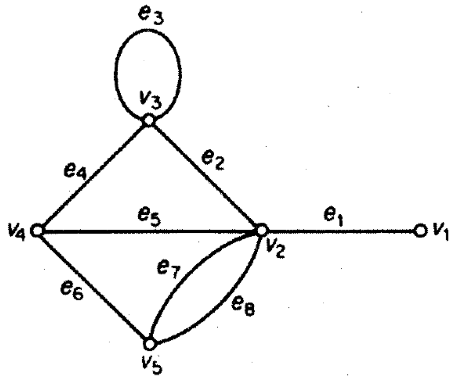
Grafos Hamiltonianos

Teoria dos Grafos - 2020

Prof. Roberto C. de Araujo

Um **caminho hamiltoniano** em um grafo G é um caminho que contém todos os vértices de G.

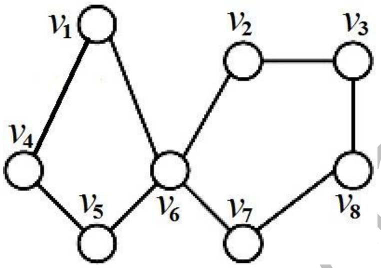
Exercício: O grafo abaixo tem um caminho hamiltoniano? Justifique.



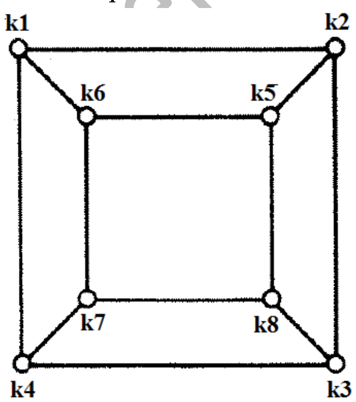
Um **circuito hamiltoniano** em um grafo G é um circuito que contém todos os vértices de G.

Exercício: O grafo anterior tem um caminho hamiltoniano? Justifique.

Exercício: O grafo abaixo tem um caminho hamiltoniano? Justifique.



Exercício: O grafo abaixo tem um caminho hamiltoniano? Justifique.



Um grafo G é **hamiltoniano** se G contém um circuito hamiltoniano.

Ao contrário do que ocorre com os grafos eulerianos, não se conhece nenhum "teorema poderoso" que caracterize precisamente os grafos hamiltonianos. Isto é, não existe nenhum teorema da forma "*um grafo G é hamiltoniano sse G tem **tal propriedade***". Dispomos apenas dos teoremas abaixo.

Teorema. Se G é um grafo hamiltoniano então, para todo subconjunto próprio $S \subseteq VG$, $c(G-S) \leq |S|$.

Os teoremas abaixo são baseados em: "*se um grafo G tiver **MUITAS** arestas então G é hamiltoniano*".

Teorema. (Dirac, 1952)
Se G é um grafo simples com $|VG|=n$ e $g(v) \geq n/2$ para todo $v \in VG$, então G é hamiltoniano.

Teorema. (Ore, 1960)
Se G é um grafo simples com $|VG|=n \geq 3$ tal que para quaisquer vértices distintos e não adjacentes u e v, $g(u)+g(v) \geq n$ então G é hamiltoniano.

Teorema. (Bondy & Chvátal, 1976)
Seja G é um grafo simples de ordem n \geq 3 e sejam *u* e v vértices não adjacentes tais que $g(u)+g(v) \geq n$. Então G é hamiltoniano sse G+uv é hamiltoniano.

Exercício: Apresente um grafo hamiltoniano com 7 vértices e uma quantidade mínima de arestas.

Exercício: Será que todo grafo hamiltoniano é também euleriano? Justifique.

Exercício: Será que todo grafo euleriano é também hamiltoniano? Justifique.

1. Definições Básicas

Um **caminho hamiltoniano** em um grafo G é um caminho que contém todos os vértices de G.

Um **circuito hamiltoniano** em um grafo G é um circuito que contém todos os vértices de G.

