Universidade Presbiteriana Mackenzie

Filtragem no Domínio da Frequência

Processamento Digital de Imagens

Prof. Mário O. de Menezes

Slides cedidos pelo Prof. Laercio Cruvinel

Faculdade de Computação e Informática

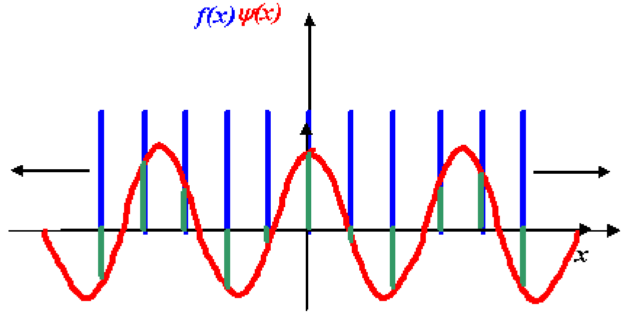
São Paulo, 13/10/14

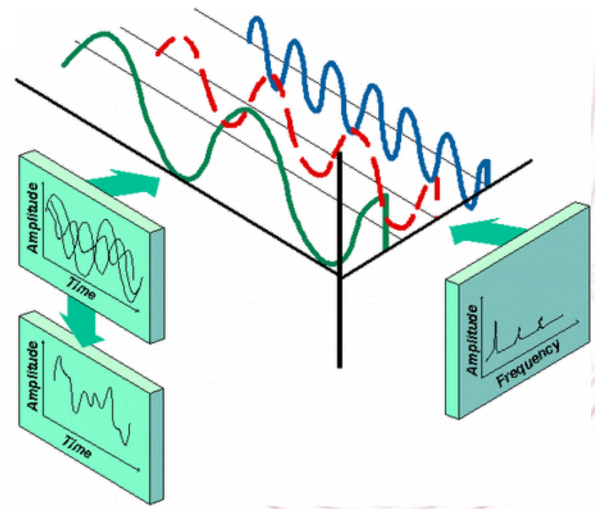
Tópicos da Aula

- Transformada de Fourier (FT) e o domínio da frequência

- Transformada Rápida de Fourier (FFT)

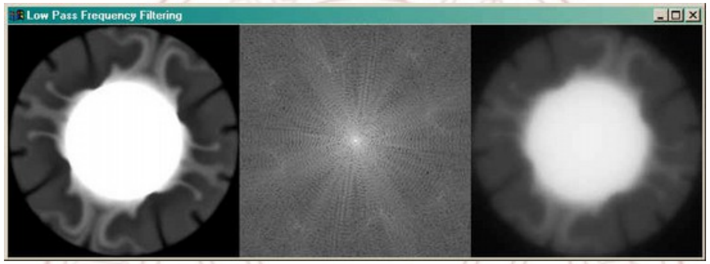
- Fundamentos da filtragem no domínio da frequência



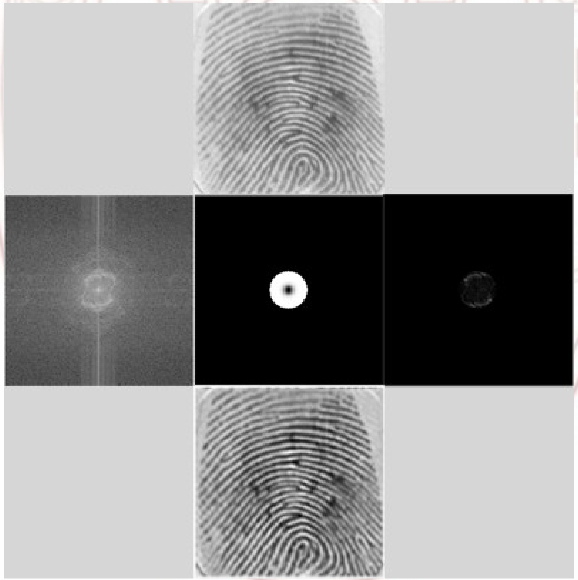


Tópicos da Aula

- Filtragem de frequência para suavização (*smoothing*)



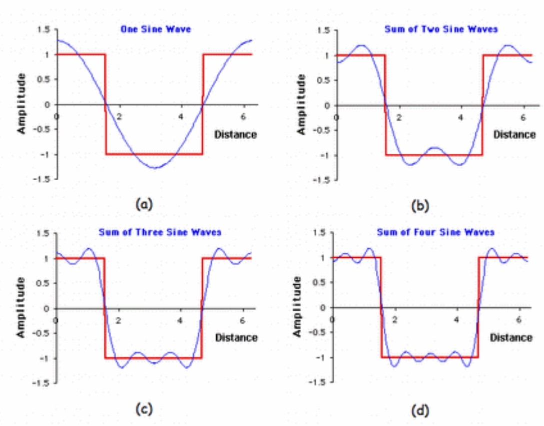
- Filtragem de frequência para aguçamento (*sharpening*)



- Restauração de imagens pela filtragem no domínio da frequência

Fundamentos Teóricos

- A filtragem de imagens digitais no **domínio da frequência** é realizada com a **Transformada de Fourier (FT)**
  - A **Série de Fourier** foi esboçada pelo matemático francês Jean Baptiste Fourier em 1807
  - Essa séria é definida pelo seguinte teorema:
    - "*Qualquer função periódica pode ser expressa como a soma de senos e/ou cossenos de diferentes frequências, cada uma multiplicada por um coeficiente diferente*"



Fundamentos Teóricos

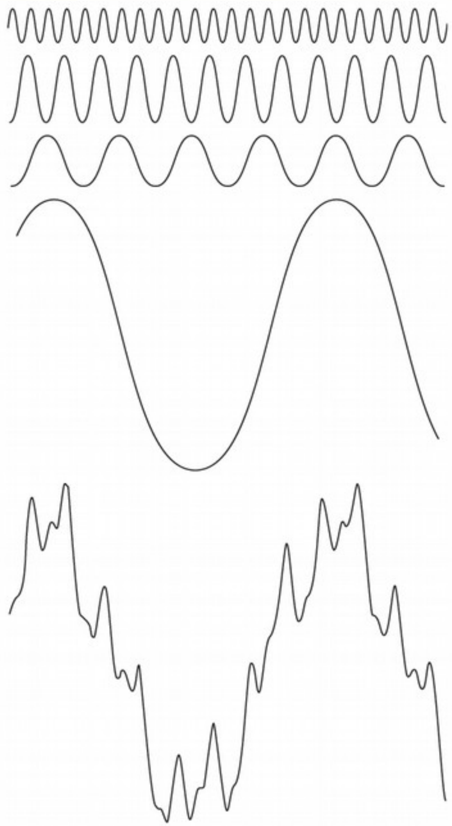
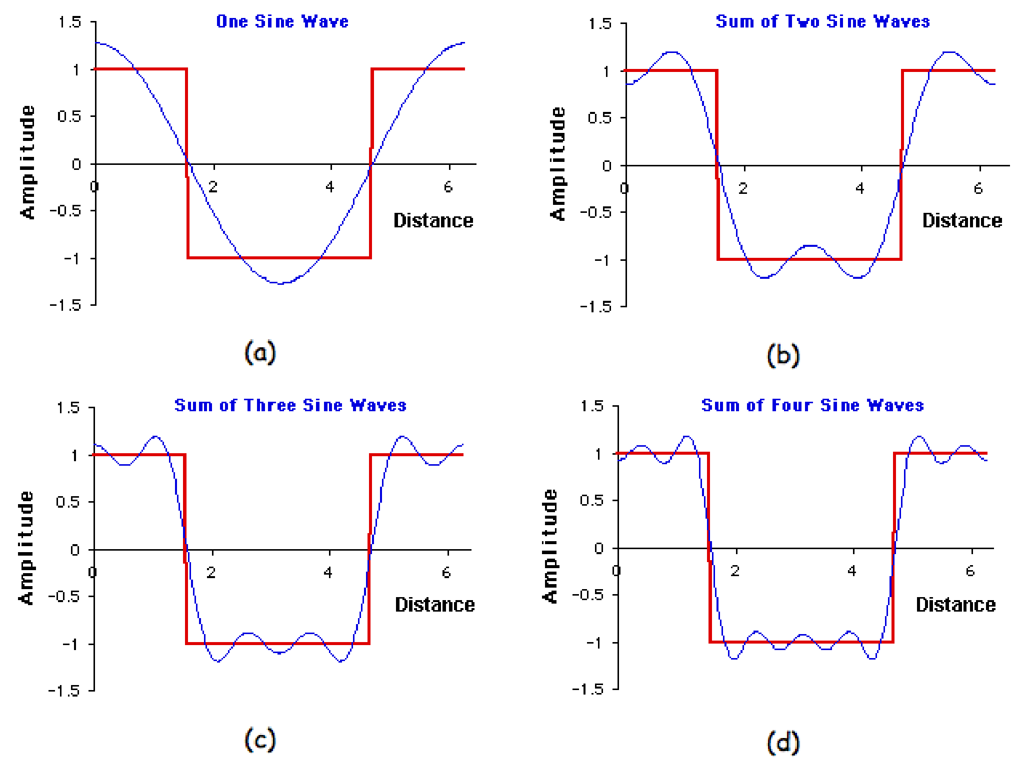


Figura 4.1 A função mais abaixo é a soma das quatro funções acima dela. A ideia de Fourier, desenvolvida em 1807, de que as funções periódicas poderiam ser representadas como uma soma ponderada de senos e cossenos foi recebida com ceticismo.



