# Computação Visual

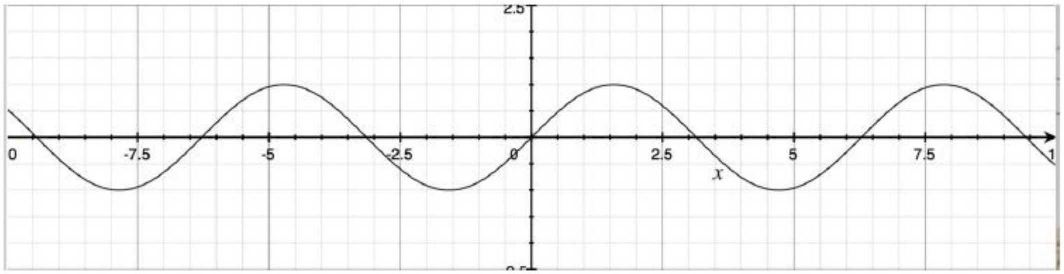
Prof. Mário Menezes

# Transformação de Fourier

# Transformada de Fourier

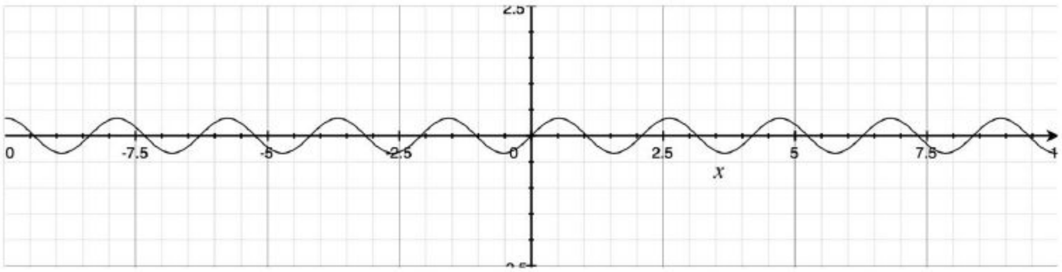
- Qualquer sinal pode ser expresso como uma combinação linear de um número de ondas senoidais de diferente frequências.
    - Amplitude e
    - Fase **também pode ser diferentes.**

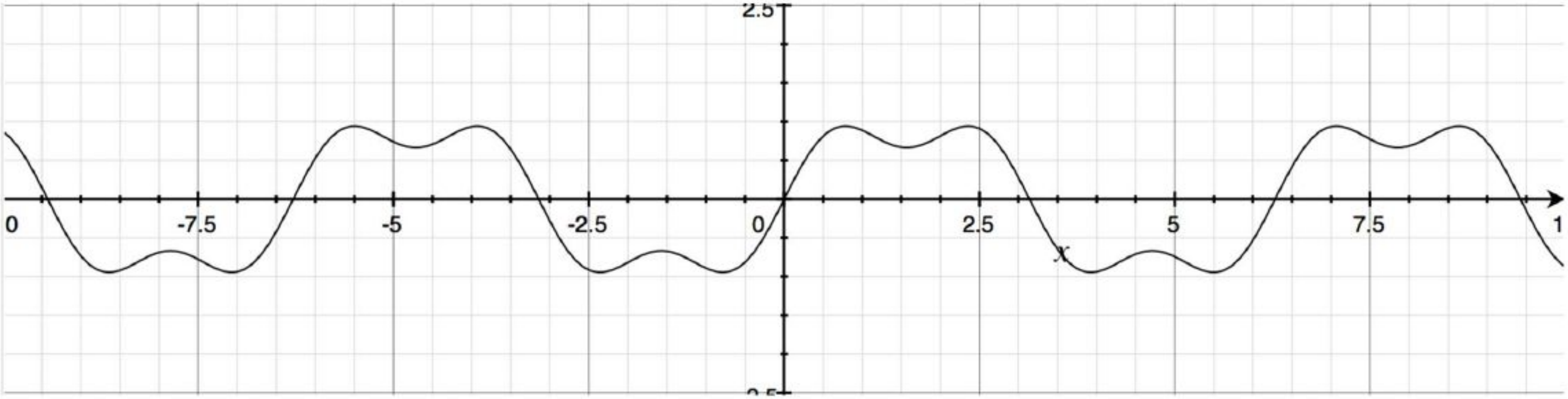
$$Sin(x)$$




+

$$\frac{1}{3}Sin(3x)$$



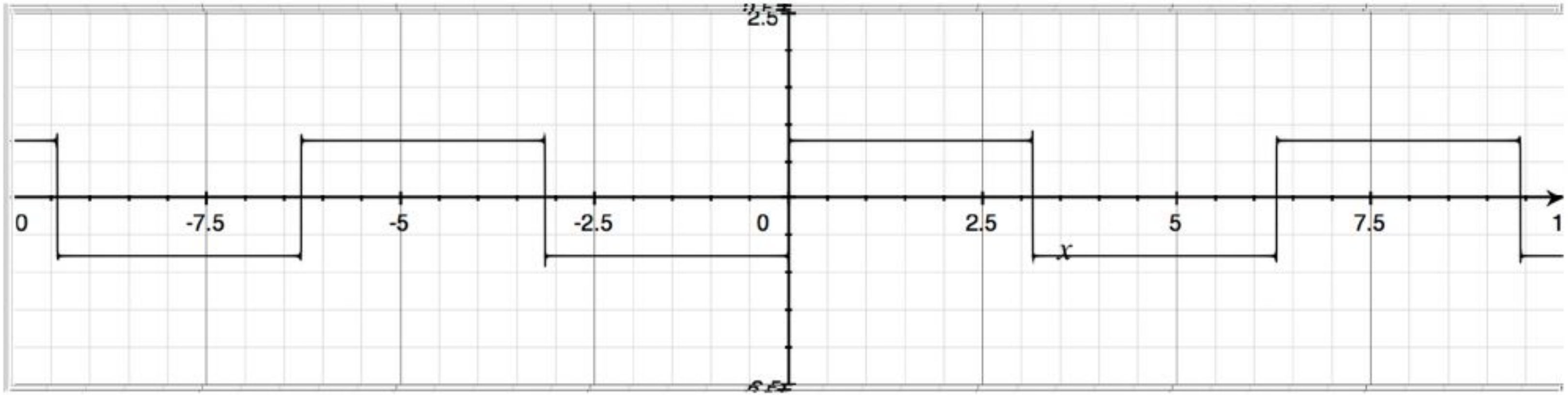



$$Sin(x)+\frac{1}{3}\sin(3x)$$

$$Sin(x)+\frac{1}{3}\sin(3x)+\frac{1}{5}\sin(5x)$$

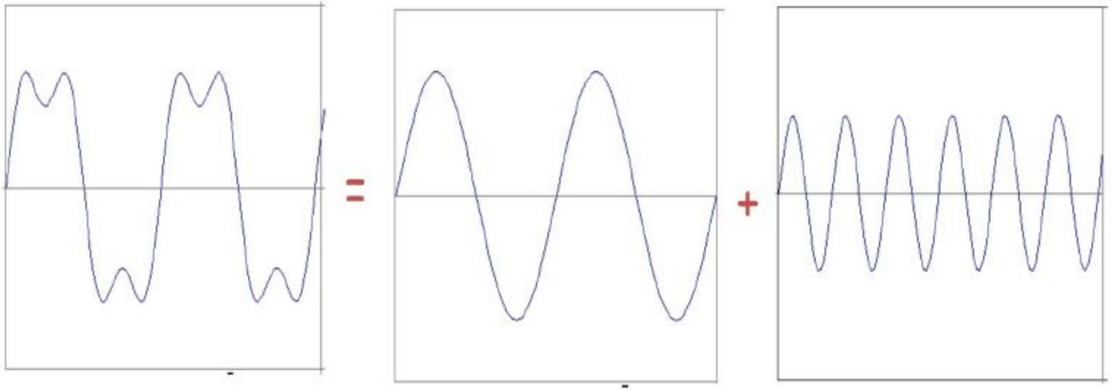
$$Sin(x)+\frac{1}{3}\sin(3x)+\frac{1}{5}\sin(5x)+\frac{1}{7}\sin(7x)$$

$$Sin(x)+\frac{1}{3}\sin(3x)+\frac{1}{5}\sin(5x)+\frac{1}{7}\sin(7x)+\cdots$$



# Transformada de Fourier

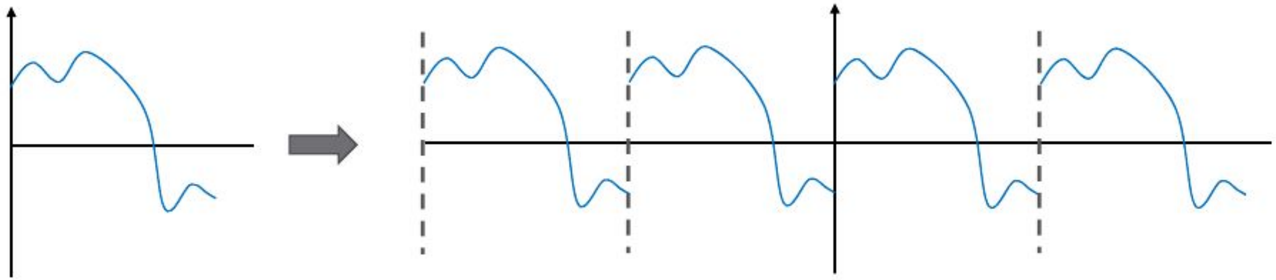
- *Entrada*: sinal periódico infinito
- *Saída*: conjunto de ondas seno e coseno que, juntas, provêm o sinal de entrada.