Um grafo G é **hamiltoniano** se G contém um circuito hamiltoniano.

O "dodecaedro" é hamiltoniano.

O *grafo de Herschel* não é hamiltoniano (pois é bipartido e $|VG|$ é ímpar)

Uma condição necessária mas não suficiente (as condições suficientes são baseadas no fato de que o grafo tem muitas arestas):

Teorema. Se G é um grafo hamiltoniano então, para todo subconjunto próprio $S \subseteq VG$, $c(G-S) \leq |S|$.

Se G é hamiltoniano, G contém um circuito hamiltoniano.
Seja C um circuito hamiltoniano de G.
Logo, para todo subconjunto próprio S de VG, $c(C-S) \leq |S|$.
Como $C-S$ é um subgrafo gerador de $G-S$, $c(G-S) \leq c(C-S) \leq |S|$.

O teorema anterior serve geralmente para mostrar que um grafo particular não é hamiltoniano.
Mas isto nem sempre funciona: considere o *grafo de Petersen* (abaixo) que não é hamiltoniano.

Teorema. (Dirac, 1952)

Se G é um grafo simples com $|VG|=n$ e $g(v) \geq n/2$ para todo $v \in VG$, então G é hamiltoniano.

Vamos supor, por absurdo, que exista um grafo G simples com $|VG|=n$, $g(v) \geq n/2$, para todo $v \in VG$, e que não seja hamiltoniano; vamos considerar, sem perda de generalidade, que G seja maximal (no número de aresta) com esta propriedade (isto é, $G+uv$ é hamiltoniano, para todo u, v não adjacentes).
Sejam u e v dois vértices não adjacentes de G; logo $G+uv$ é hamiltoniano. Além disso, como G não é hamiltoniano, todo circuito hamiltoniano de $G+uv$ contém a aresta uv.
Portanto existe um caminho hamiltoniano P em G, com

$$P=(u=v_0,v_1,v_2,...,v_m=v).$$

Considere os conjuntos $T=\{v_i / uv_{i+1} \in AG\}$ e $S=\{v_i / vv_i \in AG\}$.

Como $v_m \notin S \cup T$, vem que $|S \cup T| < n$ ($v_m \notin S$ pois G é simples; $v_m \notin T$, pela definição de T).
Por outro lado, $|S \cap T| = \phi$, pois caso exista $v_i \in S \cap T$, teremos $vv_i \in S$ e $uv_{i+1} \in T$.
Neste caso, $C=(v_1,v_2,...,v_i,v_m,v_{m-1},...,v_{i+1})$ é um circuito hamiltoniano em G, contrariando a escolha de G.

Portanto $|S \cup T| < n$ e $|S \cap T| = 0$.
Logo, $g(u)+g(v) = |T|+|S| = |S \cup T|+|S \cap T| < n$, um ABSURDO pois $g(u) \geq n/2$ e $g(v) \geq n/2$, que implica $g(u)+g(v) \geq n$.

Portanto G é hamiltoniano.

Teorema. (Ore, 1960)\\
Se G é um grafo simples com $|VG|=p \geq 3$ tal que para quaisquer vértices distintos e não adjacentes u e v, $g(u)+g(v) \geq p$ então G é hamiltoniano.
(Demonstração análoga à anterior.)

Teorema. (Bondy & Chvátal, 1976)
Seja G é um grafo simples de ordem n \geq 3 e sejam u e v vértices não adjacentes tais que $g(u)+g(v) \geq n$.
Então G é hamiltoniano sse G+uv é hamiltoniano.
\begin{footnotesize}
($\Rightarrow$) Trivial.
($\Leftarrow$)
Seja C um circuito hamiltoniano em G+uv.
Se $uv \notin C$ então C é um circuito hamiltoniano em G.
Vamos supor que $uv \in C$ e considere, sem perda de generalidade, que $C=(u=v_0,v_1,v_2,...,v_n=v)$.
Então $P= (u=v_0,v_1,v_2,...,v_n=v)$ é um caminho hamiltoniano em G.

