

EA d'initiation à la recherche du PA de Mathématiques Appliquées

MAP511 – MAP512 – MAP513

Catalogue des sujets*

Cette version: 10 juillet 2020

*La dernière version de ce document se trouve sur les pages MAP511, MAP512 et MAP513 du Moodle <https://moodle.polytechnique.fr/>

Table des matières

Introduction - EA d'initiation à la recherche	5
Thématiques	5
Choix et attribution des sujets	6
Déroulement du projet, encadrement	6
Objectifs, rapport et soutenance, notation	7
Liste des sujets	9
1 Data science : son & image, réseaux, apprentissage	9
1.1 Séparation de sources : l'analyse en composantes indépendantes . . .	9
1.2 Analyse en Composante Principale : théorie et applications	10
1.3 Segmentation d'image	11
1.4 Modèles d'apprentissage Fair et Interprétables en imagerie	11
1.5 Partitionnement de données structurées en graphes : modèles et algorithmes	13
1.6 Optimisation : approche stochastique en sciences des données	14
1.7 Estimation bayésienne et algorithmes stochastiques	14
1.8 Classification supervisée : propriétés théoriques et algorithmes	16
1.9 Fidélisation de supporteurs pour un club de Ligue 1	17
1.10 Machine learning pour l'art	17
1.11 Apprentissage par renforcement profond	17
1.12 Application to Deep Reinforcement Learning to Natural Language Games	18
1.13 Modèles séquentiels pour systèmes de recommandation	19
1.14 Confidentialité dans les systèmes de recommandation	20
1.15 Plongements lexicaux multilingues	21
1.16 Modèles génératifs profonds en Traitement des Langues	22
2 Optimisation et recherche opérationnelle	23
2.1 Dimensionnement couplé d'une flotte de véhicules électriques et des infrastructures de recharge	23
2.2 Approches stochastiques/robuste pour le dimensionnement capacitaire d'un réseau de transport (Capacity Planning)	23
2.3 Modèles pour le placement optimal pour les réseaux 5G	24
2.4 Optimisation de la réponse aux appels d'urgence 17-18-112 en région parisienne lors d'une situation de crise	25
2.5 Dimensionnement d'un centre d'interventions de techniciens sur un réseau de distribution électrique	26
2.6 "Barrières exotiques" et complexité de la programmation linéaire	27
2.7 Prise en compte de la mobilité dans les modèles épidémiologiques Covid-19	28

3	Modèles aléatoires pour la biologie et la physique	29
3.1	Projet court Modèles de polymérisation en environnement fluctuant	29
3.2	Projet court ou long Modélisation de la propagation d'une épidémie de tumeurs contagieuses chez le diable de Tasmanie	29
3.3	Projet court Expérience de Lenski	30
3.4	Projet court Descente de l'infini pour des modèles compétitifs . . .	30
3.5	Projet court ou long Un modèle de milieu aléatoire en physique : la percolation de premier passage	31
3.6	Projet court Inférences sur des arbres de Galton-Watson et fraude sur Wikipedia	32
3.7	Projet court ou long Effet de la taille des structures dans la propagation d'une épidémie.	32
3.8	Projet court Introduction au <i>modèle à 5 vertex</i>	33
4	Mathématiques Financières	34
	Valorisation et couverture d'options	35
4.1	Processus de Wishart et modèles à volatilité stochastique multidimensionnels	35
4.2	Pricing et couverture avec des modèles de "rough volatility"	35
4.3	Couverture d'options avec coûts de transaction	36
	Régulation et mécanismes de plateformes financières	36
4.4	Régulation et market-making optimal	37
4.5	Régulation de l'exploitation d'une ressource naturelle.	37
4.6	Régulation de la tarification de la consommation électrique	38
	Calibration de modèles	38
4.7	Ponts de Schrodinger et nouvelle classe de modèles à volatilités stochastiques	38
4.8	Méthodes de calcul de régressions non-paramétriques et calibration de modèles à volatilité stochastique	39
4.9	Arbitrage multidevise et calibration du modèle de Wishart	39
4.10	Produits dérivés sur l'indice VIX : calibration de modèle	40
	Gestion des risques : délit d'initié et gestion de portefeuille . . .	41
4.11	Délit d'initié : modélisation et détection	41
4.12	Assurance de portefeuille	41
4.13	Estimation de risques VaR dans un modèle incertain	42
4.14	Liquidation de portefeuille avec impact et incertitude de paramètre	43
4.15	Cyber sécurité et modèles de contagion	43
	Stratégies haute fréquence, microstructure des marchés	44
4.16	Estimation haute fréquence de la volatilité, application au trading d'options	44
4.17	Corrélation haute fréquence, application au market impact	45
	Equilibres de marchés et jeux à champs moyens	45
4.18	Une approche jeu pour la formation de prix sur un marché	45
4.19	Quand investir ? Modèles d'équilibres entrée-sortie sur un marché .	46

Transport optimal (martingale), réseaux de neurones et applications	46
4.20 Simulation dans l'ordre convexe, et application au calcul de bornes de prix robustes	46
4.21 Transport optimal (martingale) et réseaux de neurones : Génération automatique de séries financières.	47
4.22 Transport optimal (martingale) et réseaux de neurones : Détection d'anomalie sur des données financières.	47
4.23 Transport optimal (martingale) et réseaux de neurones : Calibration de smiles et algorithme de Sinkhorn	48
5 Simulation Aléatoire	50
5.1 Sélection adaptative optimale de réseaux de neurones pour résoudre par Monte-Carlo une EDP semi-linéaire (MAP513)	50
5.2 Quantiles généralisés, estimation sur données simulées (MAP511-MAP512)	51
5.3 Quantification d'incertitudes en optimisation stochastique (MAP511-MAP512)	51
5.4 Simulation de tatouage numérique par codes Tardos (MAP511-MAP512)	52
5.5 Simulation de mouvement brownien fractionnaire (MAP511-MAP512)	53
5.6 Méthodes de splitting pour la simulation du processus de Cox-Ingersoll-Ross et les processus affines (MAP511-MAP512)	53
5.7 Simulation du temps de sortie de certains domaines pour les processus de Bessel et le mouvement brownien (MAP511-MAP512)	54
5.8 Discrétisation du théorème ergodique (MAP511-MAP512)	54
6 Automatique – Automatic Control with applications in Robotics and in Quantum Engineering	56
6.1 Time Optimal Control for a UAV Drone (MAP 512)	56
6.2 Ensemble control of quantum systems (MAP 512)	58
6.3 Stability of a damped oscillator under time varying perturbations (MAP512)	60
7 EDP, analyse numérique et applications en physique, mécanique et biologie	62
7.1 Dynamique de population et preuves assistées par ordinateur	62
7.2 Couplage des méthodes FEM et BEM pour des problèmes de diffraction	63
7.3 Optimisation de dose en radiothérapie	64
7.4 Schémas équilibres et asymptotic preserving pour les systèmes hyperboliques en régime diffusif	66
7.5 Méthodes de moments pour la modélisation des sprays turbulents	67
7.6 Optimisation de formes et transport optimal	69
7.7 Optimisation des supports en Fabrication Additive	70

Introduction - EA d'initiation à la recherche

Objectifs

Le but de ces enseignements est de fournir une initiation à la recherche et développement en mathématiques appliquées, à travers la réalisation d'un projet. Le projet consiste en l'étude d'un problème, motivé par les applications ou des questions de nature mathématique, allant de la modélisation à l'implémentation numérique et à l'analyse critique des résultats.

Ce projet est effectué en binôme et constitue un véritable travail d'équipe.

Thématiques

▷ Liste des thématiques :

La liste des sujets proposés est découpée dans les thématiques suivantes (en *italique* le référent pour chaque thématique) :

1. **Data science** (*Erwan Scornet*)
2. **Optimisation et recherche opérationnelle** (*Xavier Allamigeon, Stéphane Gaubert*)
3. **Modèles aléatoires pour la biologie et la physique** (*Lucas Gerin*)
4. **Mathématiques financières** (*Thibaut Mastroli*)
Répartie en plusieurs sous-thématiques : voir ci-dessous
5. **Simulation Aléatoire** (*Clément Rey*)
6. **Automatique – Automatic control with applications in Robotics and Quantum engineering** (*Ugo Boscain*)
7. **Équations aux dérivées partielles, analyse numérique et applications en physique, mécanique et biologie** (*Teddy Pichard*)

Les sujets proposés sont décrits dans la suite de ce catalogue. Pour chaque sujet ou au début de chaque section, on indique

- si le sujet est proposé en MAP511, MAP512, MAP513
- si des prérequis sont demandés.

▷ Enseignants référents :

Pour chacune des thématiques, les enseignants référents sont disponibles pour répondre à vos questions. Leurs coordonnées sont indiquées dans la suite de ce catalogue.

N'hésitez pas à prendre contact avec eux pour tout souci pendant la durée du projet (problème d'organisation, problème scientifique...).

Choix et attribution des sujets

▷ Procédure de choix via Moodle

Pour effectuer vos vœux, il faut remplir un formulaire en ligne, dont le lien vous a été communiqué par mail (vous pouvez aussi le retrouver sur la page Moodle de l'EA : MAP511, MAP512 ou MAP513A selon votre cas). Dans ce formulaire, vous devrez indiquer

- 5 choix de sujets classés par ordre de préférence
- en indiquant le numéro des sujets (1.2, 3.4, 2.1.8...)
- **pas plus de 3 sujets par thématique**

Une règle additionnelle :

- Pour la thématique **Mathématiques financières** : si vous indiquez 3 choix dans cette thématique, ils doivent être répartis sur au moins *deux sous-thématiques*.

Ce formulaire est à remplir

avant le 26/07/2020 à 17h.

Une seule soumission par binome suffit. Il n'y aura pas de "shotgun" : tous les choix envoyés à temps et respectant les règles ci-dessus seront traités de façon égalitaire.

▷ *Articulation entre projets* : il ne sera pas possible d'effectuer deux projets (MAP511 et MAP512) dans la même thématique.

▷ Attribution des sujets :

Elle sera faite pendant l'été, en essayant de respecter au mieux les choix envoyés à temps et respectant les règles ci-dessus. **Si vous vous inscrivez hors délai, il sera plus compliqué d'obtenir un des sujets de votre choix. Même en cas de retard/changement d'EA, il sera impossible de rejoindre les EA MAP 511 et MAP 513 après le 1er septembre, et l'EA MAP 512 après le 15 décembre.**

Déroulement du projet, encadrement

▷ Démarrage du projet :

Quand votre sujet vous aura été attribué, vous devrez prendre contact avec l'enseignant qui en est responsable à la rentrée de la 3A (mi-septembre 2020) afin de fixer la date d'un premier rendez-vous.

Cet enseignant vous précisera les modalités de travail particulières pour votre sujet, puis vous encadrera.

▷ **Déroulement du projet :**

Ce projet constitue un travail personnel dont l'intérêt et la richesse dépendront principalement de votre investissement. L'enseignant qui vous encadre vous guidera dans votre démarche. Surtout n'hésitez pas à le contacter.

C'est à vous de le solliciter (et non l'inverse).

Le créneau du mardi après-midi est consacré au travail sur vos projets.

Les rencontres avec votre encadrant pourront avoir lieu aussi à d'autres moments, si besoin.

Notation, rapport et soutenance

▷ **Rapport et soutenance :**

- Projet MAP511 en P1 : Le projet se conclura par la remise d'un rapport, qui fera l'objet d'une soutenance orale sur slides (autour de 40' avec questions) à la fin de la période 1.
- Projet MAP512 en P2 : Le projet se conclura par la remise d'un rapport, qui fera l'objet d'une soutenance orale sur slides (autour de 40' avec questions) à la fin de la période 2.
- Projet MAP513 en P1+P2 : Le projet se conclura par la remise d'un rapport, qui fera l'objet d'une soutenance orale sur slides (autour de 40' avec questions) à la fin de la période 2.
Une soutenance de mi-parcours sur slides (autour de 40' avec questions) aura lieu à la fin de la période 1, avec remise d'un rapport de mi-parcours, et donnera lieu à une note en P1.

Dans tous les cas, les rapports sont à envoyer en format pdf à tous les membres du jury de soutenance (cc l'enseignant responsable de la thématique ; voir plus haut pour la liste des thématiques).

Les soutenances de 40 minutes sont typiquement composées de : un exposé de 30 minutes (partagées équitablement entre les élèves) suivi de 10 minutes de questions. Elle doivent tenir dans le temps imparti.

Les date exactes et les horaires des soutenances vous seront transmis par le département.

Indications. Dans le rapport comme lors de la soutenance, une bonne pratique est d’agir comme si le jury ne connaissait pas le problème, et donc l’introduire en montrant son importance, expliquer votre approche ainsi que le cadre théorique, et montrer vos résultats ; vous donnerez enfin vos conclusions en faisant un bilan de votre travail.

Le rapport, de préférence écrit en L^AT_EX, devra comprendre une bibliographie des ouvrages et articles étudiés. Vous êtes encouragés à chercher de la documentation sur votre sujet.

▷ **Evaluation :**

Elle tiendra compte de la qualité du contenu du rapport et de la soutenance, ainsi que des interactions avec l’enseignant. Elle prendra également en compte le sens critique sur les résultats obtenus et la précision de la bibliographie.

Toute soutenance donne lieu à une note. **Une seule note** est généralement attribuée au deux membres du binôme.

Tous les sujets proposés demanderont d’effectuer des simulations/calculs numériques. Les outils informatiques seront mis en œuvre comme un moyen d’expérimentation et de compréhension, et non comme une fin en soi.

Bon travail à tous,

les équipes pédagogiques MAP511, MAP512, MAP513.

Liste des sujets

1 Data science : son & image, réseaux, apprentissage

Enseignant référent : Erwan Scornet erwan.scornet@polytechnique.edu

Les sujets dans cette thématique sont proposés au choix en P1 (code MAP511), en P2 (code MAP512) ou sur les deux périodes P1+P2 (code MAP513).

Pour toute question générique sur les sujets data science, vous pouvez contacter le responsable de cette thématique :

Erwan Scornet erwan.scornet@polytechnique.edu.

Equipe enseignante pour les projets science des données

- Stephanie Allasonniere allasonniere@cmap.polytechnique.fr
- Sébastien Gadat <mailto:sebastien.gadat@tse-fr.eu>
- Jean-Benoît Griesner jean-benoit.griesner@polytechnique.edu
- Jean-Michel Loubes loubes@math.univ-toulouse.fr
- Karim Lounici <mailto:Karim.Lounici@polytechnique.edu>
- Alice Martin alice.martin@polytechnique.edu
- Guillaume Quispe <mailto:guillaume.quispe@polytechnique.edu>
- Laurent Risser lrissier@math.univ-toulouse.fr
- Mathieu Rosenbaum mathieu.rosenbaum@polytechnique.edu
- François Yvon francois.yvon@limsi.fr

1.1 Séparation de sources : l'analyse en composantes indépendantes

Stéphanie Allasonnière stephanie.allasonniere@polytechnique.edu

Disponible en P1, P2 et P1+P2

L'analyse en composantes indépendantes (ACI) aussi appelée séparation de sources est une méthode d'analyse statistique de données. Elle permet de représenter ces données vectorielles sous la forme de combinaisons linéaires d'une famille fixe de vecteurs avec des coefficients statistiquement indépendants. Cette méthode a été proposée initialement pour résoudre le problème de séparation de sources en acoustique et est rapidement devenue populaire en particulier pour l'analyse de signaux médicaux [1,2]. L'intérêt de la méthode est sa versatilité contrairement à une analyse en composantes principales (ACP) [3].

Le but de ce projet est de comprendre la modélisation sous-jacente, de la comparer à celle de l'ACP et de tester différents modèles statistiques voir d'en proposer d'autres afin d'affiner leur utilisation dans un cadre applicatif précis.

L'application visée est l'analyse de signaux d'épaisseur corticale permettant une aide au diagnostic différentiel, c'est à dire une classification des pathologies en fonction de leur incidence sur l'atrophie du cortex. Une fois les classes identifiées, les caractéristiques mises en évidence sont utilisées pour proposer un diagnostic précoce des maladies neurodégénératives.

Références

- [1] Jung T.P, Makeig S., McKeown M.J., Bell A.J., Lee T.W., and Sejnowski T.J. ; Imaging Brain Dynamics Using Independent Component Analysis ; proc. Of the IEEE, vol. 89(7), 2001 <http://sccn.ucsd.edu/~jung/pdf/IEEEproc01.pdf>
- [2] Varoquaux G. ; Sadaghiani S. ; Poline J.B. ; Thirion B. CanICA : Model-based extraction of reproducible group-level ICA patterns from fMRI time series ; fMRI data analysis workshop, MICCAI 2009
- [3] Allasonnière S. ; Younes L. : A Stochastic Algorithm for Probabilistic Independent Component Analysis. S. Allasonnière, L. Younes. Annals of Applied Statistics, 2012, Vol. 6, No. 1, 125-160

1.2 Analyse en Composante Principale : théorie et applications

Karim Lounici <mailto:Karim.Lounici@polytechnique.edu>

Disponible en $P1$, $P2$ ou $P1+P2$

L'Analyse en Composante Principale (ACP) est une technique populaire de réduction de dimension et de visualisation de données en grande dimension [1]. Cette méthode est utilisée dans une multitude d'applications telles que la compression de données, l'optimisation de portefeuille financier, la détection d'anomalies.

L'analyse théorique de cette méthode repose sur des résultats profonds en théorie des perturbations et en probabilité [2]. Dans ce projet, nous proposerons dans un premier temps de construire une preuve mathématique de la consistance de cette méthode dans un cadre simplifié. Puis nous étudierons les performances de cette méthode dans une application listée ci-dessus ou bien une de votre choix.

Les étudiants devront fournir un rapport de synthèse comportant une partie théorique et une implémentation sur données réelles en R ou Python.

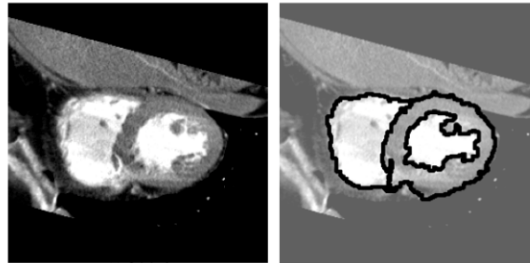
Références

- [1] T.W. Anderson, *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*, Wiley Series in Probability and Statistics, Wiley, 2003.
- [2] Vladimir Koltchinskii and Karim Lounici, *Asymptotics and Concentration Bounds for Bilinear forms of Spectral Projectors of Sample Covariance.*, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. **52** (2016), 1976–2013.

1.3 Segmentation d'image

Stéphanie Allassonnière stephanie.allassonniere@polytechnique.edu

Disponible en P1, P2 et P1+P2



Un des problèmes classiques du traitement d'image est la segmentation, le découpage d'images en zones *similaires*. On souhaite étudier dans ce projet une méthode de segmentation basée sur des idées de marche aléatoire déjà utilisée dans un cadre d'imagerie médicale. Un médecin souhaite par exemple extraire la forme d'un organe dans une image médicale. Pour cela, il lui suffit de spécifier quelques points à l'intérieur de cet organe ainsi que quelques points à l'extérieur. L'objectif de ce projet est de comprendre le fonctionnement de cet algorithme, de l'implémenter et d'en proposer des améliorations.

Référence

L. Grady, "Random Walks for Image Segmentation", IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. 28, No. 11, pp. 1768-1783, Nov., 2006.

1.4 Modèles d'apprentissage Fair et Interprétables en imagerie

Laurent Risser (Institut de Mathématiques de Toulouse)

lrissier@math.univ-toulouse.fr

Jean-Michel Loubes (Institut de Mathématiques de Toulouse)

loubes@math.univ-toulouse.fr

Disponible en P1 ou P2

L'utilisation de plus en plus massive de stratégies Intelligence Artificielle à partir d'images ouvre de nouveaux problèmes théoriques en Machine Learning. Ce projet porte sur la détection et la correction de biais algorithmiques en classification d'images par réseaux de neurones. Il est important de noter qu'à partir du moment où l'on confie un pouvoir décisionnel à des algorithmes optimisés à partir d'observations, des biais peuvent être généralisés à toute nouvelle observation, ce qui perpétue les usages appris dans l'échantillon d'apprentissage. Si des biais sont présents (sur-représentation d'une sous-population par exemple), l'algorithme peut en effet générer des prédictions injustes, d'autant plus préjudiciables si l'algorithme fonctionne comme une *boîte noire*, sans qu'il ne soit possible de

comprendre pourquoi ni comment une décision a été prise. Ces questions sont décrites par exemple dans [1,2,3].

L’objet de ce projet est la détection automatique, et idéalement la correction, de biais dans des algorithmes prédictifs utilisant des réseaux de neurones sur des bases d’images. La base d’images traitée sera CelebA [4] qui contient plus de 200000 images de célébrités avec 40 attribus associés à chaque image. Cette base est particulièrement intéressante car elle permet d’apprendre à reconnaître certaines caractéristiques (lunettes, séduisant, ...) sur les individus qu’elle représente, ce qui rend possible la mise en évidence de biais par rapport à d’autres critères (genre, age, ...). Le premier objectif du projet sera alors d’utiliser le travail de [5] pour expliquer quels critères dans les images conduisent à des biais de discrimination ou de qualité de prédiction dans un sous-groupe d’images. Ces critères pourront être extrait des images directement, ou bien de leur représentation dans l’espace latent des réseaux de neurones. Un travail plus exploratoire consistera alors à définir des stratégies pour réduire voir supprimer ces biais d’apprentissage en fonction des critères trouvés. Le travail de [2] sera étendu au cas des images et d’évaluer l’efficacité de différentes techniques. Eventuellement, une méthode plus ambitieuse serait de généraliser [4] en créant des bases de tests au moyen de réseaux adversariaux (GANs) [6]. Par exemple, en créant un échantillon de test de loi presque similaire mais pour lequel un ensemble de pixels présente une déviation de sa moyenne (positive ou négative), on pourrait étudier l’évolution de la règle de décision de manière globale. On considérerait en effet les lois de l’échantillon des sorties de l’algorithme avec pour entrées l’échantillon de test modifié. Cette méthodologie permettrait de répondre à la question : comment peut-on influencer en moyenne sur une décision prise par un algorithme en augmentant ou en diminuant certaines de ses caractéristiques et dès lors déterminer précisément les dérives des algorithmes ainsi testés.

Ce sujet comportera des aspects applicatifs mais également théoriques avec l’utilisation puis l’adaptation sous Python des algorithmes étudiés.

Références :

- [1] Chouldechova A. : Fair prediction with disparate impact : A study of bias in recidivism prediction instruments, Big Data, Special issue on Social and Technical Trade-offs, 2017
- [2] Besse P., Del Barrio E., Gordaliza P., Loubes J.-M., Risser L. : A survey of bias in Machine Learning through the prism of Statistical Parity for the Adult Data Set. arxiv :1810.07924, 2020 (<https://github.com/XAI-ANITI/StoryOfBias/blob/master/StoryOfBias.ipynb>)
- [3] Buolamwini J., Gebru T. : Gender Shades ; Intersectional Accuracy Disparities in Commercial Gender Classification. Proceedings Fat*, PMLR 81 :77-91, 2018.
- [4] Ziwei L., Ping L., Xiaogang W., Xiaoou T. : Deep Learning Face Attributes in the Wild. Proceedings of International Conference on Computer Vision (ICCV)

- <http://mmlab.ie.cuhk.edu.hk/projects/CelebA.html> - 2015.

[5] F Bachoc, F Gamboa, JM Loubes, L Risser (2018). Entropic Variable Boosting for Explainability and Interpretability in Machine Learning - arXiv preprint arXiv :1810.07924.

[6] Ian J. Goodfellow, Jean Pouget-Abadie, Mehdi Mirza, Bing Xu, David Warde-Farley, Sherjil Ozair, Aaron Courville et Yoshua Bengio : Generative Adversarial Networks, Advances in Neural Information Processing Systems 27, 2014

1.5 Partitionnement de données structurées en graphes : modèles et algorithmes

Sébastien Gadat <mailto:sebastien.gadat@tse-fr.eu>

Disponible en $P1$, $P2$ et $P1+P2$

La compréhension de données structurées sur des espaces complexes est un des enjeux actuel des sciences des données. Dans ce contexte, la gestion et l'étude de données structurées en très gros graphe constitue un challenge fondamental pour les *data-scientists* : en témoigne les applications possibles dans des champs aussi variés que la géométrie des réseaux sociaux, le marketing, la génomique, la détection de fraudes, la propagation d'opinion ... ainsi que la récurrence de ce thème dans les conférences d'apprentissage machine, voir par exemple https://icml.cc/2016/tutorials/faloutsos_ICML_2016.pdf.

Dans ce projet, nous étudierons la problématique du *clustering* de graphes à la fois d'un point de vue théorique et pratique. Nous aborderons tout d'abord brièvement la modélisation stochastique d'un grand graphe structuré en *Stochastic Block Model* au travers de la récente contribution [1]. Puis nous aborderons la question de l'apprentissage de clusters dans de grands graphes *via* des méthodes plus ou moins élémentaires basées sur des minimisation d'énergie interne (Q -modularité par exemple [2]) en étudiant notamment les algorithmes proposés récents pour comprendre les limites d'une telle approche. Enfin, nous étudierons les méthodes basées sur l'optimisation de fonctionnelles convexes relaxées, inspirées des approches types marche aléatoire sur des graphes. Un intérêt tout particulier sera porté aux *spectral clustering* et au rôle fondamental du laplacien sur les graphes [3].

Il est également attendu un travail numérique sur données synthétiques puis réelles, en parallèle des développements théoriques, notamment en Python *via* l'utilisation de Cytoscape.

Références

- [1] Emmanuel Abbe, *Community detection and stochastic block models : recent developments*, ArXiv e-prints (2017), available at [1703.10146](#).
- [2] M. Newman, *Modularity and community structure in networks*, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. (2006).
- [3] Jean-Yves Audibert Matthias Hein Ulrike von Luxburg, *Graph Laplacians and their Convergence on Random Neighborhood Graphs*, Journal of Machine Learning Research (JMLR) (2007).

1.6 Optimisation : approche stochastique en sciences des données

Sébastien Gadat <mailto:sebastien.gadat@tse-fr.eu>

Disponible en P1, P2 et P1+P2

De très nombreux problèmes d'apprentissage statistique conduisent à l'optimisation d'une fonction dépendant à la fois d'observations et d'un paramètre θ_0 évoluant dans un espace Θ de dimension grande. Cette optimisation est dédiée au contexte d'étude : il peut s'agir par exemple d'une question de régression (on observe (X_i, Y_i) avec $Y_i \in \mathbb{R}$) ou de classification supervisée $Y_i \in \{-1, 1\}$.

Les contextes actuels en sciences des données mettent en jeu des situations où l'espace Θ est de dimension potentiellement très grande devant le nombre d'observations n . Pour imaginer des solutions raisonnables à la régression ou la classification, il est souvent nécessaire d'imaginer que la solution/l'inconnue θ_0 appartient à un sous-espace de dimension bien inférieure à celle de Θ : fréquemment il est imaginé que θ_0 n'est décrit en réalité que par un nombre très faible de dimensions. Dans ce contexte, l'optimisation non-lisse joue un rôle clef (voir le Lasso de [?lasso] par exemple dans le contexte de la régression) et il s'agit d'optimiser

$$F(\theta) = f(\theta) + \Psi(\theta),$$

où f décrit un terme d'attache aux données tandis que Ψ modélise un a priori statistique sur θ_0 .

Après avoir décrit tout un panel de problèmes résolus par ce genre d'approche tant en classification qu'en régression en décrivant les propriétés statistiques des solutions de tels problèmes d'optimisation, l'objet du projet est d'étudier un algorithme adapté à ce genre d'optimisation [2,3] : l'utilisation de projections aléatoires de descente (*aka* : *Stochastic Coordinate Descent* - *SCD*).

Il s'agit dans le cadre de ce stage d'étudier les fondamentaux de l'optimisation stochastique convexe [1] puis de développer une étude spécifique dans le cadre des algorithmes de [2,3]. Il est attendu des étudiants qu'ils appréhendent à la fois le volet théorique et le volet pratique (notamment au travers d'implémentations concrètes en Python) du sujet.

- [1] S. Gadat, *Stochastic Optimization algorithms*, M2 Lecture Notes.
- [2] Y. Nesterov, *Algorithms for reinforcement learning*, Efficiency of coordinate descent methods on huge-scale optimization problems **22** (2010), 341–362.
- [3] P. Richtárik and M. Takas, *Iteration complexity of randomized block-coordinate descent methods for minimizing a composite function*, Mathematical Programming, Ser A (2011), 1–38.

1.7 Estimation bayésienne et algorithmes stochastiques

Sébastien Gadat <mailto:sebastien.gadat@tse-fr.eu>

Disponible en P1, P2 et P1+P2

De très nombreux problèmes d'apprentissage statistique conduisent à l'optimisation d'une fonction dépendant à la fois d'observations et d'un paramètre θ_0 évoluant dans un espace Θ de dimension grande, on parle alors de méthodes *fréquentistes*. Des méthodes alternatives consistent à utiliser une approche bayésienne, considérant alors une loi *a priori* π_0 sur l'ensemble Θ et calculant alors une distribution *a posteriori*.

L'objectif de ce projet est double. Le premier relève de questions purement statistique : la *consistance bayésienne*, tandis que le second est relatif à une problématique de probabilité numérique : le calcul effectif de lois *a posteriori*.

Consistance bayésienne Étant données des observations (X_1, \dots, X_n) de \mathbb{R}^q et un modèle statistique $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in \Theta}$ avec $\Theta \subset \mathbb{R}^d$, on suppose que les observations sont issues d'une loi \mathbb{P}_{θ_0} avec $\theta_0 \in \Theta$ et on cherche alors, à partir de l'échantillon observé, à retrouver θ_0 . La stratégie bayésienne consiste à définir un *a priori* π_0 sur Θ_0 , puis calculer π_n la loi *a posteriori*, dépendant des observations :

$$\pi_n(\theta) \propto \pi_0(\theta) L_n(X_1, \dots, X_n),$$

où L_n est la vraisemblance des observations (X_1, \dots, X_n) dans le modèle statistique $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in \Theta}$. Se pose alors naturellement la question du comportement et de la légitimité de la distribution *a posteriori* π_n lorsque le nombre d'observations grandit ($n \rightarrow +\infty$). La subtilité réside dans le fait que π_n est un objet aléatoire, dépendant de l'échantillon d'apprentissage.

Bien entendu, comme nous n'avons accès qu'aux lois de probabilités, il est naturel d'introduire une métrique sur Θ relative aux distributions \mathbb{P}_θ et non aux valeurs du paramètre θ lui-même. Aussi, on introduira les distances de Kullback, en variation totale, ou encore distances de Hellinger.

En s'inspirant des travaux de [2, 3], l'objectif sera de comprendre une propriété de consistance telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{\theta_0} (\pi_n (\theta : d(\theta, \theta_0) \geq \epsilon_n)) = 0.$$

Calcul de π_n par algorithmes stochastiques Les méthodes de calcul des distributions π_n sont au coeur des problématiques actuelles en sciences des données, notamment par le biais de méthodes Monte Carlo Markov Chains (MCMC) et Langevin Monte Carlo (LMC).

Dans un second temps, le projet consistera à comprendre ces deux algorithmes et leurs liens avec les chaînes et processus de Markov au travers d'une propriété d'ergodicité vers la mesure invariante du système dynamique. Si le temps le permet, le projet s'orientera alors vers le coût de calcul relatif à ces méthodes en grandes dimensions pour des modèles statistiques log-concaves. On se reportera à [1] pour une entrée bibliographique sur le sujet. Il est attendu des étudiants qu'ils appréhendent à la fois le volet théorique et le volet pratique (notamment au travers d'implémentations concrètes en Python) du sujet.

- [1] S. Gadat, *Stochastic Optimization algorithms*, M2 Lecture Notes.
- [2] I. and van der Vaart Castillo A., *Needles and Straw in a Haystack : posterior concentration for possibly sparse sequences*, Annals of statistics **40** (2012), no. 4.
- [3] Subhashis and Ghosh Ghosal Jayanta K. and van der Vaart, *Convergence rates of posterior distributions*, Annals of Statistics **28** (2000), no. 2, 500–531.

1.8 Classification supervisée : propriétés théoriques et algorithmes

Sébastien Gadat <mailto:sebastien.gadat@tse-fr.eu>

Disponible en P1, P2 et P1+P2

De très nombreux problèmes de sciences des données statistique conduisent à étudier la problématique de la classification supervisée, de manière automatique au travers d'un jeu d'observations préalablement classé. La classification est un vieux problème statistique, et nous nous attacherons à en dégager les principaux enjeux théoriques et de mise en oeuvre au travers d'algorithmes plus ou moins récents.

Étant donné un jeu d'apprentissage $\mathcal{D}_n = (X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ où les $X_i \in \mathbb{R}^d$ sont les covariables observées, et Y_i les labels ou classes, le problème de la classification supervisée consiste à définir une règle de classification automatique g_n , dépendant des observations \mathcal{D}_n . L'efficacité d'un classifieur g_n est alors comparé à la meilleure classification possible, la règle de Bayes g^* , associée au modèle statistique sous-jacent, au travers de l'excès de risque défini par :

$$\mathcal{R}(g_n) = L(g_n) - L(g^*),$$

où

$$L(g) = \mathbb{E}_{(X,Y)}[\mathbf{1}_{g(X) \neq Y}].$$

L'objet de ce projet est d'obtenir les éléments de statistiques mathématiques fondateurs de la classification supervisée, en s'appuyant sur l'ouvrage de référence [2]. Le volet de ce stage comprendra alors trois champs d'investigations.

- Nous étudierons en particulier les méthodes basées sur l'approche *plug-in* qui consistent à estimer la règle de Bayes dans une classe de fonctions qui peut être paramétrique ou non paramétrique, telles que les méthodes de régression logistique, analyse linéaire discriminante ou méthode des plus proches voisins. En particulier, nous chercherons à étudier la performance de cette dernière méthode, dans un contexte théorique raisonnable, en s'inspirant de [1] et des références qui y sont mentionnées.
- Dans un second temps, nous aborderons la question de la minimisation empirique avec convexification du risque, qui sont une famille de méthodes qui donnent lieu à des algorithmes très connus comme les *support vector machine* ou encore les méthodes de *boosting*. Un point d'entrée bibliographique sera [3].

- Enfin, un dernier point consistera à utiliser des méthodes de classification modernes et performantes, et tester d'un point de vue numérique leurs robustesses vis à vis de l'échantillonnage. On pense en particulier aux méthodes d'apprentissage profond et *XGboost*.

- [1] S. and Klein Gadat T. and Marteau, *Classification in general finite dimensional spaces with the k -nearest neighbor rule*, Ann. Statist. **44** (2016), no. 3, 982–1009, DOI 10.1214/15-AOS1395.
- [2] L. and Györfi Devroye L. and Lugosi, *A probabilistic theory of pattern recognition*, Applications of Mathematics (New York), vol. 31, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [3] S. and Bousquet Boucheron O. and Lugosi, *Theory of classification : a survey of some recent advances*, ESAIM Probab. Stat. **9** (2005), 323–375, DOI 10.1051/ps :2005018.

1.9 Fidélisation de supporters pour un club de Ligue 1

Mathieu Rosenbaum mathieu.rosenbaum@polytechnique.edu

Disponible en P1 ou P1+P2

L'objectif de ce projet est de comprendre la typologie des supporters d'un club de football afin de mettre en place des méthodes visant à pérenniser leur présence au stade. Il s'agira d'utiliser des méthodes modernes de machine learning (classification supervisée/non supervisée, réseau de neurones, estimation non-paramétrique) afin d'évaluer l'intérêt d'un profil de supporter donné pour un match en fonction de ses caractéristiques personnels, d'éléments liés au match et de la place dans le stade. La finalité sera la création d'un outil permettant aux clubs de repérer les supporters sensibles à certaines incitations (packages, appels...) pour se rendre au match. Dans le cadre de ce projet, des données uniques d'un club de football majeur seront mises à disposition des étudiants.

1.10 Machine learning pour l'art

Mathieu Rosenbaum mathieu.rosenbaum@polytechnique.edu

Disponible en P1 ou P1+P2

Le but de ce projet sera la mise en place de méthodes automatisées de machine learning pour la caractérisation d'oeuvres d'art. A partir d'une base d'apprentissage de plusieurs milliers d'images d'oeuvres d'art décrites quantitativement, il s'agira de construire un algorithme de type réseau de neurones permettant d'aboutir à une description automatique des oeuvres. Cet algorithme pourra ensuite être utilisé afin de proposer une classification pertinente des oeuvres en vue d'une recommandation personnalisée pour un collectionneur.

1.11 Apprentissage par renforcement profond

Alice Martin <mailto:alice.martin@polytechnique.edu>

Disponible en P1 ou P2 ou P1+P2

L'apprentissage par renforcement est une des clefs des problèmes actuels en IA. C'est une étape essentielle pour pouvoir construire des systèmes autonomes et apprenants. La théorie de l'apprentissage par renforcement est aujourd'hui bien connue et de nombreux algorithmes sont aujourd'hui disponibles (nous étudierons les méthodes d'apprentissage par renforcement dans une première partie du projet en nous appuyant sur [1] et [2]). Les méthodes classiques sont toutefois rapidement prises en défaut lorsque les dimensions de l'espace d'états et/ou d'actions deviennent grandes.

Récemment, des approches nouvelles sont apparues, combinant les algorithmes classiques (Q-learning, TD-learning) et les méthodes d'apprentissage profond (voir [3, 4]). L'objectif de ce projet est de faire une synthèse des travaux récents sur ce domaine et de développer une application de ces méthodes sur une tâche de votre choix (jeux d'arcade, optimisation de portefeuilles, etc...). Les livrables attendus sont : un document de synthèse, package logiciel en Python, un site web démontrant votre application. Le projet est pour un binôme ou un trinôme d'étudiants qui aiment à la fois la théorie et les applications numériques.

Références

- [1] Csaba Szepesvári, *Algorithms for reinforcement learning*, Synthesis lectures on artificial intelligence and machine learning 4 (2010), no. 1, 1–103.
- [2] Richard Sutton and Andrew G Barto, *Reinforcement learning : An introduction*, MIT press, 2018.
- [3] Volodymyr Mnih and Adria Puigdomenech and Mirza Badia Mehdi and Graves, *Asynchronous methods for deep reinforcement learning*, International Conference on Machine Learning, 2016, pp. 1928–1937.
- [4] Volodymyr Mnih and Koray and Silver Kavukcuoglu David and Graves, *Playing atari with deep reinforcement learning*, arXiv preprint arXiv :1312.5602 (2013).

1.12 Application to Deep Reinforcement Learning to Natural Language Games

Alice Martin <mailto:alice.martin@polytechnique.edu>

Guillaume Quispe <mailto:guillaume.quispe@polytechnique.edu>

Disponible en P1+P2

Reinforcement Learning (RL) [3], [2] is a Machine Learning Technique used to solve a Markov Decision Process (MDP) : Given an environment made of a State and Action Space, an agent interacts with the environment by making successive (state, action) transitions, and receiving for each transition a scalar feedback, the reward.

Solving a MDP means finding the optimal policy (a function of states and actions) for the agent maximizing its expected return ; the return being the sum of the discounted rewards received at the each transition of the environment.

Recently, Classical Reinforcement Learning algorithms have been combined with Deep Learning methods : Deep Reinforcement Learning [5] allows to tackle more

complex sequential decision making problems, and to scale to environments with large state and action spaces.

One interesting application of Deep Reinforcement Learning is Goal-Oriented Natural Language Generation : The RL agent interacts with the environment using Natural Language, by generating successive natural language utterances (usually single words) to solve a specific task ; examples of such settings are generating turns of goal-oriented dialog, generating natural language instructions, or solving text-based games.

Such "Natural Language Games" [6] are another way, different from pure supervised learning approaches, for AI systems to learn and make Natural Language emerge.

This projects is at the intersection between Natural Language Processing (NLP) and Deep Reinforcement Learning, and propose to study Language Generation in toy Grounded Dialog MDP, such as [1] or [4], in particular the well-known problem of language drift [7], or the challenge of language diversity.

- [1] *MNIST-GuessNumber Dataset*.
- [2] *David Silver's Class on Reinforcement Learning - UCL*.
- [3] Richard S and Barto Sutton Andrew G and others, *Introduction to reinforcement learning*, Vol. 135, MIT press Cambridge, 1998.
- [4] Satwik and Moura Kottur José MF and Parikh, *Clevr-dialog : A diagnostic dataset for multi-round reasoning in visual dialog*, arXiv preprint arXiv :1903.03166 (2019).
- [5] *Deep Reinforcement Learning Bootcamp - Berkeley*.
- [6] Jelena and Nardelli Luketina Nantas and Farquhar, *A survey of reinforcement learning informed by natural language*, arXiv preprint arXiv :1906.03926 (2019).
- [7] Yuchen and Singhal Lu Soumye and Strub, *Countering Language Drift with Seeded Iterated Learning*, arXiv preprint arXiv :2003.12694 (2020).

1.13 Modèles séquentiels pour systèmes de recommandation

Jean-Benoît Griesner <mailto:jean-benoit.griesner@polytechnique.edu>

Disponible en P1+P2

Le développement du Web 2.0 a favorisé l'émergence d'un grand nombre de réseaux sociaux (tels que Twitter, Facebook, etc.) qui ont profondément modifié le regard que nous portons sur notre environnement et la manière dont nous interagissons avec lui. Ces réseaux sont également une source de données riches et précises qui peuvent être exploitées pour alimenter de nouveaux services aux utilisateurs, tels que des systèmes de recommandation. Parmi ces systèmes, la recommandation de points d'intérêt consiste à générer pour un utilisateur donné une top-K liste de lieux à visiter. La génération de cette liste repose sur des modèles de préférences utilisateurs d'une part, et des modèles de séquence d'autre part. Les approches les plus communes pour modéliser les séquences reposent essentiellement sur des chaînes de Markov, ou sur des réseaux de neurones récurrents. Or ces deux types

d’approches font souvent de fortes hypothèses d’indépendance rarement validées entre des lieux non-adjacents.

Le but de ce projet est d’étudier les spécificités principales de l’analyse de séquence pour les systèmes de recommandation [1], puis d’implémenter certains algorithmes de l’état-de-l’art [2–4] de façon à les comparer ensuite sur des données issues de réseaux sociaux réels. On envisagera enfin des améliorations de ces algorithmes en les couplant à une modélisation spécifique des données.

- [1] Massimo and Cremonesi Quadrande Paolo and Jannach, *Sequence-Aware Recommender Systems*, ACM Comput. Surv., posted on 2018, DOI 10.1145/3190616.
- [2] jia-dong and chow zhang chi-yin and li, *lore : exploiting sequential influence for location recommendations*, sigspatial ’14, posted on 2014, DOI 10.1145/2666310.2666400.
- [3] Naveen and Manco Sachdeva Giuseppe and Ritacco, *Sequential Variational Autoencoders for Collaborative Filtering*, WSDM ’19, posted on 2019, DOI 10.1145/3289600.3291007.
- [4] Chen Cheng and Haiqin Yang and Michael R. Lyu and Irwin King, *Where You Like to Go Next : Successive Point-of-Interest Recommendation*, 2013.

1.14 Confidentialité dans les systèmes de recommandation

Jean-Benoît Griesner <mailto:jean-benoit.griesner@polytechnique.edu>

Disponible en P1+P2

Les systèmes de recommandation constituent aujourd’hui une composante omniprésente et indispensable de nos vies. Ils apportent à l’utilisateur une aide et un ensemble de services auxquels nous sommes désormais tous habitués. Malheureusement la qualité de ces services dépend directement des données personnelles qui se retrouvent souvent, à l’insu de l’utilisateur, vampirisées et exploitées, au mépris du respect de la vie privée. Or la question de la protection de la vie privée est un enjeu de plus en plus critique. La solution la plus simple consiste souvent à dégrader la précision globale des données, par exemple par des techniques dites *d’obfuscation*. Malheureusement des données moins précises sont également moins utiles à exploiter.

La *confidentialité différentielle* a été proposée à l’origine pour pouvoir rendre publiques des statistiques utiles sur une base de données \mathcal{B} contenant des données éventuellement sensibles, et ce sans compromettre la *confidentialité* des utilisateurs. Les systèmes de recommandation pouvant être considéré comme des algorithmes effectuant des requêtes sur cette base \mathcal{B} , la confidentialité différentielle semble offrir un cadre d’application très adapté au problème décrit ci-dessus. Ainsi ces dernières années de nombreux modèles de recommandation dits ϵ -différentiels ont été proposés *e.g.* [1,2,4–6] pour garantir la confidentialité des données. Le but de ce projet est d’implémenter certains de ces algorithmes et d’étudier les différences de performance observées sur des données réelles. On proposera enfin des possibilités d’améliorations de ces techniques dans des applications spécifiques.

- [1] Frank and Mironov McSherry Ilya, *Differentially Private Recommender Systems : Building Privacy into the Netflix Prize Contenders*, 2009, DOI 10.1145/1557019.1557090.

- [2] Rachid and Kermarrec Guerraoui Anne-Marie and Patra, *D2P : Distance-based Differential Privacy in Recommenders*, 2015, DOI 10.14778/2757807.2757811.
- [3] Jong Seon Kim and Jong Wook Kim and Yon Dohn Chung, *Successive Point-of-Interest Recommendation with Local Differential Privacy*, 2019, available at [1908.09485](#).
- [4] Shun and Liu Zhang Laixiang and Chen, *Probabilistic matrix factorization with personalized differential privacy*, 2019, DOI 10.1016/j.knosys.2019.07.035.
- [5] Maho Asada and Masatoshi Yoshikawa and Yang Cao, *When and Where Do You Want to Hide - Recommendation of Location Privacy Preferences with Local Differential Privacy*, 2019, DOI 10.1007/978-3-030-22479-0_9.
- [6] Seth Gilbert and Xiao Liu and Haifeng Yu, *On Differentially Private Online Collaborative Recommendation Systems*, 2016, DOI 10.1007/978-3-319-30840-1_14.

1.15 Plongements lexicaux multilingues

François Yvon (LIMSI)

francois.yvon@limsi.fr

Disponible en P1 ou P2 ou P1+P2

Les outils du traitement automatique des langues s'appuient de plus en plus sur des représentations numériques (appelés plongements lexicaux ou embeddings) des mots du vocabulaire, sous la forme de vecteurs denses dans R^p . Il existe de nombreuses manières pour calculer de telles représentations en analysant des gros ensembles de textes (par exemple la Wikipedia française). Une fois ces représentations obtenues, il devient facile de comparer deux mots, deux phrases, deux documents, etc. Pour réaliser ces opérations sur des textes écrits dans des langues différentes, il est nécessaire de calculer des plongements lexicaux *multilingues*, qui vont permettre de rapprocher des mots, indépendamment de la langue dans laquelle ils sont écrits. De nombreux travaux récents s'intéressent à cette question (voir l'étude bibliographique [3], qui a des applications pratiques par exemple dans un contexte de traduction automatique non supervisée.

Lorsque l'on dispose de données de supervision (par exemple un petit dictionnaire bilingue), une manière efficace pour calculer ces représentations est de résoudre un problème de Procuste [2] ; dans un cadre non-supervisé, une proposition récente s'appuie sur la théorie du transport optimal [1]. L'objectif de ce projet est d'étudier quelques-uns de ces algorithmes, de les réimplémenter et de les évaluer sur des données de grande dimension. Dans un second temps, on essaiera de proposer des améliorations en prenant en compte d'autres indices linguistiques ou statistiques de la similarité entre mots.

Références

- [1] David and Jaakkola Alvarez-Melis Tommi S, *Gromov-Wasserstein Alignment of Word Embedding Spaces*, arXiv preprint arXiv :1809.00013 (2018).
- [2] Chao and Wang Xing Dong and Liu, *Normalized word embedding and orthogonal transform for bilingual word translation*, Proceedings of the 2015 Conference of the North American Chapter of the Association for Computational Linguistics : Human Language Technologies, 2015, pp. 1006–1011.

- [3] Sebastian and Søgaard Ruder Anders and Vulic, *A survey of cross-lingual embedding models*, arXiv preprint arXiv :1706.04902 (2017).

1.16 Modèles génératifs profonds en Traitement des Langues

François Yvon (LIMSI)

francois.yvon@limsi.fr

Disponible en P1 ou P2 ou P1+P2

Un des goulots d'étranglement des applications de l'apprentissage automatique pour le traitement automatique des langues est la rareté de supervision, rendant nécessaire le développement de méthodes non-supervisées. Parmi les propositions récentes sur ce sujet, les méthodes qui reposent sur des auto-encodeurs variationnels [1, 2] offrent de nouvelles perspectives pour apprendre sans supervision des représentations latentes (continues ou discrètes, structurées ou non-structurées) pour des objets linguistiques complexes (par exemple des phrases ou documents), puis de générer de manière contrôlée de nouveaux énoncés [3]. Ainsi par exemple [4] propose d'utiliser cette technique pour générer des versions compressées des phrases en entrée (contrôle de la longueur des phrases); [5] s'en sert pour transformer le style ou le temps des phrases en entrée, etc. Le caractère essentiellement symbolique et discret des objets linguistiques rend toutefois difficile l'application directe de ces méthodes. L'objectif de ce projet est de conduire une étude bibliographique des travaux récents sur cette question, puis de se focaliser sur un problème particulier, que l'on étudiera en détail à partir d'une implantation et d'une étude expérimentale sur des données réelles.

Références

- [1] Diederik P and Welling Kingma Max, *Auto-encoding variational bayes*, arXiv preprint arXiv :1312.6114 (2013).
- [2] Carl Doersch, *Tutorial on variational autoencoders*, arXiv preprint arXiv :1606.05908 (2016).
- [3] Samuel R. and Vilnis Bowman Luke and Vinyals, *Generating Sentences from a Continuous Space*, Proceedings of The 20th SIGNLL Conference on Computational Natural Language Learning, 2016, pp. 10–21.
- [4] article title = Language as a Latent Variable : Discrete Generative Models for Sentence Compression, author = Miao, Yishu and Blunsom, Phil, booktitle = Proceedings of the 2016 Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing, year = 2016, pages = 319–328,
- [5] Zhiting Hu and Zichao Yang and Xiaodan Liang and Ruslan Salakhutdinov and Eric P. Xing, *Toward Controlled Generation of Text*, Proceedings of the 34th International Conference on Machine Learning, 2017, pp. 1587–1596.

2 Optimisation et recherche opérationnelle

Enseignants référents : Xavier Allamigeon xavier.allamigeon@polytechnique.edu,
Stéphane Gaubert gaubert@cmapx.polytechnique.fr

Enseignants référents :

- Xavier Allamigeon xavier.allamigeon@polytechnique.edu
- Stéphane Gaubert stephane.gaubert@polytechnique.edu

Consignes de choix :

- sauf mention contraire, les sujets dans cette thématique sont proposés en projet d’approfondissement MAP513 (en P1+P2), en projet MAP511 (en P1) et en projet MAP512 (en P2).
- il est recommandé qu’au moins un des deux élèves d’un binôme suive le cours MAP557 pour travailler sur ces projets.
- on recommande aux élèves intéressés par un sujet encadré par un industriel d’envoyer un bref courriel de motivation aux deux enseignants référents (ci-dessus), qui peuvent aussi être contactés pour plus d’information.

2.1 Dimensionnement couplé d’une flotte de véhicules électriques et des infrastructures de recharge

Cheng Wan (cheng.wan@edf.fr), EDF Lab, Département Osiris
Guilhem Dupuis (guilhem.dupuis@edf.fr), EDF Lab, Département Osiris

Une flotte de véhicules électriques assure un service de transport sur un réseau donné. La demande de transport entre chaque paire de points (origine-destination) est déterministe, et connue pour chaque pas de temps. Pour être rechargés les véhicules ont besoins d’infrastructures spécifiques comme des bornes. Chaque borne ne peut accueillir qu’un véhicule à la fois. Un coût d’investissement est associé pour chaque véhicule utilisé et pour chaque borne installée. On souhaite donc dimensionner simultanément la flotte de véhicules électriques et leurs infrastructures de recharge. Les emplacements des infrastructures de recharge sont données ou à choisir aussi. Ce problème couple deux problèmes classiques de recherche opérationnelle : tournées de véhicules et ordonnancement d’atelier. Le but du projet est de bien formuler le problème comme un problème de programmation linéaire en nombres entiers, puis chercher la solution numérique d’une instance simple à l’aide d’un solveur.

2.2 Approches stochastiques/robuste pour le dimensionnement capacitaire d’un réseau de transport (Capacity Planning)

Éric Gourdin (eric.gourdin@orange.com), Orange et DEPMAP, École polytechnique

Les réseaux de télécommunication s'adaptent régulièrement aux évolutions de la demande et des services. Dans une phase de planification, les gestionnaires de réseau évaluent la demande future (horizon de plusieurs mois) et en déduisent l'impact sur la structure actuelle du réseau. En cas de surcharge, la capacité de certains liens peut être augmentée ou bien une évolution de la topologie peut être envisagée. Pour pallier à l'incertitude quant à l'estimation de la future demande, la réaction naturelle est de sur-dimensionner le réseau. Pourtant, les systèmes déployés dans les réseaux cœurs sont généralement très chers et il faut donc trouver un compromis entre le surdimensionnement et la minimisation des coûts. Des modèles stochastiques ou robustes permettent de formaliser cette problématique et donc de guider vers des solutions qui optimisent, dans une certaine mesure, ce compromis.

L'objectif de ce projet est de construire un ou plusieurs modèles stochastiques ou robustes pour ce problème et de mettre en œuvre des méthodes algorithmiques pour les résoudre aussi efficacement que possible. On utilisera, par exemple, des solveurs de programmation linéaires ou convexe, continu ou en nombres entiers.

2.3 Modèles pour le placement optimal pour les réseaux 5G

Éric Gourdin (eric.gourdin@orange.com), Orange et DEPMAP, École polytechnique

L'architecture des futurs réseaux 5G offre de très nombreuses possibilités quant au déploiement de nouveaux services. Au-delà des services traditionnels de voix et vidéo dont les débits seront fortement augmentés, il sera également possible de déployer des services plus spécifiques mais avec des contraintes technologiques plus poussées. Par exemple, le pilotage de véhicules autonomes pourra s'opérer à partir du réseau 5G, mais la mise en œuvre d'un tel service nécessitera des calculs soit effectués très rapidement et que les délais de transmission sont très courts. Il ne sera donc pas possible d'effectuer les calculs dans le Cloud, mais il faudra au contraire déporter cette capacité de calcul au plus proches des usagers (et donc, par exemple des véhicules). On parle alors de Mobile Edge Computing (MEC) et un des enjeux est de déterminer où placer les serveurs de manière à rendre le service en respectant les contraintes de latence, mais aussi en continuant de maîtriser les coûts.

Les modèles de placement (ou « location » en anglais) sont particulièrement adaptés pour ce type de problématique, mais il faut prendre en compte des spécificités particulières au problème du MEC. L'objet de ce projet est de proposer des modèles de placement et de mettre en œuvre des méthodes algorithmiques efficaces pour les résoudre.

2.4 Optimisation de la réponse aux appels d'urgence 17-18-112 en région parisienne lors d'une situation de crise

Xavier Allamigeon (Xavier.Allamigeon@inria.fr), INRIA – École polytechnique
Stéphane Gaubert (Stephane.Gaubert@inria.fr), INRIA – École polytechnique

Contexte. La préfecture de police a engagé depuis cinq ans une réforme de la procédure de traitement des appels d'urgence à Paris et en petite couronne. La nouvelle organisation permet de traiter dans un cadre unifié les appels concernant les numéros 17 (police), 18 (pompiers), ou 112 (numéro européen indifférencié). Un opérateur de premier niveau filtre les appels, assure le cas échéant une mission de conseil, et transmet à un second niveau les appels qui nécessitent une instruction par un opérateur spécialisé (policier ou pompier).

Suite à une demande de la Préfecture de police, et avec l'appui de la Brigade de sapeurs-pompiers de Paris (BSPP) et de la direction de la sécurité de proximité de l'agglomération parisienne (DSPAP), plusieurs études (EA ou projets de troisième année) ainsi qu'une thèse de doctorat ont été effectuées. Cela a permis de développer un modèle de centre d'appel, à base de réseau de Petri et de systèmes dynamiques hybrides, rendant compte des procédures de traitement, des règles de priorité, ainsi que de l'aspect bi-métier (police et secours) et de la possibilité d'avoir des chaînes de traitement différenciées selon l'origine géographique de l'appel. Ce modèle a été calibré sur des données réelles, incluant à la fois des journées ordinaires et des journées avec des situations de crise (afflux d'appels, multi-événements). L'analyse du modèle a fait appel à la géométrie tropicale, et aussi à des méthodes probabilistes. Cela a permis d'évaluer, par des calculs analytiques ou des simulations, des indicateurs de performance (temps d'attente, taux d'appels raccrochés), et de mettre en évidence différentes phases de congestion potentielles, qui peuvent apparaître selon le débit d'appel entrants, les ressources disponibles, et les règles de traitement des appels. On aide ainsi à dimensionner le système.

Travail projeté. Pour l'année à venir, la préfecture nous a demandé d'étudier l'optimisation de la conduite du centre d'appel d'urgence dans différents scénarios de crise (orages, crise sanitaire, etc). Des résultats récemment obtenus indiquent que dans une organisation bi-niveau, et en cas de pic d'appels impromptu, le bon dimensionnement du premier niveau est un facteur critique, car la fluidité de ce niveau est essentielle pour la prise en charge des appels les plus sévères. Nous souhaitons approfondir ces résultats en intégrant des schémas d'organisation plus élaborés, comme le rappel ultérieur d'appels moins urgents, ou la mise en place de serveurs vocaux en amont du centre d'appels. L'objectif du projet est d'aborder le problème aussi bien par des moyens théoriques (modèles, résultats analytiques), que par la simulation ou par la mise en œuvre d'algorithmes numériques,

afin notamment d'identifier des indicateurs de congestion, d'évaluer et comparer différentes stratégies de conduite, et si possible, d'optimiser celles-ci. On pourra s'appuyer sur un simulateur déjà réalisé.

Le problème ici posé émane de Régis Reboul (DSPAP), en charge du projet de réforme des centres d'appels à la Préfecture de police de Paris, et de son adjoint, le LCL Stéphane Raclot, qui participeront au suivi. Certaines réunions de suivi de ce projet pourront avoir lieu dans les locaux du centre d'appels unifié, sur le site de la BSPP (porte de Champerret) ou bien à la Préfecture de police (sur l'Île de la Cité).

Références

X. Allamigeon, V. Boeuf, and S. Gaubert. Performance evaluation of an emergency call center : tropical polynomial systems applied to timed Petri nets. In *FORMATS'15*, volume 9268 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, 2015.

X. Allamigeon, V. Boeuf, and S. Gaubert. Stationary solutions of discrete and continuous Petri nets with priorities, Proceedings of the VALUETOOLS 2016 conference (Taormina), version étendue in *Performance Evaluation*, arXiv :1612.07661

V. Boeuf, Ph. Robert, A stochastic analysis of a network with two levels of service. arXiv : 1708.09590

Allamigeon, X., Boyet, M. & Gaubert, S. (2020). Piecewise Affine Dynamical Models of Timed Petri Nets – Application to Emergency Call Centers. Proceedings of the 41st International Conference on Application and Theory of Petri Nets and Concurrency (Petri Nets 2020).

2.5 Dimensionnement d'un centre d'interventions de techniciens sur un réseau de distribution électrique

Xavier Allamigeon (Xavier.Allamigeon@inria.fr), INRIA – École polytechnique
Stéphane Gaubert (Stephane.Gaubert@inria.fr), INRIA – École polytechnique
en collaboration avec Pascale Bendotti (EDF) et Thomas Triboulet (EDF).

On s'intéresse au dimensionnement d'un centre d'appels Enedis, suivant les interventions de techniciens sur le réseau de distribution de l'électricité.

Des spécificités de ce type de centre sont la diversité et la complexité des tâches de suivi, avec des priorités variées, et le petit nombre de personnes impliquées : les phénomènes de nombres entiers sont une partie importante du problème.

On se propose de développer un modèle de réseau de Petri, s'inspirant du travail effectué dans le cas des centres d'appels d'urgence, et amenant à des formules analytiques donnant des indicateurs de performance. On pourra considérer en outre le problème du dimensionnement et des plannings des personnels.

Références

X. Allamigeon, V. Boeuf, and S. Gaubert. Performance evaluation of an emergency call center : tropical polynomial systems applied to timed Petri nets. In *FORMATS'15*, volume 9268 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, 2015.

X. Allamigeon, V. Boeuf, and S. Gaubert. Stationary solutions of discrete and continuous Petri nets with priorities, Proceedings of the VALUETOOLS 2016 conference (Taormina), version étendue in *Performance Evaluation*, arXiv :1612.07661

V. Boeuf, Ph. Robert, A stochastic analysis of a network with two levels of service. arXiv : 1708.09590

Allamigeon, X., Boyet, M. & Gaubert, S. (2020). Piecewise Affine Dynamical Models of Timed Petri Nets – Application to Emergency Call Centers. Proceedings of the 41st International Conference on Application and Theory of Petri Nets and Concurrency (Petri Nets 2020).

2.6 “Barrières exotiques” et complexité de la programmation linéaire

Xavier Allamigeon (Xavier.Allamigeon@inria.fr), INRIA – École polytechnique
Stéphane Gaubert (Stephane.Gaubert@inria.fr), INRIA – École polytechnique

Les problèmes d’optimisation linéaires sont parmi les plus importants dans les applications de la recherche opérationnelle. Ils posent aussi des problèmes mathématiques fondamentaux. Ainsi, le “9ème problème de Smale” demande s’il existe un algorithme permettant de résoudre un problème linéaire en un temps fortement polynomial, c’est-à-dire, avec un nombre d’opérations arithmétiques dépendant du nombre de contraintes et de variables, et indépendant du nombre de chiffres significatifs des coefficients du programme.

Les méthodes de points intérieurs sont parmi les algorithmes les plus efficaces pour la résolution de problèmes d’optimisation convexe, en particulier linéaires. Leur principe est de suivre approximativement, une courbe algébrique appelée « chemin central », lequel converge vers une solution optimale du problème. Vu la grande efficacité des points intérieurs, l’espoir que des idées de ce type permettent de répondre au problème de Smale a pu être caressé.

Un travail très récent [1] a cependant manifesté une obstruction tout à fait inattendue à cette approche : malgré leur complexité polynomiale, les méthodes de points intérieurs peuvent effectuer un nombre exponentiel d’itérations sur des programmes linéaires dont les coefficients sont très grands (de taille exponentielle). Cette analyse de complexité repose sur des outils issus de la géométrie tropicale et non-archimédienne.

Ce résultat ne porte cependant que sur les méthodes de points intérieurs utilisant la fonction barrière logarithmique. Le but de ce projet est d’étudier si ce résultat pourrait être étendu à la fonction barrière de Lee & Sidford [2,3]. Celle-

ci a des propriétés remarquables en terme de paramètre d’auto-concordance, et a mené à des percées remarquables sur la complexité certaines classes de programmes linéaires. L’extension du résultat de [1] à cette barrière démontrerait ainsi une obstruction beaucoup plus forte.

Références

[1] Xavier Allamigeon, Pascal Benchimol, Stéphane Gaubert, & Michael Joswig. Log-Barrier Interior Point Methods Are Not Strongly Polynomial. *SIAM Journal on Applied Algebra and Geometry*, 2(1), 140–178, 2018.

[2] Yin Tat Lee & Aaron Sidford. Path Finding Methods for Linear Programming : Solving Linear Programs in $\tilde{O}(\sqrt{\text{rank}})$ Iterations and Faster Algorithms for Maximum Flow. 2014 IEEE 55th Annual Symposium on Foundations of Computer Science.

[3] Yin Tat Lee & Aaron Sidford. Solving Linear Programs with $\text{Sqrt}(\text{rank})$ Linear System Solves. *arXiv :1910.08033*. 2019

2.7 Prise en compte de la mobilité dans les modèles épidémiologiques Covid-19

Stéphane Gaubert (Stephane.Gaubert@inria.fr), INRIA – École polytechnique

L’évolution de l’épidémie de Covid-19 apparaît spatialement différenciée. Des mouvements importants de population (retours de vacances) issus d’une zone contaminée semblent avoir joué un rôle déterminant dans le démarrage de l’épidémie dans l’agglomération parisienne. Des déplacements de population, peu avant le confinement, ont aussi joué un rôle dans la dynamique de l’épidémie, avec un effet d’équilibrage de la charge sur les structures hospitalières de différents départements.

On se propose d’étudier et de développer des modèles épidémiologiques, s’appuyant sur les modèles SEIR à temps discret ou sur les modèles d’EDP de transport, mais tenant compte de la dimension mobilité, par exemple à l’échelle des départements. On cherchera notamment à développer des modèles dynamiques valables dans des régimes transitoires (pré-confinement, ou post-confinement). Le but est d’“expliquer” la philogénèse spatiale de l’épidémie.

On pourra s’appuyer sur des données hospitalières de Santé-Publique France, et sur des données de téléphonie mobile.

Références

Stéphane Gaubert, Marianne Akian, Xavier Allamigeon, Marin Boyet, Baptiste Colin, Théotime Grohens, Laurent Massoulié, David P. Parsons, Frédéric Adnet, Erick Chanzy, Laurent Goix, Frédéric Lapostolle, Eric Lecarpentier, Christophe Leroy, Thomas Loeb, Jean-Sébastien Marx, Caroline Télion, Laurent Tréluyer and Pierre Carli, Understanding and monitoring the evolution of the Covid-19 epidemic from medical emergency calls : the example of the Paris area, May 2020. *arXiv :2005.14186*

3 Modèles aléatoires pour la biologie et la physique

Enseignants référents : Vincent Bansaye vincent.bansaye@polytechnique.edu,
Lucas Gerin lucas.gerin@polytechnique.edu

Les projets courts sont disponibles en P1 (MAP 511) ou en P2 (MAP 512), les projets longs en P1+P2 (MAP 513).

3.1 Projet court | Modèles de polymérisation en environnement fluctuant

Amandine Véber
amandine.veber@polytechnique.edu

On considère un système de polymères dont les longueurs fluctuent au cours du temps. En particulier, l'application motivant ce projet est la dynamique de l'actine, polymère constituant l'enveloppe mécanique des cellules eucaryotes. On suppose que la polymérisation nécessite une interaction entre le polymère et une protéine donnée, présente dans le système en quantité limitée et dont le nombre fluctue également au cours du temps. On cherchera à comprendre, via des simulations et des modèles de files d'attente couplées, quel est l'impact de la dynamique de la population limitante de protéines sur la population de polymères. On pourra s'inspirer de méthodes développées dans [1].

Références

[1] F. Robin, A. Van Gorp et A. Véber (2019). The role of mode switching in a population of actin polymers with constraints.

3.2 Projet court ou long | Modélisation de la propagation d'une épidémie de tumeurs contagieuses chez le diable de Tasmanie

Amandine Véber
amandine.veber@polytechnique.edu

Depuis vingt ans, le diable de Tasmanie est décimé par une des (heureusement) très très rares formes de cancer contagieux, une tumeur faciale qui se développe et cause la mort de l'individu en quelques semaines. Les individus se battant pour la nourriture, les femelles, ..., s'attaquent en se mordant au niveau du cou et on pense que c'est par ce mécanisme que les cellules tumorales sont transmises d'un individu malade à un individu sain. L'épidémie a commencé dans le nord-est de la Tasmanie et s'est propagée en une vague d'invasion vers le sud-ouest. L'objectif de ce projet est d'établir un modèle pour la propagation spatiale de la maladie pouvant éventuellement inclure la diversité génétique observée parmi les tumeurs.

Références

- [1] https://fr.wikipedia.org/wiki/Tumeur_faciale_transmissible_du_Diable_de_Tasmanie
- [2] Genome Sequencing and Analysis of the Tasmanian Devil and Its Transmissible Cancer. Murchison, E. et al. (2012). Cell 148, 780–791.

3.3 Projet court | Expérience de Lenski

Vincent Bansaye

vincent.bansaye@polytechnique.edu

L'expérience de Lenski est une expérience unique où une population de bactéries a été suivie pendant une vingtaine d'années (60 000 générations). Cela a permis d'évaluer la vitesse à laquelle la population évolue et de déterminer une courbe de décroissance de cette vitesse. L'article [1] modélise l'évolution des bactéries à travers l'apparition de mutations avantageuses pour leur croissance (fitness relative) et leur fixation, ainsi que le protocole expérimental. Il remet en cause l'interprétation initiale de la décélération de la vitesse d'évolution en lien avec des phénomènes biologiques comme l'épistasis ou l'interférence clonale.

Nous étudierons la modélisation et la démarche adoptées dans cet article et les résultats obtenus. Nous pourrions aussi comparer différents scénari proposés pour expliquer cette décélération par simulation et/ou une approche mathématique.

3.4 Projet court | Descente de l'infini pour des modèles compétitifs

Vincent Bansaye

vincent.bansaye@polytechnique.edu

Nous commencerons par étudier une généralisation de la diffusion de Feller, soit un processus à temps et espace continu vérifiant la propriété de branchement (absence d'interactions) et possédant des discontinuités. Nous déterminerons en particulier quand et comment ce processus explose en temps fini, via un argument de dualité. On pourra s'appuyer sur [1] pour cela et sur des simulations.

Nous prendrons en compte dans un deuxième temps les interactions, via un terme logistique de compétition. Nous commencerons par montrer que dans le cas de la diffusion de Feller logistique, le processus "descend de l'infini", c'est-à-dire que la limite du processus quand la condition initiale tend vers l'infini donne un processus qui est fini à tout temps strictement positif.

Dans un troisième temps, l'objectif sera de mettre les deux ingrédients probabilistes ensemble et de classifier les comportements, ce qui implique d'autoriser à fois les sauts explosifs du branchement et la descente de l'infini de la régulation par compétition ! Que se passe-t-il alors ? Un argument de dualité avec une diffusion d'Ornstein Ulhenbeck [2] pourra vous éclairer. Nous illustrerons et analyserons ces comportements aussi par simulation.

Références

- [1] M. E. Caballero, A. Lambert, and G. Uribe Bravo. Proof(s) of the Lamperti representation of continuous-state branching processes, *Probab. Surv.* 6 (2009), 62-89.
- [2] C. Foucart. Continuous-state branching processes with competition : duality and reflection at infinity. *Electron. J. Probab.* 24 (2019), no. 33, 1-38.

3.5 Projet court ou long | Un modèle de milieu aléatoire en physique : la percolation de premier passage

Lucas Gerin gerin@cmap.polytechnique.fr

Mots-clés : Modélisation aléatoire ; Simulations ; Modèle de propagation ; Percolation.

L'objectif de ce projet long est d'étudier, par simulation et de façon théorique, un modèle de milieu aléatoire $2d$ assez célèbre en physique statistique, appelé *Percolation de premier passage*. Il s'agit de modéliser la propagation d'un liquide dans un milieu poreux.

Le modèle est assez simple et est défini de la façon suivante. On considère la propagation d'un liquide (au niveau microscopique) qui se déplace à vitesse constante sur la grille infinie \mathbb{Z}^2 dans laquelle chaque arête, au lieu d'être de longueur 1, a une longueur aléatoire. On pourra commencer par le cas où ces longueurs valent $1 \pm \varepsilon$, où ε est une (petite) constante. Énormément de questions relatives à ce modèle sont des problèmes ouverts.

Les questions qui se posent sont les suivantes :

- Quelle est l'influence de ε sur la vitesse de propagation ?
- Asymptotiquement, quelle est la forme de la zone atteinte par le liquide ?
- Est-ce qu'on peut évaluer l'espérance et la variance du temps d'atteinte d'un point par le liquide ? Une conjecture assez célèbre en probabilités (voir [1]) affirme que la variance grandit comme $n^{2/3}$ lorsque l'on cherche à atteindre un point à distance n . Cette conjecture n'a pas vraiment pu être observée numériquement jusqu'ici !

Ces questions pourront être considérées du point de vue théorique, ou à l'aide de simulations. Le choix du langage est laissé aux élèves : `python`, `scilab`, `C`, `R`, etc.

Références

- [1] Nathaniel D. Blair-Stahn. *First passage percolation and competition models* (2010). Disponible à <https://arxiv.org/abs/1005.0649>
- [2] L. Gerin. *Percolation et processus de croissance aléatoires* (2013). Notes de cours, disponible à <https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00804232>

3.6 Projet court | Inférences sur des arbres de Galton-Watson et fraude sur Wikipedia

Lucas Gerin gerin@cmap.polytechnique.fr

Mots-clés : Modélisation aléatoire, Arbres de Galton-Watson, Inférence statistique

Cet EA est consacré à un problème d'estimation sur le modèle d'arbre aléatoire le plus simple possible : les arbres de Galton-Watson (voir [2]).

Rappelons que dans un arbre de Galton-Watson, chaque individu tire un nombre d'enfants de manière i.i.d. selon une loi μ appelée *loi de reproduction*. Dans un article récent [1], les auteurs proposent un nouvel estimateur pour la variance de μ . Les premiers objectifs de l'EA consistent à

- Lire l'article [1] pour comprendre l'intuition et les calculs menant à la construction de cet estimateur.
- Illustrer avec des simulations les propriétés asymptotiques théoriques de cet estimateur.

Dans un second temps, les élèves pourront étudier une application étonnante de [1] : les auteurs argumentent que leur estimateur permettraient de déceler des manipulations de pages `wikipedia`.

Le choix du langage est laissé aux élèves : `python`, `scilab`, `C`, `R`, etc.

Références

[1] Romain Azaïs, Alexandre Genadot, Benoît Henry. Inference for conditioned Galton-Watson trees from their Harris path. *ALEA*, vol.16, p.561-604 (2019).

[2] Th.Bodineau. *Modélisation de phénomènes aléatoires*.

<http://www.cmap.polytechnique.fr/~bodineau/MAP432-Poly.pdf>

3.7 Projet court ou long | Effet de la taille des structures dans la propagation d'une épidémie.

Vincent Bansaye

vincent.bansaye@polytechnique.edu

Nous considérerons un modèle par compartiment pour décrire une épidémie comme celle du COVID19. L'objectif du sujet est d'explorer le rôle que jouent les structures fermées (foyer, travail, école...) dans la propagation de la maladie, en combinant de telles structures à une contamination champ moyen (population mélangée, via transports, magasins ...).

La modélisation se fera à partir d'un processus markovien de saut et on pourra proposer une approximation par une équation différentielle, comme on le voit en MAP563. On pourra s'appuyer en particulier sur [1] pour voir l'effet de la distribution de la taille des foyers, sous certaines hypothèses, et l'effet de la vaccination. On pourra, notamment par simulation, intégrer différents niveaux de "structures

fermées" (foyer, travail, groupe d'amis ...), voire les ouvrir partiellement (échanges ou mouvements d'individus...)

Références

[1] N Becker, K Dietz. The effect of household distribution on transmission and control of highly infectious diseases. Math Biosci. 1995 Jun ;127(2) :207-19.

3.8 Projet court | Introduction au *modèle à 5 vertex*

Lucas Gerin gerin@cmap.polytechnique.fr

Mots-clés : Chaînes de Markov, Physique statistique, Combinatoire

Le modèle à 5 vertex *5-vertex model* (ou 6 vertex) est un modèle aléatoire discret. Il est l'un des modèles les plus simples de "modèles de glace" en physique statistique, il a été introduit par Pauling dans les années 30. Aujourd'hui ces modèles reviennent à la mode en Mathématiques Appliquées car ils sont au centre d'un nouveau domaine de recherche appelé *Probabilités intégrables*.

L'objectif de cet EA est d'étudier une approche élémentaire et combinatoire du modèle à 5 vertex, découverte par trois physiciens (voir [1]) dans les années 2000 : on peut utiliser ce modèle pour résoudre un problème de percolation en Probabilités. On pourra comparer l'approche physicienne à une stratégie par chaîne de Markov (voir [3]).

Références

[1] https://fr.wikipedia.org/wiki/Modèle_à_six_vertex

[2] Satya N. Majumdar, Kirone Mallick, and Sergei Nechaev. Bethe ansatz in the Bernoulli matching model of random sequence alignment. Phys. Rev. E (3), 77(1) :011110, 10, 2008.

[3] Discrete Hammersley's lines with sources and sinks. A.-L.Basdevant, N.Enriquez, L.Gerin et J.-B. Gouéré. ALEA, vol.13 (2016), p.33-52.

4 Mathématiques Financières

Enseignant référent : Thibaut Mastrolia thibaut.mastrolia@polytechnique.edu

Sauf indication contraire, les sujets dans cette thématique sont proposés au choix en projet P1 (MAP 511), P2 (MAP 512) ou P1+P2 (MAP 513).

Ils sont répartis dans les sept sous-thématiques suivantes :

- Valorisation et couverture d'options,
- Régulation et mécanisme de plateformes financières,
- Calibration de modèles
- Gestion de portefeuille : délit d'initié et gestion des risques
- Stratégies haute fréquence, microstructure des marchés
- Equilibres de marchés et jeux à champs moyens
- Transport optimal (martingale), applications en finance, réseaux de neurones.

Il est OBLIGATOIRE de suivre le cours MAP 552 Modèles stochastiques en finance pour travailler sur ces projets.

Equipe enseignante pour les sujets en Mathématiques financières :

René Aïd - *Université Paris-Dauphine*

e-mail : rene.aid@dauphine.fr

Aurélien Alfonsi - *CERMICS-École des Ponts ParisTech*

e-mail : aurelien.alfonsi@enpc.fr

Nicolas Baradel - *École Polytechnique*

e-mail : nicolas.baradel@polytechnique.edu

Charles Bertucci - *École Polytechnique*

e-mail : charles.bertucci@polytechnique.edu

Giovanni Conforti - *École Polytechnique*

e-mail : giovanni.conforti@polytechnique.edu

Stefano De Marco - *École Polytechnique*

e-mail : demarco@cmap.polytechnique.fr

Laurent Denis - *Université du Mans & CMAP*

e-mail : laurent.denis@univ-le Mans.fr

Caroline Hillairet - *ENSAE*

e-mail : Caroline.Hillairet@ensae.fr

Thibaut Mastrolia - *École Polytechnique*

e-mail : thibaut.mastrolia@polytechnique.edu

Mathieu Rosenbaum - *École Polytechnique*

e-mail : mathieu.rosenbaum@polytechnique.edu

Peter Tankov - ENSAE

e-mail : Peter.TANKOV@ensae.fr

Nizar Touzi - CMAP-École Polytechnique

e-mail : nizar.touzi@polytechnique.org

Valorisation et couverture d'option

4.1 Processus de Wishart et modèles à volatilité stochastique multidimensionnels

Les processus de Wishart sont des processus à valeurs dans les matrices symétriques positives. Récemment, ces processus ont été utilisés en finance pour modéliser la covariance instantanée entre différents actifs. L'objectif de ce projet sera dans un premier temps de se familiariser avec les processus de Wishart qui ont été introduits dans [1]. Ensuite, on s'intéressera au modèle proposé dans [3] pour un panier d'actifs. On cherchera à implémenter une méthode de Monte-Carlo permettant de calculer les prix dans ce modèle en s'inspirant de [2] et [4]. On pourra dans un deuxième temps s'intéresser au pricing par méthode de Fourier dans le modèle [3] avec deux actifs.