Fundamentos Teóricos

- Além da **Série de Fourier**, existe a chamada **Transformada de Fourier** que é utilizada em muitas disciplinas teóricas e práticas
  - A Transformada de Fourier é utilizada em **funções não periódicas**
    - O único detalhe é que essas funções devem ser representadas por uma **área de curva finita**
  - Ela é uma ferramenta matemática **utilizada para especificar e projetar filtros** para imagens digitais **no domínio da frequência**

Fundamentos Teóricos

- Ambas as representações têm em comum a seguinte **característica**:
  - Um função (em série ou em transformada), pode ser totalmente recuperada, sem perda de informação, por meio de um processo inverso
- O que isso significa?
  - Significa que é possível trabalhar no **Domínio de Fourier** e depois retornar ao **Domínio da Imagem** ser perder qualquer informação

Fundamentos Teóricos

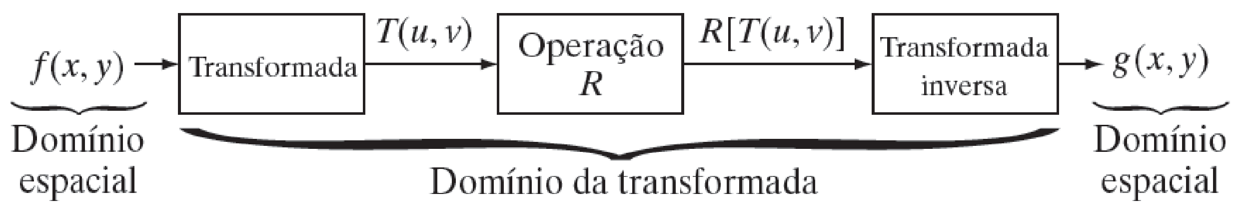


Figura 2.39 Abordagem geral para operar no domínio de uma transformada linear.

Conceitos Preliminares

- A Transformada de Fourier de funções contínuas de uma variável
  - Seja $f(x)$ uma **função contínua** da variável real x, então sua **Transformada de Fourier**, expressa por $\Im\{f(x)\}$, é definida pela equação:

$$\Im\{f(x)\} = \mathcal{F}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j2\pi ux}dx$$

    - u também é uma variável contínua
    - $j = \sqrt{-1}$
    - e é o **Número Euleriano** 2,71828

Conceitos Preliminares

- A Transformada Inversa de Fourier de funções contínuas de uma variável
  - Dado $\mathcal{F}(u)$, a função $f(x)$ pode ser **recuperada** calculando-se a **Transformada de Fourier Inversa (IFT)**, $f(x) = \Im^{-1}\{\mathcal{F}(u)\}$, definida pela equação:

$$\Im^{-1}\{\mathcal{F}(u)\} = f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(u)e^{j2\pi ux}du$$

Conceitos Preliminares

- A Transformada de Fourier de funções contínuas de uma variável
  - As duas equações apresentadas anteriormente consistem no chamado **Par de Transformadas de Fourier**
  - Esse par de transformadas existe se:
    - $f(x)$ for contínua e integrável; e
    - $\mathcal{F}(u)$ for integrável

Conceitos Preliminares

- A Transformada de Fourier de funções contínuas de uma variável
  - Geralmente, a Transformada de Fourier de uma função real é um **valor complexo**, ou seja:

$$\mathcal{F}(u) = R(u) + jI(u)$$

  - Onde:
    - $R(u)$: componente real do número complexo
    - $I(u)$: componente imaginário do número complexo

Conceitos Preliminares

- A Transformada de Fourier de funções contínuas de uma variável
  - Em geral, costuma-se trabalhar com a **magnitude** da Transformada de Fourier para visualização:

$$\mathcal{F}(u) = |\mathcal{F}(u)|e^{j\phi(u)}$$

  - Onde:
    - $|\mathcal{F}(u)|$: **Espectro de Fourier** ou **Espectro da Frequência**
    - $\phi(u)$: Ângulo de fase

Conceitos Preliminares

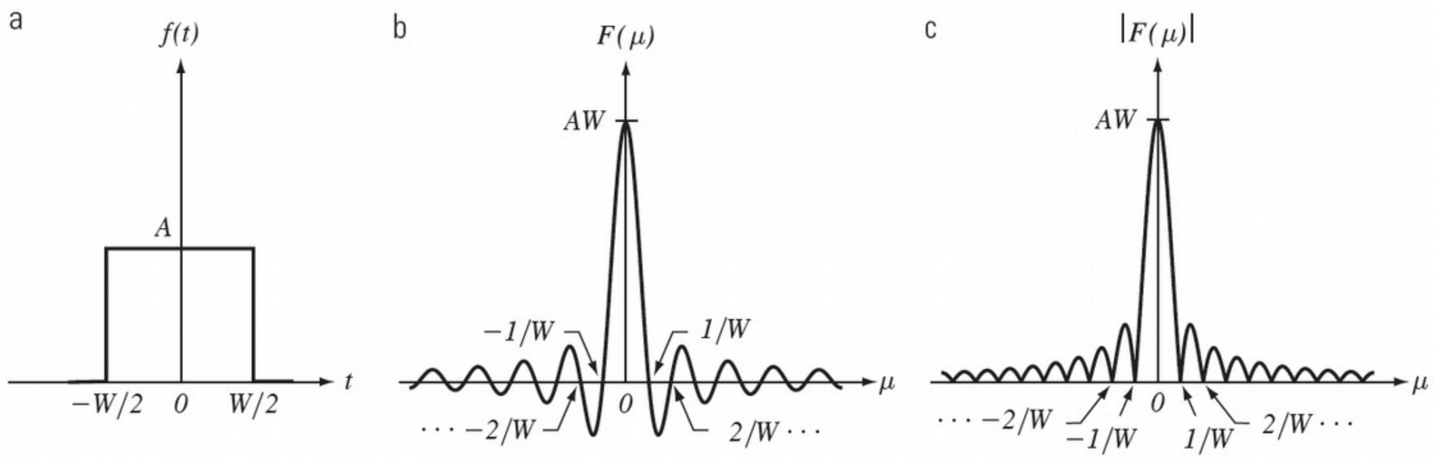


Figura 4.4 (a) Uma função simples; (b) sua transformada de Fourier; e (c) o espectro. Todas as funções se estendem ao infinito em ambas as direções.

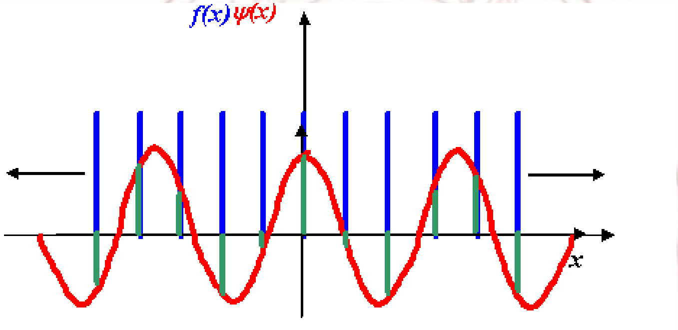
Conceitos Preliminares

- A Transformada de Fourier de funções de uma variável contínua
  – Usando-se a **Fórmula de Euler**, o termo exponencial dentro da integral pode ser representado da seguinte forma:

$$e^{-j2\pi ux} = \cos(2\pi ux) - j \times \sin(2\pi ux)$$

  – Lembre-se:
    - $\mathcal{F}(u)$ é uma **soma infinita de senos e cossenos** e cada valor de u na frequência representa o seu correspondente par (seno-cosseno)

