Grafos – Subgrafos/ Passeios,Trilhas e Caminhos/ Circuitos

Teoria dos Grafos - 2021

Prof. Roberto C. de Araujo

1. Subgrafos

Um grafo H é um ***subgrafo*** de um grafo G, denotado por $H\subseteq G$, se $VH\subseteq VG$, $AH\subseteq AG$ e para toda aresta de H seus extremos em H são também seus extremos em G. Se $H\subseteq G$ mas $H\neq G$ então H é chamado ***subgrafo próprio*** de G (denotado por $H\subset G$). Dizemos que H está ***contido*** em G ou G ***contém*** H.

Se G é um grafo e X é não vazio tal que $X\subseteq VG$ então o subgrafo H de G tal que $VH=X$ e AH é o conjunto das arestas que têm ambos os extremos em X é chamado ***subgrafo induzido*** (ou ***gerado***) por X. H é denotado por $G[X]$.

Denotamos por $G–X$ o ***subgrafo induzido*** por $VG\backslash X$, $G[VG\backslash X]$. É o subgrafo obtido de G removendo-se os vértices em X e todas as arestas que incidem neles. Se $x\subseteq VG$, para simplificar, em vez de $G–\{x\}$, escrevemos $G–x$.

Seja E um subconjunto não vazio de arestas de G. O subgrafo de G cujo conjunto de arestas é igual a E e cujo cunjunto de vértices consiste dos extremos das arestas em E é chamado ***subgrafo (aresta-)induzido*** por E. É denotado por $G[E]$.

$G–E$ denota o subgrafo obtido de G removendo-se as arestas em E. Se $e\in AG$, em vez de $G–\{e\}$, escrevemos $G–e$.

Se H é um subgrafo de G, dizemos que H é um ***subgrafo gerador*** de G, se $VH=VG$.

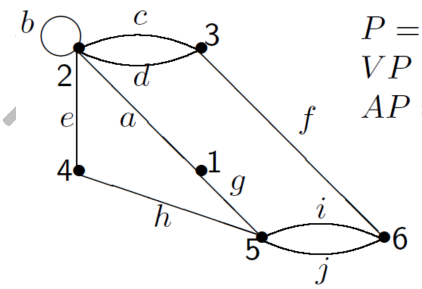
2. Passeios, Trilhas e Caminhos

Um ***passeio*** em um grafo é uma seqüência finita e não vazia

$$P=(v_0, a_1, v_1, a_2, v_2, ..., v_{k-1}, a_k, v_k),$$

cujos termos são alternadamente vértices v_i e arestas a_j, e tal que, para todo i, $1\leq i\leq k$, os extremos de a_i são v_{i-1} e v_i. Dizemos que P é um passeio de v_0 a v_k e que os vértices v_0 e v_k são a ***origem*** e o ***término*** de P, respectivamente.

Os vértices $v_1,..., v_{k-1}$ são chamados de ***vértices internos*** de P. O inteiro k é o ***comprimento*** de P. O conjunto dos vértices e das arestas que definem P será denotado por VP e AP, respectivamente. No exemplo, $VP=\{v_0, v_1,..., v_k\}$ e $AP=\{a_1, a_2,..., a_k\}$. Dizemos que P ***passa*** pelos vértices de VP e pelas arestas de AP.



$$P=(1,a,2,b,2,c,3,d,2,e,4)$$
$$VP=\{1,2,3,4\}$$
$$AP=\{a,b,c,d,e\}$$

Uma ***seção*** de P é um passeio que é uma subseqüência de termos consecutivos de P.

Se $P=(v_0,a_1, v_1, ..., v_k)$ e $Q=(u_0,b_1, u_1, ...,u_n)$ são passeios e $v_k = u_0$ então a ***concatenação*** de P e Q denotada por PQ é o passeio

$$PQ=(v_0,a_1, v_1, ..., v_k=u_0,b_1, u_1, ...,u_n).$$

P^{-1} denota o ***reverso*** de P; é o passeio

$$P^{-1}=(v_k,a_k, v_{k-1},a_{k-1}, v_{k-2}, ..., v_1,a_1, v_0)$$

Um passeio é ***fechado*** se tem comprimento diferente de zero e sua origem e seu término coincidem.

