

控制器設計報告

題目：ball and beam

學生資料：

成績座號	學號	姓名
67	408507159	呂侑宸
01	207440016	陳柏全
58	407500593	郭典泰
21	407500122	李承洋

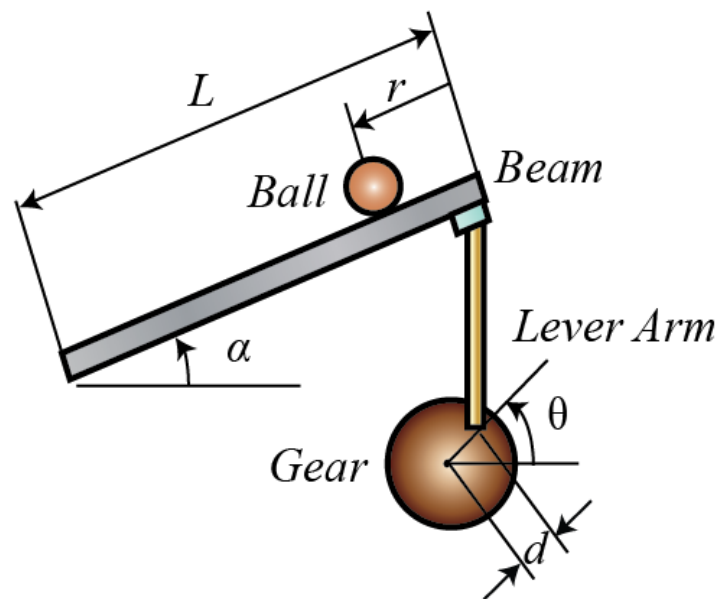
壹、問題敘述:

將球(Ball)放置在橫樑(Beam)上，允許球沿著橫樑滾動。

槓桿臂(Lever Arm)的一端連接至橫樑，另一端則連接至齒輪(Gear)。當齒輪轉動角度(θ)，槓桿臂帶動橫樑改變角度(α)，重力使得球滾下來。我們要設計一控制器，控制齒輪轉動角度(θ)讓球移動至指定位置。

一、受控體

1. 物理模型



2. 系統參數

符號簡介		
m	球的質量	0.11kg
R	球的半徑	0.015m
d	槓桿臂底端到齒輪中心的長度	0.03m
g	重力加速度	9.8m/s ²
L	橫樑長度	1.0m
J	球的轉動慣量	9.99*10 ⁻⁶ (kg.m ²)
r	球與連接端的距離	
alpha	橫樑與水平的夾角	
theta	齒輪從水平的轉動角度	

貳、控制器設計

方法一：PID 控制

一、設計目標

PID 方法的設計目標:

1. 系統穩定
2. 安定時間小於 3s
3. overshoot 小於 5%

二、

首先由物理模型可列出物理平衡式:

$$0 = \left(\frac{J}{R^2} + m \right) \ddot{r} + mg \sin \alpha - mr\dot{\alpha}^2 \quad (2.1)$$

令 α 趨近於 0 帶入式子(2.1)然後移項:

$$\left(\frac{J}{R^2} + m \right) \ddot{r} = -mg \frac{d}{L} \alpha \quad (2.2)$$

依據衡量角度和齒輪角度可以近似寫成下列式子:

$$\alpha = \frac{d}{L} \theta \quad (2.3)$$

然後將(2.3)代入(2.2)

$$\left(\frac{J}{R^2} + m\right)\ddot{r} = -mg \frac{d}{L} \theta \quad (2.4)$$

對(2.4)式子進行拉斯轉換

$$\left(\frac{J}{R^2} + m\right)R(s)s^2 = -mg \frac{d}{L} \theta(s) \quad (2.5)$$