Funções Amostradas



- Amostragem de Funções Contínuas
  - **Funções contínuas** são **convertidas** em uma sequência de **valores discretos** para serem processadas por um programa computacional
  - Esse processo é realizado utilizando:
    - **Amostragem:** amostra da função contínua em intervalos uniformes de ΔX
    - **Quantização:** valor do impulso de cada amostra da função contínua

Funções Amostradas

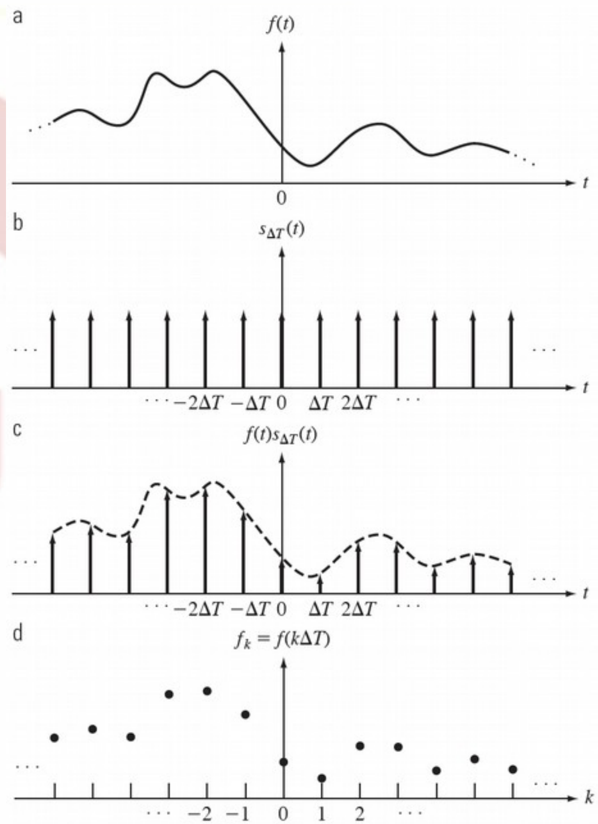


Figura 4.5 (a) Função contínua. (b) Trem de impulsos utilizado para modelar o processo de amostragem. (c) Função amostrada formada pelo produto de (a) e (b). (d) Amostras obtidas pela integração e pelo uso da propriedade de peneiramento do impulso. (A linha tracejada em (c) foi incluída para referência. Ela não faz parte dos dados.)

Funções Amostradas

- A Transformada de Fourier de funções amostradas
  - O intervalo entre as cópias da amostragem é determinado por: $\frac{1}{\Delta X}$ (taxa de amostragem)
  - A taxa de amostragem pode gerar três situações:
    - **Sobreamostragem:** separação entre os períodos
    - **Amostragem crítica:** períodos vizinhos
    - **Subamostragem:** os períodos foram sobrepostos, onde não foi possível preservar a transformada original

Funções Amostradas

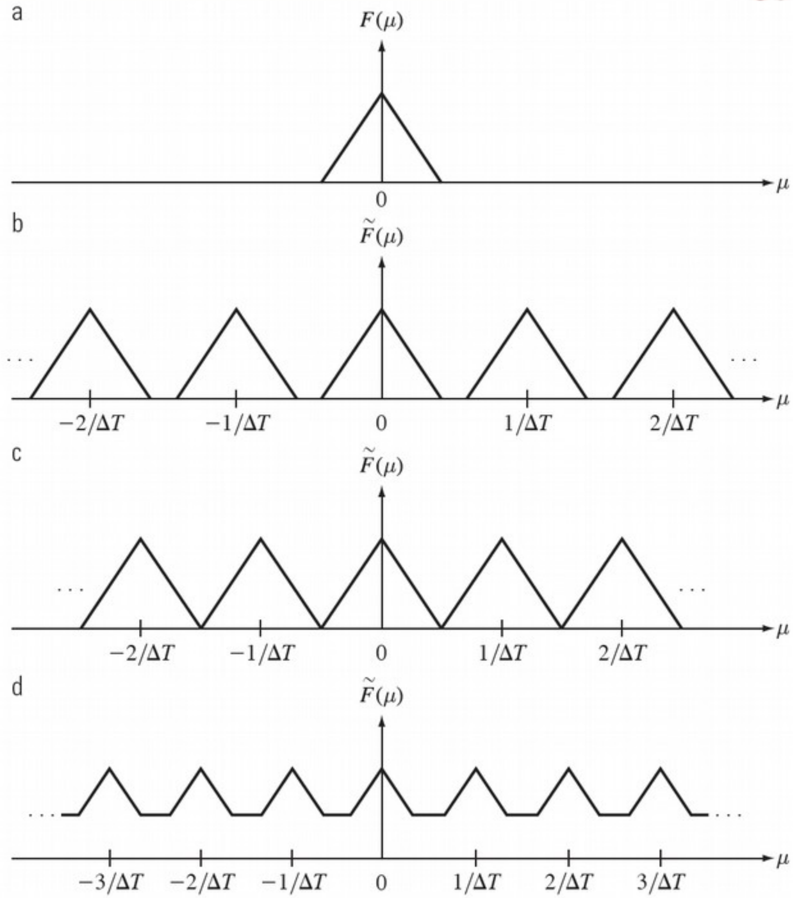


Figura 4.6 (a) Transformada de Fourier de uma função de banda limitada. (b) a (d) Transformadas da função amostrada correspondente sob as condições de sobreamostragem, amostragem crítica e subamostragem, respectivamente.

Funções Amostradas

- O teorema da amostragem
  - Uma função contínua pode ser **unicamente recuperada** a partir do conjunto de suas amostras
  - Uma **função de banda limitada** é uma função cuja Transformada de Fourier é zero para valores de frequências fora de um intervalo finito
    - Cujo o intervalo é $[-u_{min}, u_{max}]$
  - Veja um exemplo no próximo *slide*

Funções Amostradas

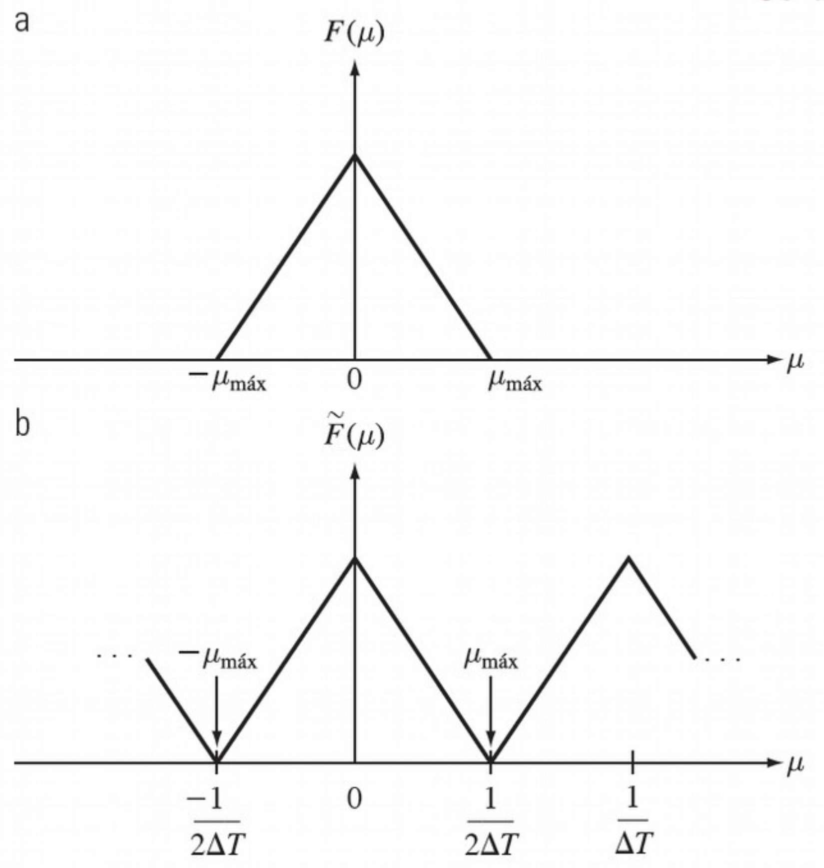


Figura 4.7 (a) Transformada de uma função de banda limitada. (b) Transformada resultante da amostragem crítica da mesma função.