Uma ***trilha*** é um passeio sem arestas repetidas.

Um ***caminho*** é um passeio sem vértices repetidos.

Convenções

- O termo passeio (respectivamente, trilha, caminho, circuito) também será usado para denotar um grafo ou subgrafo cujos vértices e arestas são os termos de um passeio (respectivamente, trilha, caminho, circuito).
- Para grafos simples, um passeio $P=(v_0,a_1, v_1, ..., a_k, v_k)$ fica determinado pela seqüência $(v_0, v_1, ..., v_k)$ de seus vértices; assim, quando conveniente, nos referiremos ao passeio P=$(v_0, v_1, ..., v_k)$.

3. Circuitos

Uma trilha fechada cuja origem e vértices internos são todos distintos é um ***circuito***.

Proposição: Se G é um grafo tal que $g(v)\geq 2$ para todo $v\in VG$ então G contém um circuito.

Proposição: Sejam G um grafo e u, v e x três vértices distintos de G. Então se G contem um caminho de u a v e um caminho de v a x então G contém um caminho de u a x.

Proposição: Se em um grafo G existe um passeio de u para v então existe em G um caminho de u para v.

Sejam $u,v\in VG$ e P um passeio mais curto em G de u para v. Se P é caminho, não há nada a provar. Caso contrário, ocorrem vértices repetidos em P. Portanto P é da forma

$$P=(u=u_0,a_1, u_1,..., u_i,a_{i+1},u_{i+1},..., u_j, a_{j+1}, u_{j+1},..., u_{l+1},a_l,u_l=v)$$

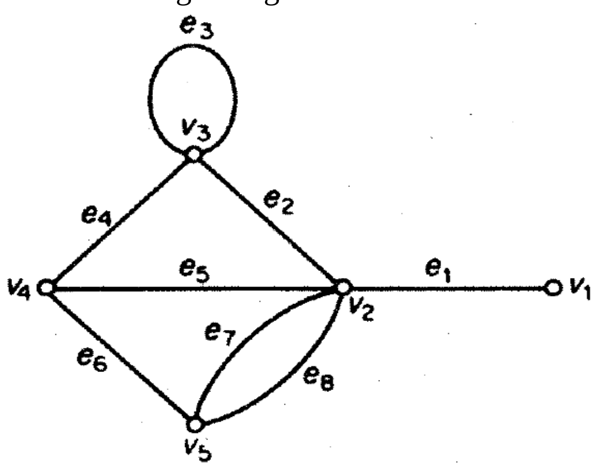
com $i\neq j$ e $u_i=u_j$. Então

$$P'=(u=u_0,a_1, u_1,..., u_i,a_{j+1}, u_{j+1},..., u_{l+1},a_l,u_l=v)$$

é um passeio de u para v que é mais curto que P; ABSURDO, pela escolha de P. Portanto P é um caminho de u para v.

4. Exercícios

Considere o seguinte grafo G abaixo:



1. Apresente subgrafos H de G com as seguintes propriedades:

a) Ordem de H igual a 3.
b) Tamanho de H igual a 7.
c) δ(H) = 2.
d) Δ(H) = 3.

2. Considerando Y = { v_2, v_3, v_4 }, apresente:

a) G[Y].
b) G-Y.
c) G- v_2.
d) G- v_4.

3. Considerando K = { e_1, e_2, e_3 }, apresente:

a) G[K].
b) G-K.
c) G- e_2.
d) G- v_4.

4. Apresente um subgrafo gerador H de G tal que H seja um grafo simples.

5. Apresente o complemento do grafo obtido na resposta do exercício 4.

6. Apresente um subgrafo gerador H de G tal que sua quantidade de arestas seja mínima e que, para qualquer par { x, y } de vértices de H, exista um camnho de x para y,

7. Apresente uma trilha em G com comprimento igual a 5.

8. Apresente um passeio em G com comprimento igual a 5.

9. Apresente um caminho em G com comprimento igual a 5.

10. Apresente um circuito em G com comprimento igual a 3.

11. Apresente um circuito em G com comprimento igual a 4.

12. Existe um circuito em G que tenha comprimento igual a 5? Justifique.