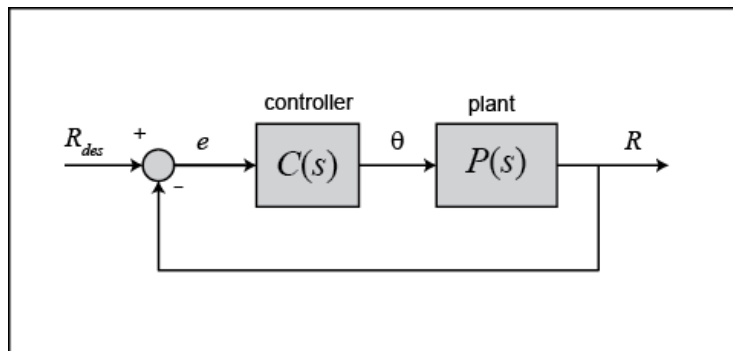
將式子(2.5)做整理，將 $R(s)$ ， $\theta(s)$ 移到同一邊即可得出 transfer function

$$P(s) = \frac{R(s)}{\theta(s)} = -\frac{mgd}{L\left(\frac{J}{R^2} + m\right)s^2} \quad (2.6)$$

將系統參數代入物理模型，可得受控體轉移函數為

$$C(s) = \frac{R(s)}{\theta(s)} = \frac{0.21}{s^2} \quad (2.7)$$

針對圖一控制系統架構，設計 改善暫態及穩態性能。



(圖一)

$$\text{控制器為 } C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s}$$

然後設定 K_p , K_i , K_d

三、程式

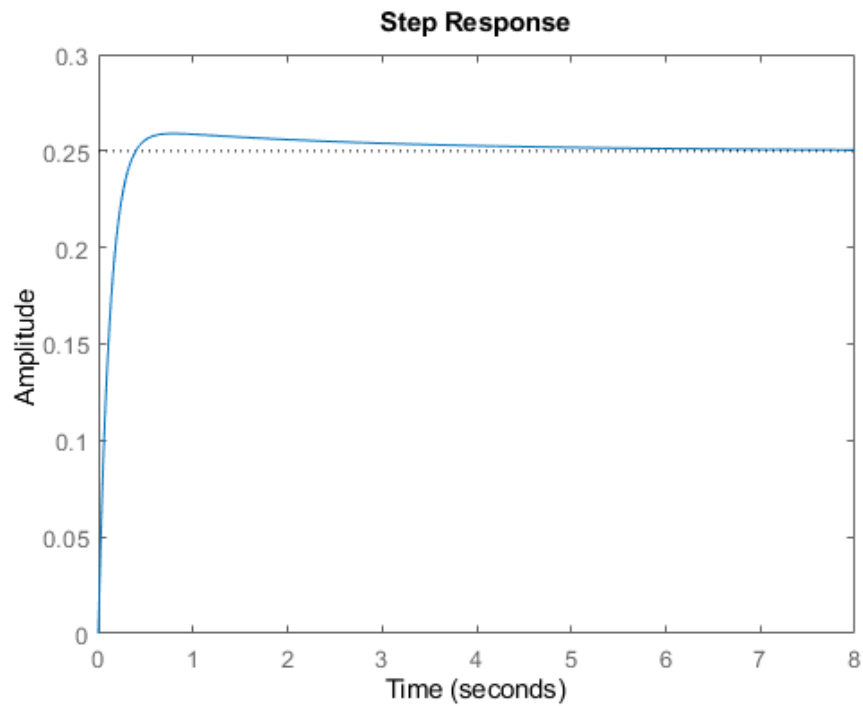
```
clear
m = 0.111; %各項參數
R = 0.015;
g = -9.8;
L = 1.0;
d = 0.03;
J = 9.99e-6;
s = tf('s');
P_ball = -m*g*d/L/(J/R^2+m)/s^2;

Kp = 15;          %Proportional gain
Ki = 0;           %Integral gain
Kd = 40;          %Derivative gain.
C = pid(Kp,Ki,Kd)
sys=feedback(C*P_ball,1)

S = stepinfo(0.25*sys)
step(0.25*sys)
```

