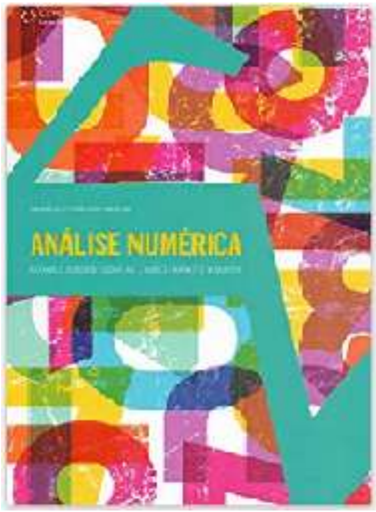
FACULDADE DE COMPUTAÇÃO E INFORMÁTICA
BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO
ANÁLISE NUMÉRICA – Aula 07 – 1º SEMESTRE/2020
PROF. Jamil Kalil Naufal Júnior

TEORIA: RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES (II)



Nossos **objetivos** nesta aula são:

- Continuar trabalhando com o problema de resolução de equações.
- Conhecer e praticar com o Algoritmo de Newton para resolução de equações.

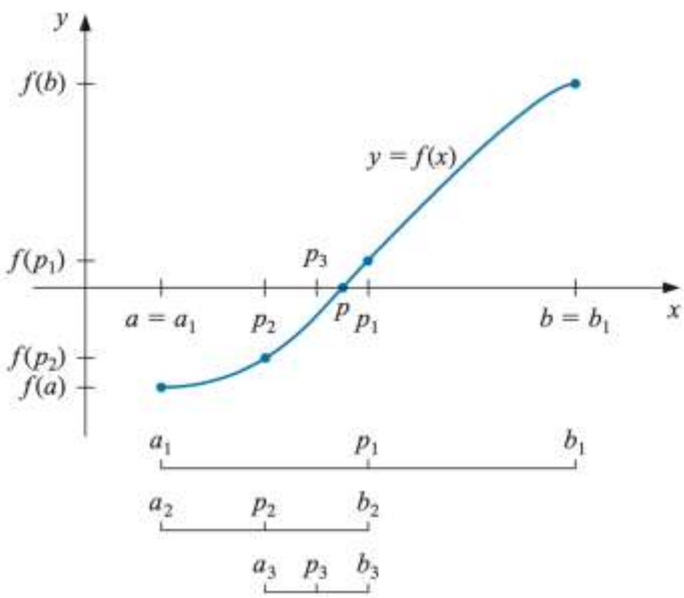
Para esta semana, usamos como referência a **Seção 2.3 (Método de Newton)** do nosso livro da referência básica:

BURDEN, R.L., FAIRES, J.D. **Análise Numérica**. 8.ed. São Paulo: Cengage Learning, 2015.

Não deixem de ler esta seção depois desta aula!

MÉTODO DE NEWTON

- Vimos, na aula passada, que o **Método da Bissecção** baseia-se numa **busca binária iterativa**, tendo-se como base um **intervalo que contenha a raiz procurada**.



- Tanto para iniciar o Método da Bisseção, quanto para sua continuidade, sempre é necessário o **fornecimento de dois pontos a e b que definem o extremo do intervalo [a,b]**. Com o **Método de Newton** que veremos adiante, **só necessitaremos de um ponto**.

- Para se construir o Método de Newton, vamos supor que a **função f(x) seja "suficientemente" bem comportada** para que tenhamos uma **expansão em Séries de Taylor até o grau 2**, conforme mostrado a seguir, onde $\boldsymbol{p_0}$ **é o valor inicial** para se procurar a raiz:

$$f(p) = f(p_0) + (p - p_0)f'(p_0) + \frac{(p - p_0)^2}{2} f''(\xi(p))$$

- Se $\boldsymbol{p}$ **for a raiz procurada**, então podemos escrever que $\boldsymbol{f(p) = 0}$ e temos o seguinte resultado:

$$0 = f(p_0) + (p - p_0)f'(p_0) + \frac{(p - p_0)^2}{2} f''(\xi(p))$$

- Considerando que $|\boldsymbol{p - p_0}|$ **seja pequeno**, então $(\boldsymbol{p - p_2})^2$ **será menor** ainda e podemos fazer a seguinte aproximação:

$$0 \approx f(p_0) + (p - p_0)f'(p_0)$$

- Isto é equivalente a dizer que:

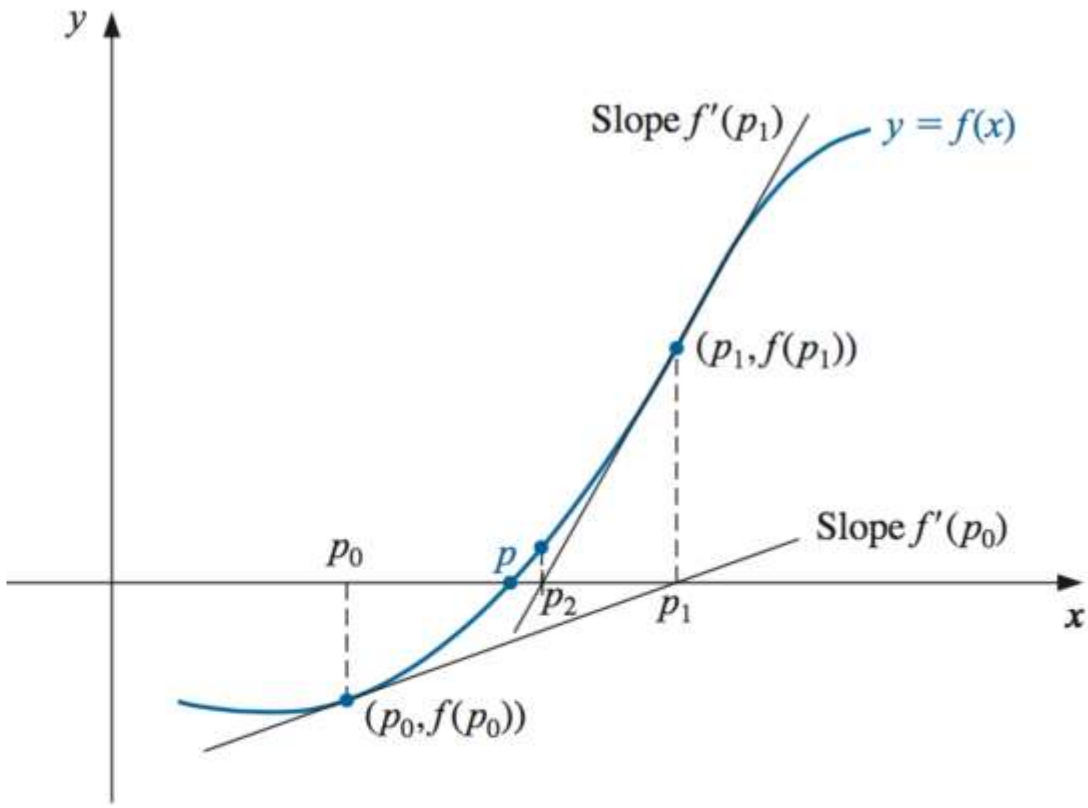
$$p \approx p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)} \equiv p_1.$$

ou seja, a **partir da primeira aproximação** $\boldsymbol{p_0}$, obtemos a **segunda aproximação** $\boldsymbol{p_1}$.

- Isto nos conduz ao seguinte **procedimento iterativo**, conhecido como **Método de Newton**:

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})},$$

- **Geometricamente**, estamos realizando uma **aproximação da raiz** utilizando **retas tangentes**, conforme mostrado no esquema abaixo:



- Os **critérios de parada** podem ser os mesmos que utilizamos para o **Método da Bisseção**:

$$|p_N - p_{N-1}| < \varepsilon,$$

$$\frac{|p_N - p_{N-1}|}{|p_N|} < \varepsilon, \quad p_N \neq 0,$$

$$|f(p_N)| < \varepsilon.$$

EXERCÍCIO TUTORIADO

1. Encontre uma aproximação para uma raiz da equação abaixo, com tolerância ε=0.1, utilizando o Método de Newton. O valor inicial para busca fica a seu critério.

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$$

Utilize, como critério de parada, $|f(p_N)| < \varepsilon$.

Resposta:

Sendo:

$f(x) = x^3+4x^2-10$

Temos que:

Derivada da soma: $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$

$f'(x) = (x^3+4x^2-10)' = f'(x^3)+ f'(4x^2)- f'(10)$

$f'(x^3) = 3x^2$

$f'(4x^2) = 8x$

$f'(10) = 0$

Assim, $f'(x) = 3x^2+8x$

Sendo p a aproximação da raiz:

$f(p) = p^3+4p^2-10$

$f'(p) = 3p^2+8p$

Adicionalmente, sabemos que $f(1)=-5$ e $f(2)=14$, portanto, existe pelo menos uma raiz no intervalo [1,2].

Sendo

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}$$

Portanto:

$$p_n = p_{n-1} - \frac{p_{n-1}^3 + 4p_{n-1}^2 - 10}{3p_{n-1}^2 + 8p_{n-1}}$$

Supondo p_0= 1.

Tabela de simulação pelo método de Newton

n-1	p_{n-1}	$f(p_{n-1})$	$f'(p_{n-1})$	$f(p_{n-1})/f'(p_{n-1})$	p(n)	$f(p_n)$	ε
0	1,000000	-5,000000	11,000000	-0,454545	1,454545	1,540195	1,540195
1	1,454545	1,540195	17,983471	0,085645	**1,368900**	0,060720	**0,060720**
2	1,368900	0,060720	16,572868	0,003664	1,365237	0,000109	0,000109

Sendo, por exemplo: $p_1 = p_0 - f(p_0)/f'(p_0)$

Raiz= 1,3689 (ou 0,13689.10^{-1})

ε = 0,0607 (ou 0,607.10^{-1}) < 0,1

Lembrando a aula 05:

Pelo Método de Cardano-Tartaglia (valor exato) foi obtido: x = 1,365230013

Pelo método da Bisseção: p_6 = 1,359375

2. Encontre uma aproximação para uma raiz da equação abaixo, com tolerância ε=0.001, utilizando o Método de Newton. O valor inicial para busca fica a seu critério.

$$f(x) = \cos x - x = 0$$

Utilize, como critério de parada, $|p_N - p_{N-1}| < \varepsilon$.