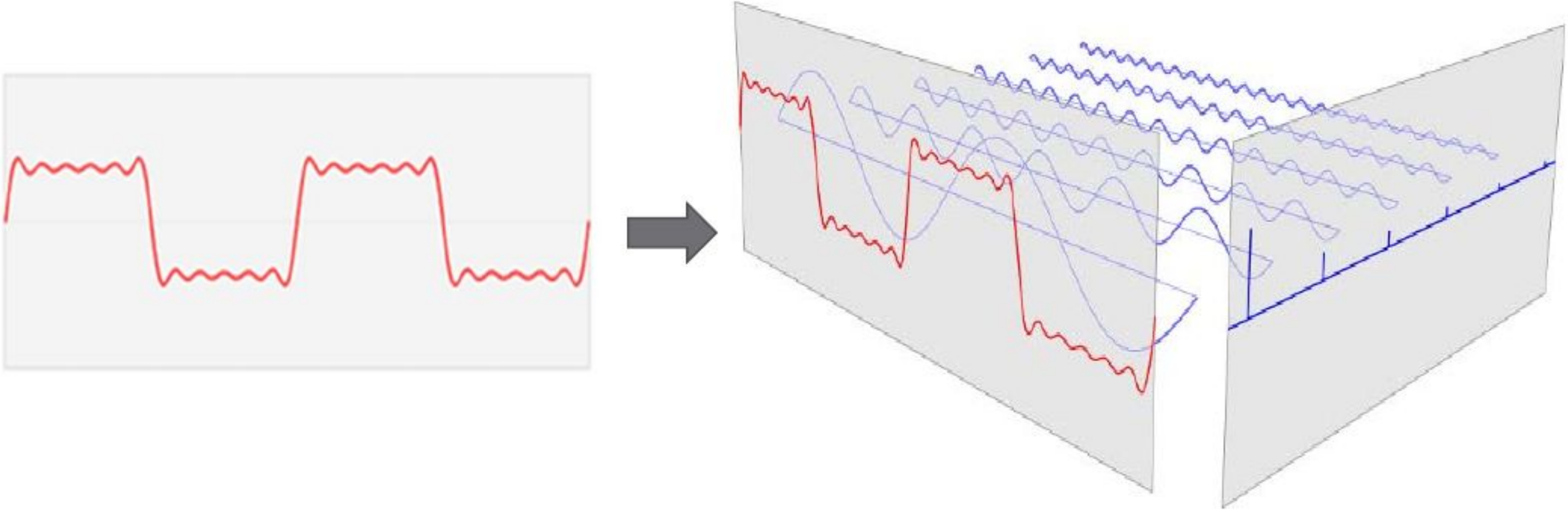

$$g(t) = \sin(2\pi f\, t) + (1/3)\sin(2\pi(3f)\, t)$$

# Transformada de Fourier

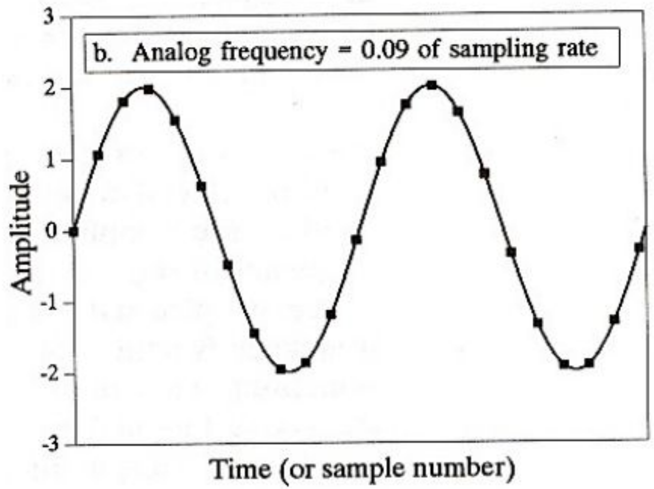
- Sinais Digitais
  - Dificilmente são periódicos
  - Nunca são infinitos
  - ….



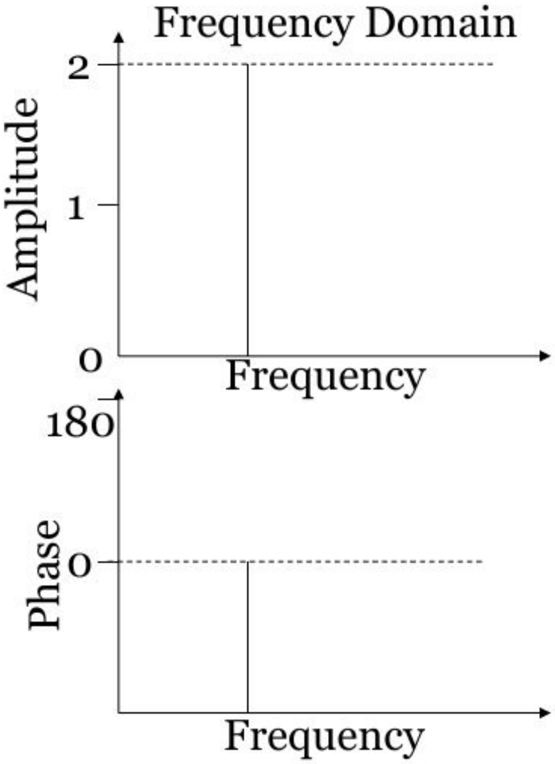
# Transformada de Fourier em 1D



# Representação em ambos os domínios




Time Domain



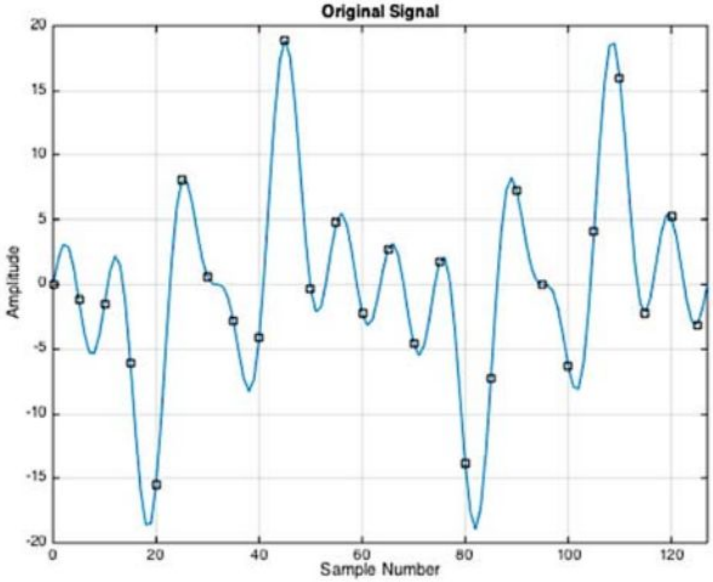
# Transformada Discreta de Fourier

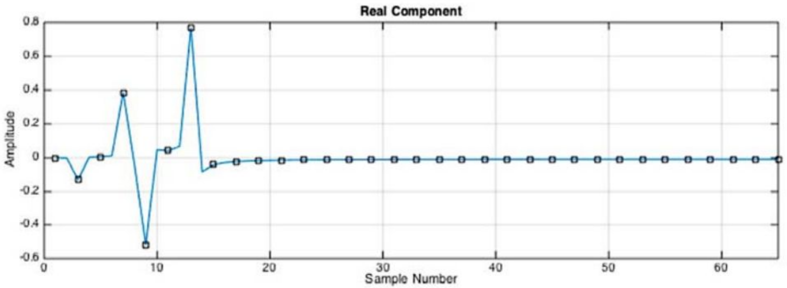
- DFT decompõe x em N/2 + 1 ondas seno e coseno
- Cada uma de uma frequência diferente

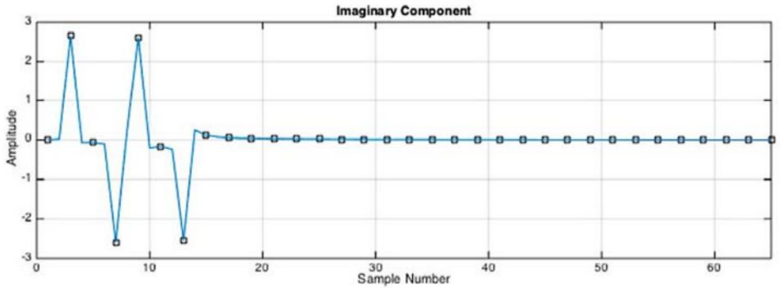
$$x[i] = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}} x_c[k]cos\left(\frac{2\pi ki}{N}\right) + \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}} x_s[k]sin\left(\frac{2\pi ki}{N}\right)$$

# Representação Retangular da DFT

- Decomposição do sinal do domínio espacial/temporal **x** no domínio da frequência $\mathbf{x}_c$ e $\mathbf{x}_s$.



# Notação coordenadas polares

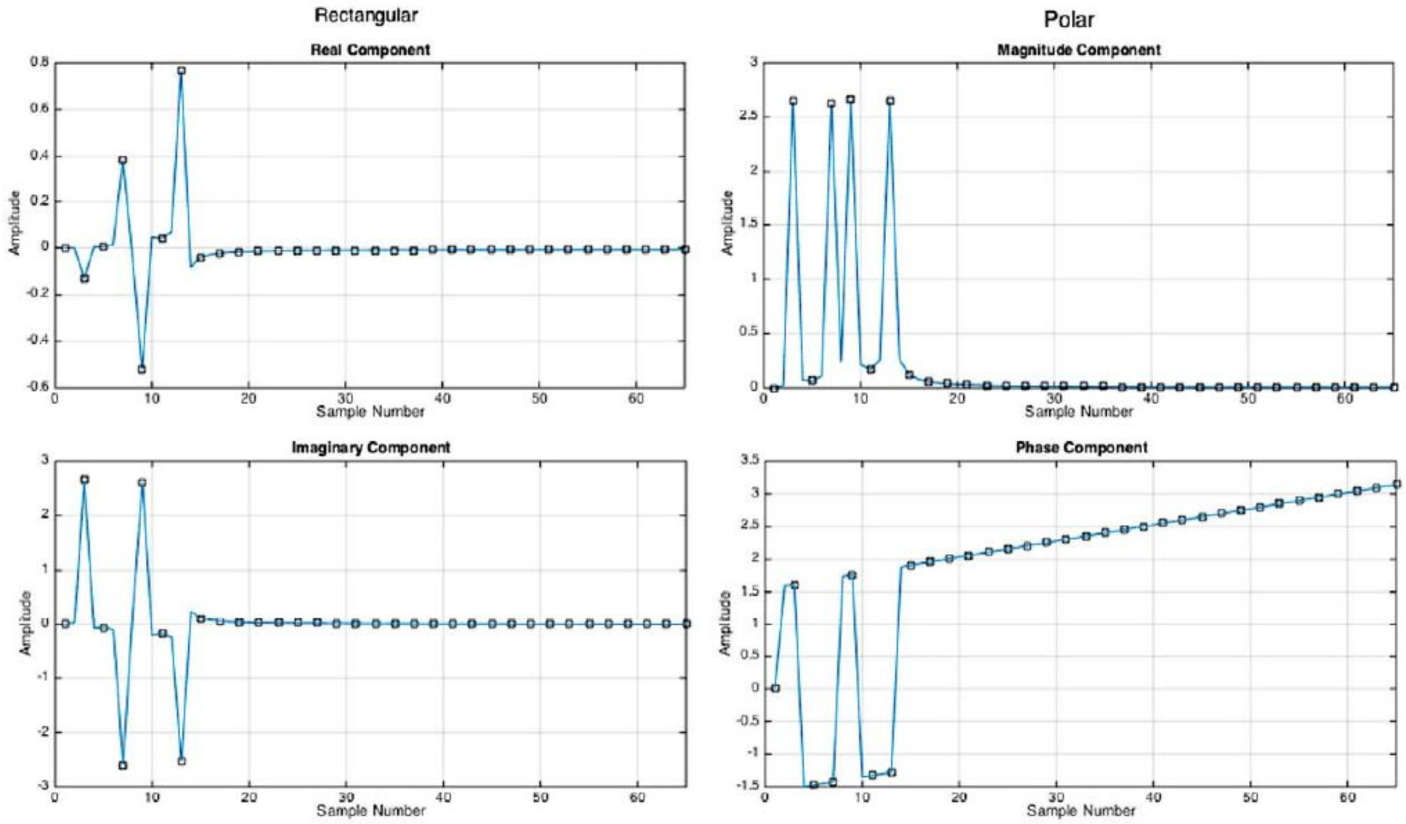
- Ondas seno e coseno são deslocadas de fase uma das outras.

$$x_c[k]cos(\omega i) + x_s[k]sin(\omega i) = M_k cos(\omega i + \theta_k)$$

$$M_k = \sqrt{x_c[k]^2 + x_s[k]^2} \longleftarrow \textbf{Amplitude}$$

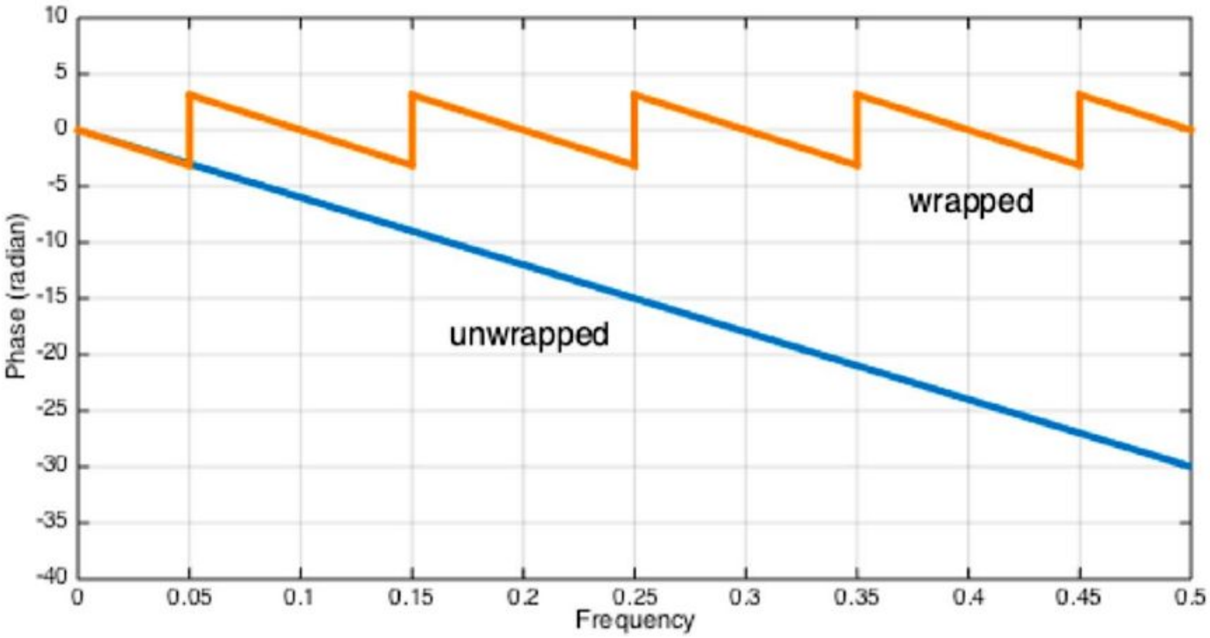
$$\theta_i = tan^{-1}\left(\frac{x_s[k]}{x_c[k]}\right) \longleftarrow \textbf{Phase}$$

# Representação Polar



# Representação Polar

- Desenrolar da fase



# Propriedades da Transformada de Fourier

- Homogeneidade

$$x[t] \rightarrow (M[f], \theta[f]) \implies kx[i] \rightarrow (kM[f], \theta[f])$$

- Aditividade

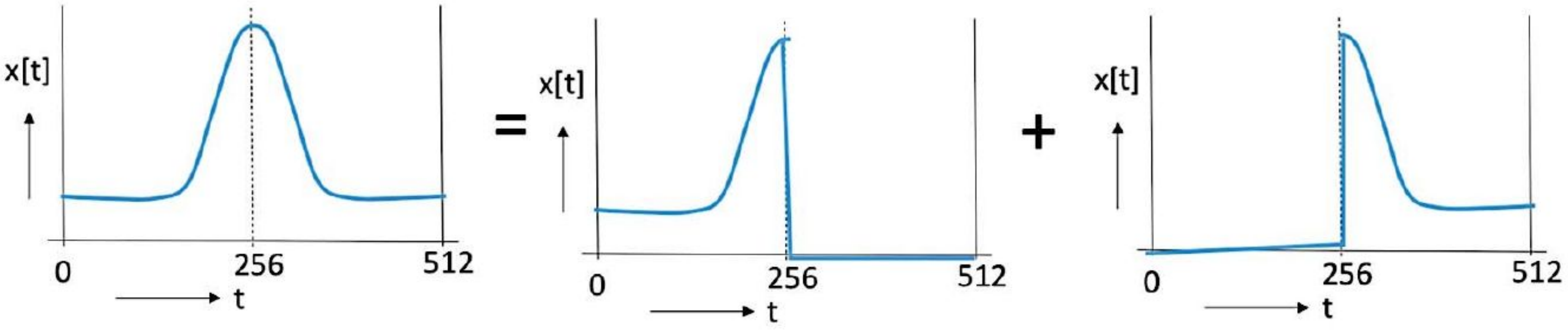
$$x[t] \rightarrow (x_c[f], x_s[f]), y[t] \rightarrow (y_r[f], y_i[f])$$
$$\implies x[t] + y[t] \rightarrow (x_c[f] + y_r[f], x_s[f] + y_i[f])$$

- Deslocamento Linear de Fase (*Linear phase shift*)

$$x[t] \rightarrow (M[f], \theta[f]) \implies x[t+s] \rightarrow (M[f], \theta[f] + 2\pi f s)$$

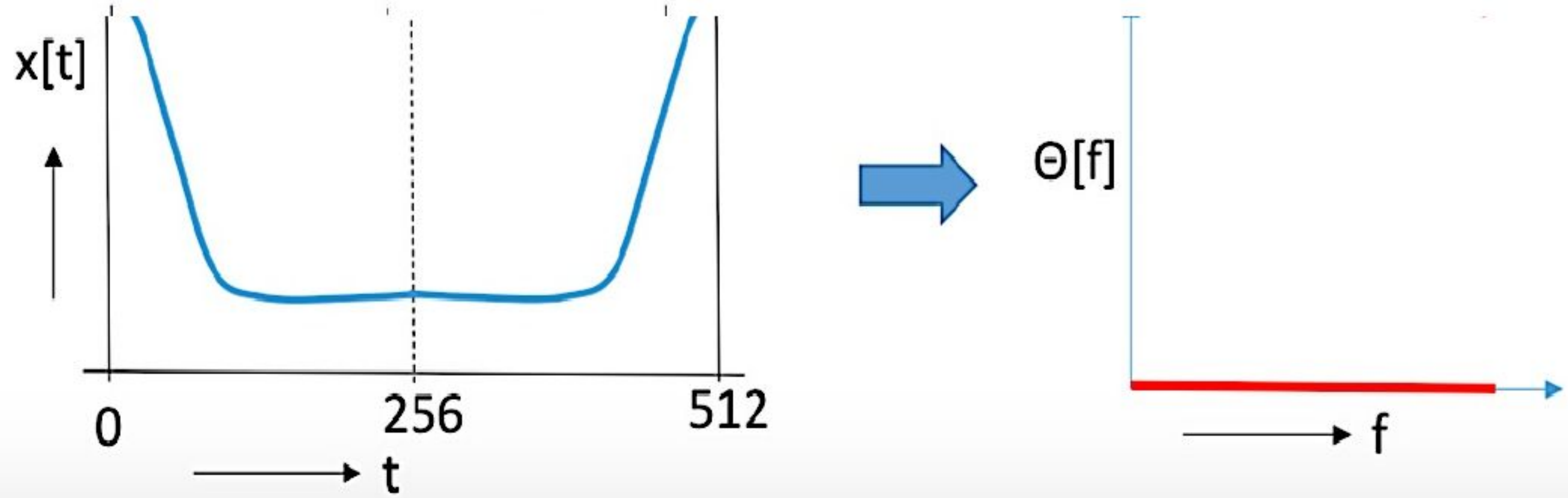
# Sinais Simétricos

- Sinais simétricos sempre tem fase zero

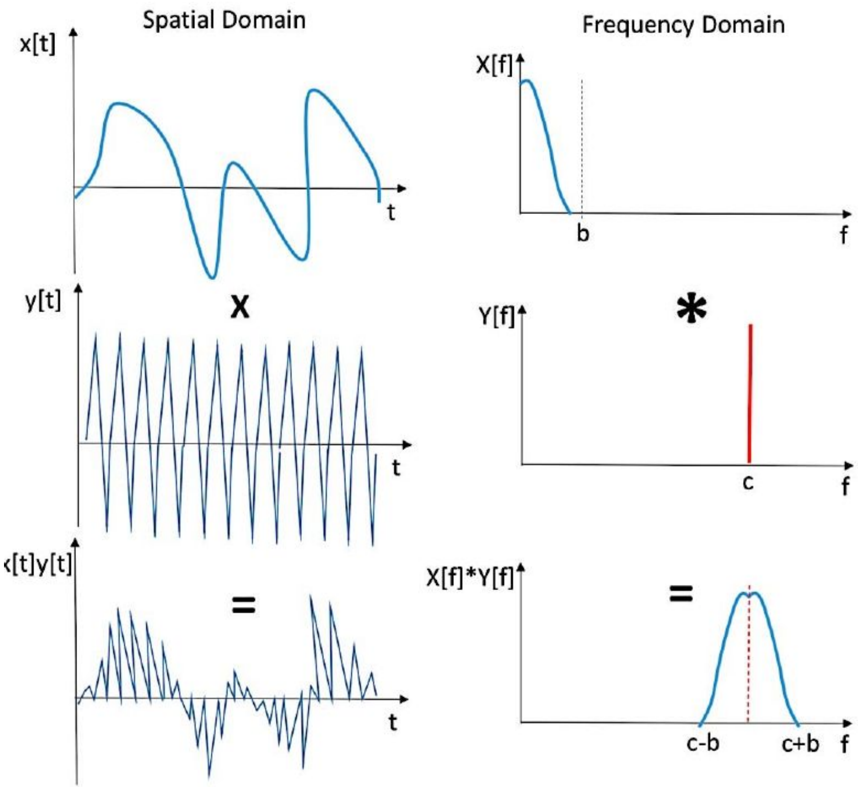


# Sinais Simétricos

- Resposta de frequência e movimento circular



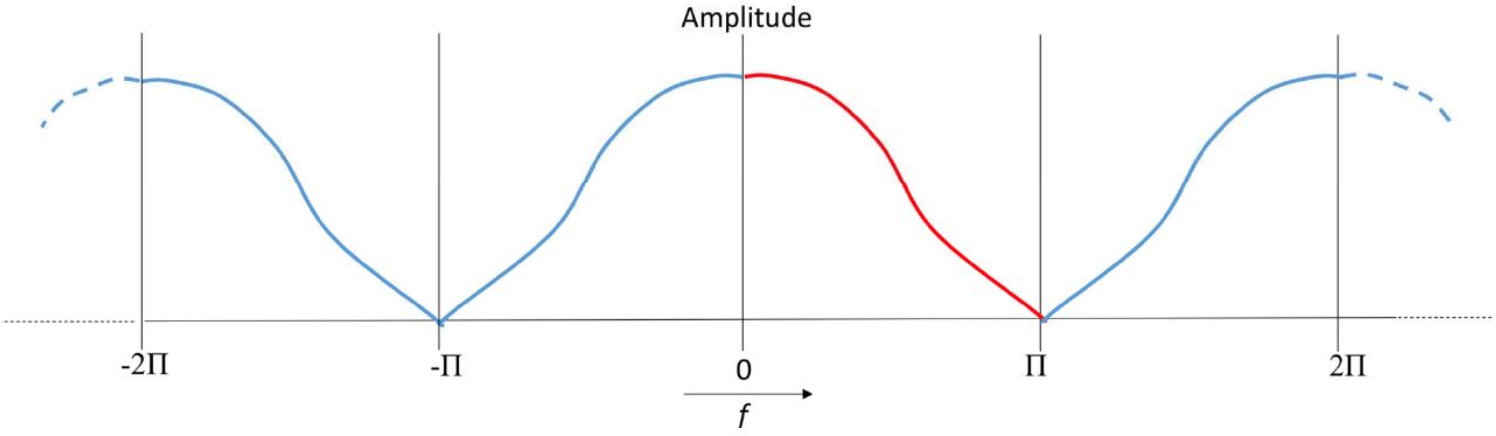
# Modulação de Amplitude



# Periodicidade do Domínio da Frequência

- Gráfico da Amplitude

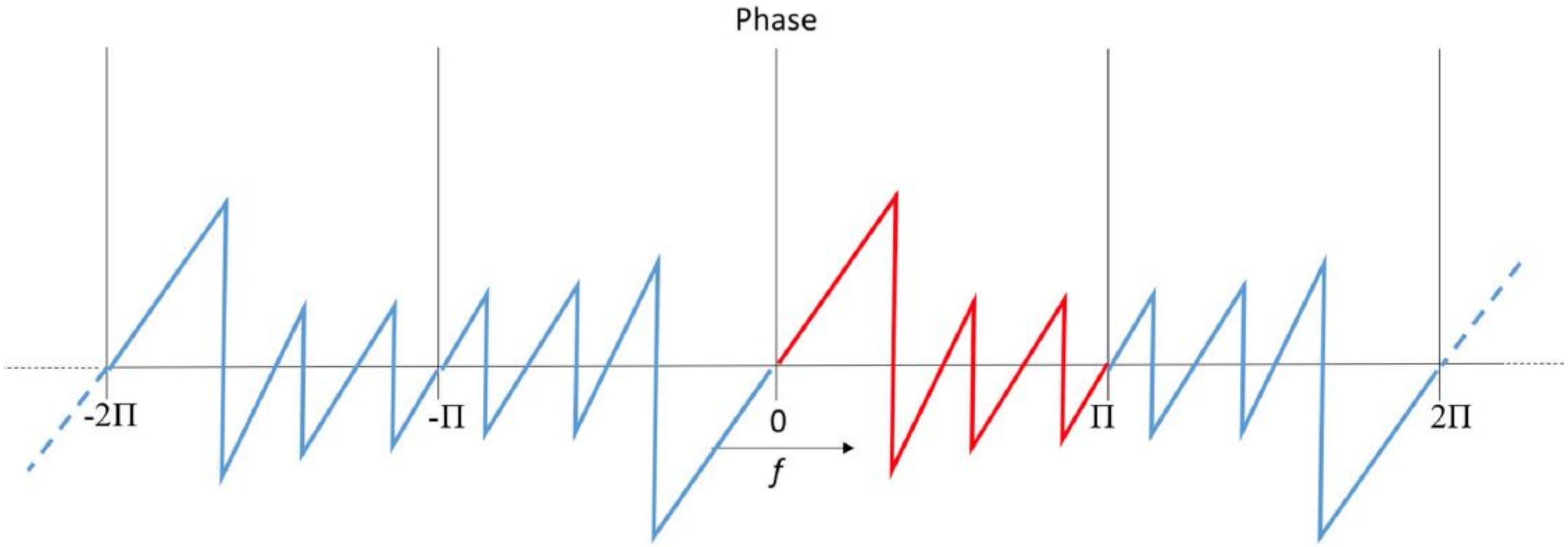
$$M[f] = M[-f]$$



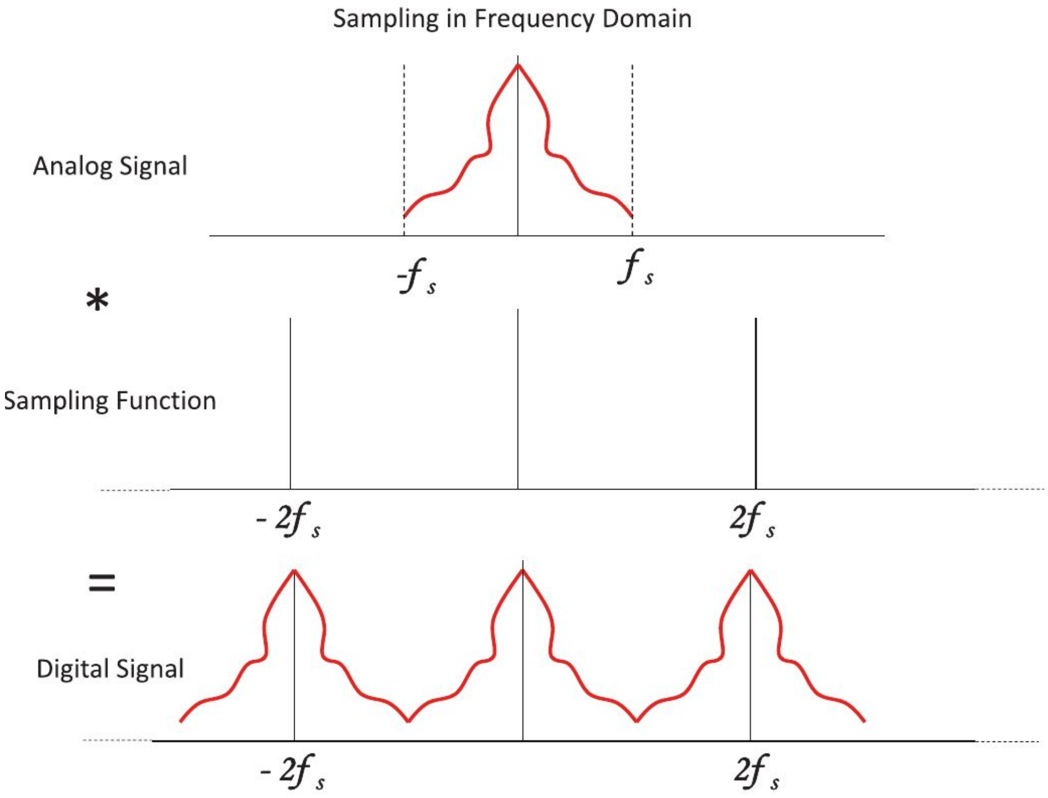
# Periodicidade do Domínio da Frequência

- Gráfico de Fase

$$\theta[f] = -\theta[-f]$$

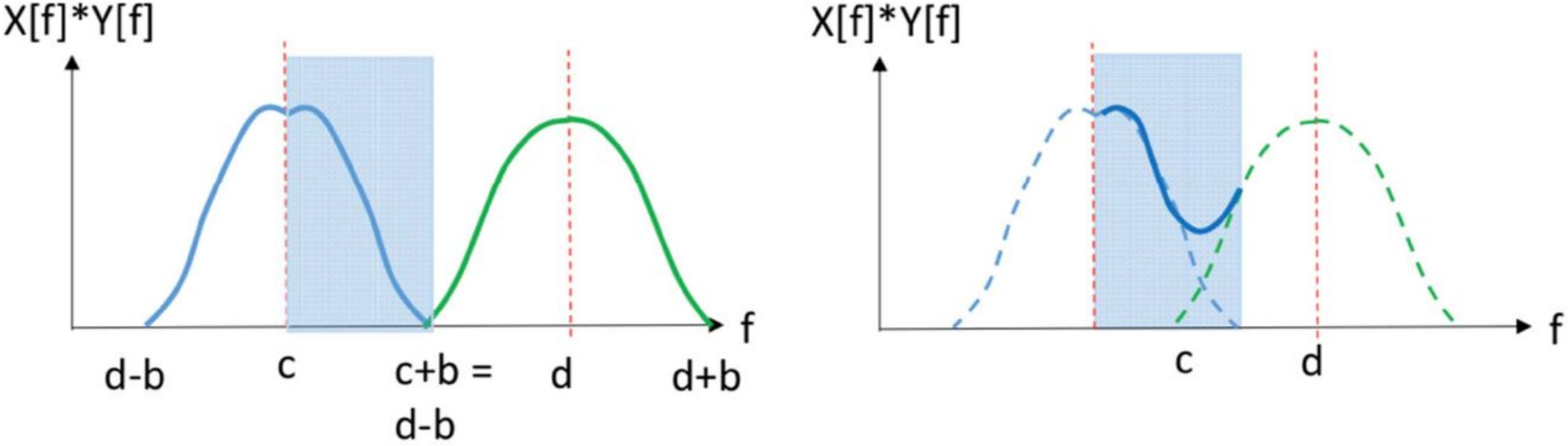


# Amostragem no Domínio da Frequência

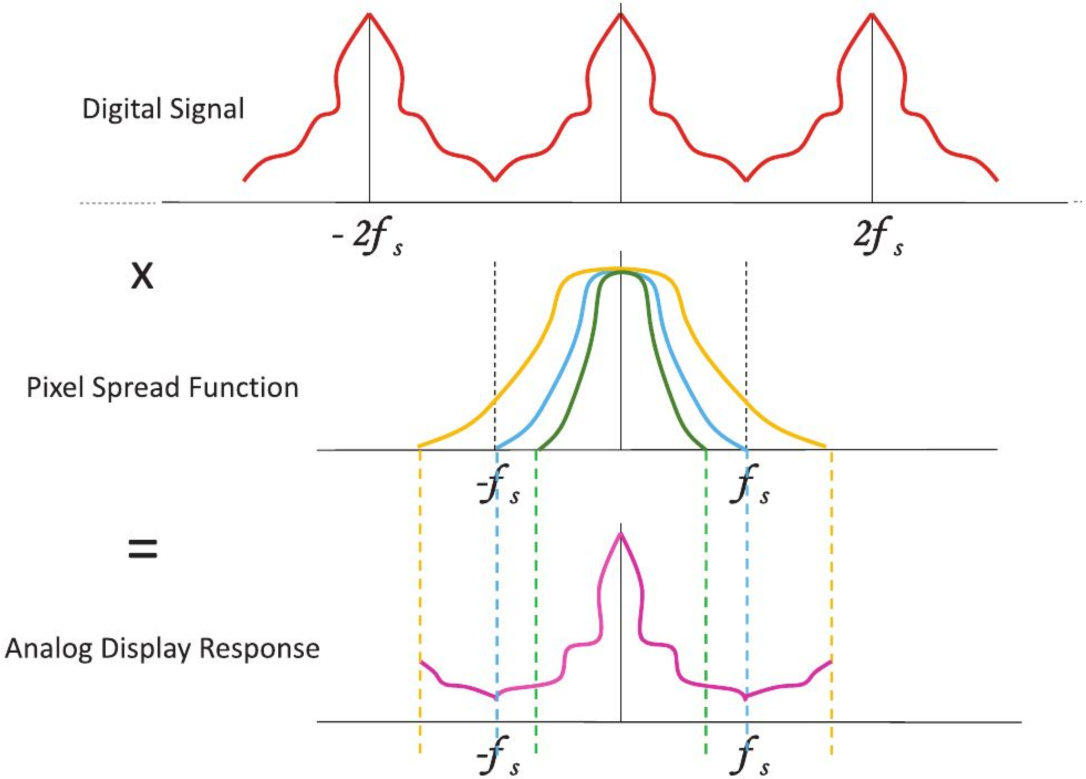



- Multiplicação no domínio espacial é equivalente à convolução no domínio da frequência.
- Como a um *trem* de impulso no domínio espacial é um *trem* de impulso no domínio da frequência, a amostragem se torna uma convolução no domínio da frequência.
- A maior frequência é $f_s$, a taxa de amostragem deve ser pelo menos $2f_s$ (Nyquist).
- O intervalo entre os pulsos deve ser $1/2f_s$.
- Se a distância entre os pulsos for maior do que $2f_s$ no domínio da frequência, o resultado da convolução no domínio da frequência vai resultar em sobreposição, levando ao aliasing

# Aliasing



# Reconstrução no Domínio da Frequência




- PSF é maior - Pixelização: frequências baixas aliased como altas frequências
- PSF é exata - Multiplicação: reconstrução perfeita
- PSF é menor - Borramento: remoção das frequências altas

# Artefatos de aliasing (largura correta)

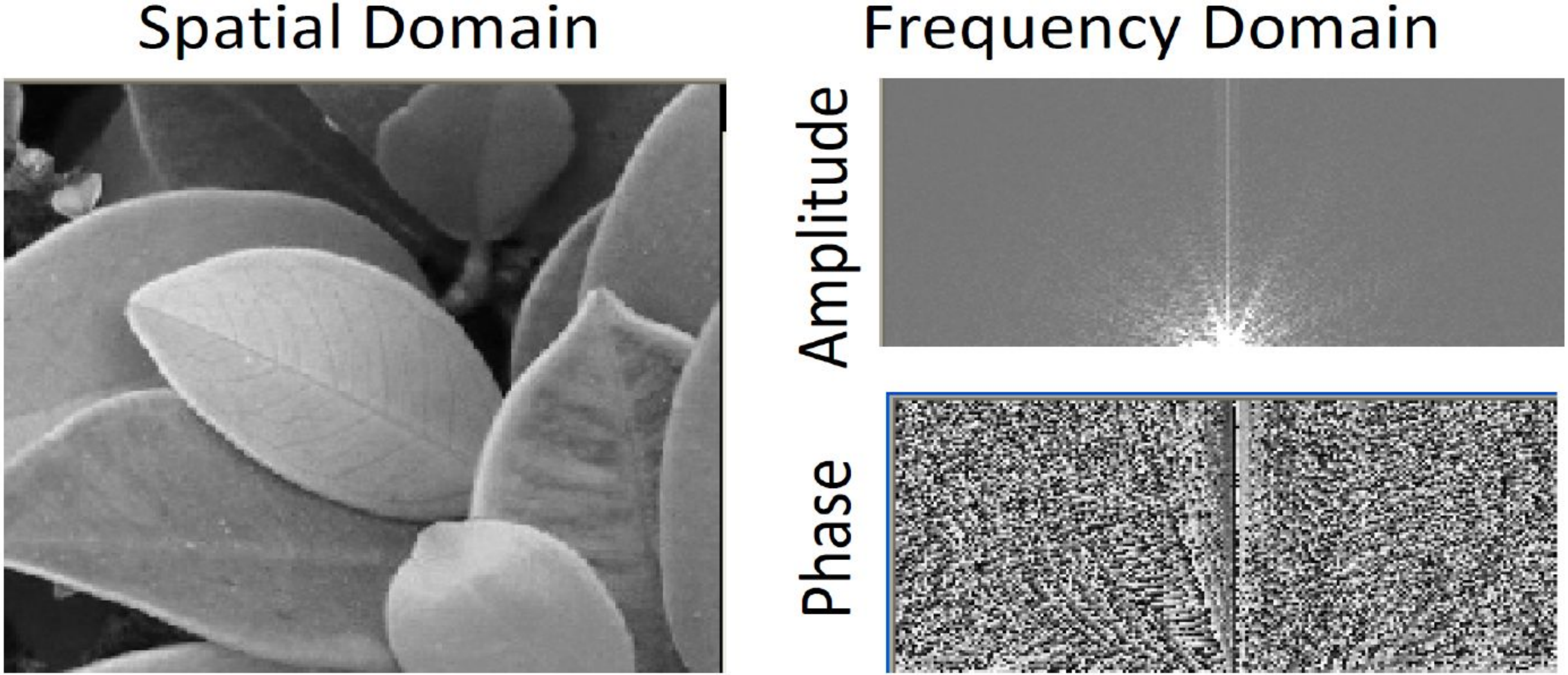
# PSF mais larga (perda de frequências altas)

# Largura menor (jaggies, amostragem insuficiente)

# DFT em 2D: Eixos

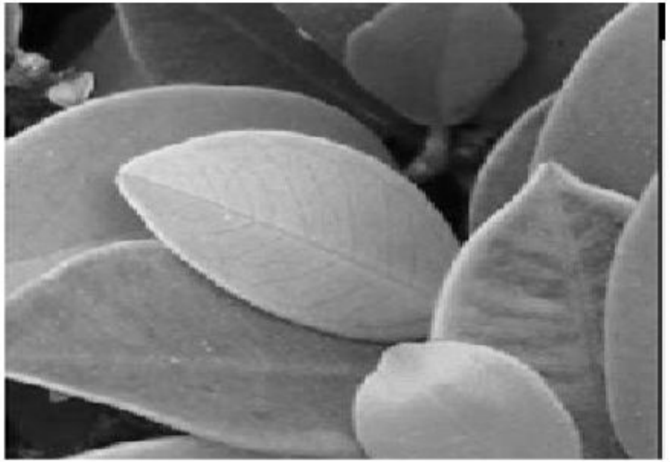
- Frequência
  - Somente positivas
- Orientação
  - 0 a 180
- Repete na frequência negativa
  - Do mesmo modo que em 1D

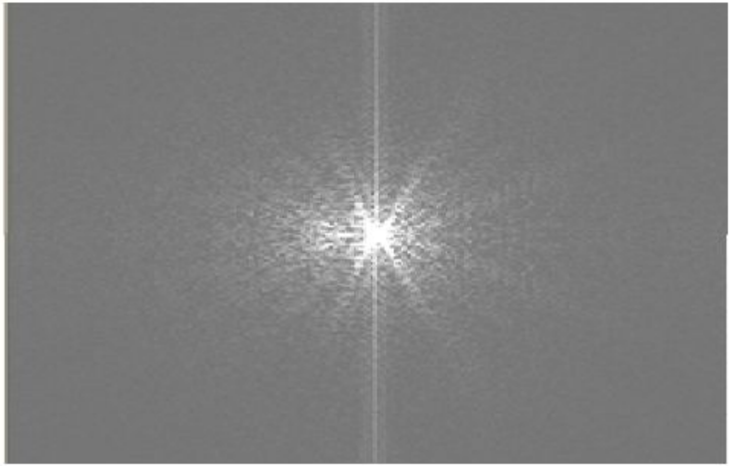
# Exemplo



# Como repete?

- Do mesmo modo que em 1D
  - Função par para amplitude
  - Função ímpar para fase
- Para amplitude
  - Invertido no base





# Por que todo o ruído?

- Valores muito maiores do que 255
- DC frequentemente é mais do que 1000 as frequências mais altas
- Difícil mostrar tudo com somente 255 níveis de cinza

# Mapeamento

- Valor numérico = ***i***
- Nível de cinza = ***g***
- Mapeamento linear é ***g = ki***
- Mapeamento logarítmico é ***g = k log(i)***
  - Comprime a faixa
  - Reduz o ruído
  - Ainda pode precisar de alguma limiarização para remover ruído

# Imagens e suas DFT

- Algumas imagens especiais e suas respectivas transformadas de Fourier

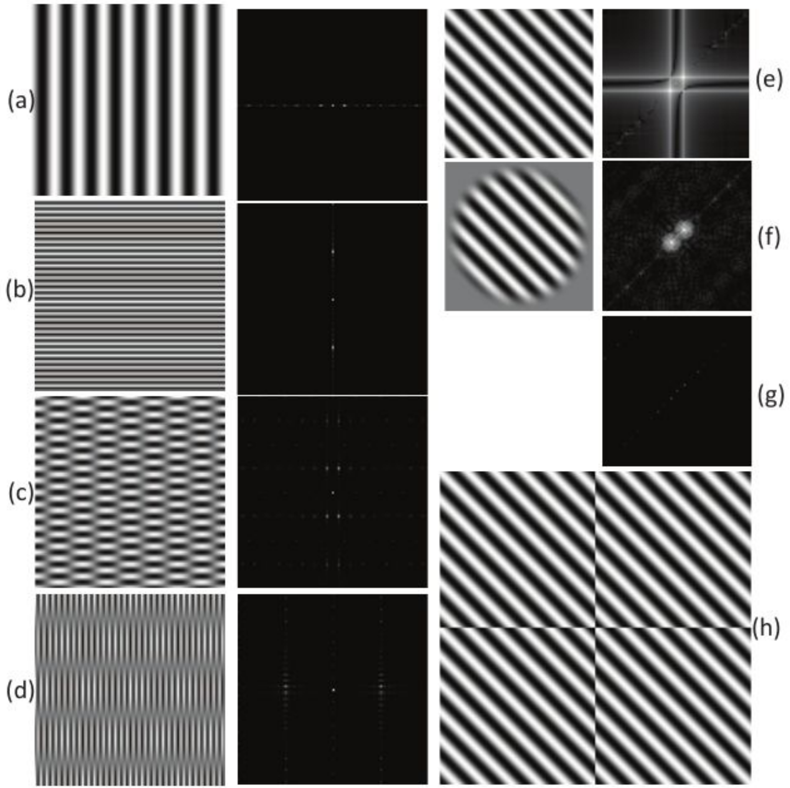



**Figure 4.19.** The top row shows the spatial domain image and the bottom row shows its amplitude response in the frequency domain. (a) A cosine of 8 horizontal cycles. (b) A cosine of 32 vertical cycles. (c) A cosine of 4 cycles horizontally and 16 cycles vertically. (d) A cosine of 32 cycles horizontally and 2 cycles vertically. (e) This is (a) rotated by 45 degrees. The ideal frequency domain response of an infinite image of this pattern is (g). But this is suppressed due to the extra pattern and therefore frequencies created by tiling as shown in (h). (f) This image is that of (e) but with a "windowing" that slowly tapers off to a medium gray at the edge and therefore the frequency response is closer to (g).

# Filtragem no domínio da frequência

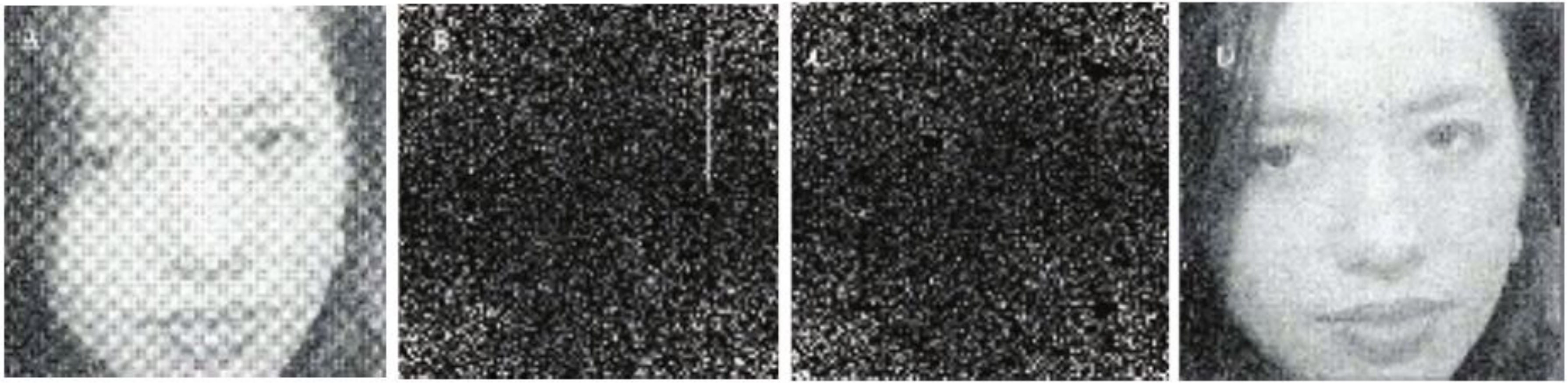
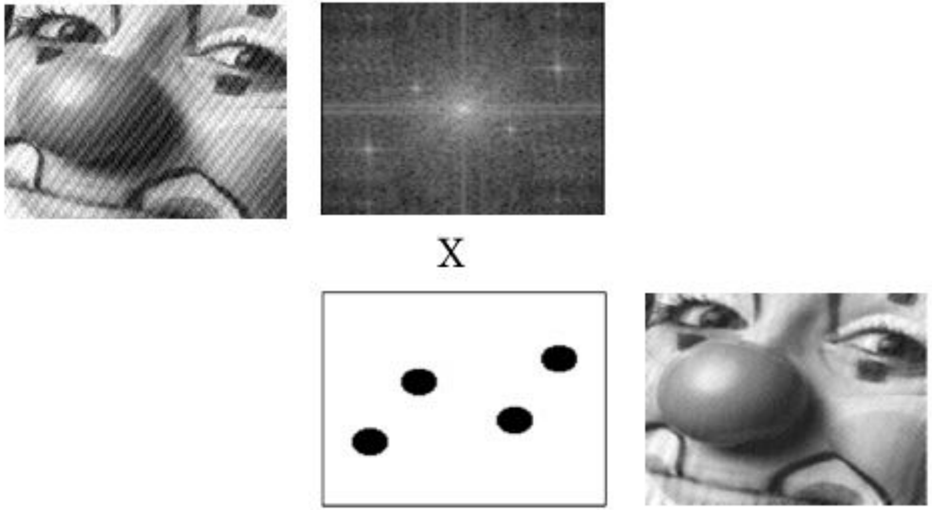
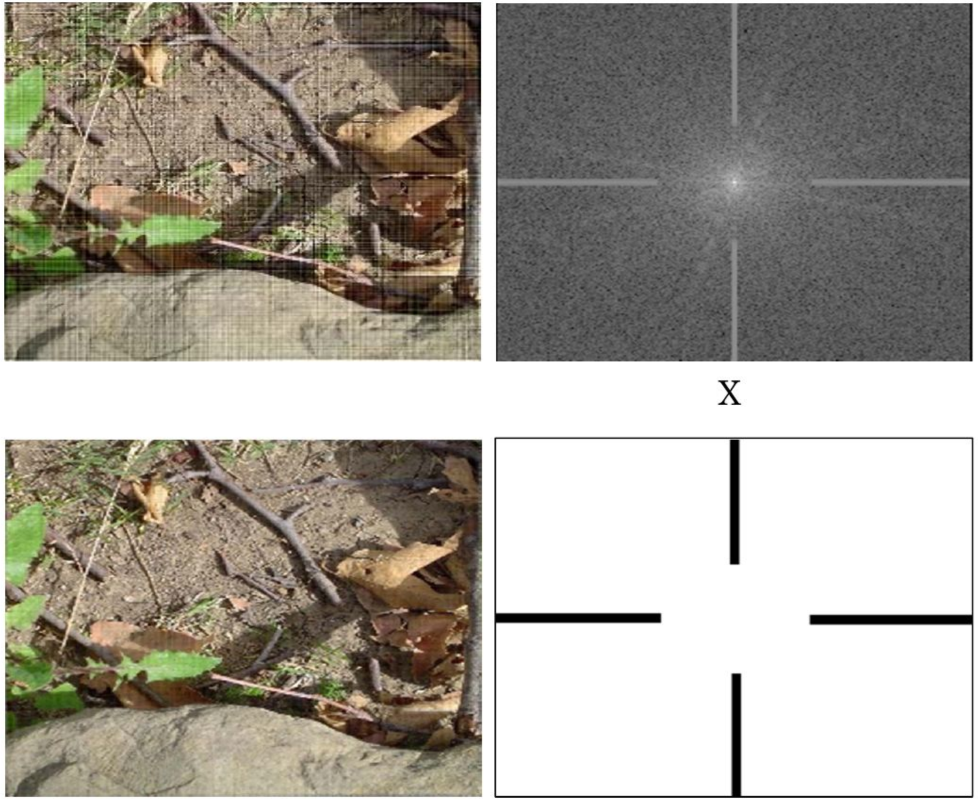


**Figure 4.20.** A: The original image with a high frequency pattern superimposed on it; B: The DFT of the image in A - note the white high frequency regions corresponding to the high frequency pattern; C: Removal of the outlier frequency in the spectral domain; D: Inverse DFT is applied on C to get a new image back. This is devoid of the high frequency pattern.

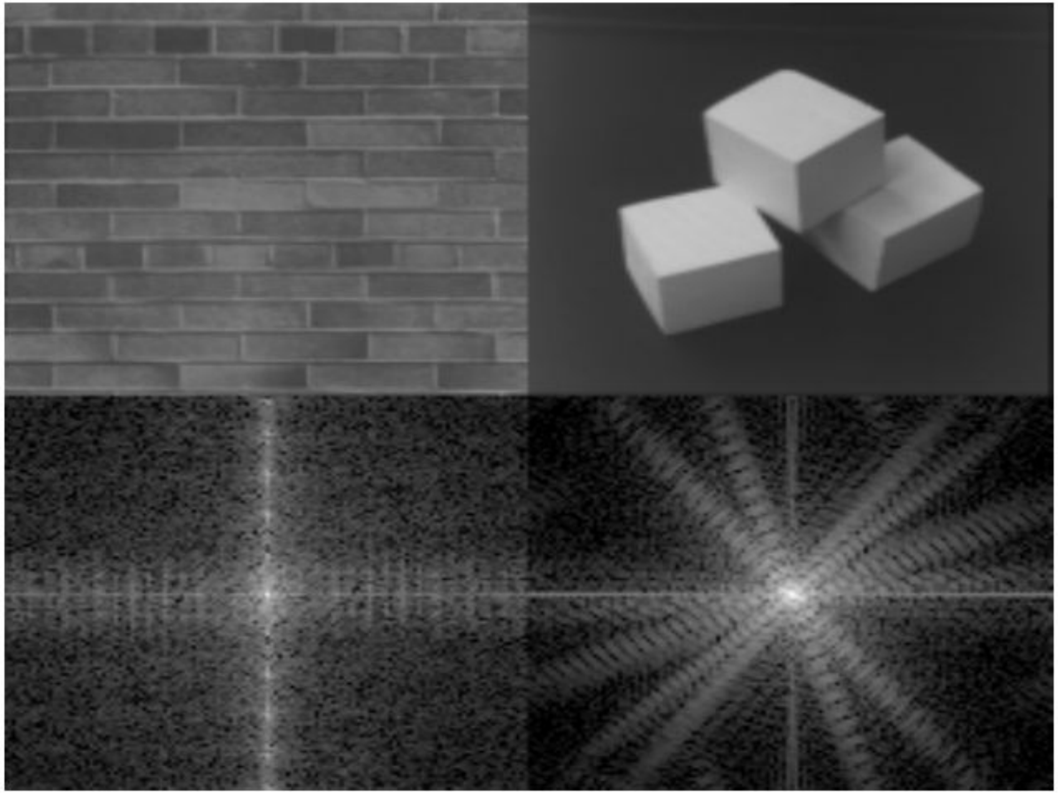
# Filtros de entalhe



# Filtros de entalhe

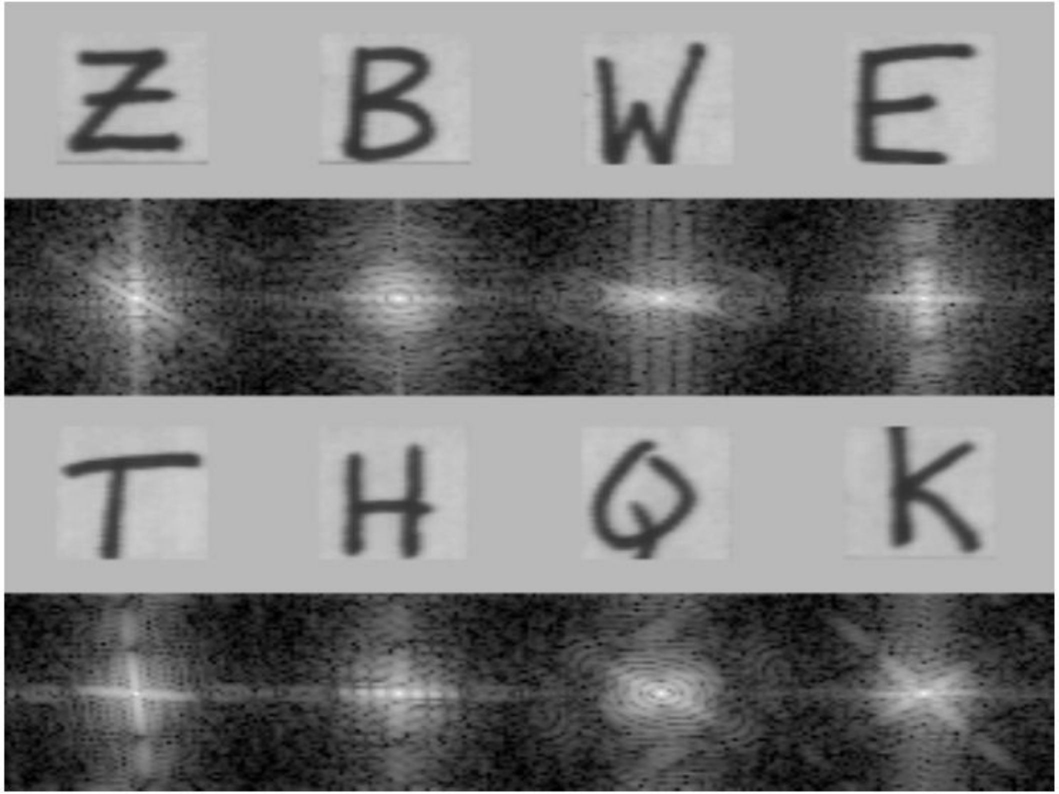


# Mais exemplos



- Bordas em duas direções na imagem da esquerda
  - Energia concentrada em duas direções na DFT
- Bordas com múltiplas direções
  - Veja como a concentração de energia fica sincronizada com a direção das bordas

# Mais exemplos: Letras




- DFTs bem diferentes
  - Especialmente em baixas frequências
- Linhas brilhantes perpendiculares às bordas
- Segmentos circulares tem formas circulares na DFT