Funções Amostradas

- O teorema da amostragem
  - A **separação suficiente** entre os períodos de uma função contínua é garantida se:

$$\frac{1}{2\Delta X} > u_{max} \text{ ou } \frac{1}{\Delta X} > 2u_{max}$$

  - As equações anteriores indicam que uma função de banda limitada contínua, **pode ser recuperada** a partir de um conjunto de amostras **se:**
    - **As amostras** forem adquiridas em **uma taxa maior** que o **dobro da frequência mais alta** contida na função

Funções Amostradas

- *Aliasing*
  - O *aliasing* ocorre quando uma função de banda limitada é **amostrada** em uma **taxa menor** que o dobro de sua frequência mais alta
    - Significa que o *aliasing* é o exemplo de subamostragem
  - No *aliasing*, os períodos se sobrepõem e passa a ser impossível isolar um período da transformada
  - Esse efeito também é conhecido como:
    - ***Aliasing* de Frequência**

Funções Amostradas

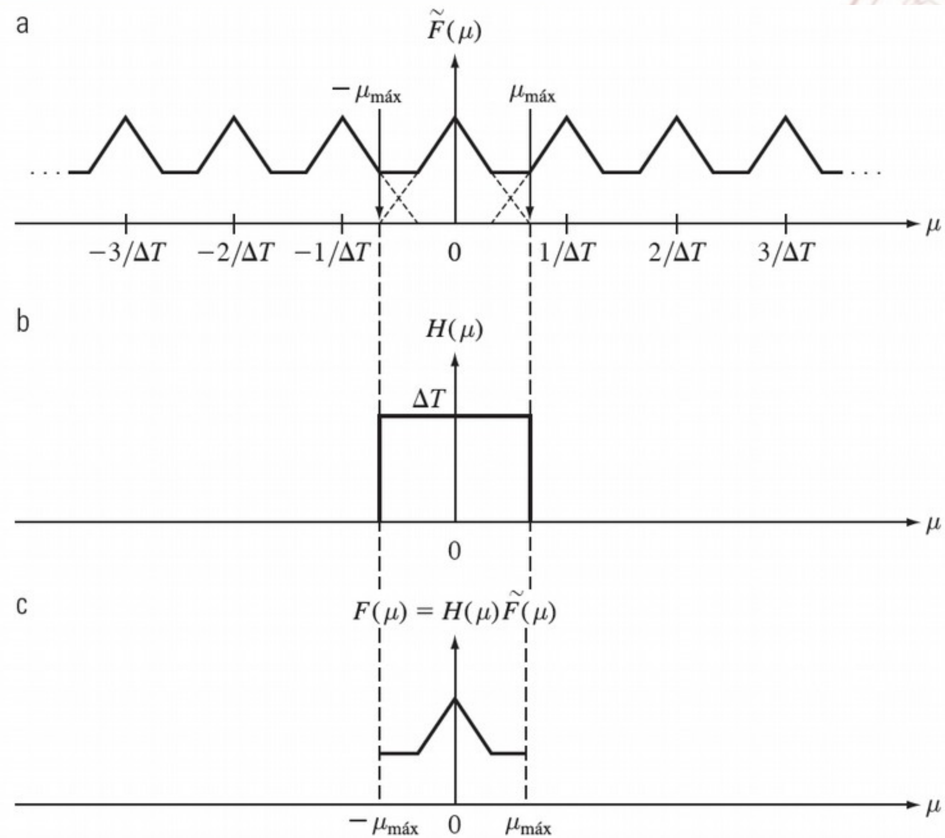


Figura 4.9 (a) Transformada de Fourier de uma função subamostrada e de banda limitada. (A interferência dos períodos adjacentes é mostrada tracejada na figura.) (b) O mesmo filtro passa-baixa ideal utilizado na Figura 4.8(b). (c) O produto de (a) e (b). A interferência proveniente dos períodos adjacentes resulta em *aliasing*, que impede a recuperação perfeita da função original, contínua e de banda limitada. Compare com a Figura 4.8.

Funções Amostradas

- *Aliasing*
  - Infelizmente, ***o aliasing* é** um resultado **inevitável** ao trabalharmos com sinais **amostrados de tamanho finito**
  - Os **efeitos** do *aliasing* podem ser **reduzidos** pela **suavização** da função de entrada
    - Esse efeito é chamado de: ***antialiasing***
    - **Por exemplo:** o borramento de imagens digitais que atenua as altas frequências (bordas e ruídos) da imagem de entrada

Funções Amostradas

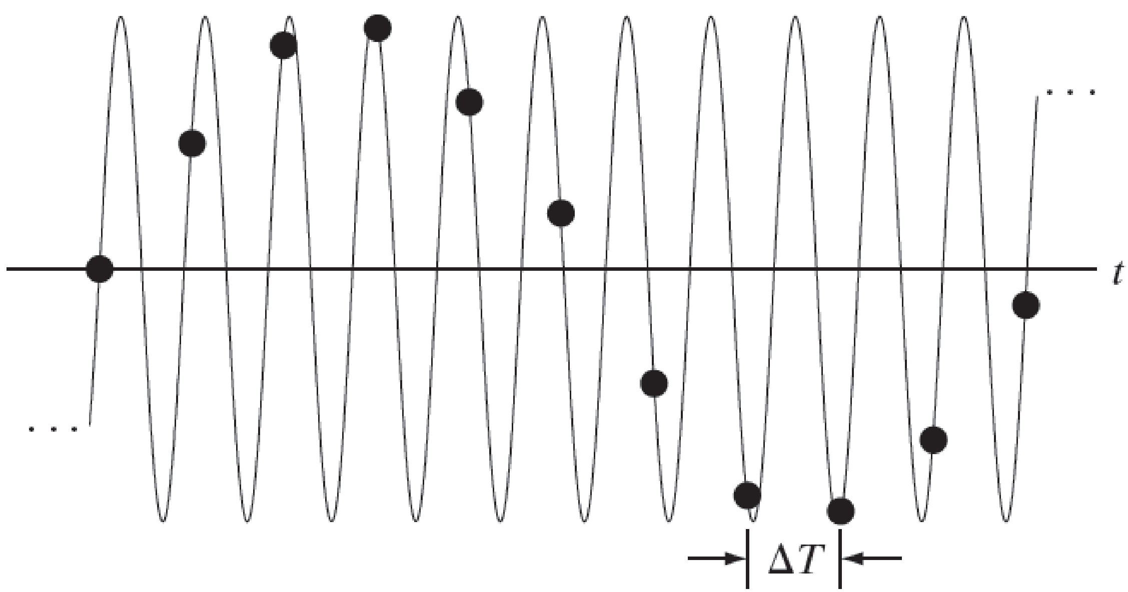


Figura 4.10 Ilustração do *aliasing*. A função subamostrada (pontos pretos) se parece com uma onda senoidal, com uma frequência muito menor que a frequência do sinal contínuo. O período da onda senoidal é 2 s, de forma que os cruzamentos por zero do eixo horizontal ocorrem a cada segundo. ΔT é o intervalo entre as amostras.

Transformada Discreta de Fourier (1D)

- A Transformada de Fourier de funções discretas de uma variável
  - Supondo que uma função $f(x)$ seja **discretizada**, produzindo a seguinte sequência:

$$\{f(x_o), f(x_o + \Delta x), f(x_o + 2\Delta x), \dots, f(x_o + [M-1]\Delta x)\}$$

  - Denominando a função discreta:

$$f(n) = f(x_0 + n\Delta x)$$

Transformada Discreta de Fourier (1D)

- A Transformada de Fourier de funções discretas de uma variável
  - Seja $f(x)$ uma **função contínua discretizada** da variável real x, a **Transformada de Fourier (FT)** é:

$$\mathcal{F}(u) = \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{\frac{-j2\pi ux}{M}}$$

    - Para $u = 0, 1, 2, \ldots, M-1$

Transformada Discreta de Fourier (1D)

- A Transformada de Fourier de funções discretas de uma variável
  - Dado $\mathcal{F}(u)$, a função $f(x)$ pode ser **recuperada** calculando-se a **Transformada Inversa de Fourier (IFT)**, definida pela equação:

$$f(x) = \frac{1}{M} \sum_{u=0}^{M-1} \mathcal{F}(u) e^{\frac{j2\pi ux}{M}}$$

    - Para $x = 0, 1, 2, \ldots, M-1$

Extensão Para Funções 2D

- Amostragem bidimensional
  - A amostragem em duas dimensões pode ser modelada a partir da função de amostragem:

$$S_{\Delta X \Delta Y}(x,y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - m\Delta X, y - n\Delta Y)$$

  - Onde:
    - ΔX: intervalo entre as amostras ao longo do eixo x
    - ΔY: intervalo entre as amostras ao longo do eixo y