四、設計目標驗證

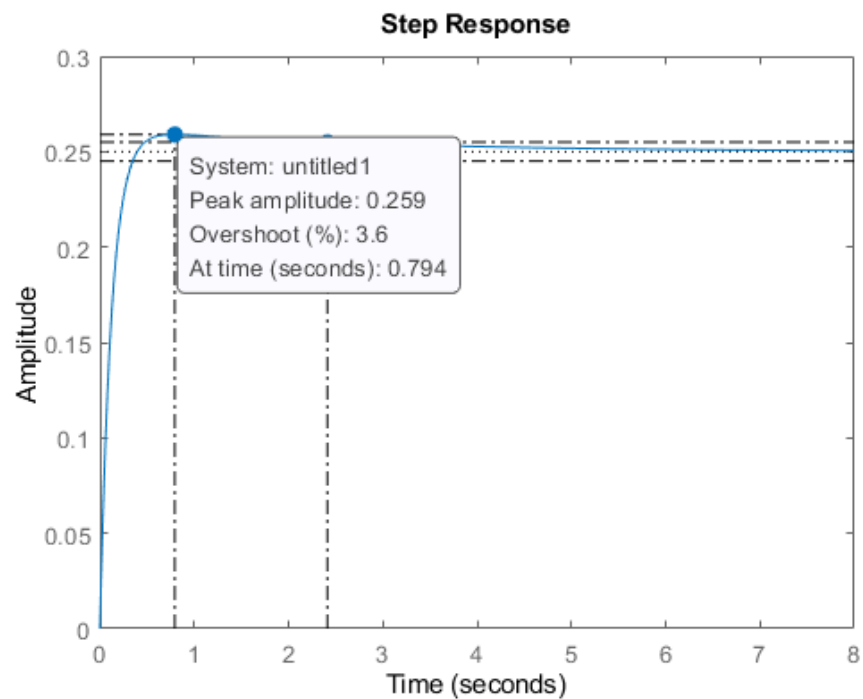
1. 具 PID 控制器系統之步階響應



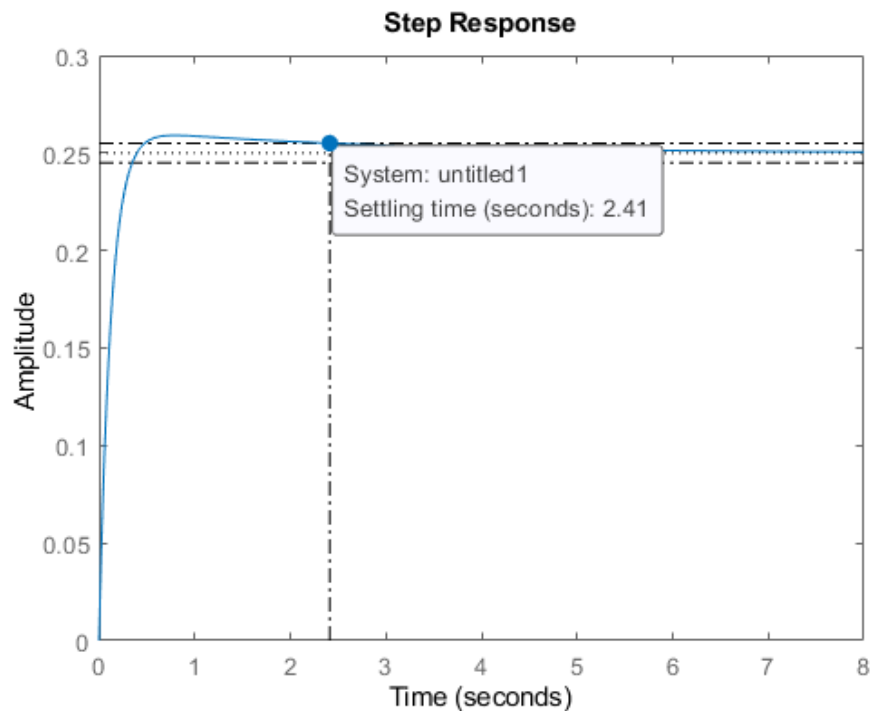
具 PID 控制器系統-步階響應圖

2. 系統性能驗證

- a. 百分超越量為 $\%OS = 3.6$ ，符合目標小於 5%，符合設計要求。



b. 單位步階響應的安定時間為 $T_s = 2.41$ ，符合目標小於 3s，符合設計要求



方法二：狀態空間控制設計方法：

一、設計目標

狀態空間設計方法設計目標：

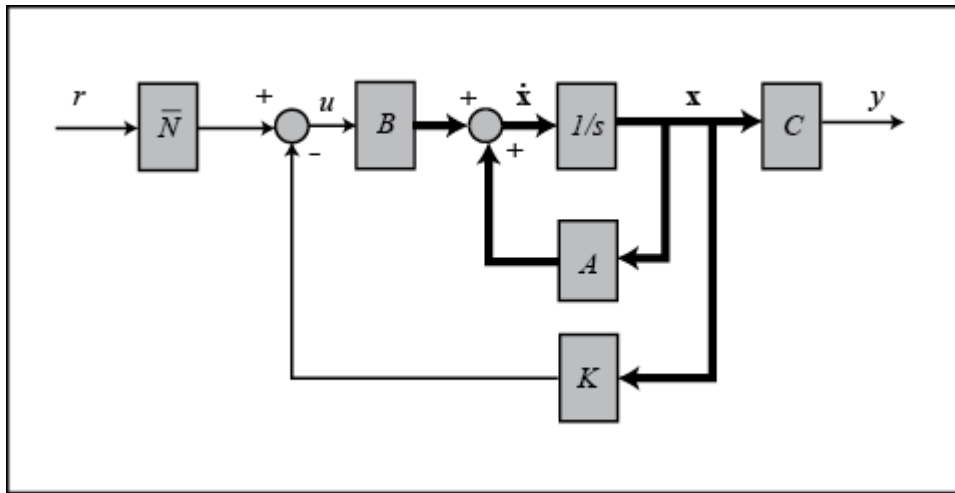
1. 系統穩定在 0.25m 處
2. 安定時間小於 3s
3. overshoot 小於 5%

二、

運用物理系統推導，求出 Ball & Beam 系統之狀態空間。輸入為齒輪從水平的轉動角度 (theta)，輸出為球與連接端的距離(r)。狀態空間物理模型捨棄齒輪和槓桿臂改為放置一馬達在橫樑中心轉動橫樑，控制力輸入改為馬達力矩(torque)，輸出項目為球與連接端的距離(r)和角度(α)。狀態空間表示如下：

$$\begin{bmatrix} \dot{r} \\ \ddot{r} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-mg}{(\frac{J}{R^2} + m)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \\ \alpha \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