Considere os conjuntos $T=\{v_i / uv_{i+1} \in AG\}$ e $S=\{ v_i / vv_i \in AG\}$.
Como na demonstração do Teorema 4.2, segue que \exists $v_i \in G$ tal que $v_i \in S \cap T$. Portanto $C=(u=v_0,v_1,v_2,..., v_i,v_n =v,v_{n-1},...,v_{i+1}, v_0)$ é um circuito hamiltoniano em G

Logo G é hamiltoniano.

\section{Fecho de um Grafo}

\vspace*{-2ex}
O teorema anterior motiva a seguinte definição:
\begin{defn}
O {\em fecho} de um grafo G, $\mathcal{F}$(G), é o grafo obtido de G acrescentando-se
recursivamente arestas ligando pares de vértices não adjacentes cuja soma dos graus é pelo menos
|VG| até que não exista mais nenhum tal par.
\end{defn}

\subsection*{Construção do Fecho:}

{\tt procedimento} fecho(G)\\
\hspace*{5mm} H \leftarrow G;\\
\hspace*{5mm} {\tt enquanto} \exists u,v não adjacentes tais que g_{H}(u)+g_{H}(v)\geq n\\
\hspace*{10mm} {\tt faça} H \leftarrow H + uv;\\
\hspace*{5mm} fecho(G) \leftarrow H;

\vspace*{10ex}

Proposição. $\mathcal{F}$(G) está bem definido: se G_1 e G_2 são grafos obtidos de G através do procedimento **`fecho`** então $G_1=G_2$.
(Isto é, a obtenção do fecho independe da ordem em que as arestas são acrescentadas.)
\begin{footnotesize}
Sejam G_1 e G_2 grafos obtidos de G através do procedimento **`fecho`**. Sejam $a_1,...,a_p$ e $b_1,...,b_q$ as seqüências de arestas que foram acrescentadas a G para obter G_1 e G_2, respectivamente.
Para provarmos que $G_1=G_2$, basta provarmos que $A=\{a_1,...,a_p\}=\{b_1,...,b_q\}=B$.

Suponha, por absurdo, que $A\not\subset B$.
Seja a_k= uv a primeira aresta da seqüência $a_1,...,a_p$ tal que $a_k=\notin B$.
Seja H=G+\{$a_1,...,a_{k-1}$}.
Então, pela construção de G_{1}, segue que $g_H(u)+ g_H(v)\geq n$.
Pela escolha de a_k, H é um subgrafo de G_2, logo $g_{G2}(u)+g_{G2}(v)\geq n$, um ABSURDO, pois $uv\notin G_2$.
Portanto A\$\subseteq$B.
Analogamente, provamos que $B\subseteq A$.

Logo, A=B e, conseqüentemente, $G_1=G_2$.

Teorema. Um grafo simples G é hamiltoniano sse F(G) é hamiltoniano
Basta aplicar o Teorema 10 cada vez que uma nova aresta é acrescentada na construção de $\mathcal{F}$(G).

Teorema. (Bondy \& Chvátal)
Se G é um grafo de ordem $n\geq 3$ e $\mathcal{F}$(G) é completo então G é hamiltoniano.

Este resultado tem a vantagem de ser bastante útil do ponto de vista operacional.
De fato, veremos a seguir um algoritmo que verifica se o fecho de um grafo de n vértices é completo em O(n^{4}) passos.
Neste algoritmo, a entrada é a matriz de adjacência $AG=[a_{ij}]$, onde $VG=\{v_1,v_2,...,v_n\}$.