Extensão Para Funções 2D

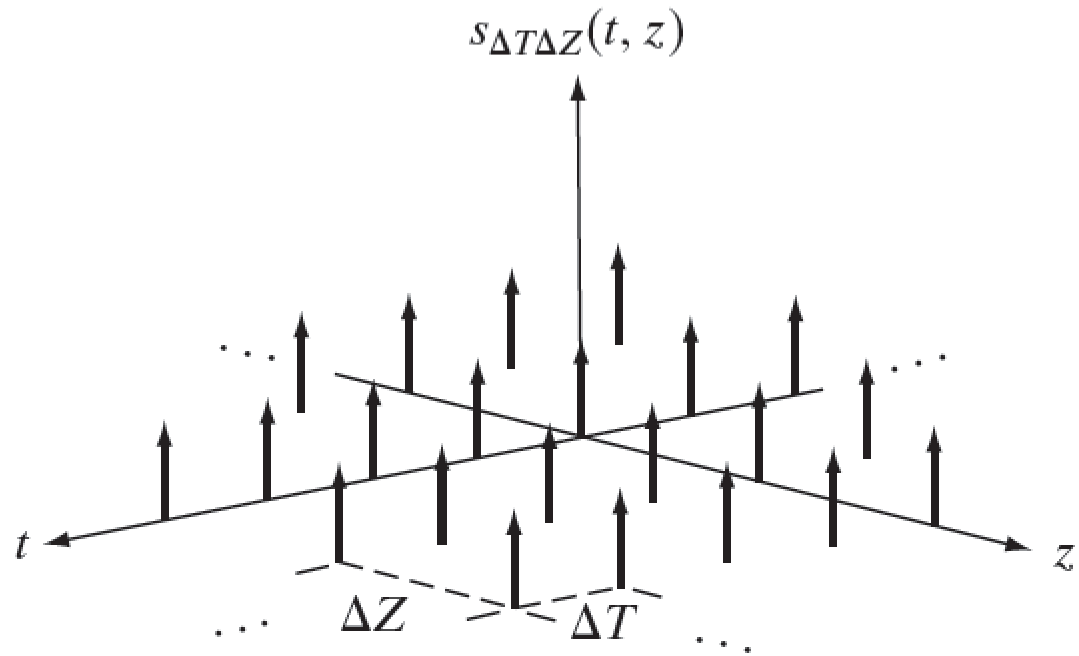


Figura 4.14 Trem de impulsos bidimensional.

Extensão Para Funções 2D

- Transformada de Fourier Bidimensional
  - O conceito da Transformada de Fourier pode ser facilmente **estendida para uma função de duas variáveis**
    - **A função** de duas variáveis utilizada para representar uma **imagem digital** é: $f(x, y)$
    - O **Espectro de Fourier** de uma transformada bidimensional tem uma perspectiva tridimensional:
      - Os eixos x, y representado os elementos amostrados da imagem
      - E o eixo $\mathcal{F}(u, v)$ representando o valor a amplitude da função

Extensão Para Funções 2D

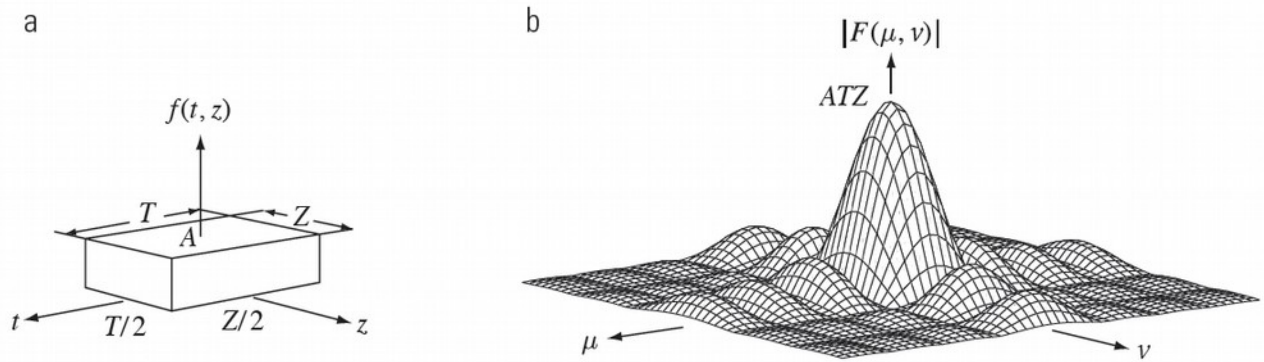


Figura 4.13 (a) Uma função 2-D e (b) uma seção de seu espectro (fora de escala). O bloco é mais longo no eixo t, de forma que o espectro é mais "contraído" ao longo do eixo μ. Compare com a Figura 4.4.

Extensão Para Funções 2D

- *Aliasing* em imagens digitais
  - O ato de **limitar a duração** de uma função insere **componentes corruptores** na frequência
  - Por esse motivo, o *aliasing* está **SEMPRE presente** em imagem digitais
    - Da mesma forma como está presente nas funções 1D amostradas
  - O *aliasing* se manifesta em imagens de 2 formas:
    - *Aliasing* temporal
    - *Aliasing* espacial

Extensão Para Funções 2D

- ***Aliasing* temporal**
  - Ocorre no **intervalo** existente entre imagens de uma sequência de imagens finitas
  - O **exemplo** mais comum é o efeito de **"roda de carroça"**:
    - Ocorre quando os raios das rodas em uma sequência de imagens (um vídeo) parecem estar girando para trás
  - Esse efeito é provocado pelo fato de a velocidade de projeção ser baixa demais em relação à velocidade de rotação da roda na sequência

Extensão Para Funções 2D

- ***Aliasing* espacial**
  - Ocorre devido à **subamostragem** no domínio da imagem digital
  - Os **principais problemas** do *aliasing* espacial são:
    - A inserção de artefatos com *jaggies* (serrilhados) nas linhas de uma sequência de *pixels*
    - Saliências falsas
    - Aparecimento de padrões de frequência ausentes na imagem original (*exemplo que iremos implementar na próxima aula de laboratório*)

Extensão Para Funções 2D

- Exemplo de *aliasing* em imagens digitais
  - Suponha que tenhamos um **sistema perfeito** de aquisição de imagens com as seguintes **características**:
    - O sistema é classificado como perfeito, pois as imagens são capturadas sem adição de nenhum tipo de ruído
    - A imagem capturada é exatamente igual a que é observada
    - O número de amostras possíveis capturadas pelo dispositivo é fixo em 96×96 *pixels*

Extensão Para Funções 2D

- Exemplo de *aliasing* em imagens digitais
  - O que ocorre se utilizarmos esse sistema de captura de imagens para digitalizar padrões de **"tabuleiros de damas"**?
    - Poderá resolver padrões de até 96×96 quadrados
    - Cada quadrado do tabuleiro de damas seria capturado por 1 *pixel* do sistema de captura
    - O que acontece quando o tamanho dos quadrados do tabuleiro de damas é menor que o tamanho de 1 pixel do sistema de captura?
      - Tabuleiro com mais de 96×96 quadrados