Sendo f(x) = cos x - x

f´(x) = (cos x - x)´= f´(cos x) – f´(x)

Temos:

f´(cos x) = - senx

f´(x)=1

Temos f´(x)= -sen x – 1

Sendo p a aproximação da raiz:

f(p) = cos p - p

f´(p) = - sen p -1

Sendo:

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1)}}{f'(p_{n-1})}$$

Portanto:

$$p_n = p_{n-1} - \frac{\cos p_{n-1} - p_{n-1}}{-sen\ p_{n-1} - 1}, \text{ para n} \geq 1$$

Supondo p_0=0,5

n-1	p_{n-1}	$f(p_{n-1})$	$f'(p_{n-1})$	$f(p_{n-1})/f'(p_{n-1})$	p_n	ε
0	0,50000000	0,37758256	-1,47942554	-0,25522242	0,75522242	0,25522242
1	0,75522242	-0,02710331	-1,68545063	0,01608075	0,73914167	0,01608075
2	0,73914167	-0,00009462	-1,67365381	0,00005653	**0,73908513**	**0,00005653**

Sendo $\varepsilon = p_n - p_{n-1}$

Raiz: **0,73908513**

ε = 0,00005653 (ou **$0,5653.10^{-4}$**) < 0,001

EXERCÍCIO COM DISCUSSÃO EM DUPLAS

3. Escreva o Método de Newton numa versão algorítmica.

ALGORITMO **Método de Newton**

Para determinar uma solução para $f(x) = 0$, dada uma aproximação inicial p_0:

ENTRADA aproximação inicial p_0; tolerância TOL; número máximo de iterações N_0.

SAÍDA solução aproximada p ou mensagem de erro.

Passo 1 Faça $i = 1$.

Passo 2 Enquanto $i \leq N_0$, execute Passos 3 a 6.

Passo 3 Faça $p = p_0 - f(p_0)/f'(p_0)$. (*Calcule p_i.*)

Passo 4 Se $|p - p_0| < TOL$, então
SAÍDA (p); (*Procedimento concluído com sucesso.*)
PARE.

Passo 5 Faça $i = i + 1$.

Passo 6 Faça $p_0 = p$. (*Atualize p_0.*)

Passo 7 SAÍDA ('O método falhou após N_0 iterações, N_0 =', N_0);
(*O procedimento não foi bem-sucedido.*)
PARE.

As desigualdades da técnica de parada fornecidas para o método da Bissecção são aplicáveis ao método de Newton. Assim, escolha uma tolerância $\varepsilon > 0$, e construa $p_1, \ldots p_N$, até que

$$|p_N - p_{N-1}| < \varepsilon,$$

$$\frac{|p_N - p_{N-1}|}{|p_N|} < \varepsilon, \quad p_N \neq 0,$$

ou

$$|f(p_N)| < \varepsilon.$$

Uma forma da desigualdade é utilizada no Passo 4 do Algoritmo. Observe que a desigualdade pode não fornecer muitas informações acerca do erro real $|p_N - p|$.

EXERCÍCIOS EXTRA-CLASSE

1. Utilize o Método de Newton para encontrar uma raiz das equações abaixo com tolerância ε=0.00001. Utilize os três critérios de parada e discuta a diferença entre eles (por exemplo, qual critério parece convergir mais rápido).

   a. $e^x + 2^{-x} + 2\cos x - 6 = 0 \quad \text{for } 1 \le x \le 2$

   b. $\ln(x-1) + \cos(x-1) = 0 \quad \text{for } 1.3 \le x \le 2$

   c. $2x\cos 2x - (x-2)^2 = 0 \quad \text{for } 2 \le x \le 3 \text{ and } 3 \le x \le 4$

   d. $(x-2)^2 - \ln x = 0 \quad \text{for } 1 \le x \le 2 \text{ and } e \le x \le 4$

   e. $e^x - 3x^2 = 0 \quad \text{for } 0 \le x \le 1 \text{ and } 3 \le x \le 5$

   f. $\sin x - e^{-x} = 0 \quad \text{for } 0 \le x \le 1 \;\; 3 \le x \le 4 \text{ and } 6 \le x \le 7$

2. Implemente o Método de em Python como uma função newton(f,p,epsilon), que receba a função f, u, ponto inicial p e uma tolerância epsilon e devolve uma aproximação de uma raiz de f com tolerância epsilon.