\subsection*{O Algoritmo do Fecho}
\begin{description}
\item[Passo 1]:

Para i=1,2,...,n faça g(v_{i})\leftarrow \sum_{j=1}^{n}a_{ij};\\
faça k\leftarrow 2;

\item[Passo 2]:

Enquanto existir um par \{v_{i},v_{j}\} com i\neq j, a_{ij}=0 e \\
g(v_{i})+g(v_{j})\geq n, faça:\\
\hspace*{5mm} a_{ij}\leftarrow k;\\
\hspace*{5mm} a_{ji}\leftarrow k;\\
\hspace*{10mm} g(v_{i})\leftarrow g(v_{i})+1;\\
\hspace*{10mm} g(v_{j})\leftarrow g(v_{j})+1;\\
\hspace*{5mm} k\leftarrow k+1;

\item[Passo 3]:
Para i=1,2,...,n, verifique se g(v_{i})=n-1.
Se isto acontecer, $\mathcal{F}$(G) é completo;
caso contrário $\mathcal{F}$(G) não é completo.
Pare.
\end{description}

Note que ao terminarmos o algoritmo teremos uma matriz [a_{ij}] tal que:\\
\hspace*{5mm} a_{ij}=1 sse \{v_{i},v_{j}\}\in AG,\\
\hspace*{5mm} a_{ij}=0 sse \{v_{i},v_{j}\}\not\in A(F(G)),\\
\hspace*{5mm} a_{ij}=k>1 sse \{v_{i},v_{j}\} foi a (k-1)-ésima aresta a ser acrescentada\\\hspace*{15mm} na construção do fecho.

Essa matriz nos fornece informações sobre como o fecho de G foi construído e poderá ser utilizada para se determinar eficientemente um circuito hamiltoniano de G partindo-se de um circuito hamiltoniano de F(G).

Antes de apresentarmos uma maneira de se resolver esse problema, vamos adotar as seguintes definições:

\begin{defn}
Dizemos que uma aresta \{v_{i},v_{j}\} de F(G) tem {\em peso} p se após a aplicação do algoritmo do fecho, a_{ij}=p.
\end{defn}

\begin{defn}
Se C=\{v_{1},v_{2},...,v_{n},v_{1}\} é um circuito de F(G), então o {\em peso de C}, denotado por ||C||, é o valor correspondente ao peso máximo das arestas de C.
\end{defn}

Note que se C=\{v_{1},v_{2},...,v_{n},v_{1}\} é um circuito hamiltoniano de F(G) tal que ||C||=p>1 então existe um circuito hamiltoniano C' em F(G) tal que ||C'||<p.

\begin{minipage}[h]{6.2cm}
De fato, supondo sem perda de generalidade que \{v_{1},v_{n}\} seja a aresta de peso p então\\
|\{v_{i}/ 0<a_{1i}<p\}|+|\{v_{i}/ 0<a_{ni}<p\}|\geq n\\
e portanto, existe v_{j} tal que as arestas \{v_{1},v_{j+1}\} e \{v_{n},v_{j}\} têm pesos menores que p.
Neste caso, C'=\{v_{1},v_{2},...,v_{j},v_{n},v_{n-1},..., v_{j+1},v_{1}\} é tal que |C|=|C'| e ||C'||<p (figura ao lado).
\end{minipage}

A observação acima fornece um algoritmo para se obter um circuito hamiltoniano de peso 1 e portanto em G, partindo-se de um circuito hamiltoniano em F(G).

Note que a determinação de cada novo circuito com peso menor pode ser feita em O(n) passos.
Como a_{ij}\leq (^{n}_{2}) \leq n^{2} (quaisquer que sejam i e j), a obtenção de um circuito em G a partir de um circuito em F(G) poderá ser feita em O(n^{3}) passos.

\section{Exercícios}

\begin{enumerate}
\item Dê um exemplo de um grafo não hamiltoniano com 10 vértices tal que para todo par u, v de vértices não adjacentes tem-se que g(u) + g(v) \geq 9.

\item Seja G um grafo simples de ordem n tal que a soma dos graus das extremidades de um caminho de comprimento máximo é pelo menos n. Prove que em G existe um caminho de comprimento máximo cujas extremidades são adjacentes.