Extensão Para Funções 2D

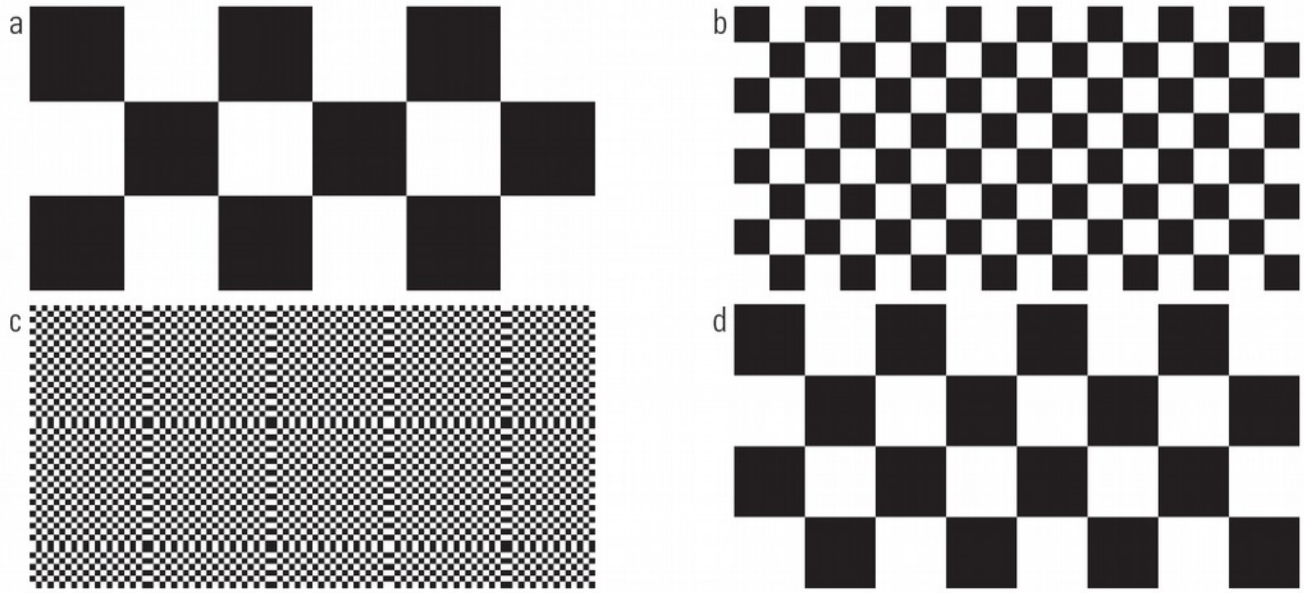


Figura 4.16 *Aliasing* em imagens. Em (a) e (b), os tamanhos dos lados dos quadrados são 16 e 6 pixels, respectivamente, e o *aliasing* é visualmente desprezível. Em (c) e (d), os lados dos quadrados são 0,9174 e 0,4798 pixels, respectivamente, e os resultados mostram um *aliasing* significativo. Observe que (d) é mascarada como uma imagem “normal”.

Extensão Para Funções 2D

- Reduzindo o efeito do *aliasing* em imagens
  - Para reduzir o efeito do *aliasing*, basta **atenuar** as **altas frequências** da imagem digital
    - Lembrando que, para atenuar as altas frequências basta aplicar um filtro passa-baixa (borramento)
  - Esse processo é conhecido como ***antialiasing***
    - O *antialiasing* é realizado antes da amostragem da imagem
    - Não existe um aplicativo computacional com filtros *antialiasing* "após o fato"

Extensão Para Funções 2D

- *Aliasing* em imagens reamostradas
  - A **reamostragem** de *pixels* ocorre no processo de redimensionamento de imagens
  - Observamos os seguintes comportamentos na reamostragem de imagens:
    - **Ampliação:** pode ser vista como uma sobreamostragem
    - **Redução:** pode ser vista como uma subamostragem
  - Vamos utilizar como **exemplo** do processo de interpolação de *pixels* o modelo de **vizinho mais próximo**

Extensão Para Funções 2D

- *Aliasing* em imagens reamostradas
  - Para diminuir a imagem em 50%
    - Exclui-se linha sim e outra não; e
    - Exclui-se coluna sim e outra não
  - Para aumentar a imagem em 50%
    - Duplica-se cada linha da imagem; e
    - Duplica-se cada coluna da imagem
  - Veja o exemplo do efeito de *aliasing* de frequência em uma imagem reamostrada

Extensão Para Funções 2D

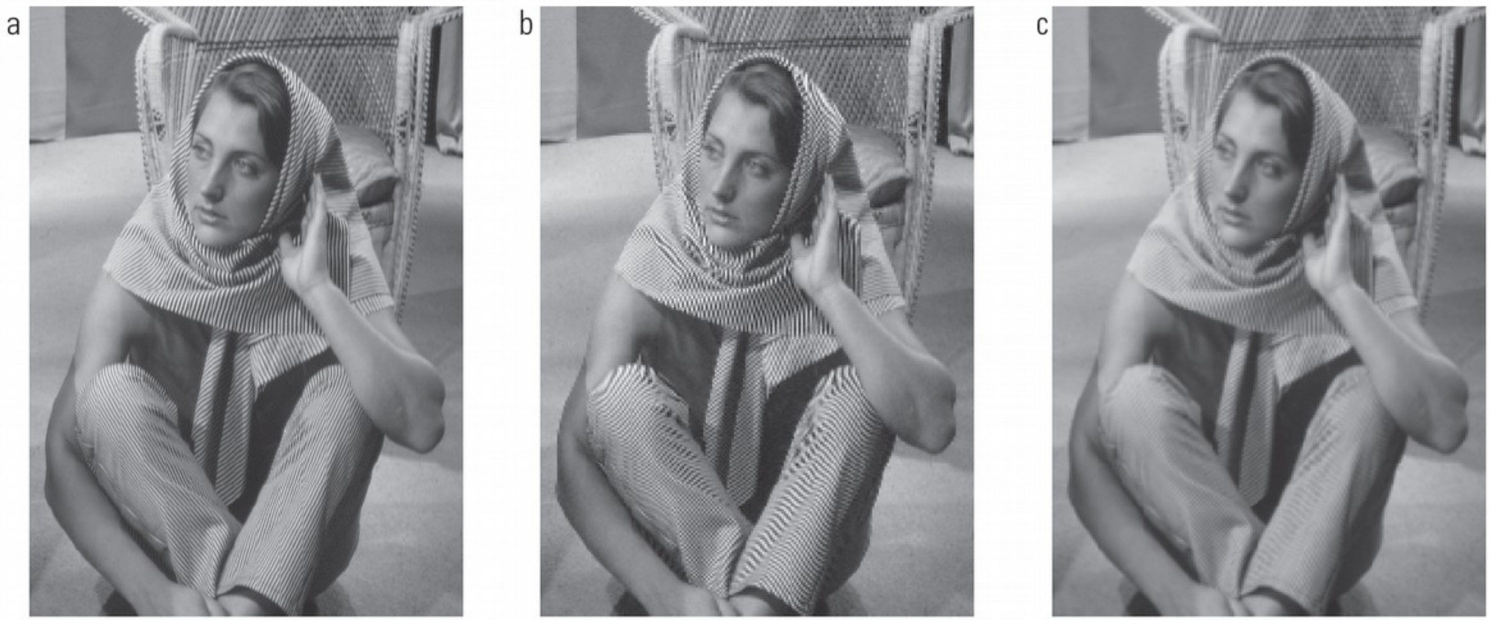


Figura 4.17 Ilustração do *aliasing* em imagens reamostradas. (a) Imagem digital com *aliasing* visual desprezível. (b) Resultado do redimensionamento da imagem para 50% de seu tamanho original por meio da exclusão de pixels. O *aliasing* é claramente visível. (c) Resultado do borramento da imagem em (a) com um filtro de média 3 × 3 antes do redimensionamento. A imagem é ligeiramente mais borrada do que (b), mas o *aliasing* deixa de ser visível. (Imagem original: cortesia de Laboratório de Compressão de Sinal, Universidade da Califórnia, Santa Barbara.)

Extensão Para Funções 2D

- *Jaggies* em imagens digitais
  - Os ***jaggies*** são um **tipo de *aliasing*** que aparecem com mais frequência em imagens com alto **conteúdo de bordas**
  - Esse efeito é visto como componentes **serrilhados** na imagem processada
  - Os **serrilhados** geralmente **aparecem** na imagem após um processo de reamostragem:
    - Ampliação ou redução

Extensão Para Funções 2D

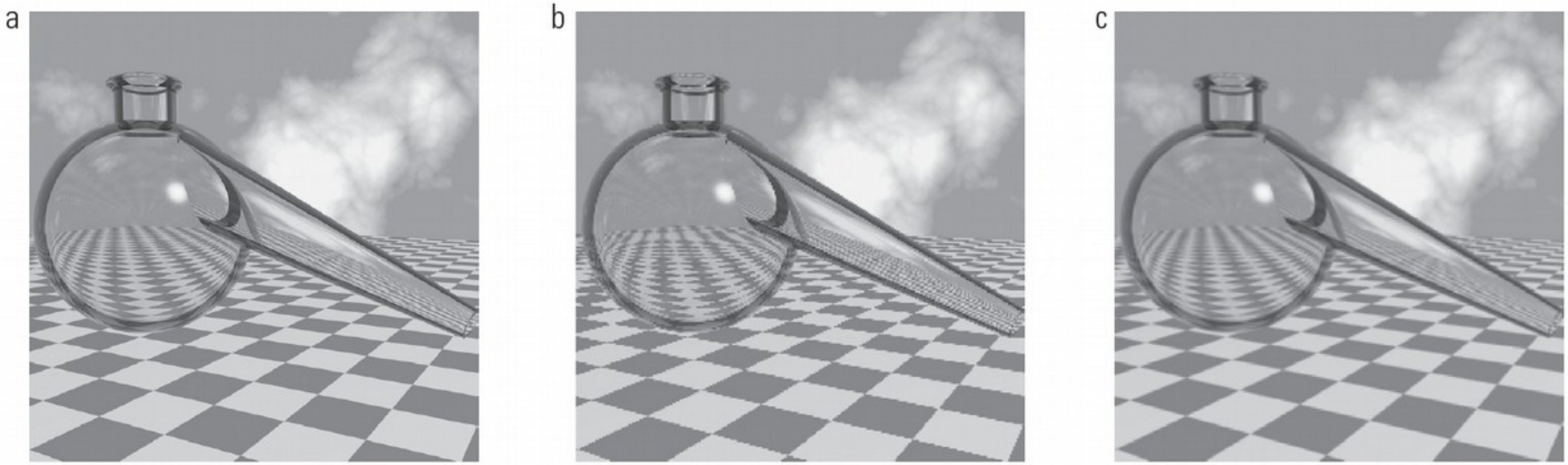


Figura 4.18 Exemplo de *jaggies* (serrilhado). (a) Imagem digital 1.024 × 1.024 de uma cena gerada por computador com *aliasing* desprezível. (b) Resultado da redução de (a) para 25% de seu tamanho original utilizando a interpolação bilinear. (c) Resultado do borramento da imagem em (a) com um filtro de média 5 × 5 antes do redimensionamento para 25% utilizando a interpolação bilinear. (Imagem original: cortesia de D. P. Mitchell, Mental Landscape, LLC.)

