Grafos – Conceitos Básicos - parte 1

Teoria dos Grafos - 2021

Prof. Roberto C. de Araujo

1. Definição de grafo

Um ***grafo*** é uma tripla G=(V, A, ψ) tal que:

- V é um conjunto de elementos (chamados *vértices*)
- A é um conjunto de elementos (chamados *arestas*), e
- ψ é uma função (chamada *função de incidência*) que associa a cada elemento de A um par de elementos de V.

Exemplo: Considere G=(V, E, ψ) tal que

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$
$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$$

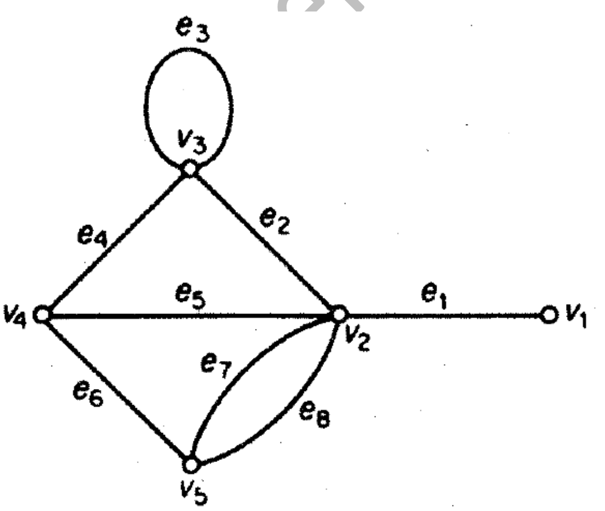
E a função de incidência ψ é definida como:

$$\begin{aligned} \psi_G(e_1) &= v_1v_2 & \psi_G(e_5) &= v_2v_4 \\ \psi_G(e_2) &= v_2v_3 & \psi_G(e_6) &= v_4v_5 \\ \psi_G(e_3) &= v_3v_3 & \psi_G(e_7) &= v_2v_5 \\ \psi_G(e_4) &= v_3v_4 & \psi_G(e_8) &= v_2v_5 \end{aligned}$$

2. Representação gráfica de um grafo

Normalmente apresentamos grafos através de sua ***representação gráfica***, na qual cada vértice é representado por um ponto e cada aresta é representada por uma linha ligando os pontos que representam seus dois vértices correspondentes..

Exemplo: Considere o grafo G=(V,A) do exemplo anterior



3. Conceitos Básicos

Convenção: se G é o nome de um grafo, **VG** denota seu conjunto de vértices e **AG** denota seu conjunto de arestas.

Se *a* é uma aresta de um grafo G tal que ψ(*a*)= *u v* então dizemos que *u* e *v* são os ***extremos*** de *a*. Se *u* e *v* são os extremos de uma aresta *a*, dizemos que *u* e *v* são vértices ***adjacentes*** (ou ***vizinhos***). Dizemos também que *a* ***incide*** em *u* (e em *v* também), ou ***liga*** os vértices *u* e *v*. Para simplificar, no lugar de usar "aresta com extremos *u* e *v*", quando não houver perigo de confusão, usaremos "a **aresta *uv***" (ou, equivalentemente, "a **aresta *vu***").

Duas arestas com um extremo em comum são chamadas ***adjacentes***; duas arestas distintas com os mesmos extremos são chamadas ***paralelas*** ou ***múltiplas***. Uma aresta com extremos idênticos é chamada ***laço*** ("loop").

Exemplo: Considere o grafo desenhado no exemplo:

- e_7 e e_8 são paralelas
- e_1 e e_2 são adjacentes
- e_3 é um laço

A ***ordem*** de um grafo G é o número de vértices de G (notação: |VG|); o ***tamanho*** de um grafo é a soma do número de vértices com o número de arestas de G (o número de arestas de G é denotado por |AG|).