\item Seja G um grafo simples tal que g(v) \geq k, k > 1, para todo v em VG. Prove que em G existe um circuito de comprimento pelo menos k+1.

\item Seja G um grafo simples conexo. Sabe-se que em G existe um circuito C com a seguinte propriedade: ao remover qualquer aresta a de C tem-se que C-a é um caminho de comprimento máximo.
Prove que G é hamiltoniano.

\item {\bf (a)} Seja G um grafo simples com n vértices e pelo menos \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2 arestas.
Prove que G é hamiltoniano.

{\bf (b)} Dê um exemplo de um grafo simples não hamiltoniano com n vértices e \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1 arestas.

\item Prove que se T é uma árvore então T^{3} é {\em hamiltoniano-conexo} (isto é, para todo par u, v de vértices distintos existe um caminho hamiltoniano em T^{3} com extremos u e v.)

(Definição: T^{3} é o grafo que se obtém de T ligando por uma aresta todo par de vértices distintos que estejam ligados em T por um caminho de comprimento menor ou igual a 3.)

\item Prove que se em uma festa cada pessoa conhece pelo menos k outras, k > 1, então no mínimo k+1 dessas pessoas podem se sentar ao redor de uma mesa de forma que cada uma fique entre duas pessoas que conhece. (Considere a relação de conhecimento como sendo simétrica e não reflexiva.)
Resolva esse problema usando linguagem da teoria dos grafos.

\item Considere um cubo de queijo constituído de 27 subcubos (veja figura abaixo).

\noindent
\begin{minipage}[h]{6cm}
Um rato quer roer, neste queijo, um túnel que comece em um dos oito cantos e passe exatamente uma vez pelos 27 subcubos terminando no subcubo central. Considerando que o rato só pode roer um subcubo após ter roído um subcubo adjacente, verifique se um tal túnel pode ser escavado.
Justifique.
\end{minipage}
\begin{minipage}[h]{2.5cm}
\setlength{\unitlength}{0.0050in}%
\end{minipage}

\end{enumerate}

\section{Máximo,Mínimo,Maximal,Minimal}
\begin{defn}
Seja \mathcal{L} uma família de subconjuntos de X.

A\in \mathcal{L} é {\em minimal} se \forall B\in \mathcal{L}, B\subseteq A \Rightarrow B=A.

A\in \mathcal{L} é {\em maximal} se \forall B\in \mathcal{L}, A\subseteq B \Rightarrow B=A.

A é mínimo se \not\exists B\in \mathcal{L} com menos elementos que A.

A é máximo se \not\exists B\in \mathcal{L} com mais elementos que A.
\end{defn}
\destq{Exemplo:}

Considere \mathcal{L}= \{\{1,2\},\{2,3\},\{2,4\},\{2,4,5\},\{1,3,5\},\{1,3,4,5\}\}

minimais: \{1,2\},\{2,3\},\{2,4\},\{1,3,5\}

mínimos: \{1,2\},\{2,3\},\{2,4\}

maximais: \{1,2\},\{2,3\},\{2,4,5\},\{1,3,4,5\}

máximos: \{1,3,4,5\}

\subsection{Grafos}
\begin{defn}
Seja F uma família de subgrafos de um grafo G.

H\in F é {\em minimal} se \forall H'\subseteq H,
H'\in F \Rightarrow H'=H

H\in F é {\em maximal} se \forall H'\in F, H\subseteq H' \Rightarrow H'=H

H\in F é {\em máximo} \exists/\; B\in F tal que |AH'|+|VH'| < |AH|+|VH|

H\in F é {\em mínimo} \exists/\; B\in F tal que |AH'|+|VH'| > |AH|+|VH|
\end{defn}
\destq{Exemplo:}

\section{Exercícios}
\item Prove que uma árvore tem no máximo um emparelhamento perfeito.

\item Prove que se G é um grafo k-regular, k > 0, então G possui k emparelhamentos perfeitos disjuntos dois a dois.