Transformada Discreta de Fourier (2D)

- A Transformada de Fourier de funções de duas variáveis discretas
  - Seja $f(x, y)$ uma **função contínua discretizada** das variáveis reais x e y, a **Transformada Discreta de Fourier (DFT)** é:

$$\mathcal{F}(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}$$

    - Para $u = 0, 1, 2, \ldots, M-1$
    - Para $v = 0, 1, 2, \ldots, N-1$

Transformada Discreta de Fourier (2D)

- A Transformada de Fourier de funções de duas variáveis discretas
  - Dado $\mathcal{F}(u)$, a função $f(x)$ pode ser **recuperada** calculando-se a **Transformada Discreta Inversa de Fourier (IDFT)**, definida pela equação:

$$f(x,y) = \frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}\mathcal{F}(u,v)e^{j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}$$

    - Para $x = 0, 1, 2, \dots, M-1$
    - Para $y = 0, 1, 2, \dots, N-1$

Propriedades da DFT 2D

- Translação
  - Essa é uma propriedade utilizada para **deslocar** a DFT de uma imagem
  - Sua execução é aproveitada para uma **melhor visualização** do resultado da FT de uma imagem
    - O descolamento através da translação não altera o componente de magnitude da Transformada de Fourier
    - Geralmente a propriedade de translação é utilizada em conjunto com a propriedade de periodicidade

Propriedades da DFT 2D

- Translação
  - O **par** de **Transformadas de Fourier** que satisfaz as propriedades de **translação** são as seguintes:

$$f(x,y)e^{j2\pi\left(\frac{u_0x}{M}+\frac{v_0y}{N}\right)} \Leftrightarrow \mathcal{F}(u-u_0, v-v_0)$$

e

$$f(x-x_0, y-y_0) \Leftrightarrow \mathcal{F}(u,v)e^{-j2\pi\left(\frac{x_0u}{M}+\frac{y_0v}{N}\right)}$$

  - Por exemplo:
    - Podemos deslocar a origem da Transformada de Fourier para a posição (u_0, v_0)

Propriedades da DFT 2D

- Rotação
  - A **propriedade de rotação** estabelece que:
    - Se uma imagem $f(x, y)$ for rotacionada em um certo ângulo θ, sua Transformada de Fourier $\mathcal{F}(u, v)$ será rotacionada no mesmo ângulo θ
  - A **Transformada** que satisfaz a propriedade de **rotação** anterior é a seguinte:

$$f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow \mathcal{F}(\omega, \varphi + \theta_0)$$

Propriedades da DFT 2D

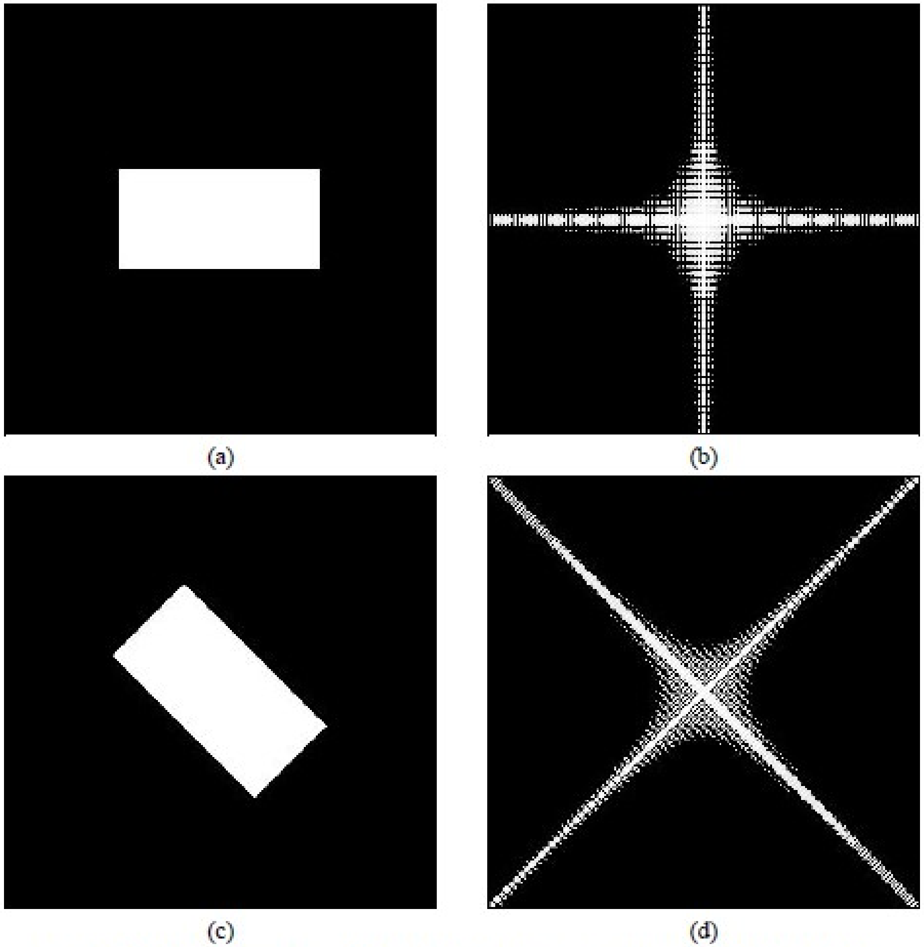


Figura 20 - (a) imagem original; (b) FT de (a); (c) imagem rotacionada; (d) FT de (c).

Propriedades da DFT 2D

- Periodicidade
  - A Transformada de Fourier 2D e sua inversa são **infinitamente periódicas** nas direções u e v
  - O resultado da **Transformada de Fourier** em uma **função 1D** resulta em:
    - No encontro de dois meios períodos no ponto $\left(\frac{M}{2}\right)$
  - No caso de uma **função 2D**:
    - Temos o encontro de quatro parcelas de um quarto de período no ponto $\left(\frac{M}{2}, \frac{N}{2}\right)$

