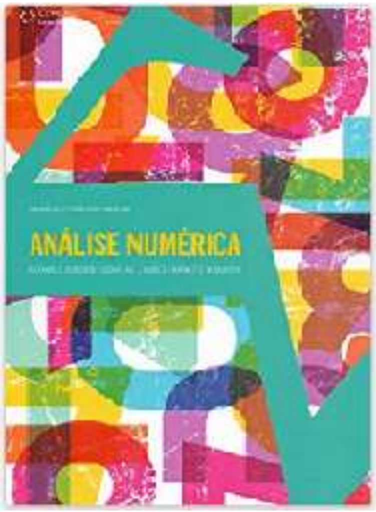
**FACULDADE DE COMPUTAÇÃO E INFORMÁTICA**
**BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO**
**ANÁLISE NUMÉRICA – Aula 08 – 1º SEMESTRE/2020**
**PROF. Jamil Kalil Naufal Júnior**

## TEORIA: INTERPOLAÇÃO E APROXIMAÇÃO DE FUNÇÕES (I)

Nossos **objetivos** nesta aula são:

- Conhecer o problema de interpolação de funções
- Estudar o Método de Interpolação por Polinômios de Lagrange




Para esta semana, usamos como referência a **Seção 3.1 (Interpolação e Polinômios de Lagrange)** do nosso livro da referência básica:

BURDEN, R.L., FAIRES, J.D. **Análise Numérica**. 10.ed. São Paulo: Cengage Learning, 2017.

*Não deixem de ler esta seção depois desta aula!*

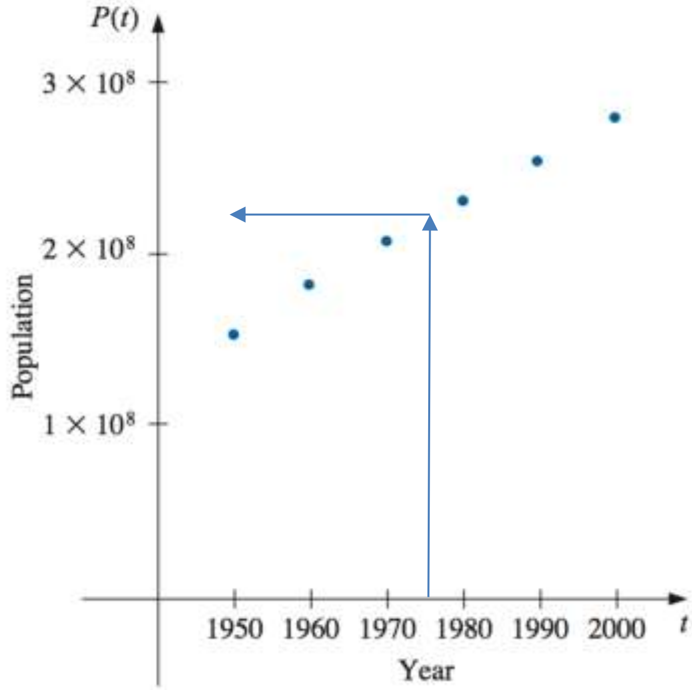
## PROBLEMA DA INTERPOLAÇÃO DE FUNÇÕES

- Suponha que tenhamos o censo populacional de 1950 a 2000, tomado de 10 em 10 anos, conforme mostrado na tabela abaixo:

| Year | 1950 | 1960 | 1970 | 1980 | 1990 | 2000 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Population (in thousands) | 151,326 | 179,323 | 203,302 | 226,542 | 249,633 | 281,422 |

- Seria possível,a partir destes dados, obter uma estimativa da população no ano de 1975 e em 2010 ?

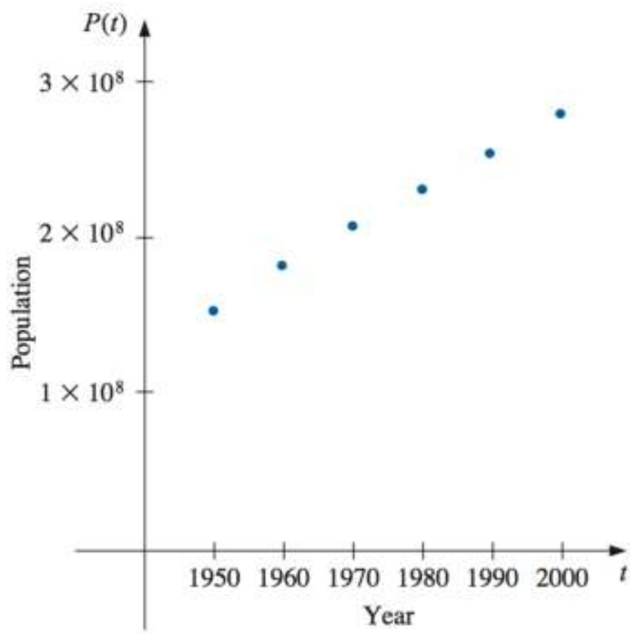
- Colocando os pontos da tabela anterior em um gráfico, obtemos uma **função discreta** conforme mostrado a seguir:

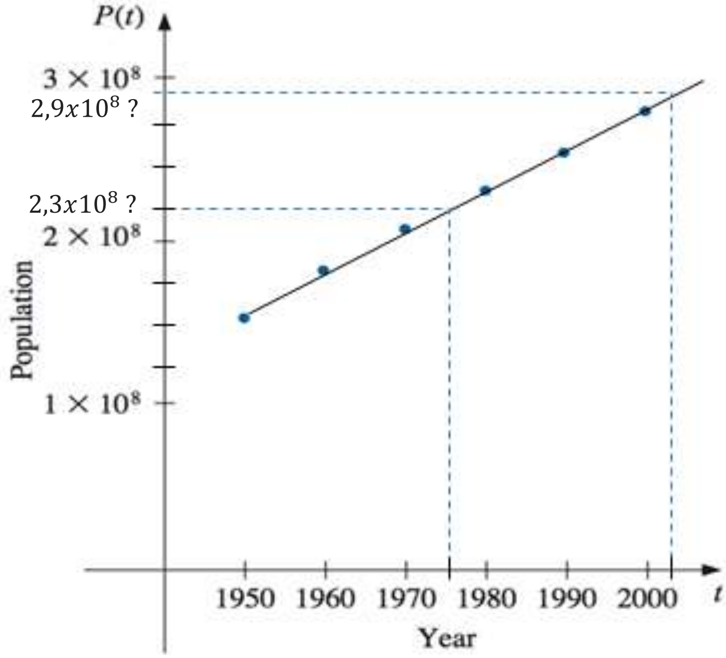



- Se quisermos obter uma estimativa da população em 1975, devemos gerar um novo ponto do gráfico em t=1975 e obter um valor correspondente a este ponto. Isto é chamado de **interpolação de dados**, pois estamos gerando novos pontos no interior do conjunto conhecidos de dados. Para 2010, devemos obter um ponto for a do conjunto conhecido de dado e isto é chamado de **extrapolação de dados**.

## EXERCÍCIO COM DISCUSSÃO EM DUPLAS

1. Obtenha, graficamente, uma interpolação para t=1975 e para t=2021 para a função discreta mostrada abaixo:






## INTERPOLAÇÃO POR POLINÔMIOS DE LAGRANGE

- Os Polinômios de Lagrange representam uma estratégia de interpolação polinomial, que constrói uma base de um espaço vetorial de polinômios, cuja combinação linear tem a propriedade de passar pelos pontos que estão sendo interpolados.

- Vamos considerar, inicialmente, somente **dois pontos** $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$ e $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1})$, com $\boldsymbol{f(x_0) = y_0}$ e $\boldsymbol{f(x_1) = y_1}$**.** Construímos, inicialmente, dois polinômios com estes dois pontos, mostrados abaixo:

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

- Vamos construir uma função interpoladora $P(x)$ com base nos polinômios acima da seguinte maneira:

$$P(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}f(x_1)$$

- $P(x)$ é chamado **Polinômio Interpolador de Lagrange de grau 1** da função $f(x)$ ou, simplesmente, **Polinômio de Lagrange** de $f(x)$.

2. Mostre que o Polinômio de Lagrange $P(x)$ passa pelos pontos $(x_0, y_0)$ e $(x_1, y_1)$.

Em primeiro lugar, definimos as funções:

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad \text{e} \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