\item Seja E um emparelhamento em G e P um caminho E-alternante em G cujos extremos não são cobertos por E. Mostre que E'=E \Delta AP é um emparelhamento em G e |E'|= |E| + 1.

\item Duas pessoas realizam um jogo com um grafo G, selecionando alternadamente vértices distintos v_{0},v_{1},v_{2},..., tais que, para i > 0, v_{i} é adjacente a v_{i-1}. A última pessoa que consegue selecionar um vértice ganha o jogo. Prove que o primeiro jogador têm uma estratégia para vencer o jogo se e só se G não possui um emparelhamento perfeito.

\item {\bf (a)} Mostre que um grafo bipartido G tem um emparelhamento perfeito se e só se |Adj(S)| \geq |S| para todo S em VG.
{\bf (b)} Dê um exemplo para mostrar que a afirmação acima não permanece válida se a condição de G ser bipartido for eliminada.

\item Encontre no grafo abaixo um emparelhamento perfeito ou um conjunto S que viola a condição de Hall.

\item Prove: Se G é um grafo (X,Y)-bipartido com pelo menos uma aresta e g(x) \geq g(y) para todo x \in X e y \in Y então existe em G um emparelhamento que cobre X.

\item Um {\em retângulo latino} m \times n é uma matriz com m linhas e n colunas, cujas entradas são símbolos, sendo que cada símbolo aparece no máximo uma vez em cada linha e em cada coluna. Um {\em quadrado latino de ordem n} é um retângulo latino n \times n sobre n símbolos.
Prove: Se m < n então todo retângulo latino m \times n sobre n símbolos pode ser estendido a um quadrado latino de ordem n. (Sugestão: Usar o resultado do exercício anterior.)

\item Numa escola há 7 professores (P_{1}, P_{2},..., P_{7}) e 12 turmas (T_{1}, T_{2},..., T_{12}). A distribuição da carga didática para uma semana de 5 dias está indicada na matriz M abaixo:

\begin{tabular}{r|l l l l l l l l l l l l|}
&T_{1}&T_{2}&T_{3}&T_{4} &T_{5} &T_{6} &T_{7}&T_{8}&T_{9}&T_{10}&T_{11}&T_{12} \\ \hline
P_{1} & 3 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\
P_{2} & 1 & 3 & 6 & 0 & 4 & 2 & 5 & 1 & 3 & 3 & 0 & 4 \\
P_{3} & 5 & 0 & 5 & 5 & 0 & 0 & 5 & 0 & 5 & 0 & 5 & 5 \\
P_{4} & 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 3 \\
P_{5} & 3 & 5 & 2 & 2 & 0 & 3 & 1 & 4 & 4 & 3 & 2 & 5 \\
P_{6} & 5 & 5 & 0 & 0 & 5 & 5 & 0 & 5 & 0 & 5 & 5 & 0 \\
P_{7} & 0 & 3 & 4 & 3 & 4 & 3 & 4 & 3 & 4 & 3 & 3 & 0 \\
\hline
\end{tabular}

Na matriz M, cada entrada m_{i,j} é o número de aulas de uma hora que o professor P_{i} deve dar para a turma T_{j}.
{\bf (a)} Qual o número mínimo de períodos de 1 hora que os dias da semana devem ter para que as exigências possam ser cumpridas?
{\bf (b)} Se em cada dia pode haver no máximo 8 períodos de 1 hora, quantas salas serão necessárias?

\item Prove o teorema de Hall usando o teorema de König.
Ou seja, prove a parte do teorrema de Hall consistindo da {\em suficiência}, usando König. Mais precisamente, você deve completar a seguinte prova:
{\bf Condição}: Se |Adj(S)| \geq |S| para todo S \subseteq X então G tem um emparelhamento que cobre X.

Tome um emparelhamento máximo E^{\star} em G. Pelo teorema de König, existe uma cobertura K tal que |K| = |E^{\star}|. Você deve provar que E^{\star} cobre X.
Para isto é suficiente mostrar que:
{\bf (i)} E^{\star} cobre K \cap X;
{\bf (ii)} E^{\star} cobre X \backslash K.
Complete a demonstração.

