Árvores e Florestas

Teoria dos Grafos - 2021

Prof. Roberto C. de Araujo

Exercícios de "aquecimento"

1. O que é um grafo conexo?

2. O que é um subgrafo gerador?

3. Desenhe um grafo conexo com 7 vértices e cuja quantidade de arestas seja a menor possível.

Definição de árvore

Um grafo que não contém circuitos é chamado de ***acíclico***. Uma ***árvore*** é um grafo conexo e acíclico.

Exercício: Desenhe todos os grafos conexos com n vértices e n-1 arestas para n=1,2,...,6:

Teorema. Um grafo conexo G é uma árvore se e somente se $|AG|=|VG|-1$.

Um grafo acíclico é também chamado ***floresta***. Ou seja uma floresta é um grafo tal que toda componente é uma árvore.

Algumas propriedades interessantes

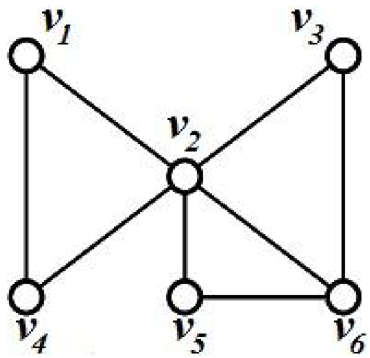
Se G é uma árvore:

- *G* não tem laços e entre quaisquer dois vértices de *G* existe um único caminho.
- *G* é acíclico e se quaisquer dois vértices não adjacentes são ligados por uma aresta *e* então $G+e$ tem exatamente um circuito (isto é, *G* é um grafo acíclico maximal).
- *G* é conexo e se $e \in AG$ então G-e é desconexo. (Em outras palavras, *G* é conexo e toda aresta de *G* é de corte.)
- se G tem 2 ou mais vértices então G tem, pelo menos, 2 vértices de grau 1.
- G é bipartido.

Definição. Uma ***árvore geradora*** ("spanning tree") de um grafo G é um subgrafo gerador que é uma árvore.

Todo grafo conexo contém uma árvore geradora.

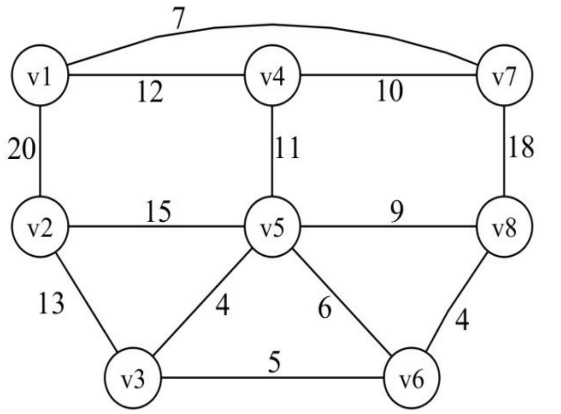
Exercício: Desenhe uma árvore geradora do grafo abaixo:



Grafos com custos nas arestas

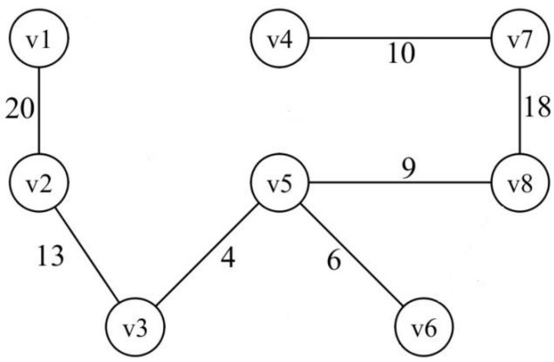
Um grafo G com custos associados às suas arestas (ou seja, G é ***aresta valorado***) é um grafo tal que toda aresta $a \in$ AG tem um custo $c(a) \geq 0$.

Exemplo: Considere o grafo *H* abaixo



No grafo *H*, o custo da aresta v3v6 é 5. Note que toda aresta de *H* tem seu respectivo custo.

Problema da árvore geradora de custo mínimo
Todo grafo conexo tem uma árvore geradora. No caso de um grafo com custos nas arestas, definimos o ***custo de uma árvore geradora*** como a soma dos custos das arestas pertencentes à árvore.
Por exemplo, abaixo temos uma árvore geradora do grafo *H* acima cujo custo é 80.



Pergunta : Será que o grafo H tem alguma outra árvore geradora cujo custo seja menor que 80?
Sim.

Problema: Obter uma árvore geradora de H cujo custo seja o menor possível.

Este é o problema da árvore geradora de custo mínimo.

Algoritmo de Kruskal

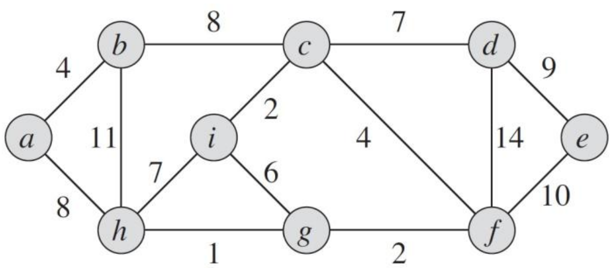
O algoritmo de Kruskal é um algoritmo guloso usado para encontrar uma árvore geradora de custo mínimo em um grafo com custos nas arestas.

<u>**Entrada**</u>: Grafo conexo com custos nas arestas G com custos c(a)$\in$ R associados às arestas a$\in$AG;
<u>**Saída**</u>: Árvore geradora de custo mínimo T.

1. **Ordene** as arestas de G em ordem não decrescente de seus custos. Chame-as de $a_1, a_2, \ldots, a_m$ com $c(a_1) \leq c(a_2) \leq \ldots \leq c(a_m)$.
2. A$\leftarrow\phi$.
3. **Para** i= 1 **até** m **faça**
   se G[A$\cup\{a_i\}$] é acíclico **então** A$\leftarrow$A$\cup\{a_i\}$.
4. T$\leftarrow$G[A]. **Pare**

O **passo 1** ordena as arestas do grafo para que, no passo 3 as arestas de menor custo sejam tratadas antes que aquelas de custo maior.
O **passo 2** do algoritmo inicializa o conjunto de arestas da árvore geradora como vazio.
No **passo 3**, avaliamos cada aresta do grafo verificando se ela forma um circuito com as arestas previmente selecionadas; caso afirmativo, ela é descartada, senão ela é incluída na árvore.
No **passo 4**, definimos a árvore geradora de custo mínimo como o subgrafo induzido pelas arestas selecionadas.

Exercícios
1. Simulando o algoritmo de Kruskal, obtenha uma árvore geradora do grafo H ao lado.
2. Simulando o algoritmo de Kruskal, obtenha uma árvore geradora do grafo abaixo.



(exercício resolvido detalhadamente na próxima página)

3. O algoritmo de Prim é um outro algoritmo para calcular a árvore geradora de custo mínimo. Faça uma pesquisa sobre este algoritmo.