O ***grau*** de um vértice v em um grafo G, denotado por $g_G(v)$, é o número de arestas que incidem em v, onde os laços são contados duas vezes. Se o grafo a que estamos nos referindo é óbvio pelo contexto, o grau de um vértice v é denotado simplesmente por g(v).

δ(G) denota o mínimo dos graus dos vértices de G.
Δ(G) denota o máximo dos graus dos vértices de G.

Proposição 1 A soma dos graus dos vértices de um grafo é igual ao dobro do número de arestas do grafo.

Corolário 1 Em todo grafo o número de vértices de grau ímpar é par.

4. Isomorfismo de Grafos

Sejam G e H dois grafos. Dizemos que G e H são isomorfos, denotado por $G \cong H$, se existem bijeções

- $\alpha: VG \rightarrow VH$
- $\beta: AG \rightarrow AH$

tais que:

$$a=\{u,v\}\in AG \iff \beta(a) = \{ \alpha(u), \alpha(v) \}\in AH$$

O par (α,β) é chamado de ***isomorfismo*** entre G e H.

5. Tipos Especiais de Grafos

Um grafo G é ***vazio*** se $VG = AG = \emptyset$. Um grafo com apenas um vértice e nenhuma aresta é chamado ***trivial***; caso contrário, ***não trivial***.

Um grafo é ***simples*** se não tem laços e nem arestas múltiplas. Um grafo G é ***finito*** se VG e AG são ambos finitos. (Neste curso trataremos apenas de grafos finitos.)

Grafo ***completo*** é um grafo simples em que quaisquer dois vértices distintos são adjacentes. A menos de isomorfismo, existe um único grafo completo com *n* vértices; este grafo é denotado por K_n.

Um grafo G é ***bipartido*** se VG pode ser particionado[1] em dois conjuntos, *X* e *Y*, tais que cada aresta de AG tem um extremo em X e o outro em Y . Uma tal partição (X,Y) é chamada uma ***bipartição do grafo***.

Um grafo ***bipartido completo*** é um grafo simples com bipartição (X,Y) no qual todo vértice de X é adjacente a todos os vértices de Y. Se $|X|= m$ e $|Y|= n$ então um tal grafo é denotado por $K_{m,n}$.

Um grafo G é ***k-regular*** se $g(v)= k$ para todo $v \in VG$. G é ***regular*** se é G é k-regular para algum k.

Se G é um grafo simples, o ***complemento*** G^C de G é um grafo simples com $V\,G^C = VG$, sendo que dois vértices são adacentes em G^C sse eles não são adjacentes em G.
Uma outra notação para complemento é $\overline{G}$.)

[1] $\{X,Y\}$ é uma ***partição*** de VG se $X\cup Y = VG$ e $X\cap Y= \emptyset$.

6. Exercícios

1. Considere a seguinte definição alternativa de grafo:
*Um **grafo** é um par G=(V, A) de conjuntos que satisfazem $A \subseteq [V]^2$. (Onde $[V]^2$ denota o conjunto de todos os subconjuntos de V com 2 elementos.)*

a) Tal definição é equivalente à anterior? Justifique.

b) Considerando esta definição desenhe o grafo G=(V,A) tal que
- V= {1, 2, 3, 4, 5, 6}
- A= { {1,2}, {1,5}, {1,4}, {3,4}, {5,6} }

c) Considerando o grafo G do item anterior,
- Quanto vale g(4)?
- Quanto vale $\delta(G)$?
- Quanto vale $\Delta(G)$?
- Apresente o complemento do grafo G.

2. Apresente um grafo G com 6 vértices tal que todo vértice tenha grau 1.

3. Existe algum grafo com 13 vértices tal que todo vértice tenha grau 3? Justifique.

4. Apresente todos os grafos completos com até 6 vértices.

5. Quantas arestas tem um grafo completo com n vértices?

6. Seja G uma grafo regular. Será que G^C é, também um grafo regular? Justifique.

7. Seja G um grafo bipartido completo com bipartição (X, Y) tal que $|X|= 4$ e $|Y|= 6$. Será que G^C é, também um grafo regular? Justifique.