Références

- [1] Bru, M.-F. (1991). Wishart processes. J. Theoret. Probab. 4 725-751.
- [2] Ahdida, A. and Alfonsi, A. (2013). Exact and high-order discretization schemes for Wishart processes and their affine extensions. Ann. Appl. Probab., 23(3) :1025-1073.
- [3] Da Fonseca J., Grasselli M., and Tebaldi C. (2008). Option pricing when correlations are stochastic : an analytical framework. Review of Derivatives Research.
- [4] Ahdida A., Alfonsi A. and Palidda E. (2014). Smile with the Gaussian term structure model. <http://arxiv.org/pdf/1412.7412v2.pdf>

4.2 Pricing et couverture avec des modèles de "rough volatility"

L'étude statistique des données de marché montre que les trajectoires du processus de volatilité sont en pratique extrêmement irrégulières. Les approches classiques type volatilité stochastique se basant sur le mouvement brownien ne permettent pas de reproduire de telles dynamiques chaotiques. Les modèles "rough volatility", récemment introduits dans la littérature, permettent de reproduire très simplement les caractéristiques empiriques du processus de volatilité et sont ainsi particulièrement attractifs. Néanmoins, du fait de leur caractère non markovien, ces modèles soulèvent de nouvelles questions lorsque l'on s'intéresse aux problématiques d'évaluation et couverture de produits dérivés. L'objectif de ce projet est d'essayer de résoudre certaines d'entre elle.

Références

- [1] Gatheral, J., Jaisson, T., Rosenbaum, M. (2014). Volatility is rough. arXiv preprint arXiv :1410.3394.
- [2] El Euch, O., Rosenbaum, M. The characteristic function of rough Heston models. 2016. arXiv preprint ArXiv :1609.02108.
- [3] El Euch, O., Rosenbaum, M. (2017). Perfect hedging in rough Heston models. arXiv preprint arXiv :1703.05049.

4.3 Couverture d'options avec coûts de transaction

Dans le modèle de Black Scholes, il est possible de répliquer des options européennes. En revanche, dès qu'on introduit des imperfections de marché, comme par exemple des coûts de transaction proportionnel, il n'est plus possible de répliquer l'actif dérivé. Il n'est également pas possible de le couvrir, sauf à détenir l'actif, voir [1].

On introduit alors une fonction d'utilité ou une mesure de risque qu'on optimise. De plus, il est souvent nécessaire d'adopter une stratégie de type contrôle impulsif, sinon le coût de couverture est infini.

Dans ce projet on se familiarisera dans un premier temps avec le contrôle stochastique, en particulier impulsif. On étudiera un problème particulier de la couverture en présence de coûts de transaction affines (partie fixe, partie proportionnelle), dans lequel on mettra en place une méthode de réduction de dimension. On implémentera ensuite un schéma numérique en C++, R ou Python (au choix). On étudiera les résultats et notamment la stratégie d'exécution, en fonction de l'aversion pour le risque et dans des cas particuliers qu'on comparera à la littérature.

Références

- [1] Soner, HM and Shreve, SE and Cvitanic, J. (1995). There is no nontrivial hedging portfolio for option pricing with transaction costs. The Annals of Applied Probability, 5(2)327–355.

Régulation et mécanismes de plateformes financières

Prenons l'exemple de deux parties coopérant, l'une appelée *le Principal* propose à la seconde appelée *l'Agent* de gérer un projet risqué. En échange de l'effort qu'il fournit dans son travail, l'Agent reçoit de la part du Principal une partie de la valeur du projet en guise de salaire. Dans cette situation, l'effort de l'Agent a des conséquences directes sur la valeur du projet. Plusieurs situations, dépendant de l'information disponible pour le Principal, sont alors envisagées. Tout d'abord, lors de la proposition du contrat, le Principal assure à l'Agent une part du projet et lui impose un niveau d'effort à fournir, ce qui est nommé dans la littérature le

partage du risque. Imaginons maintenant une seconde situation où le Principal propose à l'Agent une part du projet mais ne contrôle pas l'effort fourni par ce dernier. Dans chacune des situations énoncées, le but du Principal est de proposer un contrat à l'Agent lui permettant de maximiser son utilité comme fonction de la valeur terminale du projet.

Cette thématique propose diverses applications de cette théorie en microstructure des marchés, en dynamique des populations et aux marchés de l'énergie.

4.4 Régulation et market-making optimal

Avec la fragmentation des marchés, de nouvelles politiques innovantes ont été développées pour améliorer la liquidité d'actifs risqués sur les plateformes via un système de taxation/rémunération asymétrique entre les différents ordres émis. Ce système "make-take fees" a entraîné l'apparition de nouveaux acteurs sur le marché ayant tendance à le quitter en période d'agitation. Dans ce projet basé sur les articles [1,2] nous regarderons comment un exchange peut mettre en place une politique de rémunération auprès d'un market-maker pour l'inciter à attirer la liquidité sur la plateforme. Ce projet sera illustré par des simulations numériques mettant en évidence l'influence de cette politique d'incitation.

Références

- [1] M. Avellaneda, S. Stoikov, High Frequency Trading. Quantitative Finance, Vol. 8, No. 3, April 2008, 217-224
- [2] O. El Euch, T. Mastrolia, M. Rosenbaum and N. Touzi, Optimal make-take fees for market making regulation.

4.5 Régulation de l'exploitation d'une ressource naturelle.

Dans son rapport annuel de l'an passé, le bureau officiel de l'Union Européenne Eurostat s'est intéressé à la question de la viabilité de la consommation d'une ressource et de sa production (voir [1]). L'enjeu de ce projet est d'étudier un modèle de régulation de l'exploitation d'une ressource renouvelable et des effets de cette régulation sur le système. Plus précisément, nous considérerons une ressource naturelle exploitée par un agent sous contrat avec un régulateur (vu comme une institution publique). L'objectif de l'exploitant est *a priori* de récolter au maximum la ressource pour augmenter son revenu. Le régulateur quant à lui souhaite, pour des raisons de viabilité de la ressource, la stabiliser à un certain niveau calibré au préalable. Pour se faire, le régulateur propose une compensation ou une pénalisation à l'exploitant pour l'inciter à gérer cette ressource dans l'intérêt du régulateur. Dans ce projet nous étudierons l'impact d'une telle politique sur l'évolution de la ressource naturelle et sa viabilité.

Références

- [1] L. Doyen et M. De Lara. Sustainable Management of Natural Resources : Mathematical Models.
- [2] Eurostat. Sustainable development in the european union. Technical report, 2018 Edition.
- [3] I. Kharroubi, T. Lim and T. Mastrolia, Regulation of renewable resource exploitation, SIAM J. Control Optim., 58(1), 551–579. 2020.

4.6 Régulation de la tarification de la consommation électrique

Malgré le succès de programmes de réductions de la consommation moyenne des ménages en électricité, la réaction aléatoire des consommateurs en fonction des prix de l'électricité requière une certaine flexibilité sur le tarif proposé. La variance de la demande réduit la fiabilité de tel mécanismes. Dans ce projet, nous étudierons comment un producteur d'électricité peut tarifier son énergie à un consommateur afin de réduire l'incertitude de la consommation de ce dernier. Ce problème de type principal agent sous alea moral sera résolu théoriquement dans un cas particulier et numériquement à l'aide de données publiques calibrées. En deuxième partie de ce projet, une extension à un panel de consommateur sera étudié permettant une indexation du contrat par rapport à un ménage similaire au consommateur ciblé.

Références

- [1] R. Aïd, D. Possamaï et N. Touzi. Optimal electricity demand response contracting with responsiveness incentives. *arXiv :1810.09063*, 2018.
- [2] J. Cvitanic, D. Possamaï and N. Touzi, Dynamic programming approach to Principal-Agent problems. *Finance and Stochastics*
- [3] R. Elie, E. Hubert, T. Mastrolia and D. Possamaï, Mean-field moral hazard for optimal energy demand response management, *arXiv :1902.10405*, 2019.

Calibration de modèles

4.7 Ponts de Schrodinger et nouvelle classe de modèles à volatilités stochastiques

Dans ce projet, nous mettront en œuvre numériquement une nouvelle classe de modèles de volatilité stochastique, parfaitement calibrés pour les instruments du marché liquide, tels que les options Vanilles. L'algorithme implique une généralisation dans un sens martingale des ponts de Schrodinger.

Références

- [1] Henry-Labordere, Pierre, From (Martingale) Schrodinger Bridges to a New Class of Stochastic Volatility Model (March 15, 2019).
<https://ssrn.com/abstract=3353270> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.3353270>
- [2] Léonard, C. : *A survey of the Schrödinger problem and some of its connections*

with optimal transport, To appear in Discrete & Continuous Dynamical Systems - Series A. Special issue on optimal transport. arXiv :1308.0215.

4.8 Méthodes de calcul de régressions non-paramétriques et calibration de modèles à volatilité stochastique

Dans ce projet, nous passerons en revue diverses méthodes de régression (non) paramétriques (méthode des k-voisins les plus proches, Nadaraya-Watson, estimateurs LP(p), spline regressor et forêt aléatoire). Ils seront utilisés pour calibrer les modèles locaux de volatilité stochastique en utilisant une méthode particulière.

Références

- [1] Henry-Labordere, Pierre, (Non)-Parametric Regressions : Applications to Local Stochastic Volatility Models (April 19, 2019). <https://ssrn.com/abstract=3374875> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.3374875>
- [2] Guyon, J., Henry-Labordère, P. : *Being particular about smile calibration*, Risk Magazine (Jan. 2012).
- [3] Guyon, J., Henry-Labordère, P. : *Nonlinear Option Pricing*, Financial Mathematics Series CRC, Chapman Hall (447 p.), 2013.
- [4] Tsybakov, A.B. : *Apprentissage statistique et estimation non-paramétrique*. Cours de l'Ecole Polytechnique (2012).
- [5] Bishop, C. : *Pattern Recognition And Machine Learning*, Springer 2006.

4.9 Arbitrage multidevise et calibration du modèle de Wishart

Dans ce projet on s'intéresse à la détection des arbitrages et à la calibration de modèles de smile de volatilité implicite dans le marché d'options sur taux de change (FX). Les options sur taux de change (FX) sont parmi les produits dérivés les plus liquides, même si elles ne sont pas en général cotées en bourse. Sur le marché interbancaire, on obtient facilement des cotations pour les options européennes portant sur un seul taux de change, par exemple EUR/USD ou JPY/USD, qui affichent en général un *smile de volatilité* prononcé. Ces données peuvent être utilisées pour calibrer les modèles destinés à valoriser les produits plus complexes (par exemple, portant sur plusieurs taux en même temps). L'objectif du projet est double :

- Etudier les relations d'arbitrage qui existent entre les prix des options portant sur un triangle de taux de change, c'est-à-dire les taux de change correspondant aux trois devises. Par exemple, si l'on considère les devises EUR, USD et JPY, alors sur le marché on trouve les options sur USD/EUR, JPY/EUR, ainsi que JPY/USD. Or, les trois taux de change ne sont pas indépendants puisque

$$\text{JPY/USD} = \text{JPY/EUR} \times \text{EUR/USD}.$$

Ceci implique des relations d'arbitrage entre les trois types d'options, que l'on cherchera à comprendre et vérifier sur les données.

- Proposer une méthode de calibration de modèle pour un triangle de taux de change. Une fois que les arbitrages ont été éliminés, l'étape suivante est de calibrer un modèle en utilisant les données provenant des trois marchés d'options en même temps. Dans ce projet on s'intéressera au modèle de Wishart [1], qui admet une formule explicite pour la fonction caractéristique du logarithme de prix, ce qui permet de développer des algorithmes de calibration efficaces.

Références

- [1] Da Fonseca, J., Grasselli, M., and Tebaldi, C. (2007). Option pricing when correlations are stochastic : an analytical framework. *Review of Derivatives Research*, 10(2) :151-180.
- [2] Hobson, D., Laurence, P., and Wang, T. H. (2005). Static-arbitrage upper bounds for the prices of basket options. *Quantitative finance*, 5(4), 329-342.
- [3] Hobson, D., Laurence, P., and Wang, T. H. (2005). Static-arbitrage optimal subreplicating strategies for basket options. *Insurance : Mathematics and Economics*, 37(3), 553-572.

4.10 Produits dérivés sur l'indice VIX : calibration de modèle

L'indice VIX est un indice qui mesure le niveau de volatilité de l'indice S&P 500 en utilisant les données d'options sur cet indice. Un indicateur important du sentiment des marchés, le VIX sert à son tour de référence à un écosystème de produits dérivés : options et futures sur VIX. Ce marché est relié par des relations d'arbitrage complexes avec le marché d'options sur S&P 500. Les options sur VIX affichent également un smile de volatilité : la volatilité du VIX est elle-même stochastique ! Le but de ce projet est de comprendre le fonctionnement de ce marché, et de développer une méthodologie de calibration de modèle utilisant les données d'options sur VIX et potentiellement aussi les données d'options sur S&P 500.

On commencera par étudier le modèle Rough Bergomi introduit dans [1], pour se rendre compte qu'il ne permet pas la prise en compte du smile de volatilité implicite dans les options sur VIX. On s'intéressera ensuite aux extensions de ce modèle développées dans [2], afin de prendre en compte le smile, et cherchera à développer une méthode de calibration robuste pour ce dernier modèle.

Références

- [1] Bayer, C., Friz, P., and Gatheral, J. (2016). Pricing under rough volatility. *Quantitative Finance*, 16(6), 887-904.
- [2] Horvath, B., Jacquier, A., and Tankov, P. (2018). Volatility options in rough volatility models. *arXiv preprint arXiv :1802.01641*.

Gestion des risques : délit d'initié et gestion de portefeuille

4.11 Délit d'initié : modélisation et détection

Projet P1+P2 MAP 513 seulement.

En France, l'AMF (Autorité des Marchés Financiers) est chargée de surveiller les opérations boursières. Depuis une dizaine d'années, ces autorités de surveillance ont fait beaucoup de progrès dans la détection de comportement initié grâce notamment à de meilleures techniques de surveillance. Un exemple de grande envergure a eu lieu entre novembre 2005 et mars 2006, période durant laquelle 10 millions de titres EADS ont été vendus, pour une plus value de près de 90 millions d'euros. Ces mouvements anormaux ont été décelés par l'AMF, et ont conduit à des enquêtes sur 21 hauts dirigeants d'EADS.

L'objectif des deux sujets suivants est d'étudier une modélisation d'un délit d'initié et de mettre en place un test de détection. On se placera dans le cadre d'un marché financier dont les prix des actifs sont dirigés par un mouvement brownien. L'information minimale dont disposent les agents pour résoudre leur problème d'optimisation est celle obtenue par l'observation du processus des prix. Cependant, il semble que les agents sont informés de manière hétérogène et reçoivent un flux d'information qui leur est propre. Pour de tels initiés, on étudiera :

- Les problèmes d'arbitrage et de réplication d'actifs risqués,
- Le gain de l'initié (par rapport à un non-initié),
- La mise en oeuvre de tests de détection.

On peut considérer plusieurs modélisations de l'information privée. Nous étudierons le cas où l'investisseur possède une information initiale, i.e. il connaît, dès l'instant $t = 0$, une fonctionnelle des trajectoires du processus des prix. La clé de cette modélisation est la théorie du grossissement initial de filtration par une variable aléatoire. On étudiera par exemple le cas où l'initié connaît le ratio du prix terminal de deux actifs, ou bien encore le cas où l'initié sait si le prix terminal d'un actif sera dans une fourchette donnée ou non.

Références

- [1] A. Grorud, M. Pontier, *Comment détecter le délit d'initié*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 324, p. 1137-1142, 1997.
- [2] A. Grorud, M. Pontier, *Insider trading in a continuous time market model*, International Journal of Theoretical and Applied Finance, 1, p. 331-347, 1998.
- [3] M. Pontier, *Modélisation et détection du délit d'initié*, Matapli 77, 2005.

4.12 Assurance de portefeuille

Afin de rassurer leur clientèle, les gestionnaires de portefeuille proposent des fonds avec garantie de capital. Du point de vue du gestionnaire, il s'agit d'implémenter le

meilleure allocation de portefeuille, selon un critère donné, sous la contrainte que la valeur du portefeuille soit supérieure à la garantie à laquelle il s'est engagé avec son client. L'objectif de ce projet est de comprendre et de comparer différentes stratégies de gestion qui assurent une telle garantie. En particulier, on étudiera :

- La stratégie qui consiste à acheter une action et une option de vente (Put) portant sur cette action,
- La stratégie du coussin.

Références

- [1] P. Bertrand, J.-L. Prigent, *Portfolio insurance strategies : A comparison of standard methods when the volatility of the stock is stochastic*, International Journal of Business, 8(4), 461-472, 2003.
- [2] R. Cont, P. Tankov. *Constant Proportion Portfolio Insurance in presence of jumps in asset prices*, Mathematical Finance, 19(3), 379-401, 2009.
- [3] N. El Karoui, M. Jeanblanc, V. Lacoste, *Optimal portfolio management with American capital guarantee*, Journal of Economic Dynamics and Control, 29, 449-468, 2005.
- [4] R. C. Merton, *Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model*, Journal of Economic Theory, 3, 373-413, 1971.

4.13 Estimation de risques VaR dans un modèle incertain

Projet P1 MAP 511 seulement.

On considère un actif dont le prix satisfait une Equation Différentielle Stochastique dont les coefficients sont mal déterminés. On suppose typiquement que ces différents coefficients prennent leurs valeurs dans des intervalles fixes donnés. On considèrera d'abord le cas où l'équation du prix est dirigée par un mouvement Brownien puis le cas où ce prix comporte des sauts modélisés par un processus de Poisson.

On établira des estimations de différents risques VaR et on en déduira également une application au calcul de probabilités de ruine. Pour chaque estimation obtenue, on mettra en oeuvre des simulations numériques afin de tester la précision des estimations obtenues.

Références

- [1] Denis L., Fernandez B., Meda A., *Estimation of dynamic var and mean loss associated to diffusion processes*, in Markov Processes and Related Topics : A Festschrift for Thomas G. Kurtz. J. Feng, S. Ethier, and D. Stockbridge, eds. IMS Collections (4), 301-314 (2008).
- [2] Denis L., Fernandez B., Meda A., *Estimation of value at risk and ruin probability for diffusion processes with jumps*, Mathematical Finance Vol. 19(2), pp 281-302 (2009).
- [3] Revuz D., Yor M., *Continuous Martingales and Brownian Motion*, springer

(1999).

4.14 Liquidation de portefeuille avec impact et incertitude de paramètre

La liquidation (ou acquisition) d'un portefeuille est un problème courant en finance. Cette liquidation peut avoir un impact de marché. Nous sommes confrontés à un arbitrage entre :

- liquider rapidement la position pour limiter le risque de marché ;
- liquider lentement la position pour minimiser son impact de marché.

De plus, il peut y avoir incertitude sur l'impact de marché et son comportement dans le temps. Cette incertitude peut être apprise au fil de l'eau lors de la liquidation, en observant le marché à chaque ordre passé. Le problème est de choisir les dates et tailles des ordres à envoyer sur le marché (contrôle stochastique de type impulsif).

Le cadre théorique est celui de [1] et un exemple d'application numérique est donné dans [2].

Dans ce projet on se familiarisera dans un premier temps avec le contrôle stochastique, en particulier impulsif. On étudiera un problème particulier de liquidation avec friction et incertitude, dans lequel on mettra en place une méthode de réduction de dimension. On implémentera ensuite un schéma numérique en C++, R ou Python (au choix). On étudiera les résultats et notamment l'effet de l'apprentissage au fil de l'eau de l'incertitude par rapport à celui qui n'apprend pas.

Références

- [1] Optimal control under uncertainty and bayesian parameters adjustments, Baradel, Nicolas and Bouchard, Bruno and Dang, Ngoc Minh, SIAM Journal on Control and Optimization, 56(2)1038–1057, 2018.
- [2] Optimal trading with online parameter revisions, Baradel, Nicolas and Bouchard, Bruno and Dang, Ngoc Minh, Market microstructure and liquidity, 2016.

4.15 Cyber sécurité et modèles de contagion

Dans ce projet, partant d'un modèle de contagion classique nous étudierons la politique optimale de protection d'un cluster d'ordinateurs soumis à une attaque informatique. Le propriétaire du cluster cherche alors à protéger son cluster tout en limitant à la fois ses coûts d'installation du logiciel de protection et le coût de l'attaque elle-même, prenant en compte l'hyper connectivité de son cluster. Ce projet sera illustré par des simulations numériques pour l'interprétation des différents résultats.

Références

- [1] Mean-Field-Game Model for Botnet Defense in Cyber-Security. Kolokoltsov and Bensoussan. Applied Mathematics and Optimization volume 74, pages 669-692 (2016)
- [2] Optimal defense strategy based on the mean field game model for cyber security, Miao, Wang and Li. International Journal of Distributed Sensor Networks, 2019.

