếu thay hàm $f(x)$ bởi hàm $f(x) - 6x + 2$.

Bài toán 10. Cho hàm $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ liên tục và thỏa mãn $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Chứng minh với mỗi số $a \in \mathbb{R}$ tồn tại $c \in (0, 1)$ sao cho $f(c) = a \int_0^c f(x)dx$.

Lời giải. Đặt $g(t) = e^{-at} \int_0^t f(x)dx, t \in [0, 1]$.

Ta có $g(0) = g(1) = 0$ và $g(t)$ khả vi với

$$g'(t) = e^{-at}\Big[f(t) - a\int_0^t f(x)dx\Big].$$

Theo định lý Rolle tồn tại $c \in (0, 1)$ để $g'(c) = 0$.

Suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 11. Cho hàm $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ liên tục và thỏa mãn $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0, 1)$ sao cho $(1 - c)f(c) = c \int_0^c f(x)dx$.

Lời giải. Đặt $g(t) = e^t(1 - t) \int_0^t f(x)dx, t \in [0, 1]$.

Ta có $g(0) = g(1) = 0$ và $g(t)$ khả vi với

$$g'(t) = e^t\Big[(1 - t)f(t) - t\int_0^t f(x)dx\Big].$$

Theo định lý Rolle tồn tại $c \in (0, 1)$ để $g'(c) = 0$.

Suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 12. Cho hàm $f(x)$ khả vi trên $[0, 1]$ và thỏa mãn $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Chứng minh với mỗi số $a \in \mathbb{R}$ tồn tại $c \in (0, 1)$ sao cho $f(c) = af'(c) \int_0^c f(x)dx$.

Lời giải. Đặt $g(t) = e^{-af(t)} \int_0^t f(x)dx,\ t \in [a, b]$. Ta có $g(0) = g(1) = 0$ và

$$g'(t) = e^{-af(t)}\Big[f(t) - af'(t)\int_0^t f(x)dx\Big].$$

Theo định lý Rolle tồn tại $c \in (0, 1)$ sao cho $g'(c) = 0$, tức là

$$g'(c) = e^{-af(c)}\Big[f(c) - af'(c)\int_0^c f(x)dx\Big] = 0,$$

suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 13 (OLP-Romania-2006)**.** Cho hàm $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ liên tục và thỏa mãn $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Chứng minh rằng tồn tại $\xi \in (0, 1)$ sao cho $\int_0^\xi xf(x)dx = 0$.

Lời giải. Xét hàm $g(t) = t\int_0^t f(x)dx - \int_0^t xf(x)dx$ khả vi trên $[0,1]$.

Dễ dàng tính được $g'(t) = \int_0^t f(x)dx$ và ta có $g'(0) = g'(1) = 0$.

Theo định lý Flett tồn tại $\xi \in (0,1)$ sao cho

$$g'(\xi) = \frac{g(\xi) - g(0)}{\xi - 0} = \frac{g(\xi)}{\xi}.$$

Như vậy ta được $\xi g'(\xi) = g(\xi)$, hay là

$$\xi \int_0^\xi f(x)dx = \xi \int_0^\xi f(x)dx - \int_0^\xi xf(x)dx,$$

do đó $\int_0^\xi xf(x)dx = 0$.

Bài toán 14. Cho f là hàm liên tục trên $[0,1]$ và thỏa mãn $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Chứng minh với mỗi số $a \in \mathbb{R}$ tồn tại $c \in (0,1)$ sao cho

$$cf(c) = a\int_0^c xf(x)dx.$$

Lời giải. Với $t \in [0,1]$ ta xét hàm $g(t) = e^{-at}\int_0^t xf(x)dx$. Ta có

$$g'(t) = e^{-at}\Big[tf(t) - a\int_0^t xf(x)dx\Big].$$

Ta thấy $g(0) = 0$ và theo bài 13 thì tồn tại $\xi \in (0,1)$ sao cho $\int_0^\xi xf(x)dx = 0$, nên $g(\xi) = e^{-\xi}\int_0^\xi xf(x)dx = 0$.

Áp dụng định lý Rolle cho hàm $g(t)$ thì tồn tại $c \in (0,\xi) \subset (0,1)$ sao cho $g'(c) = 0$.
Từ đây suy ra điều cần chứng minh.

Bài toán 15. Cho f là hàm liên tục trên $[0,1]$ và thỏa mãn $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0,1)$ sao cho

$$c^2 f(c) = \int_0^c (x + x^2)f(x)dx.$$

Lời giải. Đặt $F(x) = x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt,\ x \in [0,1]$.