\item Sejam G um grafo bipartido com bipartição (X, Y) e \alpha = uv uma aresta de G com u \in X e v \in Y. Prove que existe um emparelhamento E em G que cobre X e contém \alpha se e só se para todo S \subseteq X \backslash \{u\},
|Adj(S)| \geq |S| + |Adj(S) \cap \{ v \}|.

\item Prove que:
\begin{minipage}[h]{4cm}
É possível cobrir exatamente o tabuleiro ao lado com retângulos 1 por 2 que não se superponham? Justifique sua resposta.

\item Para cada k \geq 2 construa um grafo simples k-regular que não tem um emparelhamento perfeito.

\item Ache um emparelhamento máximo no grafo G_{1} e uma cobertura mínima no grafo G_{2}. Justifique.

\item Sejam n prismas triangulares regulares (n \geq 1) tais que cada face (lateral) de cada prisma é colorida com uma entre n cores de forma que existam exatamente três das 3n faces com cada cor. Mostre que é possível empilhar os prismas pelas bases de forma a obter outro prisma triangular no qual cada face exiba todas as n cores.

\item Sejam G um grafo com bipartição (X,Y) e k um inteiro. Mostre que se g(v) \geq k > 1 para todo v \in Y e g(v) \leq k para todo v \in X então G tem um emparelhamento que cobre Y.

\item Encontre no grafo abaixo um emparelhamento que cobre X usando o algoritmo dado e partindo de E= \{ x_{2}y_{4}, x_{3}y_{1}, x_{5}y_{2}, x_{6}y_{5} \}.

\item Sejam G um grafo com bipartição (X,Y) e E um emparelhamento em G.
{\bf (a)} Mostre que existe um emparelhamento máximo E^{\star} em G tal que
\{ x\inX/ x é coberto por E \} \subseteq
\{ x\inX/ x é coberto por E^{\star} \}.
{\bf (b)} Prove ou ache um contra-exemplo: existe um emparelhamento máximo E^{\star} em G tal que E \subseteq E^{\star}

\item Seja G um grafo com bipartição (X,Y) tal que todos os vértices de X têm grau m e todos os vértices de Y têm grau n. Prove que existe um emparelhamento que cobre X se e só se m \geq n.

2. Distância Entre Dois Vértices

Sejam u e v vértices de um grafo G. A ***distância*** de u a v em G, denotada por $d_G(u,v)$, ou simplesmente $d(u,v)$, é o comprimento de um caminho mais curto de u a v em G. Se não existe nenhum caminho de u a v então definimos $d_G(u,v)$ como infinito (isto é, $d_G(u,v)=\infty$).

Convenções

- O termo passeio (respectivamente, trilha, caminho, circuito) também será usado para denotar um grafo ou subgrafo cujos vértices e arestas são os termos de um passeio (respectivamente, trilha, caminho, circuito).
- Ao invés de nos referirmos à “aresta com extremos u e v”, quando não houver perigo de confusão, por simplicidade diremos a **aresta** $\{u,v\}$ ou a **aresta** uv. (No caso de grafos simples o perigo de confusão não existe.)
- Para grafos simples, um passeio $P=(v_0,a_1, v_1, ..., a_k, v_k)$ fica determinado pela seqüência $(v_0, v_1, ..., v_k)$ de seus vértices; assim, quando conveniente, nos referiremos ao passeio P=$(v_0, v_1, ..., v_k)$.
- Quando o grafo não é simples e nos referirmos a um passeio $(v_0,v_1,...,v_k)$, deve ficar subentendido que estamos nos referindo a qualquer um dos passeios com tal seqüência de vértices.
- No caso de circuitos, nos referimos apenas à seqüência dos vértices distintos. Assim, $C=(v_0, v_1, ..., v_k)$ denota o circuito com início e término v_0 e com vértices internos $v_1, ..., v_k$.