Microstructure des marchés, stratégie haute fréquence

La disponibilité de données haute fréquence, la multiplication des places de marchés, ainsi qu'une compréhension de plus en plus fine des phénomènes de microstructure, ont ouvert de nouvelles perspectives en finance de marché. En particulier, le trading haute fréquence est né de la volonté d'optimiser les transactions en profitant de ce nouveau contexte. Son essor récent a nécessité le développement de méthodes originales de mathématiques financières et de statistique des processus. Un nombre grandissant d'équipes de trading propriétaires, de salles de marchés et de hedge funds y ont aujourd'hui constamment recours.

4.16 Estimation haute fréquence de la volatilité, application au trading d'options

Dans ce projet, on se placera dans la situation d'un trader haute fréquence souhaitant faire de l'arbitrage sur options. L'idée est de détecter les anomalies de valorisation en comparant prix d'options et mesures de volatilité. On montrera dans un premier temps que le cadre usuel d'une modélisation brownienne est insuffisant dans ce contexte de données haute fréquence. On s'appuiera ensuite sur différentes extensions de ce cadre pour modéliser la microstructure des marchés et construire des stratégies de trading.

Références

- [1] Y. Aït-Sahalia, P. A. Mykland, L. Zhang, *A tale of two time scales : Determining integrated volatility with noisy high frequency data*, JASA 77, 100(472), 1394-1411, 2005.
- [2] F. G. Bandi, J. R. Russell, C. Yang, *Realized volatility forecasting and option pricing*, Journal of Econometrics, 147(1), 34-46, 2008.
- [3] O. E. Barndorff-Nielsen, P. Hansen, A. Lunde, N. Shephard, *Designing realised kernels to measure the ex-post variation of equity prices in the presence of noise*, Econometrica, 2008.

4.17 Corrélation haute fréquence, application au market impact

Bien que la présence de corrélations haute fréquence soit un consensus de marché et que de nombreuses stratégies en place (comme le pair trading) optimisent un critère multi-titres, la mesure et l'exploitation des dépendances entre les variations des prix de deux titres ont été peu explorées. On montrera tout d'abord que, même dans le cadre brownien, la simple asynchronicité des prix (les transactions n'ont pas lieu aux mêmes instants pour deux actifs différents) explique en partie l'effet Epps, c'est à dire une estimation haute fréquence des corrélations systématiquement proche de zéro. On montrera comment corriger cet effet puis on tentera de résoudre le problème dans un cadre plus réaliste, permettant de reproduire les effets de microstructure des marchés. On appliquera les résultats obtenus à l'optimisation de la vente d'un portefeuille d'actifs.

Références

- [1] R. Almgren, N. Chriss, *Optimal execution of portfolio transactions*, J. Risk 3, 5-39, 2000.
- [2] T. Hayashi, N. Yoshida, *On covariance estimation of non-synchronously observed diffusion processes*, Bernoulli 11(2), 359-379, 2005.
- [3] L. Zhang, *Estimating covariation : Epps effect, microstructure noise*, Journal of Econometrics, 160(1), 33-47, 2011.

Equilibres de marchés et jeux à champs moyens

4.18 Une approche jeu pour la formation de prix sur un marché

Le but de ce projet est de s'intéresser à la formation d'un prix (ou d'une volatilité) sur un marché financier. Il s'agit de comprendre comment les différents acteurs, qui agissent sur le marché en question, i) impactent le prix, ii) forment des anticipations sur son évolution. La théorie des jeux à champ moyen introduite dans [2] est un outil adapté pour répondre à ce genre de question, comme le montre le récent article [1] qui sera le point de départ de ce projet.

Références

- [1] Mean field game of controls and an application to trade crowding, Cardaliaguet, Pierre and Lehalle, Charles-Albert, Mathematics and Financial Economics, 12(3)335–363, 2018.
- [2] Mean field games, Lasry, Jean-Michel and Lions, Pierre-Louis, Japanese journal of mathematics, 2(1)229–260, 2007.

4.19 Quand investir ? Modèles d'équilibres entrée-sortie sur un marché

Le but de ce projet est de comprendre comment se forme un équilibre sur un marché où des investisseurs peuvent entrer librement et où les différents acteurs du marché peuvent sortir. Le point de départ de ce projet sera l'article [2] qui s'intéresse au cas des blockchains, en utilisant la théorie des jeux à champ moyen développé dans [1]. Le projet pourra naturellement évoluer vers des problématiques de simulations numériques et de calculs des équilibres en question.

Références

- [1] Mean field games, Lasry, Jean-Michel and Lions, Pierre-Louis, Japanese journal of mathematics, 2(1) :229–260, 2007.
- [2] Mean Field Game Approach to Bitcoin Mining, Bertucci, Charles and Bertucci, Louis and Lasry, Jean-Michel and Lions, Pierre-Louis, arXiv preprint arXiv :2004.08167, 2020.

Transport optimal (martingale), réseaux de neurones et applications

4.20 Simulation dans l'ordre convexe, et application au calcul de bornes de prix robustes

Lorsque l'on calcule le prix d'une options exotique, on a souvent recours à une méthode de Monte-Carlo. On aimerait, avec les mêmes points simulés calculer les bornes de prix robustes de cette option, c'est à dire calculer le prix minimum/maximum de cette option parmi tous les modèles sans arbitrages qui répliquent exactement les prix des options européennes observés sur le marché. Il s'agit d'un problème de transport optimal avec contraintes de martingale qui peut se résoudre aisément avec des algorithmes de programmation linéaire. Cependant, rien ne garantit que les mesures empiriques obtenues par Monte-Carlo soient dans l'ordre convexe, et l'ensemble satisfaisant les contraintes est alors vide. L'article [1] propose une façon de modifier légèrement les mesures empiriques afin qu'elles soient à nouveau dans l'ordre convexe, permettant ainsi le calcul de bornes de prix. On cherchera à calculer des bornes de prix sur des payoffs de type $(S_{T_2} - S_{T_1})^+$ ($T_1 < T_2$) pour le modèle de Black-Scholes, pour le modèle de Heston (en s'aidant de [2]), puis éventuellement pour des modèles multi-dimensionnels.

Références

- [1] A. Alfonsi, J. Corbetta, B. Jourdain : Sampling of probability measures in the convex order and approximation of Martingale Optimal Transport problems. Septembre 2017. <https://arxiv.org/pdf/1709.05287v1.pdf>
- [2] Alfonsi, A. (2010). High order discretization schemes for the CIR process :

Application to affine term structure and Heston models, *Mathematics of Computation*, Vol. 79, No. 269, pp. 209-237.

4.21 Transport optimal (martingale) et réseaux de neurones : Génération automatique de séries financières.

Dans ce projet, nous étudions la construction de séries chronologiques financières historiques de densités non paramétriques. La densité sera paramétrée par un réseau de neurones récurrent.

Cette construction implique le calcul de la distance dite de Wasserstein qui apparaît naturellement en théorie du transport optimal. Récemment, l'utilisation du transport optimal est apparue dans la communauté "machine learning" pour la construction de modèles de type génératifs (GAN, Wasserstein GAN, ...)

Dans ce projet, les étudiants

- étudieront la théorie des réseaux de neurones (feedforward, recurrent, LSTM), leur optimisation par la méthode de gradient stochastique descendant,
- étudieront la théorie du transport optimal et ses interprétations en mathématiques financières,
- compareront de nombreux modèles génératifs.

Références

[1] Henry-Labordere, Pierre, (Martingale) Optimal Transport and Anomaly Detection with Neural Networks : A Primal-Dual Algorithm (April 11, 2019). Available at SSRN :

<https://ssrn.com/abstract=3370910> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.3370910>

[2] Bousquet, O., Gelly, S., Tolstikhin, I., Simon-Gabriel, C-J, Schölkopf, B. : *From Optimal Transport to Generative Modeling : the VEGAN cookbook*, arXiv :1705.07642.

[3] Genevay, A., Cuturi, M., Peyré, G., Bach, F. : *Stochastic optimization for large scale optimal transport*, In *Advances in Neural Information Processing Systems*, pp. 3432–3440, 2016.

[4] Arjovsky, M., Chintala, S., Bottou, L. : *Wasserstein GAN*, arXiv :1701.07875.

4.22 Transport optimal (martingale) et réseaux de neurones : Détection d'anomalie sur des données financières.

Dans ce projet, nous étudierons des algorithmes permettant de détecter des anomalies et des valeurs aberrantes dans des données financières. Après une rapide étude des méthodes numériques existantes (forêt aléatoire, mélange gaussien), nous nous concentrerons sur un nouvel algorithme qui consiste à construire une densité non paramétrique avec des réseaux de neurones.

Cette construction implique le calcul de la distance dite de Wasserstein qui apparaît naturellement en théorie du transport optimal. Récemment, l'utilisation

du transport optimal est apparue dans la communauté "machine learning" pour la construction de modèles de type génératifs (GAN, Wasserstein GAN,...)

Dans ce projet, les étudiants

- étudieront la théorie des réseaux de neurones (feedforward, recurrent, LSTM), leur optimisation par la méthode de gradient stochastique descendant,
- étudieront la théorie du transport optimal et ses interprétations en mathématiques financières,
- compareront de nombreux modèles génératifs.

Références

[1] Henry-Labordere, Pierre, (Martingale) Optimal Transport and Anomaly Detection with Neural Networks : A Primal-Dual Algorithm (April 11, 2019).

SSRN : <https://ssrn.com/abstract=3370910> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.3370910>

[2] Bousquet, O., Gelly, S., Tolstikhin, I., Simon-Gabriel, C-J, Schölkopf, B. : *From Optimal Transport to Generative Modeling : the VEGAN cookbook*, arXiv :1705.07642.

[3] Genevay, A., Cuturi, M., Peyré, G., Bach, F. : *Stochastic optimization for large scale optimal transport*, In Advances in Neural Information Processing Systems, pp. 3432–3440, 2016.

[4] Arjovsky, M., Chintala, S., Bottou, L. : *Wasserstein GAN*, arXiv :1701.07875.

4.23 Transport optimal (martingale) et réseaux de neurones : Calibration de smiles et algorithme de Sinkhorn

La construction d'une surface de volatilité implicite sans arbitrage est une question centrale en finance quantitative. Ce problème consiste à trouver une mesure martingale discrète correspondant à des lois marginales discrètes.

En plaçant cette question dans le cadre du transport optimal martingale, ce problème peut être résolu en utilisant l'algorithme de Sinkhorn. Récemment, cet algorithme a également été popularisé dans la communauté "machine learning" pour calculer efficacement la distance dite de Wasserstein.

Dans ce projet nous introduirons

- la théorie des réseaux de neurones (feedforward, recurrent, LSTM), leur optimisation par la méthode de gradient stochastique descendant,
- la théorie du transport optimal et ses interprétations en mathématiques financières.
- l'algorithme de Sinkhorn et nous étudierons son implémentation.

Références

[1] March, Hadrien De and Henry-Labordere, Pierre, Building Arbitrage-Free Implied Volatility : Sinkhorn's Algorithm and Variants (January 31, 2019).

<https://ssrn.com/abstract=3326486> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.3326486>
[2] Cuturi, M. : *Sinkhorn Distances : Lightspeed Computation of Optimal Transportation Distances*, Advances in Neural Information Processing Systems 26, pages 2292–2300.

5 Simulation Aléatoire

Enseignant référent : Emmanuel Gobet emmanuel.gobet@polytechnique.edu

5.1 Sélection adaptive optimale de réseaux de neurones pour résoudre par Monte-Carlo une EDP semi-linéaire (MAP513)

Emmanuel Gobet : emmanuel.gobet@polytechnique.edu

La formule de Feynman-Kac classique permet d'exprimer la solution de l'équation de la chaleur parabolique linéaire

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad u(T, x) = g(x)$$

sous forme d'une espérance :

$$u(t, x) = \mathbb{E}[g(x + W_T - W_t)],$$

où W est un mouvement brownien standard. Ainsi, pour approcher numériquement u on simule de manière répétée le brownien et on calcule la moyenne sur l'échantillon. De nombreux problèmes en finance (Credit Value Adjustment, options américaines), en biologie (dynamique de population), en physique, mécanique etc conduisent à des EDP semi-linéaires, où la solution est calculée par régression empirique (projection sur un espace de fonctions) [1]. Les réseaux de neurones (Neural Networks) comme espace de fonctions sont une possibilité intéressante car cela permet de passer facilement en grande dimension. Un des enjeux actuels est de déterminer *online* quelles sont les architectures de NN les plus adaptés à un problème donné. Dans ce projet long sur 2 périodes, nous suivrons l'approche par sélection de modèles [2][3] pour déterminer optimalement le nombre de neurones intermédiaires, le nombre de couches cachées etc. Le travail consistera en une partie théorie et une partie validation par simulation.

Références

- [1] E. Gobet and P. Turkedjiev. Linear regression MDP scheme for discrete backward stochastic differential equations under general conditions. *Mathematics of Computations*, Vol. 85(299), pp.1359-1391, 2016.
- [2] L. Györfi, M. Kohler, A. Krzyżak, and H. Walk, A distribution-free theory of nonparametric regression, Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [3] E. Gobet and L. Zwald. Penalized empirical regressions for BSDEs : adaptivity to the unknown regularity, optimal selection of Neural Networks. Preprint, 2019.

5.2 Quantiles généralisés, estimation sur données simulées (MAP511-MAP512)

Stéphane Girard : stephane.girard@inria.fr

Emmanuel Gobet : emmanuel.gobet@polytechnique.edu

Le quantile de niveau α d'une variable aléatoire réelle X est défini de manière classique par

$$q_\alpha(X) = \inf\{x : \mathbb{P}(X \leq x) \geq \alpha\}.$$

Il peut s'écrire aussi comme solution d'un problème de minimisation d'espérance (propriété d'Elicitabilité)

$$q_\alpha(X) = \arg \inf_q \mathbb{E} [(1 - \alpha)(q - X)_+ + \alpha(X - q)_+],$$

propice au calcul numérique. D'un autre côté, le quantile n'est pas une métrique de risque cohérente [1]. L'expectile défini par

$$q_{2,\alpha}(X) = \arg \inf_q \mathbb{E} [(1 - \alpha)(q - X)_+^2 + \alpha(X - q)_+^2].$$

est lui une métrique élicitable, et cohérente pour $\alpha \geq 1/2$ [2][3]. C'est un cas particulier de L_p -quantile.

Dans ce projet, nous étudierons et comparerons d'un point de vue théorique et numérique les notions de quantile, quantile moyen (dit Expected Shortfall) et expectile. En fonction de l'avancement, l'étude pourra inclure la récente notion d'extrémile [4].

Références

- [1] P. Artzner and F. Delbaen and J.M. Eber and D. Heath. Coherent measures of risk, Math. Finance, 1999.
- [2] A. Daouia, S. Girard, G. Stupfler. Estimation of tail risk based on extreme expectiles, Journal of the Royal Statistical Society : Series B, 2018.
- [3] F. Bellini, B. Klar, A. Muller, E.R. Gianina. Generalized quantiles as risk measures, Insurance : Mathematics and Economics 54 : 41-48, 2014.
- [4] A. Daouia, I. Gijbels, G. Stupfler. Extremiles : A New Perspective on Asymmetric Least Squares. JASA, 2018.

5.3 Quantification d'incertitudes en optimisation stochastique (MAP511-MAP512)

Linda Chamakh : linda.chamakh@bnpparibas.com

Emmanuel Gobet : emmanuel.gobet@polytechnique.edu

Un algorithme type Robbins Monroe, défini par

$$\zeta_{k+1} = \zeta_k + \gamma_k h(X_k, \zeta_k),$$

permet lorsque $k \rightarrow +\infty$ de calculer le zéro de la fonction $\zeta \mapsto \mathbb{E}(h(X, \zeta))$. Pour cela, les variables aléatoires $(X_k : k \geq 0)$ sont i.i.d. et $(\gamma_k : k \geq 0)$ est une suite de pas d'apprentissage.

Ce sont des algorithmes très courants dès qu'on souhaite optimiser une fonction (recherche des points où le gradient s'annule), ce sont les méthodes de gradient stochastique.

Dans ce projet, nous considérons le cas où la loi de X et/ou la fonction h dépend d'un paramètre θ , de sorte que la limite $\lim_{k \rightarrow +\infty} \zeta_k = \zeta_\infty$ dépend aussi de ce paramètre. Cette situation se présente par exemple quand la loi de X n'est pas exactement connue (incertitudes de paramètre) et dans ce cas, il est important de calculer $\zeta_\infty(\theta)$ pour tous les paramètres, voire d'avoir leur distribution quand une loi a priori sur θ est donnée. Pour résoudre le problème, nous utiliserons une approche par décomposition en chaos polynomiale, qui est plus efficace qu'une approche Monte-Carlo naive.

Références

- [1] S. Crepey, G. Fort, E. Gobet, U. Stazhynski. Uncertainty Quantification for Stochastic Approximation Limits Using Chaos Expansion. SIAM on Uncertainty Quantification, 2019.
- [2] A. Shapiro, D. Dentcheva, and A. Ruszczyński, Lectures on stochastic programming : modeling and theory, SIAM, Philadelphia, 2009.

5.4 Simulation de tatouage numérique par codes Tardos (MAP511-MAP512)

Arnaud Guyader : arnaud.guyader@upmc.fr

La circulation de media numériques (musique, vidéo...) via internet pose des problèmes importants de traçabilité des sources distribuées, afin d'éviter la copie non-autorisée. Pour pallier à cela, on peut mettre en place une méthode de tatouage numérique (ou watermarking). Cette technique doit satisfaire plusieurs propriétés : elle doit être à la fois discrète, de façon à ce que la différence avec la copie originale ne soit pas repérable facilement (pas d'altération à l'écoute ou au visionnage) ; elle doit de plus être robuste à différentes modifications éventuelles (bruit du canal, etc.) ou à une alliance d'utilisateurs frauduleux qui mélangeraient leurs copies. Ce projet est consacré à ce dernier point.

Une technique possible consiste à construire des codes anti-collusion. En 2003, par une approche probabiliste, Gabor Tardos a proposé une réponse aussi simple qu'élégante à ce problème. L'objectif de projet sera d'étudier les performances probabilistes du procédé, à la fois par simulation d'évènements extrêmes et par calcul de bornes d'erreur via inégalités de concentration de la mesure.

Références

- [1] T. Furon and M. Desoubeaux. *Tardos codes for real*. IEEE Workshop on Information Forensics and Security, 2014.

- [2] T. Furon, L. Pérez-Freire, A. Guyader, and F. C  rou. *Estimating the Minimal Length of Tardos Code*. 11th Information Hiding Conference, 2009.
- [3] A. Guyader, N. Hengartner, and E. Matzner-Lober. *Simulation and Estimation of Extreme Quantiles and Extreme Probabilities*. Applied Mathematics and Optimization, Vol. 64 (2), 171-196, 2011.
- [4] G. Tardos. *Optimal probabilistic fingerprint codes*. Proceedings of the 35th annual ACM symposium on theory of computing, 116-125, 2003.

5.5 Simulation de mouvement brownien fractionnaire (MAP511-MAP512)

Mathieu Rosenbaum : mathieu.rosenbaum@polytechnique.edu

Le mouvement brownien fractionnaire est un processus gaussien extension du mouvement brownien classique. Il permet notamment de modéliser des phénomènes d’anti-persistence et de mémoire longue. Ainsi, ce processus est très utilisé pour les applications, notamment pour des modèles de volatilité en finance. Cependant, en raison de son caractère non-Markovien, la simulation rapide et précise du mouvement brownien fractionnaire demeure un problème complexe. Le but de ce projet sera d’aborder des techniques de simulation variée pour ce processus : méthode de Cholewsky, ondelettes, déterminant circulant ou encore approximation de Pakkanen.

5.6 Méthodes de splitting pour la simulation du processus de Cox-Ingersoll-Ross et les processus affines (MAP511-MAP512)

Aurélien Alfonsi : alfonsi@cermics.enpc.fr

L’approximation du processus de Cox-Ingersoll-Ross

$$dX_t = (a - kX_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dW_t, t \geq 0$$

est délicate. La plupart des schémas usuels ne sont pas bien définis pour cette diffusion. L’objectif de cet EA est de comprendre comment obtenir, par des techniques de splitting d’opérateur, des schémas d’ordre 2 et 3 pour l’erreur faible. On implémentera ces schémas, que l’on pourra comparer avec un schéma d’Euler corrigé. Ensuite, on verra comment ce schéma peut être réutilisé comme brique élémentaire pour obtenir des schémas d’ordre 2 pour des diffusions plus générales (Heston, Wishart ou Wright-Fisher).

Références

- [1] A. Alfonsi, *High order discretization schemes for the CIR process : Application to affine term structure and Heston models*. Mathematics of Computation, 2010, Vol. 79, No. 269, pp. 209–237.

5.7 Simulation du temps de sortie de certains domaines pour les processus de Bessel et le mouvement brownien (MAP511-MAP512)

Nathael Gozlan : natael.gozlan@parisdescartes.fr

Dans ce sujet, on s'intéresse au problème de la simulation du temps d'atteinte τ_ψ d'une courbe $t = \psi(t)$

$$\tau_\psi = \inf \{t > 0 : Z_t^\delta \geq \psi(t)\}.$$

par un processus de Bessel $(Z_t^\delta)_{t>0}$. Lorsque $\delta \in \mathbb{N}^*$, Z^δ peut être défini comme la norme euclidienne d'un mouvement brownien standard sur \mathbb{R}^δ . La méthode WoMS (Walk On Moving Spheres) proposée dans [1] et [2] permet de simuler notamment le temps de sortie d'une boule euclidienne pour le mouvement brownien ou le temps d'atteinte d'un niveau donné pour le processus de Cox-Ingersoll-Ross.

Références

- [1] M. Deaconu and S. Herrmann, Hitting time for Bessel processes – walk on moving spheres algorithm (WoMS). Ann. Appl. Probab. 23 (2013), no. 6, 2259–2289.
- [2] M. Deaconu, S. Herrmann, S. Maire, The walk on moving spheres : a new tool for simulating Brownian motion's exit time from a domain, Mathematics and Computers in Simulation, 135 (2017), 28-38.

5.8 Discrétisation du théorème ergodique (MAP511-MAP512)

Clément Rey : clement.rey@polytechnique.edu

La simulation de mesures invariantes pour des solutions d'Équations Différentielles Stochastiques permet notamment la mise en oeuvre d'algorithmes de type Langevin (où l'on simule une loi comme mesure invariante d'une EDS spécifique) ou encore le calcul d'espérances fonctionnelles impliquant un processus non observé (comme la variance d'un actif financier). En s'inspirant du théorème ergodique *i.e.* en le discrétisant, on s'intéresse ici à la convergence des mesures empiriques de la solution d'une EDS (ou une de ses approximations) vers sa mesure invariante. Ces résultats sont présentés dans [1]. On portera un intérêt particulier à l'étude d'un Théorème Centrale Limite. En particulier dans [2], un algorithme qui introduit une pondération dans le calcul des mesures empiriques permet d'obtenir un TCL plus rapide que celui établi dans [1]. L'objectif de ce projet est de comprendre et implémenter ces algorithmes afin d'observer numériquement ces vitesses de convergence en loi.

Références

- [1] D. Lamberton, G. Pagès. Recursive computation of the invariant distribution of a diffusion : The case of a weakly mean reverting drift. Stochastics and Dynamics, 2003.
- [2] G. Pagès, C. Rey. First and second order Central Limit Theorems for the recursive computation of the invariant distribution of a Feller process. <https://arxiv.org/abs/1801.05710>, 2018.

6 Automatique – Automatic Control with applications in Robotics and in Quantum Engineering

Enseignant référent : Ugo Boscain ugo.boscain@polytechnique.edu

A control system is a dynamical system on which one can act from outside via certain parameters that one can vary in time. Typical examples are for instance robots and satellites (indeed almost every dynamical system that one meets in engineering can be modelled as a control system). In mathematical terms one is faced with a problem of the following type :

$$\dot{x} = f(x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad u(.) : \mathbf{R} \rightarrow U \subset \mathbf{R}^m. \quad (1)$$

Typical questions that one meet in control theory are the following :

- for every x_1 is it possible to find T and $u(.)$ such that the solution of (1) satisfy $x(T) = x_1$? If not, which are the points that can be reached ?
- is it possible to solve the previous question for an arbitrarily small T ?
- find the control such that the corresponding trajectory steer x_0 in x_1 minimizing a cost. For instance a energy like cost as $\int_0^T |u(t)|^2 dt$.

The following projects concern applications in mechanics (control of a drone and the study of stability of a damped oscillator under time-varying perturbations) and in quantum engineering. Quantum engineering is today one of the most striking application of control theory. Example of problems are :

- computation of magnetic fields in nuclear magnetic resonance for medical imaging,
- realization of quantum gates in quantum computers,
- induction of chemical reaction via external fields (photochemistry).

6.1 Time Optimal Control for a UAV Drone (MAP 512)

Ugo Boscain ugo.boscain@polytechnique.edu

Ce sujet est proposé : en MAP512 (P2)

We consider the problem of controlling an unmanned aerial vehicle (UAV) flying at a constant altitude (HALE type) to provide a target supervision. We make the following assumptions on the UAV :

- the velocity of the UAV is assumed to be constant ;
- the UAV is assumed to be kinematically restricted by its minimum turning radius $r > 0$, or equivalently, its yaw angle is assumed to be constrained by an upper positive bound.

The UAV is modeled as a Dubins vehicle (i.e. a planar vehicle with constrained turning radius and constant forward velocity, see [1]).

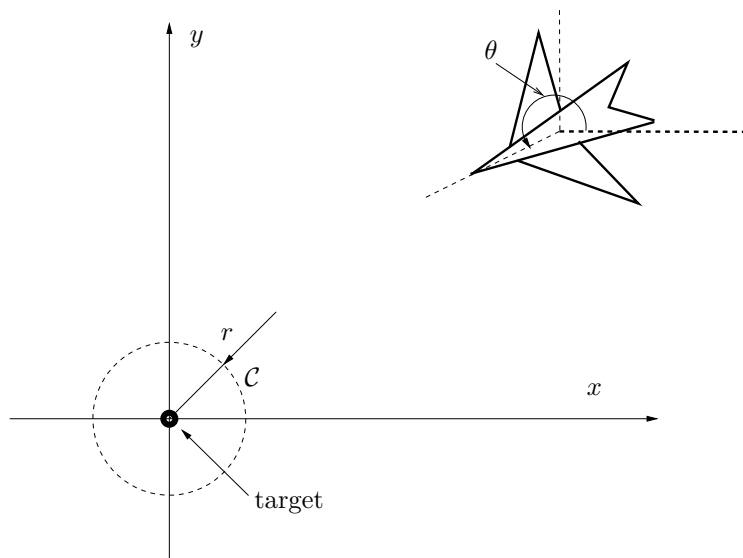
$$\begin{cases} \dot{x} = \cos \theta \\ \dot{y} = \sin \theta \\ \dot{\theta} = u(t). \end{cases} \quad (1)$$

with $(x, y, \theta) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ being the state (where $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ is the UAV's coordinate in the constant altitude plane, and θ the yaw angle), and $u : [0, T] \rightarrow [-u_{\max}, u_{\max}]$ being the control variable.

Note that the yaw angle θ is the angle made by the aircraft direction with respect to the x -axis. These equations express that the drone evolves on a perfect plane (perfect constant altitude), at perfect constant speed 1, moves in the direction of its velocity vector, and is able to turn right and left with a minimal turning radius $r = 1/u_{\max}$.

The purpose here is to find the time-optimal trajectory tracking the UAV from its initial position (x_0, y_0, θ_0) to a circle of minimal radius centred on the target (that is assumed to be placed at the origin) :

$$\mathcal{C} = \{(x, y, \theta) \mid x = r \sin \theta, y = -r \cos \theta\}.$$



The techniques that will be used are those of control theory (non-linear controllability, Pontryagin Maximum Principle, syntheses theory). The problem is not easy and a taste for geometry, analysis and numerical methods will be necessary.

Références

[1] A. A. Agrachev and Y. L. Sachkov. Control theory from the geometric viewpoint, volume 87 of Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Springer-Verlag, Berlin, 2004. Control Theory and Optimization, II.

6.2 Ensemble control of quantum systems (MAP 512)

Ugo Boscain ugo.boscain@polytechnique.edu

Ce sujet est proposé : en MAP512 (P2)

The problem of controlling quantum mechanical systems has undergone a huge development in recent years, motivated by its applications in manipulation of single spins, photons or atoms, optical spectroscopy, photochemistry, nuclear magnetic resonance, and quantum information processing (see, for instance, [1],[2],[3]) and references therein).

Here we are concerned with the problem of *ensemble controllability*, namely the problem of controlling using finitely many scalar controls (typically few of them, e.g., two or three) a family of systems having slightly different parameters or, equivalently, a quantum system for which certain parameters are unknown. Such a problem arises very often in practical applications. For instance, the spins in a nuclear magnetic resonance sample often see variations in the experimental parameters that characterize their dynamics.

The ensemble controllability problem is studied in quantum mechanics since a long time. In particular, it is known that the so-called *chirped pulses* for two-level systems have good robustness properties with respect to parameter uncertainties. Similarly, the so-called *counterintuitive pulses* for STIRAP processes in three-level quantum systems are known to realize a population transfer even if certain parameters are unknown.

In this project we will study a technique based on adiabatic approximation and on the presence of conical intersections between eigenvalues (see Figure 1). We are mainly considering the situation in which the unknown parameters vary in a one-dimensional set. We recall that eigenvalue intersections are generically conical for finite-dimensional systems having a real-symmetric (respectively, Hermitian) Hamiltonian in presence of 2 (respectively, 3) controls and that such a genericity property also extends to systems evolving in infinite-dimensional spaces.

This technique is based on the simple idea that if two levels of a quantum system are connected by a conical intersection, then generically a one-parameter perturbation transforms such a conical intersection in a one-dimensional manifold. Then an adiabatic path in the space of controls that passes through such a one-dimensional manifold realizes a transfer for all systems (see Figure 2).

It should be noticed that the technique that we will study here is the only one that applies to the ensemble control of quantum systems evolving in an infinite-dimensional Hilbert space.

The key tools for this project are **(i)** classical techniques of automatic control, **(ii)** a uniform adiabatic theorem for systems having conical eigenvalues intersections and **(iii)** a technical result guaranteeing that a Hamiltonian that depends \mathcal{C}^k on a parameter and whose eigenvalues, seen as functions of such a parameter, are conical, admits an orthonormal family of eigenstates depending \mathcal{C}^{k-1} on the parameter.

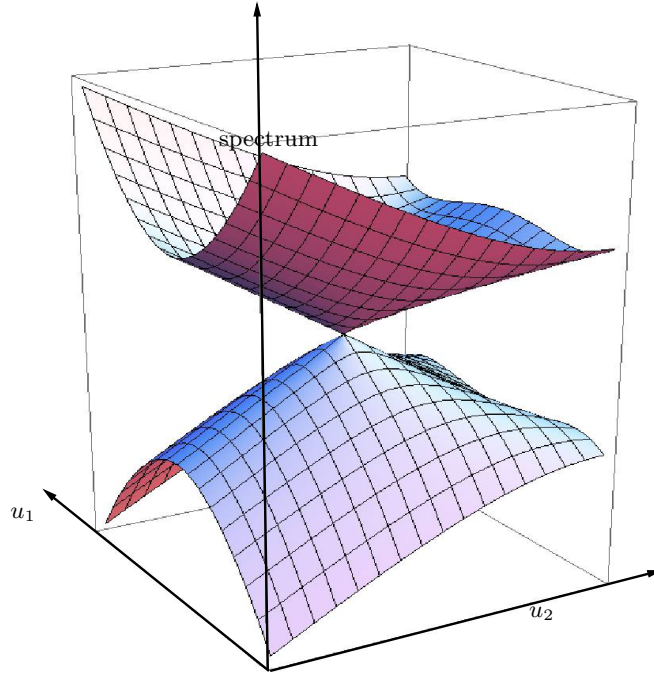


Figure 1 : A conical intersection in spectrum of a quantum system under the action of two controls.

Références

- [1] C. Altafini and F. Ticozzi. Modeling and control of quantum systems : an introduction. *IEEE Trans. Automat. Control*, 57(8) :1898-1917, 2012.
- [2] S. J. Glaser, U. Boscain, T. Calarco, C. P. Koch, W. Köckenberger, R. Kosloff, I. Kuprov, B. Luy, S. Schirmer, T. Schulte-Herbrüggen, D. Sugny, and F. K. Wilhelm. Training Schrödinger's cat : quantum optimal control. Strategic report on current status, visions and goals for research in Europe. *European Physical Journal D*, 69 :279, 2015.
- [3] D. D'Alessandro. Introduction to quantum control and dynamics. Applied Mathematics and Nonlinear Science Series. Boca Raton, FL : Chapman, Hall/CRC., 2008.
- [4] U. Boscain, F. Chittaro, P. Mason, and M. Sigalotti. Adiabatic control of the Schroedinger equation via conical intersections of the eigenvalues. *IEEE Trans. Automat. Control*, 57(8) :1970-1983, 2012.

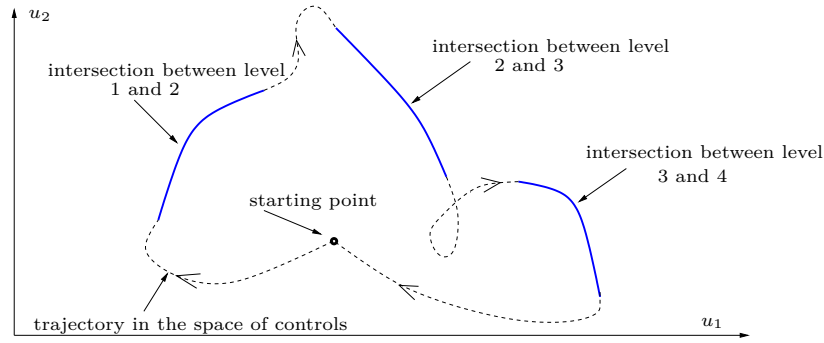


Figure 2 : Transition from the level 1 to the level 4 for a quantum system presenting conical intersections and unknown parameters.

6.3 Stability of a damped oscillator under time varying perturbations (MAP512)

Ugo Boscain ugo.boscain@polytechnique.edu

Ce sujet est proposé : en MAP512 (P2)

In engineering, one is often faced to the problem of studying the stability of a system subject to time varying perturbations. As for instance in analog electronics on in the study of earthquake resistant structures.

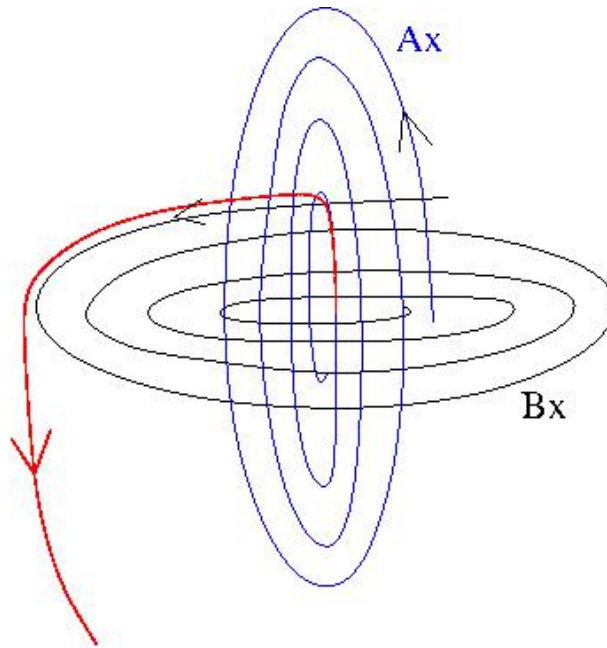
Purpose of this EA is to study the stability of a 2D system that can randomly switch among different asymptotically stable dynamics.

More precisely one would like to study the asymptotic stability of the following system

$$\dot{x} = u(t)Ax + (1 - u(t))Bx,$$

where A and B are 2×2 Hurwitz matrices and $u : \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$ is a function describing the action of an external time varying perturbation. We do not assume any particular structure on the perturbation. It may be periodic.

The following picture show that even if A and B determine two asymptotically stable dynamics, it may happen that the time varying system is not stable



Références

- [1] U. Boscain et Y. Chitour. Notes de cours Edition 2016/2017 MAP 561.
[http ://www.cmapx.polytechnique.fr/~boscain/AUTOMATICS/](http://www.cmapx.polytechnique.fr/~boscain/AUTOMATICS/).
- [2] Daniel, Liberzon, Daniel, Switching in systems and control. Systems & Control :
Foundations & Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2003.

7 EDP, analyse numérique et applications en physique, mécanique et biologie

Enseignant référent : Teddy Pichard teddy.pichard@polytechnique.edu

7.1 Dynamique de population et preuves assistées par ordinateur

Maxim Breden (CMAP), maxime.breden@polytechnique.edu

Période : P1, P2 ou P1+P2

Mots clés : Dynamique des populations, ségrégation spatiale, preuves assistées par ordinateur.

Le système de diffusion croisée ci-dessous, posé sur un domaine borné convexe Ω et complété par des conditions aux bords de Neumann, a été introduit (sous une forme plus générale) dans [4]

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta((d_1 + d_{12}v)u) + (r_1 - a_1u - b_1v)u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = d_2\Delta v + (r_2 - b_2u - a_2v)v. \end{cases} \quad (2)$$

Il est utilisé en dynamique des populations, pour modéliser des phénomènes de *ségrégation spatiale* pour des populations en compétition. Mathématiquement, cela revient à étudier les états stationnaires non homogènes du système (2). De nombreux travaux ont été réalisés sur la question, suggérant l'existence de très nombreux états stationnaires pour ce systèmes. L'utilisation de *preuves assistées par ordinateur* (voir [5] pour une brève introduction) a permis de décrire certains de ces états stationnaires de manière détaillé et rigoureuse [1].

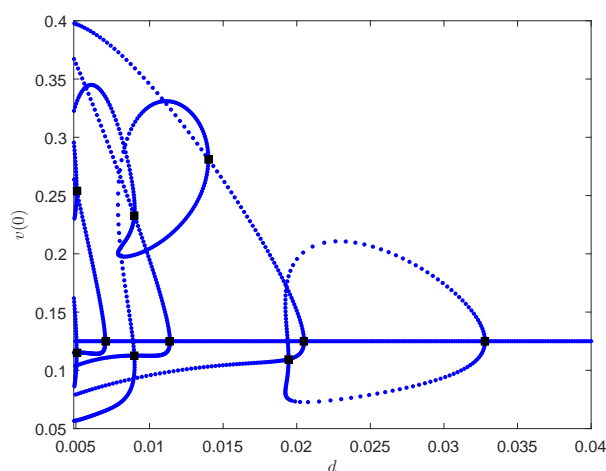


Diagramme de bifurcation d'états stationnaires pour (2), avec $\Omega = [0, 1]$, $r_1 = 5$, $r_2 = 2$, $a_1 = 3$, $a_2 = 3$, $b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $d_{12} = 3$, et $d_1 = d_2 = d$ le paramètre de bifurcation. Chaque point sur le diagramme correspond à un état stationnaire validé a posteriori dans [1].

Parmi les nombreux paramètres de ce système, d_{12} joue un rôle essentiel : il décrit à quel point les individus de la première espèce ont tendance à éviter les

individus de l'autre espèce. On peut notamment se demander ce qu'il advient des solutions de (2) si ce paramètre d_{12} est supposé très grand. La limite $d_{12} \rightarrow \infty$ a été étudiée à plusieurs reprises, voir notamment [2, 3] où un système limite est mis en évidence, et où l'existence d'une solution à ce système limite est démontrée. Cependant, la grande richesse des solutions de (2) laisse à penser qu'il pourrait également exister plus d'une solution au système limite.

- Le premier objectif de ce projet est d'étudier numériquement le système limite décrit dans [2, 3], afin de tenter de mettre en évidence différents états stationnaires.
- Dans un second temps, on cherchera à démontrer rigoureusement l'existence des solutions obtenues numériquement, en s'inspirant des techniques de preuves assistées par ordinateur utilisées dans [1].