Ta có $F'(x) = \int_0^x f(t)dt$ và $F'(0) = 0$. Do $\int_0^1 f(t)dt = 0$, nên $F'(1) = 0$.

Theo định lý Flett tồn tại $a \in (0,1)$ sao cho $\dfrac{F(a) - F(0)}{a - 0} = F'(a)$.

Do đó

$$\int_0^a tf(t)dt = 0,\ a \in (0,1). \tag{1}$$

Đặt $G(x) = e^{-x} \int_0^x tf(t)dt,\ x \in [0, 1]$. Từ (1) ta có $G(0) = G(a) = 0$.

Theo định lý Rolle tồn tại $b \in (0, a)$ sao cho

$$0 = G'(b) = -e^{-b} \int_0^b tf(t)dt + e^{-b} bf(b).$$

Do đó

$$\int_0^b tf(t)dt = bf(b),\ b \in (0, a). \tag{2}$$

Đặt $H(x) = x \int_0^x tf(t)dt - \int_0^x (t^2 + t)f(t)dt,\ x \in [0.1]$. Ta có

$$H'(x) = \int_0^x tf(t)dt - xf(x).$$

Từ (2) ta có $H'(0) = H'(b) = 0$.

Theo định lý Flett tồn tại $c \in (0, b) \subset (0, 1)$ sao cho

$$\frac{H(c) - H(0)}{c - 0} = H'(c).$$

Do đó

$$c \int_0^c xf(x)dx - \int_0^c (x^2 + x)f(x)dx = c \int_0^x xf(x)dx - c^2 f(c).$$

Điều này kéo theo $c^2 f(c) = \int_0^c (x^2 + x)f(x)dx$.

Bài toán 16. Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ thỏa mãn $\int_a^b f(x)dx = 0$.

Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $cf(c) = \int_c^b f(x)dx$.

Lời giải. Đặt $g(x) = x \int_x^b f(t)dt, x \in [a, b]$. Ta thấy $g(x)$ khả vi trên $[a, b]$ và

$$g(a) = g(b) = 0,\ g'(x) = \int_x^b f(t)dt - xf(x).$$

Từ đây theo định lý Rolle suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 17. Cho hàm $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ liên tục và thỏa mãn $\int_a^b f(x)dx = 0$.

Chứng minh rằng tồn tại $\alpha \in (0, \frac{b-a}{2})$ sao cho

$$f(\frac{a+b}{2} - \alpha) + f(\frac{a+b}{2} + \alpha) = 0.$$

Lời giải. Xét hàm $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ như sau

$$g(t) = \int_{(1-t)a+tb}^{ta+(1-t)b} f(x)dx.$$

Ta thấy $g(0) = g(\frac{1}{2}) = g(1) = 0$ và $g(t)$ là hàm khả vi. Theo định lý Rolle tồn tại $c_1 \in (0, \frac{1}{2})$ và $c_2 \in (\frac{1}{2}, 1)$ để $g'(c_1) = g'(c_2) = 0$. Mặt khác

$$\begin{aligned} g'(t) &= f(ta + (1-t)b)(a-b) - f(1-t)a + tb)(b-a) \\ &= (a-b)[f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)] \end{aligned}$$

Do đó $f(c_k a + (1-c_k)b) + f((1-c_k)a + c_k b) = 0,\ (k = 1, 2)$.

Rõ ràng $c_k \neq \frac{1}{2}$ nên $c_k a + (1-c_k)b \neq \frac{a+b}{2},\ (k = 1, 2)$.

Gọi $c_1 = c \in (0, \frac{1}{2})$ ta có $f(ca + (1-c)b) + f((1-c)a + cb) = 0$, đồng thời ta thấy $(1-c)a + cb < ca + (1-c)b \Leftrightarrow 0 < (b-a)(1-2c)$.

Đặt $\alpha = \frac{1}{2}(b-a)(1-2c) = \frac{1}{2}(b-a) - c(b-a)$ thì $0 < \alpha < \frac{b-a}{2}$ và ta được $\frac{a+b}{2} - \alpha = (1-c)a + cb$, $\frac{a+b}{2} + \alpha = ca + (1-c)b$, nên

$$f(\frac{a+b}{2} - \alpha) + f(\frac{a+b}{2} + \alpha) = 0.$$

Bài toán 18. Cho hàm $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ liên tục. Chứng minh rằng tồn tại $\alpha \in (0, \frac{b-a}{2})$ sao cho

$$f(\frac{a+b}{2} - \alpha) + f(\frac{a+b}{2} + \alpha) = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

Lời giải. Xét hàm $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ như sau

$$g(x) = f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt.$$

Ta thấy $\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f(t)dt = 0.$

Áp dụng bài 18 thì tồn tại $\alpha \in (0, \frac{b-a}{2})$ sao cho

$$g(\frac{a+b}{2} - \alpha) + g(\frac{a+b}{2} + \alpha) = 0,$$
$$f(\frac{a+b}{2} - \alpha) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt + f(\frac{a+b}{2} + \alpha) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt = 0.$$

Suy ra điều cần chứng minh.

Bài toán 19. Cho $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ là hàm khả vi thỏa mãn $f(1) = 0, f'(1) = 1$. Chứng tỏ rằng tồn tại $c \in (0, 1)$ sao cho

$$f(c) = f'(c) \int_0^c f(x)dx.$$

Lời giải. Xét hàm $g(x) = xe^{-f(x)} \int_0^x f(t)dt$, ta có

$$g'(x) = e^{-f(x)} \Big[\int_0^x f(t)dt - xf'(x) \int_0^x f(t)dt + xf(x) \Big].$$

Ta thấy $g'(0) = g'(1) = 0$, nên theo định lý Flett tồn tại $c \in (0, 1)$ sao cho

$$g'(c) = \frac{g(c) - g(0)}{c - 0} = \frac{g(c)}{c}, \text{ tức là } \quad f(c) = f'(c) \int_0^c f(x)dx.$$

Bài toán 20. Cho $0 < a < b$ và hàm $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ liên tục.

Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$2f(c) = \frac{1}{\sqrt{c}} \Big[\frac{\sqrt{a} + \sqrt{c}}{a - c} + \frac{\sqrt{b} + \sqrt{c}}{b - c} \Big] \int_a^c f(x)dx.$$

Lời giải. Xét hàm

$$g(x) = (\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} - \sqrt{b}) \int_a^x f(t)dt, x \in [a, b].$$

Ta thấy $g(a) = g(b) = 0$ và

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Big[(\sqrt{x} - \sqrt{a}) + \sqrt{x} - \sqrt{b}) \Big] \int_a^x f(t)dy + (\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} - \sqrt{b}) f(x).$$

Theo định lý Rolle tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $g'(c) = 0$, tức là

$$\frac{1}{2\sqrt{c}} \Big[(\sqrt{c} - \sqrt{a}) + (\sqrt{c} - \sqrt{b}) \Big] \int_a^c f(x)dx + (\sqrt{c} - \sqrt{a})(\sqrt{c} - \sqrt{b}) f(c) = 0.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} 2f(c) &= \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{c}) + (\sqrt{b} - \sqrt{c})}{(\sqrt{a} - \sqrt{c})(\sqrt{b} - \sqrt{c})} \int_a^c f(x)dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{c}} \Big[\frac{\sqrt{a} + \sqrt{c}}{a - c} + \frac{\sqrt{b} + \sqrt{c}}{b - c} \Big] \int_a^c f(x)dx. \end{aligned}$$

Bài toán 21. Cho $f(x), g(x)$ là các hàm dương, liên tục trên $[a, b]$ và cho số thực α.

Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$\frac{f(c)}{\int_a^c f(x)dx} - \frac{g(c)}{\int_c^b g(x)dx} = \alpha.$$

Lời giải. Xét $h(x) = e^{-\alpha x} \displaystyle\int_a^x f(t)dt \int_x^b g(t)dt,\ x \in [a, b]$. Ta có $h(a) = h(b) = 0$ và

$$\begin{aligned} h'(x) &= -\alpha e^{-\alpha x} \int_a^x f(t)dt \int_x^b g(t)dt + e^{-\alpha x} f(x) \int_x^b g(t)dt - e^{-\alpha x} g(x) \int_a^x f(t)dt \\ &= -e^{-\alpha x} \Big[\alpha \int_a^x f(t)dt \int_x^b g(t)dt - f(x) \int_x^b g(t)dt + g(x) \int_a^x f(t)dt \Big] \end{aligned}$$

Sử dụng định lý Rolle thì tồn tại $c \in (a, b)$ để $h'(c) = 0$.