O **polinômio interpolador de Lagrange** linear por $(x_0, y_0)$ e $(x_1, y_1)$ é

$$P(x) = L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1).$$

Observe que

$$L_0(x_0) = 1, \qquad L_0(x_1) = 0, \qquad L_1(x_0) = 0 \qquad \text{e} \qquad L_1(x_1) = 1,$$

o que implica que

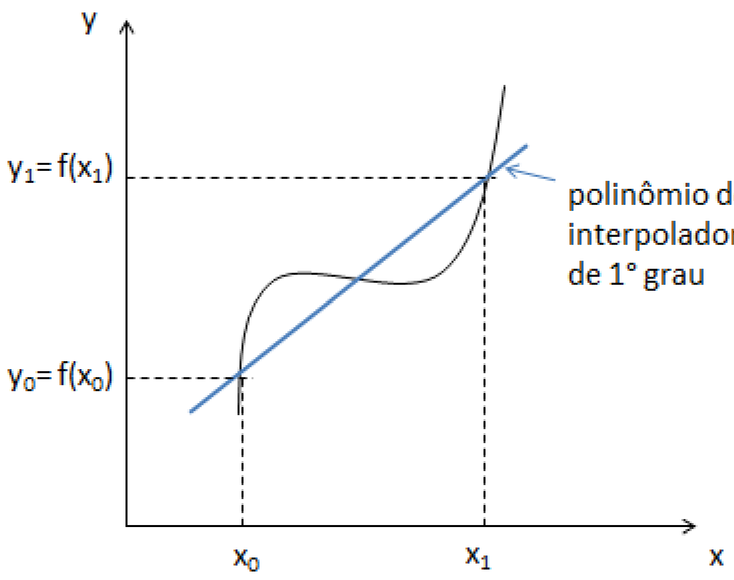
$$P(x_0) = 1 \cdot f(x_0) + 0 \cdot f(x_1) = f(x_0) = y_0$$

e

$$P(x_1) = 0 \cdot f(x_0) + 1 \cdot f(x_1) = f(x_1) = y_1.$$

Assim, $P$ é o único polinômio de grau no máximo 1 que passa por $(x_0, y_0)$ e $(x_1, y_1)$.

**Gráfico com a reta de interpolação passando pelos pontos $(x_0, y_0)$ e $(x_1, y_1)$**

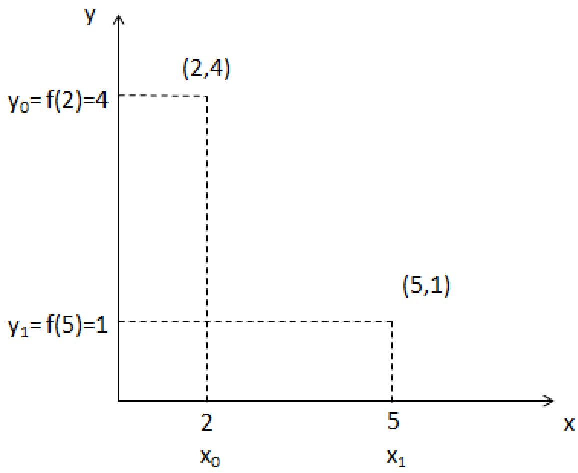


3. Calcule o Polinômio de Lagrange que passe pelos pontos (2,4) e (5,1). Interprete geometricamente o que representa este polinômio.

$(x_0,y_0)=(2,4)$ e $(x_1,y_1)=(5,1)$

$(x_0,y_0)=(2,4) \Rightarrow x_0=2,\ y_0=4 \Rightarrow f(2)=4$
$(x_1,y_1)=(5,1) \Rightarrow x_1=5,\ y_1=1 \Rightarrow f(5)=1$

**Pontos identificados no plano cartesiano**




Sendo:

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad \text{e} \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

O **polinômio interpolador de Lagrange** linear por $(x_0, y_0)$ e $(x_1, y_1)$ é

$$P(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}f(x_1).$$

$$\boldsymbol{L_0} = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x-5}{2-5} = \frac{\boldsymbol{x-5}}{\boldsymbol{-3}}$$

$$\boldsymbol{L_1} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x-2}{5-2} = \frac{\boldsymbol{x-2}}{\boldsymbol{3}}$$

$$f(x_0) = f(2) = 4$$

$$f(x_1) = f(5) = 1$$

$$P(x) = \frac{x-5}{-3}.4 + \frac{x-2}{3}.1 = \frac{-3x+18}{3} = -x+6$$

O polinômio interpolador de Lagrange será: $P(x) = -x + 6$

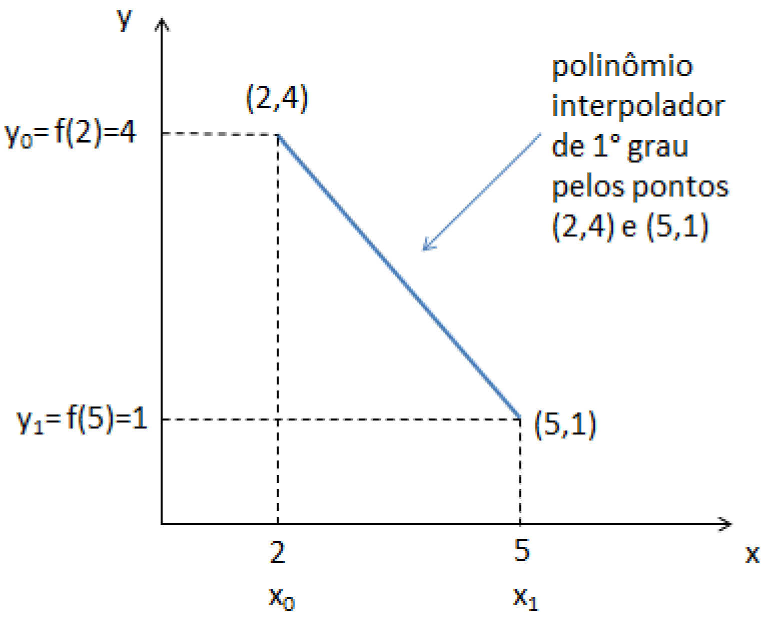
**Teste:**

$f(x_0) = f(2) = -2 + 6 = 4$

$f(x_1) = f(5) = -5 + 6 = 1$

Portanto, a função $P(x) = -x + 6$ passa pelos pontos: { (2,4), (5,1) }

**Gráfico com a reta de interpolação passando pelos pontos (2,4) e (5,1)**




## INTERPOLAÇÃO POR POLINÔMIOS DE LAGRANGE (Continuação)

- A ideia anterior pode ser estendida para mais de pontos. Se **tivermos n+1 pontos** $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})\ldots(\boldsymbol{x_n}, \boldsymbol{y_n})$, definimos os seguintes polinômios:

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

$$= \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}$$

- A partir destes polinômios, definimos o **Polinômio Interpolador de Lagrange de grau n** da seguinte forma:

$$P(x) = f(x_0)L_{n,0}(x) + \cdots + f(x_n)L_{n,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_{n,k}(x),$$

4. Calcule o Polinômio de Lagrange que passe pelos pontos (-1,0), (0,-1) e (1,0). Interprete geometricamente o que representa este polinômio.

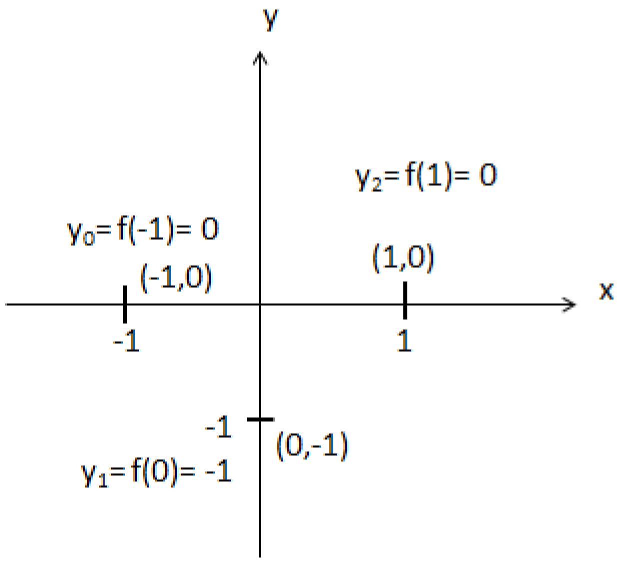
$(x_0,y_0)=(-1,0)$, $(x_1,y_1)=(0,-1)$ e $(x_2,y_2)=(1,0)$

$(x_0,y_0)=(-1,0) \Rightarrow x_0=-1,\ y_0=0 \Rightarrow f(-1)=0$

$(x_1,y_1)=(0,-1) \Rightarrow x_1=0,\ y_1=-1 \Rightarrow f(0)=-1$

$(x_2,y_2)=(1,0) \Rightarrow x_2=1,\ y_2=0 \Rightarrow f(1)=0$

**Pontos no plano cartesiano**




$$P(x) = f(x_0).L_{2,0}(x) + f(x_1).L_{2,1}(x) + f(x_2).L_{2,2}(x)$$

$$f(x_0) = 0$$

$$f(x_1) = -1$$

$$f(x_2) = 0$$

$$L_{2,0}(x) = L_0(x) = \frac{(x - x_1).(x - x_2)}{(x_0 - x_1).(x_0 - x_2)}$$

$$L_0(x) = \frac{(x - 0).(x - 1)}{[(-1) - 0].[(-1) - 1)]} = \frac{x(x - 1)}{2}$$

$$\boldsymbol{L_0(x) = \frac{x^2 - x}{2}}$$

$$L_{2,1}(x) = L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$L_1(x) = \frac{[(x - (-1)].(x - 1)}{[0 - (-1)].(0 - 1)} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{-1}$$