Aucune connaissance préalable concernant ces techniques de preuves assistées par ordinateur n'est requise. Les principaux outils mathématiques mis en jeu seront les séries de Fourier (à la fois d'un point de vue théorique et numérique), des théorèmes de point fixe et la méthode de Newton.

Références

- [1] M. Breden and R. Castelli. Existence and instability of steady states for a triangular cross-diffusion system : a computer-assisted proof. *Journal of Differential Equations*, 264(10) :6418–6458, 2018.
- [2] Y. Lou, W.-M. Ni, and S. Yotsutani. On a limiting system in the lotka-volterra competition with cross-diffusion. *Discrete and continuous dynamical systems*, 10(1/2) :435–458, 2004.
- [3] W.-M. Ni. Diffusion, cross-diffusion, and their spike-layer steady states. *Notices of the AMS*, 45(1) :9–18, 1998.
- [4] N. Shigesada, K. Kawasaki, and E. Teramoto. Spatial segregation of interacting species. *Journal of theoretical biology*, 79(1) :83–99, 1979.
- [5] J. B. van den Berg and J.-P. Lessard. Rigorous numerics in dynamics. *Notices Amer. Math. Soc.*, 62(9), 2015.

7.2 Couplage des méthodes FEM et BEM pour des problèmes de diffraction

Marcella Bonazzoli (CMAP, Inria), marcella.bonazzoli@inria.fr

Période : P1 ou P2

Mots clés : éléments finis, éléments de frontière, diffraction acoustique

Tout comme la méthode des éléments finis (FEM en anglais, pour Finite Element Method) est une discrétisation de type Galerkin d'une équation aux dérivées partielles, la méthode des éléments de frontière (BEM en anglais, pour Boundary Element Method) est une discrétisation de type Galerkin d'une équation intégrale de bord. Une équation intégrale de bord est une reformulation du problème en

une équation posée uniquement sur le bord de l’objet d’intérêt et impliquant un opérateur intégral. Par conséquent, la discrétisation d’une équation intégrale de bord nécessite uniquement des maillages surfaciques du domaine de calcul, ce qui implique une réduction considérable du nombre d’inconnues du système linéaire résultant. Toutefois, la nature non-locale des noyaux intégraux mis en jeu fait apparaître des matrices denses, ce qui implique un coût important des calculs si des techniques de compression adaptées ne sont pas utilisées. Par ailleurs, la méthode des éléments de frontière permet de traiter un domaine de calcul illimité sans devoir le tronquer avec des conditions au bord artificielles, ce qui est très avantageux par exemple pour les problèmes de diffraction qui constituent les modèles de nombreuses applications. Il est important de remarquer que une formulation par équation intégrale de bord n’est possible que si les propriétés physiques du milieu sont constantes par morceaux.

Il est donc profitable de coupler les deux méthodes, afin de profiter des avantages respectifs. Pour le cas d’un seul objet diffractant (ou plusieurs objets bien séparés), on compte trois stratégies classiques de couplage FEM-BEM : le couplage de Johnson-Nédélec [3], de Costabel [2, §7] et de Bielak-MacCamy [1]. Un premier objectif sera d’implémenter et comparer ces trois stratégies dans le logiciel FreeFEM (<https://freefem.org/>) ou Gypsilab (<https://github.com/matthieuaussal/gypsilab>), pour un problème de diffraction acoustique.

Ensuite on pourra considérer des problèmes de diffraction caractérisés par un assemblage arbitraire d’objets, qu’on représente par des sous-domaines différents : l’idée est d’isoler des sous-domaines homogènes où on peut appliquer la méthode des éléments de frontière et dans les autres sous-domaines très hétérogènes on applique la méthode des éléments finis. L’analyse et le traitement numérique de ce type de problèmes multidomaines devient problématique dans le cas, souvent rencontré dans les applications, où le découpage en sous-domaines comporte des points de jonction, c’est-à-dire des points du domaine de calcul où 3 sous-domaines ou plus sont adjacents.

Références

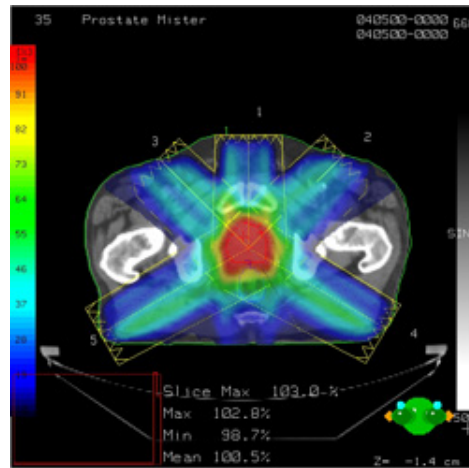
- [1] J. Bielak and R. C. MacCamy. An exterior interface problem in two-dimensional elastodynamics. *Quart. Appl. Math.*, 41(1) :143–159, 1983/84.
- [2] M. Costabel. Principles of boundary element methods. In *Finite elements in physics (Lausanne, 1986)*, pages 243–274. North-Holland, 1987.
- [3] C. Johnson and J.-C. Nédélec. On the coupling of boundary integral and finite element methods. *Math. Comp.*, 35(152) :1063–1079, 1980.

7.3 Optimisation de dose en radiothérapie

Teddy Pichard (CMAP), teddy.pichard@polytechnique.edu

Période : P1 ou P2

Mots clés : Contrôle optimal, cinétique linéaire, HPC, radiothérapie



Les traitements de radiothérapie consistent en l'irradiation des cellules cancéreuses en vue de leur destruction. La source peut être placée soit à l'extérieur du patient (radiothérapie externe) soit à l'intérieur (brachythérapie). Pour la modélisation, les radiations sont souvent vues comme des faisceaux de particules (dualité onde-corpuscule) transportées à travers un milieu et déposant leur énergie par des effets collisionnels. Ceci permet de modéliser ces radiations par des équations cinétiques linéaires (Boltzmann linéaire, Fokker-Planck) ou par des approches plus empiriques et moins coûteuses numériquement ([1, 2]). La quantité d'intérêt pour les physiciens médicaux est la quantité d'énergie déposée par les radiations par unité de masse, généralement appelée la dose (en Gray). En première approximation, la dose est considérée comme directement responsable de la mort cellulaire, l'objectif est donc d'avoir une dose maximale dans la tumeur et minimale dans les tissus sains. Or les lois de la physique ne permettent pas une telle déposition et un calcul d'optimisation est donc nécessaire.

Objectif principal : Dans un premiers temps, l'objectif sera de construire d'un point de vue théorique puis d'implémenter en Fortran, C++, python ou julia, un algorithme de type gradient ([3, 4]) pour minimiser la distance L^2 entre la dose physique déposée et une dose optimale donnée sous contrainte de satisfaire les lois de la physique en 1D. On comparera les méthodes "optimize-then-discretize" and "discretize-then-optimize".

Objectifs secondaires : Ensuite, plusieurs directions d'étude peuvent être proposées :

- Calcul scientifique/HPC : Étendre le problème à des cas plus pratiques : 2D-3D, système avec plusieurs familles de particules couplées, source physique...
- Analyse numérique/calcul scientifique/EDP : Utiliser la "méthode des moments" ([1]) pour la résolution de l'équation cinétique linéaire (directe et adjointe) et étudier l'influence du choix des conditions de bord ainsi que le choix de la fermeture.

- EDP : Étudier le caractère bien-posée du système d'équations ainsi que du problème d'optimisation (contraintes au bord, couplées...) et avec d'autres opérateurs de collision (Boltzmann, Fokker-Planck, CSDA, BGK...).
- Physique/biologie : Se rapprocher des cas pratiques avec une physique collisionnelle plus réaliste. Étudier les effets de la dose sur la mort cellulaire.

Références

- [1] G. C. Pomraning, *The equations of radiation hydrodynamics*, Pergamon Press (1973)
- [2] P. Mayles et al, *Handbook of radiotherapy physics : Theory and practice*, Taylor & Francis (2007)
- [3] F. Tröltzsch, *Optimal control of partial differential equations : Theory, methods and applications*, American Mathematical Society (2005)
- [4] G. Allaire, *Analyse numérique et optimisation : Une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique*, (voir aussi les cours MAP412 et MAP435), les éditions de l'école polytechnique (2012)

7.4 Schémas équilibres et asymptotic preserving pour les systèmes hyperboliques en régime diffusif

Teddy Pichard (CMAP), teddy.pichard@polytechnique.edu

Période : P1 ou P2

Mots clés : EDP, Volumes Finis, Schémas de Godunov, AP, WB

Contexte : De nombreux problèmes issues de la physique, de la mécanique ou de la biologie se ramènent à l'étude de systèmes hyperboliques avec terme source de la forme

$$U_t + F(U)_x = S(U). \quad (3)$$

L'étude théorique et la résolution numérique de ce type d'équations présentent de nombreuses difficultés, notamment dû à la non-linéarité de l'équation et l'existence de solution non-régulière. On mentionne deux autres difficultés :

- Dans les cas où le terme source est compensé par le terme de flux au niveau continu, cette équilibre entre différents termes permet à la solution d'atteindre des régimes dits équilibres, par exemple un équilibre stationnaire

$$F(U)_x = S(U).$$

Or une discrétisation naïve de (3) ne préserve pas nécessairement telles équilibres continues. Une technique couramment utilisée pour capturer ces équilibres consiste à décentrer le terme source en accord avec le décentrement des termes de flux, on parle de schémas équilibres (WB;[1, 2]).

- En appliquant un adimensionnement approprié des variables (x, t) , le système (3) peut dégénérer vers une équation parabolique. On prendra pour exemple

$$\begin{cases} \epsilon^2 u_t - \epsilon u_x &= \frac{v - u}{2}, \\ \epsilon^2 v_t + \epsilon v_x &= \frac{u - v}{2}, \end{cases}$$

qui dégénère vers une équation de la chaleur sur u et sur v quand ϵ tend vers 0. Là encore, l'erreur d'approximation faite par une discrétisation naïve de (3), notamment ne prenant en compte ce changement de structure des équations, n'est pas nécessairement (bien) contrôlé à la limite $\epsilon \rightarrow 0$. Les techniques permettant de capturer numériquement ces régimes diffusifs se basent souvent sur les techniques de discrétisation WB pour le terme source dans de tels systèmes.

Objectif principal : On commencera par étudier la structure (ondes) des solutions des équations de la forme (3) dans le cas scalaire puis vectoriel sur quelques exemples. On étudiera et implémentera quelques discrétisation possible des termes sources sur quelques exemples et on étudiera les propriétés WB et AP.

Objectifs secondaires : On pourra ensuite s'attaquer à des modèles plus complexes issues de la dynamique des fluides (Saint-Venant) ou de la physique des plasmas (Vlasov-Poisson).

Références

- [1] J. M. Greenberg and A. Y. Leroux, *A well-balanced scheme for the numerical processing of source terms in hyperbolic equations*, SIAM J. Numer. Anal., 33(1) :1–16, 1994.
- [2] L. Gosse, *Computing Qualitatively Correct Approximations of Balance Laws*, volume 2, Springer-Verlag, 2013.
- [3] S. Jin, *Asymptotic preserving (AP) schemes for multiscale kinetic and hyperbolic equations : a review*, Riv. Mat. Univ. Parma, 3 :177–216, 2012.

7.5 Méthodes de moments pour la modélisation des sprays turbulents

Frédérique Laurent-Nègre (EM2C et Fédération de Mathématiques de Centrale-Supélec), frederique.laurent@centralesupelec.fr

Période : P1, P2 ou P1+P2

Mots clefs : méthode de moments, hyperbolicité, schémas numériques, réalisabilité

La modélisation des sprays de carburant représente un enjeu majeur pour la simulation de brûleurs aéronautiques ou de chambres de combustion de moteurs

d'automobile. En effet, ce sont l'évaporation de ce spray et la combustion du carburant gazeux ainsi produit qui vont alimenter la combustion. Il convient notamment d'avoir une bonne description de la dynamique des gouttes afin de pouvoir prédire le champs de fraction massique de combustible en phase vapeur issue de leur évaporation et ainsi la combustion.

Pour simuler de telles configurations, deux stratégies sont possibles : des méthodes lagrangienne de suivi de trajectoire des particules et des méthodes eulériennes, qui s'intéressent au spray dans son ensemble par le biais de quantités macroscopiques comme la densité en nombre de particules ou la quantité de mouvement globale du spray. Les méthodes eulériennes, dites de moments, sont attractives du fait d'un coût en général modéré et d'une plus grande facilité de parallélisation. Comme dans le cas de la dynamique des gaz, ces méthodes de moments sont dérivées d'une équation de type Boltzmann qui permet de décrire la dynamique des particules de manière statistique, via sa distribution en vitesse. Cependant, pour les gouttes assez inertielles et/ou dans des écoulements turbulents, des phénomènes de type croisements de trajectoire entrent en jeu et doivent être pris en compte. Une augmentation de l'ordre des moments (typiquement jusqu'à l'ordre 4) est alors nécessaire et de nouvelles fermetures sont alors développées. C'est une problématique similaire à celle de la dynamique des gaz hors équilibre. Les enjeux en terme de modélisation viennent de ces fermetures qui doivent pouvoir être bien définies et donner un système hyperbolique, ce qui assure ainsi la stabilité du modèle vis à vis de faibles perturbations. En terme numérique, un point clef est de développer des schémas numériques précis et réalisables, c'est à dire qui n'amènent pas à des moments non physiques : les jeux de moments choisis ne sont physiques que sous certaines contraintes, d'autant plus complexes que l'ordre des moments augmente [4]. Les schémas devront naturellement satisfaire ces contraintes, assurant ainsi la robustesse de la méthode.

Objectif premier : Dans un premier temps, l'objectif est de tester différentes méthodes de moments d'ordres élevés qui ont été proposées en 1D dans la littérature [1–3]. On s'intéressera notamment à leur hyperbolicité. Puis, on les discrétisera par un schéma numérique réalisable d'ordre 1 et on les implémentera en Fortran, python ou matlab. Cela permettra de les comparer sur quelques cas tests.

Objectifs secondaires : Ensuite, plusieurs directions pourront être explorées :

- Schéma numériques d'ordre élevé : Il s'agira de passer à des schémas numériques d'ordre 2. Ceux-ci devront encore être réalisables, ce qui représente la principale difficulté du travail. Différentes stratégies de montée en ordre pourront être envisagées.
- Passage au 2D/3D : Le passage au cas multi-dimensionnel est un passage délicat. Des stratégies ont pu être proposées, mais ne semblent pas mener à des systèmes inconditionnellement hyperboliques. Il s'agira ici de tester l'hyperbolicité de la fermeture proposée dans [1] dans le cas d'un jeu de moments d'ordre 0 à 4 issu de la base de Levermore et de tester la méthode dans une configuration 2D.

Références

- [1] N. Böhmer and M. Torrilhon. Entropic quadrature for moment approximations of the boltzmann-bgk equation. *Journal of Computational Physics*, 401 :108992, 2020.
- [2] C. Chalons, R. O. Fox, F. Laurent, M. Massot, and A. Vié. Multivariate Gaussian extended quadrature method of moments for turbulent disperse multiphase flow. *Multiscale Modeling and Simulation : A SIAM Interdisciplinary Journal*, 15(4) :1553–1583, 2017.
- [3] R. O. Fox, F. Laurent, and A. Vié. Conditional hyperbolic quadrature method of moments for kinetic equations. *Journal of Computational Physics*, 365 :269–293, 2018.
- [4] W. Gautschi. Orthogonal polynomials : applications and computation. *Acta numerica*, 5 :45–119, 1996.

7.6 Optimisation de formes et transport optimal

Samuel Amstutz (CMAP), samuel.amstutz@polytechnique.edu

Période : P1, P2 ou P1+P2

Mots clés : Optimisation de formes, transport optimal

La notion de dérivée de forme évalue la variation d’une fonctionnelle $J(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, par rapport à une perturbation de la frontière $\partial\Omega$. Elle est classiquement définie et calculée par la méthode dite du difféomorphisme [1, 2], c’est-à-dire en appliquant les techniques du calcul différentiel dans un espace de déformations.

Le transport optimal munit l’ensemble des densités (mesures positives) sur un domaine D d’une métrique naturelle, dont la construction est intrinsèquement liée à la notion de déplacement. La théorie des mouvements minimisants [3] associe un schéma itératif de type "plus forte pente" d’une fonctionnelle de densité selon cette métrique à une équation différentielle d’évolution, par passage à la limite lorsque le pas tend vers 0.

Des méthodes d’optimisation permettent de calculer le flot minimisant lorsque la fonctionnelle est linéaire en la densité. En se restreignant à des fonctions caractéristiques, cela conduit à un algorithme d’optimisation géométrique sur maillage fixe. On envisagera des fonctionnelles plus générales par linéarisation, en lien avec la dérivée de forme.

Objectifs :

- Comprendre les bases du transport optimal (travail bibliographique).
- Implémenter sous FreeFEM, Matlab ou Python le schéma des mouvements minimisants pour la résolution de problèmes d’optimisation géométrique d’une intégrale volumique ne mettant pas en jeu d’équations aux dérivées partielles. Différentes méthodes d’optimisation pourront être comparées.
- Préciser au moins formellement le cadre théorique reliant dérivée de forme et transport optimal.
- Etendre la méthode pour aborder des problèmes classiques de conception optimale en mécanique, comme la minimisation de la compliance en élasticité linéaire.

Références

- [1] G. Allaire, *Conception optimale de structures*, Springer, 2007.
- [2] A. Henrot, M. Pierre, *Variation et optimisation de forme*, Springer, 2005.
- [3] R. Jordan, D. Kinderlehrer, F. Otto, *The variational formulation of the Fokker-Planck equation*, SIAM. J. Math. Anal., 1998.

7.7 Optimisation des supports en Fabrication Additive

Benjamin Bogosel (CMAP), benjamin.bogosel@polytechnique.edu

Période : P1 ou P2

Mots clés : Optimisation de forme, fabrication additive

Le but de ce projet est d'appliquer les méthodes d'optimisation de formes à des questions de supportage en impression 3D. Il est bien connu qu'en utilisant une "imprimante 3D avec depose fil plastique" il n'est pas possible de construire des surfaces qui sont proches du plan horizontal (on appellera ces régions "overhang" dans la suite). Néanmoins, il est parfois nécessaire d'imprimer des pièces pour lesquelles il n'est pas possible d'éviter ce type de surfaces. Dans ces cas des structures support sont nécessaires pour assurer la construction correcte de la pièce. En plus, vu que différentes orientations de la pièce vont avoir besoin des supports différents, il peut aussi être intéressant d'optimiser l'orientation de la pièce avant de générer ses supports.

L'objectif de ce projet est multiple :

- Utiliser certains modèles simples présentes dans [1] pour trouver la meilleure orientation de la pièce pendant la fabrication et, une fois l'orientation choisie, concevoir des supports comme résultat d'un processus d'optimisation de forme.
- Concevoir des cas tests pertinents pour lesquels l'algorithme de génération de supports peut être appliqué et réaliser l'impression 3D au FabLab de l'X. Pour avoir des simulations rapides, on commencera par le cas 2D extrudé. Dans une phase plus avancée, des simulations 3D pourront être envisagées.
- (pour aller plus loin) Proposer d'autres stratégies de modélisation/simulation/optimisation pour générer des supports optimisés.

Planning possible :

1. Introduction rapide à l'optimisation de formes, prise en main du logiciel FreeFEM [2], qui permet de résoudre des problèmes mécaniques à l'aide des éléments finis. Des exemples introductifs simples seront fournis pour avoir une base de départ.
2. Lecture de [1] et validation numérique des modèles proposés pour supporter les surfaces en overhang. Proposition des nouveaux cas tests. Étude de la dépendance du support par rapport à l'initialisation et aux paramètres du problème.

3. Validation expérimentale au FabLab.

Le travail sur ce projet pourra aider à développer des compétences dans les domaines suivants : utilisation du logiciel FreeFEM [2], optimisation de formes, construction des maillages, remaillage avec le logiciel MMG, impression 3D, modélisation.

Références

- [1] G. Allaire, M. Bihl, B. Bogosel, *Support optimization in additive manufacturing for geometric and thermo-mechanical constraints*, Structural and Multidisciplinary Optimization, 2020
- [2] F. Hecht et al : <https://freefem.org/>