Chú ý $e^{-\alpha x}, f(x), g(x)$ là các hàm dương, ta suy ra

$$\alpha \int_a^c f(t)dt \int_c^b g(t)dt - f(x) \int_x^c g(t)dt + g(x) \int_a^c f(t)dt = 0,$$

hay là

$$\frac{f(c)}{\int_a^c f(x)dx} - \frac{g(c)}{\int_c^b g(x)dx} = \alpha.$$

Bài toán 22 (OLP-2001, xem [1]). Chứng minh rằng tồn tại số thực $x \in (0,1)$ sao cho

$$\int_x^1 \frac{t^{2000}}{(1+t)(1+t^2)...(1+t^{2001})}dt = \frac{x^{2001}}{(1+x)(1+x^2)...(1+x^{2001})}.$$

Lời giải. Xét các hàm số

$$f(t) = \frac{t^{2000}}{(1+t)(1+t^2)...(1+t^{2001})},\ t \in [0,1],$$
$$F(x) = x\int_x^1 f(t)dt,\ x \in [0,1].$$

Ta có $F(0) = F(1) = 0$ và do $f(t)$ liên tục trên $[0,1]$ nên $F(x)$ khả vi trong $(0,1)$. Theo định lý Rolle tồn tại $x \in (0,1)$ để $F'(x) = 0$. Thế mà

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_x^1 f(t)dt - xf(x) \\ &= \int_x^1 \frac{t^{2000}}{(1+t)(1+t^2)...(1+t^{2001})}dt - \frac{x^{2001}}{(1+x)(1+x^2)...(1+x^{2001})}. \end{aligned}$$

Vậy có điều phải chứng minh.

Bài toán 23. Cho hàm $f(x)$ khả vi cấp 2 trên $[0,1]$
và $f''(x) \geqslant 0, \forall x \in [0,1]$. Chứng minh rằng

$$2\int_0^1 (1-x)f(x)dt \leqslant \int_0^1 f(x^2)dx.$$

Lời giải. Vì $f''(x) \geqslant 0, \forall x \in [0,1]$, nên $f'(x)$ đơn điệu tăng trên $[0,1]$.
Với mỗi $x \in (0,1)$ thì $x^2 \in (0,1)$ và $x > x^2$.
Áp dụng định lý Lagrange cho hàm f trên đoạn $[x^2, x]$ ta được

$$\frac{f(x) - f(x^2)}{x - x^2} = f'(t),\ t \in (x^2, x)$$

Rõ ràng $f'(t) \leqslant f'(x)$ và $x - x^2 > 0$ nên suy ra $f(x) - f(x^2) \leqslant (x - x^2)f'(x)$.
Từ đó dẫn đến

$$\begin{aligned} \int_0^1 [f(x) - f(x^2)]dx &\leqslant \int_0^1 (x - x^2)f'(x)dx, \\ \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 f(x^2)dx &\leqslant (x - x^2)f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 (1-2x)f(x)dx, \\ \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 (1-2x)f(x)dx &\leqslant \int_0^1 f(x^2)dx, \\ 2\int_0^1 (1-x)f(x)dx &\leqslant \int_0^1 f(x^2)dx \quad \text{(điều phải chứng minh!)} \end{aligned}$$

Bài toán 24 (OLP-2009, xem [1]). Cho hàm $f(x)$ khả vi cấp 2 trên $[0,1]$ và $f''(x) \geqslant 0, \forall x \in [0,1]$. Chứng minh rằng

$$2\int_0^1 f(x)dx \geqslant 3\int_0^1 f(x^2)dx - f(0).$$

Lời giải. Vì $f''(x) \geqslant 0, \forall x \in [0,1]$, nên $f'(x)$ đơn điệu tăng trên $[0,1]$.

Với mỗi $x \in (0,1)$ thì $x^2 \in (0,1)$ và $x > x^2$.

Áp dụng định lý Lagrange cho hàm f trên đoạn $[x^2, x]$ ta được

$$\frac{f(x) - f(x^2)}{x - x^2} = f'(t),\ t \in (x^2, x).$$

Vì $f'(t) \geqslant f'(x^2)$ và $x - x^2 > 0$ nên $f(x) - f(x^2) \geqslant (x - x^2) f'(x^2)$.

