

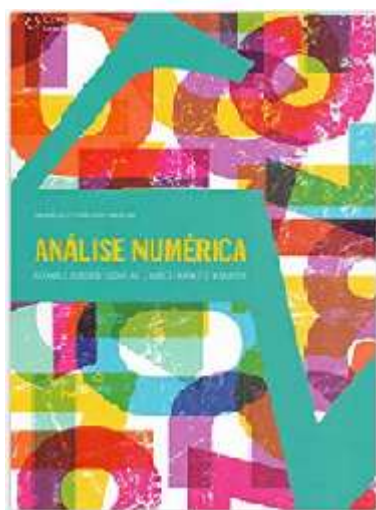
## TEORIA: RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES (II)

---



Nossos **objetivos** nesta aula são:

- Conhecer o método iterativo de Jacobi para resolver sistemas de equações lineares.
- Praticar com simulações do método iterativo de Jacobi.



Para esta semana, usamos como referência as **Seção 7.3 (Técnicas Iterativas para Resolução de Sistemas Lineares até o Algoritmo 7.1)** do nosso livro da referência básica:

BURDEN, R.L., FAIRES, J.D. **Análise Numérica**. 10.ed. São Paulo: Cengage Learning, 2017.

*Não deixem de ler esta seção depois desta aula!*

---

## MÉTODO ITERATIVO DE JACOBI

---

- A ideia básica dos **algoritmos iterativos** é escolher uma **aproximação inicial** e, a partir dela, **calcular as próximas aproximações** até que uma **tolerância de erro seja atingida**.
- Por exemplo, vamos considerar o seguinte sistema de equações lineares:

$$E_1 : 10x_1 - x_2 + 2x_3 = 6,$$

$$E_2 : -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 25,$$

$$E_3 : 2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = -11,$$

$$E_4 : 3x_2 - x_3 + 8x_4 = 15$$

- A ideia do Método de Jacobi é **isolar cada variável do sistema** da seguinte forma:

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{1}{10}x_2 - \frac{1}{5}x_3 + \frac{3}{5}, \\x_2 &= \frac{1}{11}x_1 + \frac{1}{11}x_3 - \frac{3}{11}x_4 + \frac{25}{11} \\x_3 &= -\frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{10}x_2 + \frac{1}{10}x_4 - \frac{11}{10} \\x_4 &= -\frac{3}{8}x_2 + \frac{1}{8}x_3 + \frac{15}{8}\end{aligned}$$

- Se **tomarmos uma aproximação inicial**  $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0, 0)$ , podemos obter a próxima aproximação da seguinte forma:

$$\begin{aligned}x_1^{(1)} &= \frac{1}{10}x_2^{(0)} - \frac{1}{5}x_3^{(0)} + \frac{3}{5} = 0.6000, \\x_2^{(1)} &= \frac{1}{11}x_1^{(0)} + \frac{1}{11}x_3^{(0)} - \frac{3}{11}x_4^{(0)} + \frac{25}{11} = 2.2727, \\x_3^{(1)} &= -\frac{1}{5}x_1^{(0)} + \frac{1}{10}x_2^{(0)} + \frac{1}{10}x_4^{(0)} - \frac{11}{10} = -1.1000, \\x_4^{(1)} &= -\frac{3}{8}x_2^{(0)} + \frac{1}{8}x_3^{(0)} + \frac{15}{8} = 1.8750.\end{aligned}$$

- Continuando as aproximações pelo mesmo esquema**, obtemos o seguinte quadro:

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_1^{(k)}$	0.0000	0.6000	1.0473	0.9326	1.0152	0.9890	1.0032	0.9981	1.0006	0.9997	1.0001
$x_2^{(k)}$	0.0000	2.2727	1.7159	2.053	1.9537	2.0114	1.9922	2.0023	1.9987	2.0004	1.9998
$x_3^{(k)}$	0.0000	-1.1000	-0.8052	-1.0493	-0.9681	-1.0103	-0.9945	-1.0020	-0.9990	-1.0004	-0.9998
$x_4^{(k)}$	0.0000	1.8750	0.8852	1.1309	0.9739	1.0214	0.9944	1.0036	0.9989	1.0006	0.9998

- A decisão de parar após 10 iterações baseou-se no critério a seguir, no qual  $10^{-3}$  representa a **tolerância mínima** ( $\epsilon$ ) **permitida na aproximação**:

$$\frac{\|\mathbf{x}^{(10)} - \mathbf{x}^{(9)}\|_{\infty}}{\|\mathbf{x}^{(10)}\|_{\infty}} = \frac{8.0 \times 10^{-4}}{1.9998} < 10^{-3}$$

considerando-se a **norma-infinito**:

$$\|\mathbf{x}\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

## EXERCÍCIO TUTORIADO

---

1. Obtenha uma aproximação para o sistema linear abaixo, tomando  $x = (0,0)$  como aproximação e tolerância  $\varepsilon=0.1$ :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - 2x_2 = -2 \end{cases}$$

## MÉTODO ITERATIVO DE JACOBI (Continuação)

---

- O isolamento de cada variável no Método de Jacobi pode ser colocado da seguinte forma:

$$x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left( -\frac{a_{ij}x_j}{a_{ii}} \right) + \frac{b_i}{a_{ii}},$$

- A partir deste isolamento, define-se o seguinte **processo iterativo de aproximação**:

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left( -a_{ij}x_j^{(k-1)} \right) + b_i \right]$$

- Repetimos a iteração até que a **quantidade a seguir** fique menor ou igual à tolerância especificada:

$$\frac{\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_{\infty}}{\|\mathbf{x}^{(k)}\|_{\infty}}$$

## EXERCÍCIO COM DISCUSSÃO EM DUPLAS

---

2. Construa um algoritmo para o Método de Jacobi, tendo como entrada os coeficientes do sistema, a aproximação inicial e a tolerância.

### EXERCÍCIOS EXTRA-CLASSE

---

1. Obtenha aproximações para os sistemas abaixo, considerando-se uma tolerância de  $\varepsilon=0.01$ . A aproximação inicial fica a seu critério.

**a.**  $3x_1 - x_2 + x_3 = 1,$   
 $3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 0,$   
 $3x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 4.$

**c.**  $10x_1 + 5x_2 = 6,$   
 $5x_1 + 10x_2 - 4x_3 = 25,$   
 $-4x_2 + 8x_3 - x_4 = -11,$   
 $-x_3 + 5x_4 = -11.$

**b.**  $10x_1 - x_2 = 9,$   
 $-x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 7,$   
 $-2x_2 + 10x_3 = 6.$

**d.**  $4x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 6,$   
 $-x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 6,$   
 $2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 - x_5 = 6,$   
 $-x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 = 6,$   
 $2x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 = 6.$