且為了達到追蹤的目的,又加入 \bar{N} 以減少穩態誤差。控制系統架構圖和下:



三、程式:

```

clc
clear
m = 0.111;
R = 0.015;
g = -9.8;
J = 9.99e-6;

H = -m*g/(J/(R^2)+m);

A = [0 1 0 0
      0 0 H 0
      0 0 0 1
      0 0 0 0];
B = [0;0;0;1];
C = [1 0 0 0];
D = [0];

ball_ss = ss(A,B,C,D);

p1 = -2+2i;%極點
p2 = -2-2i;
p3 = -20;
p4 = -80;

```

```

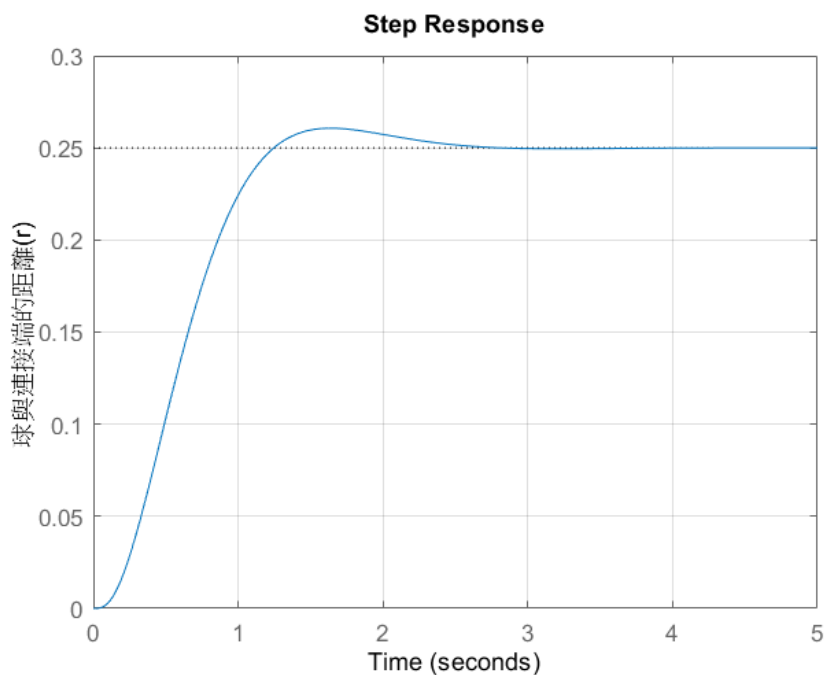
K = place(A,B,[p1,p2,p3,p4])
    s = size(A,1);
    Z = [zeros([1,s]) 1];
    N = inv([A,B;C,D])*Z';
    Nx = N(1:s);
    Nu = N(1+s);
    Nbar=Nu + K*Nx;

%Nbar=rscale(A,B,C,D,K);
t = 0:0.01:5;
u = 0.25*ones(size(t));

sys_cl = ss(A-B*K,B,C,D); %State-space model
%[y,t,x] = lsim(Nbar*sys_cl,u,t)
step(0.25*Nbar*sys_cl,t)
%plot(t,y)
%hold on
grid on; %顯示網格線
xlabel('Time'),ylabel('球與連接端的距離(r)'); %x,y標籤