$$\boldsymbol{L_1(x) = -x^2 + 1}$$

$$L_{2,2}(x) = L_2(x) = \frac{(x - x_0).(x - x_1)}{(x_2 - x_0).(x_2 - x_1)}$$

$$L_2(x) = \frac{[(x - (-1)].(x - 0)}{[1 - (-1).](1 - 0)} = \frac{(x + 1)x}{2}$$

$$\boldsymbol{L_2(x) = \frac{x^2 + x}{2}}$$

Portanto,

$P(x) = f(x_0).L_0(x) + f(x_1).L_1(x) + f(x_2).L_2(x)$

$P(x) = 0.L_0(x) + (-1).(-x^2 + 1) + 0.L_2(x)$

$P(x) = x^2 - 1$

**Teste:**

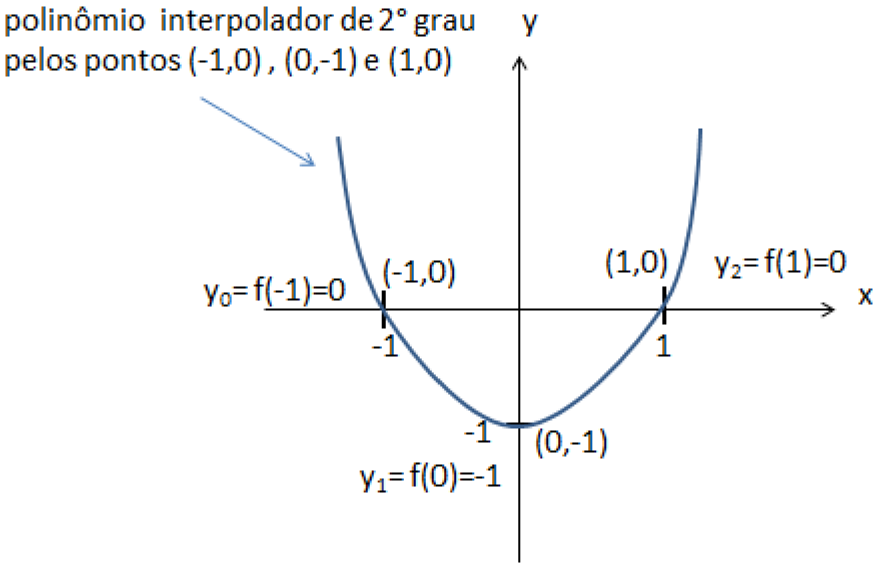
$f(x_0) = f(-1) = (-1)^2 - 1 = 0$

$f(x_1) = f(0) = (0)^2 - 1 = -1$

$f(x_2) = f(1) = (1)^2 - 1 = 0$

Portanto, a função $P(x) = x^2 - 1$ passa pelos pontos: { (-1,0), (0,-1), (1,0)}

**Gráfico com uma parábola de interpolação passando pelos pontos (-1,0), (0,-1) e (1,0)**



## EXERCÍCIOS EXTRA-CLASSE

1. Calcule os Polinômios de Lagrange para as seguintes funções discretas:

   **a.** $f(8.4)$ if $f(8.1) = 16.94410$, $f(8.3) = 17.56492$, $f(8.6) = 18.50515$, $f(8.7) = 18.82091$

   **b.** $f\left(-\frac{1}{3}\right)$ if $f(-0.75) = -0.07181250$, $f(-0.5) = -0.02475000$, $f(-0.25) = 0.33493750$, $f(0) = 1.10100000$

   **c.** $f(0.25)$ if $f(0.1) = 0.62049958$, $f(0.2) = -0.28398668$, $f(0.3) = 0.00660095$, $f(0.4) = 0.24842440$

   **d.** $f(0.9)$ if $f(0.6) = -0.17694460$, $f(0.7) = 0.01375227$, $f(0.8) = 0.22363362$, $f(1.0) = 0.65809197$

2. Seja $f(x) = e^x$, para $0 \leq x \leq 2$:

   - Aproxime $f(0.25)$ usando uma interpolação linear neste intervalo
   - Aproxime $f(0.75)$ usando uma interpolação linear neste intervalo