Từ đó dẫn đến

$$\int_0^1 [f(x) - f(x^2)]dx \geqslant \int_0^1 (x - x^2) f'(x^2) dx,$$
$$\int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 f(x^2)dx \geqslant \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)2xf'(x^2)dx.$$

Dùng tích phân từng phần với $u = 1 - x,\ du = -dx$

và $dv = 2xf'(x^2)dx,\ v = f(x^2)$ thì tích phân ở vế phải trở thành

$$\int_0^1 (1-x)2xf'(x^2)dx = (1-x)f(x^2)\Big|_0^1 + \int_0^1 f(x^2)dx = -f(0) + \int_0^1 f(x^2)dx.$$

Vì thế ta suy ra

$$\int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 f(x^2)dx \geqslant \frac{1}{2}\Big[-f(0) + \int_0^1 f(x^2)dx \Big],$$
$$2\int_0^1 f(x)dx \geqslant 3\int_0^1 f(x^2)dx - f(0) \quad \text{(điều phải chứng minh!)}$$

Bài toán 25 (OLP-2012, xem [1]). Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $[0, 2012]$ và thỏa mãn $f(x) + f(2012 - x) = 0, \forall x \in [0, 2012]$.

Chứng minh $\displaystyle\int_0^{2012} f(x)dx = 0$ và phương trình

$$(x - 2012)f(x) = 2012\int_0^{2012-x} f(t)dt \text{ có nghiệm trong } (0, 2012).$$

Lời giải. Từ giả thiết ta có $f(x) = -f(2012 - x), \forall x \in [0, 2012]$, nên

$$\begin{aligned}\int_0^{2012} f(x)dx &= -\int_0^{2012} f(2012 - x)dx \\ &= -\int_{2012}^0 f(t)d(2012 - t) \\ &= \int_{2012}^0 f(t)dt = -\int_0^{2012} f(t)dt,\end{aligned}$$

suy ra $\displaystyle\int_0^{2012} f(x)dx = 0$.

Đặt $g(x) = (2012 - x)^{2012}\displaystyle\int_0^{2012-x} f(t)dt, x \in [0, 2012]$.

Ta có $g(0) = g(2012) = 0$ và

$$\begin{aligned} g'(x) &= -2012(2012-x)^{2011}\int_0^{2012-x} f(t)dt \\ &\quad - (2012-x)^{2012} f(2012-x) \\ &= -(2012-x)^{2011}\Big[2012\int_0^{2012-x} f(t)dt \\ &\quad + (2012-x)f(2012-x)\Big] \\ &= -(2012-x)^{2011}\Big[2012\int_0^{2012-x} f(t)dt - (2012-x)f(x)\Big]. \end{aligned}$$

Theo định lý Rolle tồn tại $c \in (0, 2012)$ để $g'(c) = 0$, suy ra

$$(2012-c)f(c) = 2012\int_0^{2012-c} f(t)dt$$

và ta được điều cần chứng minh.

Bài toán 26. Cho hàm $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục. Chứng minh rằng tồn tại $c \in [a, b]$ sao cho

$$\int_a^b f(x)dx = f(b)(b-a) - \frac{f'(c)}{2}(b-a)^2.$$

Lời giải. Xét $x \in [a, b]$, theo định lý Lagrange tồn tại $\xi_x \in (x, b) \subset (a, b)$ sao cho $f(b) - f(x) = f'(\xi_x)(b-x)$, dẫn tới

$$f(b)(b-a) - \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f'(\xi_x)(b-x)dx.$$

Theo định lý giá trị trung bình tích phân tồn tại $c \in [a, b]$ sao cho

$$\int_a^b f'(\xi_x)(b-x)dx = f'(c)\int_a^b (b-x)dx = -\frac{f'(c)}{2}(b-a)^2,$$

từ đây ta suy ra điều cần chứng minh.

Tài liệu

[1] Hội Toán học Việt Nam. Tuyển tập các đề thi Olympic Toán học sinh viên từ năm 1993 đến năm 2018.

[2] Vũ Tiến Việt (chủ biên), Phạm Thị Hằng, Nguyễn Thị Lê, *Giáo trình Toán Cao cấp - Học phần A2*. Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, 2016.

[3] Peter R. Mercer, *More Calculus of a Single Variable*, Springer Science and Business Media, New York, 2014.

[4] Radulescu T. L., Radulescu V. D., Andreescu T., *Problems in Real Analysis: Advanced Calculus on the Real Axis*, Springer Verlag, 2009.

[5] József Sándor, *Selected Chapters of Geometry, Analysis and Number Theory*, Lambert Publishing, 2005.

[6] Sahoo P. K., Riedel T., *Mean Value Theorems And Functional Equations*, World Scientific, 1998.