```

四、設計目標驗證



系統穩定在 0.25m 處

安定時間小於 3s

overshoot 小於 5%

符合所求!

方法三:非線性設計方法

由物理模型可列出物理平衡式

$$0 = \left(\frac{J}{R^2} + m\right) \ddot{r} + mg \sin \alpha - m r \ddot{\alpha}^2$$

依題意馬達在橫樑中心轉動橫樑，控制力輸入為施加到橫樑上的馬達力矩(torque):

$$\ddot{\alpha} = \text{lu}$$

等號左側僅保留二次微分項，其他次數項、係數經由移項整理可得兩個式子

$$\ddot{r} = \frac{-mg \sin \alpha + mr\ddot{\alpha}^2}{\frac{J}{R^2} + m}$$

$$\ddot{\alpha} = lu$$

將狀態定為：

$$X = \begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \\ \alpha \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}, \dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \ddot{r} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix}$$

而 \dot{X} 為 X 和 u 所組成函數

$$\dot{X} = f(X, u)$$

將前面物理意義得到的兩式子代入， \dot{X} 可改用 X 裡的元素 α ，以及 u 表示，輸出 Y 值為 r ，可得非線性狀態方程式：

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \ddot{r} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \frac{-mg \sin \alpha + mrlu}{\frac{J}{R^2} + m} \\ \dot{\alpha} \\ lu \end{bmatrix}$$

$$Y = h(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \\ \alpha \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}$$

參、問題敘述：

一輪型車在二維平面移動，其運動方程式可描述如下：

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= v_x(t) \\ \dot{y}(t) &= v_y(t) \end{aligned}$$

其中 $(x(t), y(t))$ 代表在時刻 t 的位置座標， $v_x(t)$ 及 $v_y(t)$ 則分別代表時刻 t 在 x 方向及 y 方向的速度。假設 $t = 0$ 時輪型車在原點，試分別設計控制法則，控制 $v_x(t)$ 及 $v_y(t)$ ，以達成下列目標。

(i) 目標 1: 7 秒內到達指定位置 (3,1)。

(ii) 目標 2: 7 秒內繞「蛋捲廣場一周」，假設為一圓形，圓心 (3,1) 半徑 1。

注意：兩問題初始位置皆在原點。請附上詳細解題過程(含 a. 控制系統方塊圖；b. 控制增益如何得到，解出增益的說明及程式碼；c. $x(t)$ 圖形， $y(t)$ 圖形，軌跡圖，圖形的程式碼或 Simulink 圖)。

狀態空間式：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix}$$

程式

```
1 -   clc
2 -   clear
3 -   A = [0 0
4 -       0 0];
5 -   B = [1 0
6 -       0 1];
7 -   C = [1 0
8 -       0 1];
9 -   D = [0];
10
11 -   egg_ss= ss(A,B,C,D);
12 -   p1=-0.4+1;
13 -   p2=-0.4-1;
14 -   |
15 -   K = place(A,B,[p1,p2])
16
```

Command Window

K =

```
-0.6000    0
      0    1.4000
```

Simulink:

