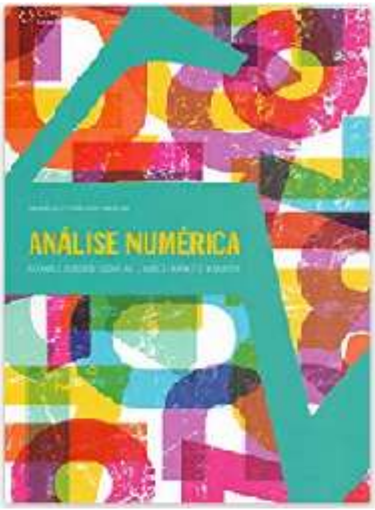
FACULDADE DE COMPUTAÇÃO E INFORMÁTICA
BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO
ANÁLISE NUMÉRICA – Aula 06 – 1º SEMESTRE/2020
PROF. Jamil Kalil Naufal Júnior

TEORIA: RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES (I)

Nossos **objetivos** nesta aula são:

- Conhecer o problema de resolução de equações.
- Conhecer e praticar com o Algoritmo da Bisseção para a soluções de problemas.



Para esta semana, usamos como referência as **Seção 2.1 (Método da Bissecção)** do nosso livro da referência básica:

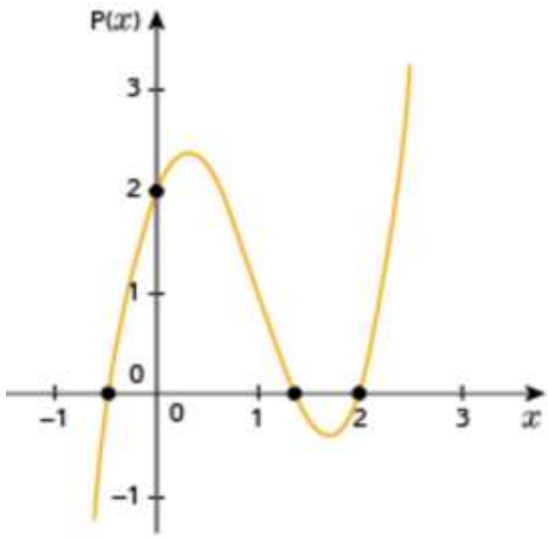
BURDEN, R.L., FAIRES, J.D. **Análise Numérica**. 10.ed. São Paulo: Cengage Learning, 2017.

Não deixem de ler esta seção depois desta aula!

PROBLEMA DE RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES

- O problema de **resolução de equações** de uma variável consiste em, **dada uma função de uma variável f(x)**, encontrar um **valor r tal que f(r)=0**. Este valor é chamado **raiz de f(x)**.

- Por exemplo, a função P(x) mostrada abaixo possui três raízes:



1. Encontre todas as raízes da função:

$$f(x) = x^5 + x - 2x^4 - 2$$

Resolução:

$x^5 + x - 2x^4 - 2 = 0$

$x(x^4 + 1) - 2(x^4 + 1) = 0$

$(x^4 + 1).(x - 2) = 0$

$x - 2 = 0 \longrightarrow x = 2$

$x^4 + 1 = 0 \longrightarrow x = \pm\sqrt[4]{-1}$

Considerando o conjunto dos números complexos, ou seja, $-1 = i^2$

Raízes: {2, $-\sqrt{i}$, $+\sqrt{i}$}

2. Encontre todas as raízes da função:

$$f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 25x - 6$$

Resolução:

$4x^3 - 3x^2 - 25x - 6 = 0$

Teorema das raízes racionais:

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1}$+.......++ $a_1 x^1 + a_0$

Supor que tenha uma raiz racional r= $\frac{p}{q}$, com p e q primos entre sí e $a_0 \neq 0$

p é divisor de a_o

q é divisor de a_n

Divisores de a_0: p ε {+-1, +-2, +-3, +-6}

Divisores de a_n:q ε {+-1, +-2, +-4}

p/q ε {+-1, +-2, +-, 3,+-6, +-1/2, +-1/4,+- 3/2, +-3/4}

$4x^3-3x^2-25x-6=0$

$f(1) = 4.1^3 -3. 1^2-25.1-6 = -30 \neq 0$

$f(-2) = 4.(-2)^3 -3. (-2)^2-25.-2-6 = 0$ (raiz) , portanto x=-2 é uma raiz

f(x) = q(x).Q(x) = 0, sendo Q(x)= (x+2), portanto, f(x) = q(x).(x+2)=0

Método prático de Briot Ruffini

Coeficientes do polinômio

raiz

	4	**-3**	**-25**	**-6**
-2		-8	22	6
	4	-11	-3	0

resto

$q(x) = 4x^2-11x-3=0$

Aplicando Báskara,

$\Delta=b^2-4ac$, $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Delta = (-11)^2-4.4.-3 = 169$

$$x = \frac{-(-11) \pm \sqrt{169}}{2.4}$$

raízes = {-1/4, 3}

(x-3)(x+1/4).(x+2)=0

Raízes: {-2, -1/4, 3}

3. Encontre todas as raízes da função:

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$$

Método Cardano-Tartaglia

Solução Geral

Para a equação cúbica geral $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, o método de Cardano-Tartaglia garante a existência de três soluções complexas, as quais podem ser escritas da seguinte forma em termos dos coeficientes a, b, c e d:

$$x_1 = -\frac{b}{3a} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$x_2 = -\frac{b}{3a} + \left(\frac{-1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \left(\frac{-1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$x_3 = -\frac{b}{3a} + \left(\frac{-1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \left(\frac{-1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

em que $p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}$ e $q = \frac{d}{a} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{2b^3}{27a^3}$.

Raízes:

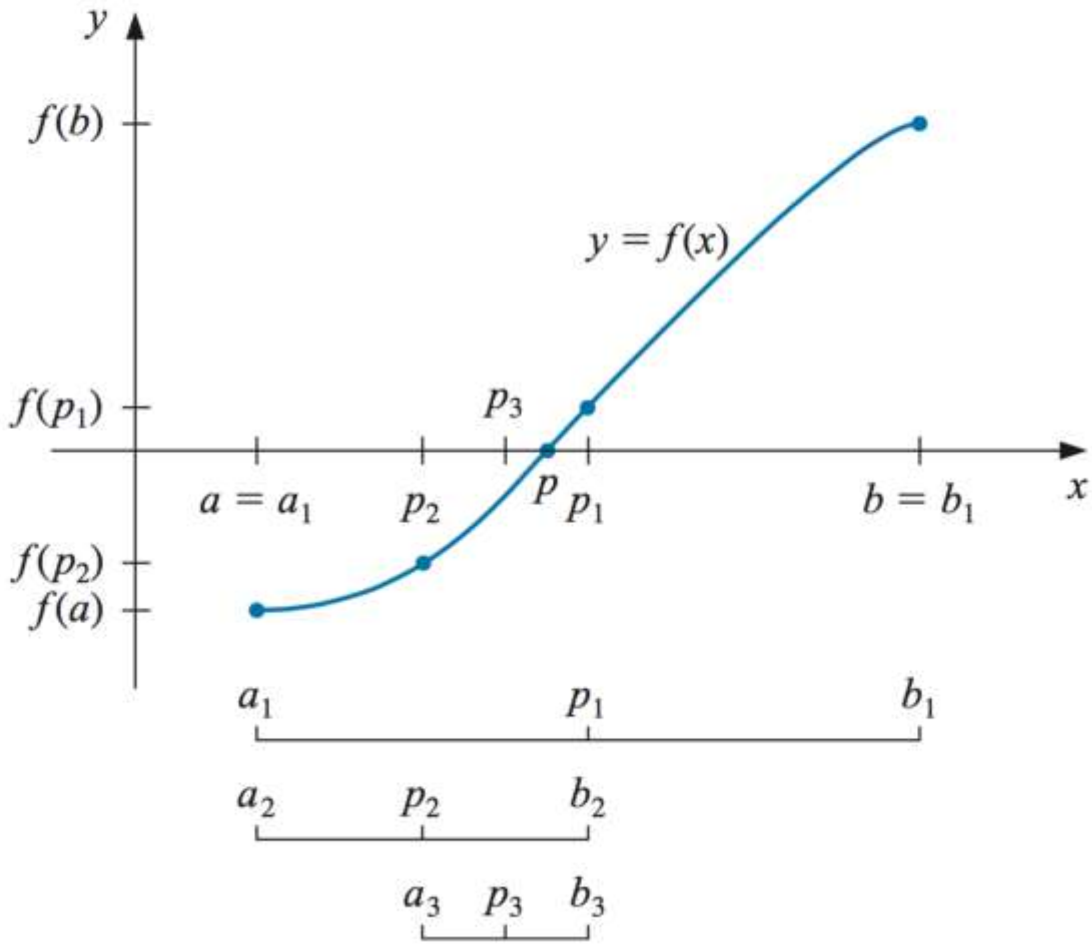
{x_1 = 1,365230013,

x_2 = -2,68262+0,35826i,

x_3= -2,68262- 0,35826i}

MÉTODO DA BISSECÇÃO

- Trata-se de um dos métodos mais elementares para se resolver equações.
- Inicialmente, **delimita-se um intervalo [a,b]** que **contenha a raiz** procurada. **Divide-se o intervalo ao meio (p_i)** e a **busca** continua pelo **lado esquerdo ou direito** da **divisão** dependendo do **sinal do produto f(a)f(pi)** ou **f(b)f(pi)**. Vamos sempre procurar do **lado que tiver o produto negativo**, pois a função muda de sinal neste intervalo.
- O esquema iterativo é mostrado na figura a seguir:



Passo 1

- Inicialmente: $a_1 = a$ e $b_1 = b$ sendo p_1 o ponto médio do intervalo [a,b].

Passo 2

- Se $f(p_1) = 0$, então $p = p_1$ e foi e encontrada a raiz.
- Se $f(p_1) \neq 0$, então $f(p_1)$ tem o mesmo sinal de $f(a_1)$ ou de $f(b_1)$.
    - Se $f(p_1)$ e $f(a_1)$ têm o mesmo sinal, $p \in (p_1, b_1)$. Definimos $a_2 = p_1$ e $b_2 = b_1$.
    - Se $f(p_1)$ e $f(a_1)$ têm sinais opostos, $p \in (a_1, p_1)$. Definimos $a_2 = a_1$ e $b_2 = p_1$.

Passo 3

- Replica-se o processo ao intervalo $[a_2 , b_2]$ e assim por diante até atingir uma tolerância **ε** fornecida.

- Como se trata de um **esquema iterativo**, é necessário fornecer uma **tolerância ε**. A partir desta tolerância, existem diversas alternativas para critérios de parada:

$$|p_N - p_{N-1}| < \varepsilon,$$

$$\frac{|p_N - p_{N-1}|}{|p_N|} < \varepsilon, \quad p_N \neq 0,$$

$$|f(p_N)| < \varepsilon.$$

4. Encontre uma aproximação para uma raiz da equação no intervalo [1,2] com tolerância ε=0.1.

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$$

Utilize, como critério de parada, $|f(p_N)| < \varepsilon$.

Solução:

Como $f(1) = -5$ e $f(2) = 14$,

Para a primeira iteração do método da bissecção, usamos o fato de que no ponto médio de [1, 2] temos $f(1{,}5) = 2{,}375 > 0$. Isso indica que devemos escolher o intervalo [1, 1,5] para nossa segunda iteração. A seguir, encontramos que $f(1{,}25) = -1{,}796875$, de modo que nosso intervalo se torna [1,25, 1,5], cujo ponto médio é 1,375. Ao continuar dessa maneira, encontramos os valores na Tabela .

n	a_n	b_n	p_n	$f(p_n)$	
1	1,0	2,0	b2=p1 $\boxed{1{,}5}$	2,375	$f(a_1).f(p_1)<0$
2	a2=a1 1,0	b3=b2 1,5	a3=p2 $\boxed{1{,}25}$	−1,79687	$f(a_2).f(p_2)>0$
3	1,25	1,5	b4=p3 $\boxed{1{,}375}$	0,16211	$f(a_3).f(p_3)<0$
4	a4=a3 1,25	b5=b4 1,375	a5=p4 $\boxed{1{,}3125}$	−0,84839	$f(a_4).f(p_4)>0$
5	1,3125	1,375	a6=p5 $\boxed{1{,}34375}$	−0,35098	$f(a_5).f(p_5)>0$
6	1,34375	b6=b5 1,375	$\boxed{1{,}359375}$	$\boxed{-0{,}09641}$	

Para n=1 temos que $a_1=1$ ⇨ f(1)= -5 e $p_1=1{,}5$ ⇨f(1,5)=+2,375, então f(1).f(1,5)<0

O algoritmo para em n=6, pois atingiu-se o critério de parada $|f(p_6)|$= 0,09641 < 0,1 no qual temos $\mathbf{p_6}$ **= 1,359375**.

Pelo exercício 03 a raiz real é 1,365230013, temos um erro absoluto de |1,365230013-1,359375| = 0,005855013 (= $0{,}5855013.10^{-2}$) < 0,1

Apesar de conceitualmente claro, o método da bissecção tem desvantagens significativas. Sua convergência é lenta (isto é, N pode crescer muito antes que $|p - p_N|$ se torne pequeno o suficiente), e uma boa aproximação intermediária pode ser descartada de modo inadvertido. Entretanto, o método tem a propriedade importante de sempre convergir para uma solução e, por isso, é utilizado muitas vezes como o iniciador de métodos mais eficientes .

5. Escreva o Método da Bissecção numa versão algorítmica.

Para determinar uma solução de $f(x) = 0$, dada a função contínua f no intervalo $[a, b]$, onde $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais opostos:

ENTRADA extremidades a, b; tolerância TOL; número máximo de iterações N_0.

SAÍDA solução aproximada p ou mensagem de erro.

Passo 1 Faça $i = 1$;
$FA = f(a)$.

Passo 2 Enquanto $i \leq N_0$, execute os Passos 3 a 6.

Passo 3 Faça $p = a + (b - a)/2$; (*Calcule p_i.*)
$FP = f(p)$.

Passo 4 Se $FP = 0$ ou $(b - a)/2 < TOL$, então
SAÍDA (p); (*Procedimento concluído com sucesso.*)
PARE.

Passo 5 Faça $i = i + 1$.

Passo 6 Se $FA \cdot FP > 0$, então faça $a = p$; (*Calcule a_i, b_i.*)
$FA = FP$
senão faça $b = p$. (*FA não muda*)

Passo 7 SAÍDA ('O método falhou após N_0 iterações, N_0 =', N_0);
(*O procedimento não foi bem-sucedido.*)
PARE.

Quando um computador é utilizado para gerar aproximações, é boa prática definir um limite superior para o número de iterações. Isso elimina a possibilidade da ocorrência de um laço infinito, uma situação que pode ocorrer quando a sequência diverge (e também quando a codificação do programa é incorreta). Isso foi efetuado no Passo 2 do Algoritmo , no qual o limite N_0 foi definido e o procedimento encerrado se $i > N_0$.

Observe que, para iniciarmos o algoritmo de bissecção, devemos determinar um intervalo $[a, b]$ com $f(a) \cdot f(b) < 0$. Em cada passo, o comprimento do intervalo que contém um zero de f é reduzido por um fator 2 e, desse modo, é vantajoso escolher o menor intervalo inicial $[a, b]$ possível.

EXERCÍCIOS EXTRA-CLASSE

1. Utilize o Método da Bissecção para encontrar uma raiz das equações abaixo com tolerância ε=0.00001. Utilize o mesmo critério de parada usado em aula.

   a. $x - 2^{-x} = 0$ for $0 \le x \le 1$

   b. $e^x - x^2 + 3x - 2 = 0$ for $0 \le x \le 1$

   c. $2x\cos(2x) - (x+1)^2 = 0$ for $-3 \le x \le -2$ and $-1 \le x \le 0$

   d. $x\cos x - 2x^2 + 3x - 1 = 0$ for $0.2 \le x \le 0.3$ and $1.2 \le x \le 1.3$

2. Implemente o Método da Bisseção em Python como uma função bisseccao(f,a,b,epsilon), que recebe a função f, o intervalo [a,b] e uma tolerância epsilon e devolve uma aproximação de uma raiz de f no intervalo [a,b] com tolerância epsilon.