Propriedades da DFT 2D

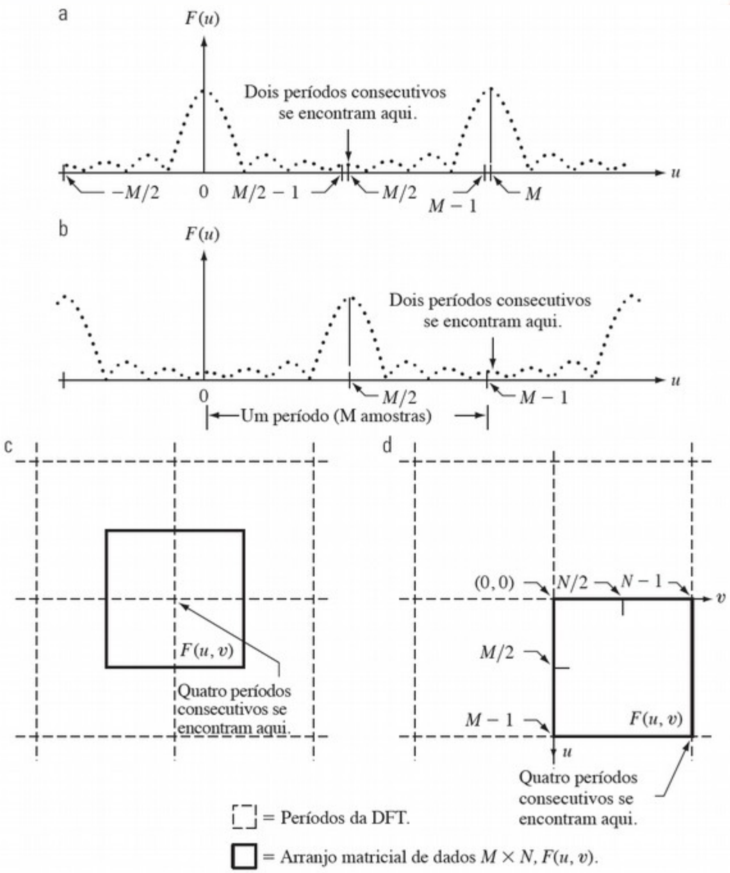


Figura 4.23 Centralização da transformada de Fourier. (a) Uma DFT 1-D mostrando um número infinito de períodos. (b) DFT deslocada obtida multiplicando $f(x)$ por $(-1)^x$ antes do cálculo de $F(u)$. (c) Uma DFT 2-D mostrando um número infinito de períodos. A área sólida é o arranjo matricial de dados $M \times N$, $F(u, v)$, obtido com a Equação 4.5-15. Esse arranjo consiste em quatro parcelas de um quarto de período. (d) Uma DFT deslocada obtida multiplicando $f(x, y)$ por $(-1)^{x+y}$ antes do cálculo de $F(u, v)$. Agora, os dados contêm um período completo e centralizado, como em (b).

Propriedades da DFT 2D

- Periodicidade
  - A Transformada de Fourier 2D de uma imagem digital é **formada por quadrantes** de períodos distintos de uma função contínua
  - Muitas vezes a visualização da Transformada original pode parecer **confusa**, já que vamos ter alguma dificuldade na interpretação da **amplitude da função**
    - Por esse motivo, muitas vezes é necessário realizar a **translação** de uma Transformada de Fourier

Propriedades da DFT 2D

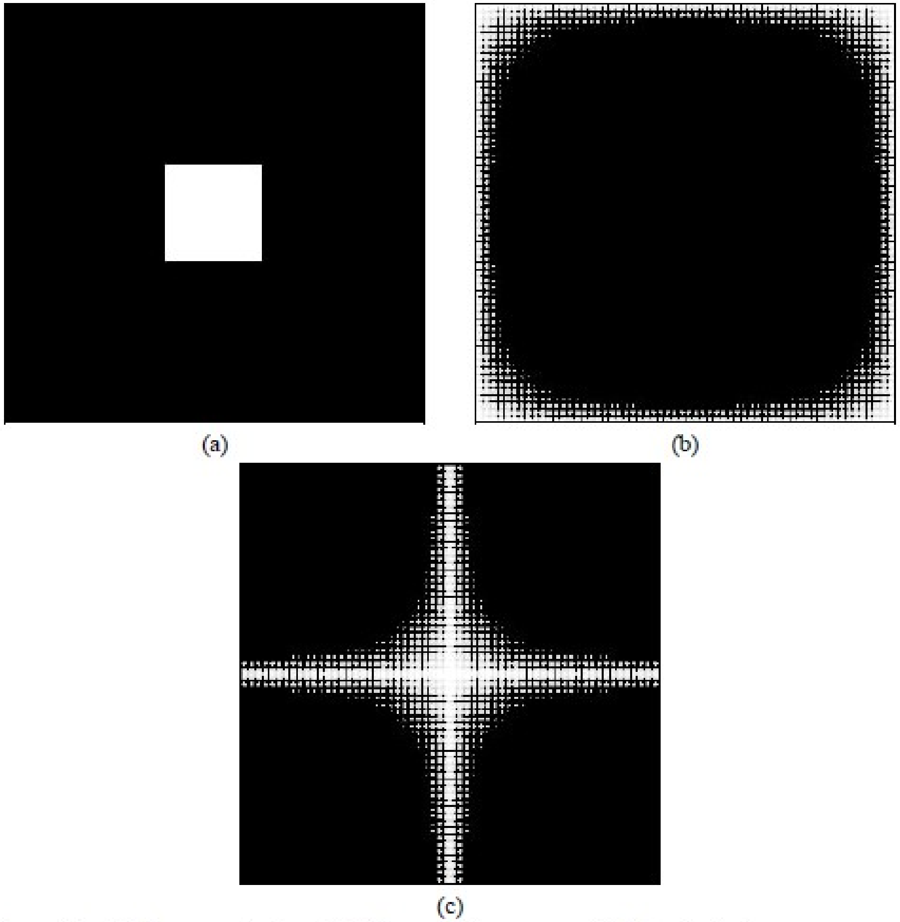


Figura 19 - (a) Imagem simples; (b) FT sem deslocamento; (c) FT após deslocamento para o centro do retângulo de referência.

Propriedades da DFT 2D

- Periodicidade
  - Para deslocar os dados de uma Transformada de Fourier para se posicionar no centro do retângulo de frequências definido pelos intervalos $[0, M-1]$ e $[0, N-1]$, utilizamos a equação:

$$f(x,y)(-1)^{x+y} \Leftrightarrow \mathcal{F}\left(u - \frac{M}{2}, v - \frac{N}{2}\right)$$

Propriedades da DFT 2D

- Separabilidade
  - A Transformada de Fourier 2D é **separável** em Transformadas de Fourier 1D
  - Podemos expressa a Transformada de Fourier Discreta 2D em:

$$\mathcal{F}(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1} e^{-\frac{j2\pi ux}{M}} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-\frac{j2\pi vy}{N}}$$

$$\mathcal{F}(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1} \mathcal{F}(x,v) e^{-\frac{j2\pi ux}{M}}$$

Propriedades da DFT 2D

- Separabilidade
  - Para cada valor de x e para $v = 0, 1, 2, \dots, N-1$, vemos que:
    - $\mathcal{F}(x, v)$ é simplesmente a Transformada Discreta de Fourier de uma linha da imagem de entrada $f(x, y)$
  - Variando x de 0 a $M-1$, calculamos um conjunto de Transformadas Discretas de Fourier 1D para todas as linhas da imagem de entrada $f(x, y)$
  - Depois calculamos a Transformada Discreta de Fourier 1D para cada coluna do resultado

Transformada Rápida de Fourier

- A **Transformada Rápida de Fourier (FFT)** é um algoritmo que tem o objetivo de diminuir o custo computacional da TF de N pontos
  - A implementação por força bruta da DFT requer somatórios e adições da ordem de $(MN)^2$
  - A FFT combina diversas transformadas parciais, cada qual com um pequeno número de pontos
  - No caso da FFT, sua complexidade computacional é proporcional a $N \log_2 N$

Transformada Rápida de Fourier

N	N^2 (DFT)	$N\log_2 N$ (FFT)	Vantagem Computacional ($N/\log_2 N$)
2	4	2	2,00
4	16	8	2,00
8	64	24	2,67
16	256	64	4,00
32	1024	160	6,40
64	4096	384	10,67
128	16384	896	18,29
256	65536	2048	32,00
512	262144	4608	56,89
1024	1048576	10240	102,40
2048	4194304	22528	186,18
4096	16777216	49152	341,33
8192	67108864	106496	630,15

Transformada Rápida de Fourier

- Qual o **tempo** para calcular a **Transformada de Fourier 1D** de um vetor de **8192 elementos**?
  - Se um computador pessoal gasta em torno de **5 segundos** para calcular a **Transformada Rápida de Fourier**
  - Essa mesma máquina levará em torno de **600 vezes (50 minutos)** mais para calcular a **Transformada Discreta de Fourier** do mesmo vetor

Filtro na Frequência de Suavização

- São utilizados **filtros passa-baixa** para suavizar uma imagem no domínio da frequência
  - A suavização (borramento) é obtida no domínio da frequência pela atenuação das altas frequências
    - Representada por bordas e outras transições abruptas
  - Vamos analisar três tipos de filtros passa-baixas:
    - Filtros passa-baixa ideais
    - Filtros passa-baixa *Butterworth*
    - Filtros passa-baixa *Gaussiano*

Filtro na Frequência de Suavização

- Filtros passa-baixa ideais
  - Um **filtro passa-baixa ideal** 2D é aquele que **deixa passar**, sem atenuação, todas **as frequências em um círculo** de raio D_0 a partir da origem
    - Recorta todas as frequências fora desse círculo
  - Ele é determinado pela seguinte função:

$$H(u,v) = \begin{cases} 1 & se\ D(u,v) \leq D_0 \\ 0 & se\ D(u,v) > D_0 \end{cases}$$

    - D_0 é uma constante positiva; e
    - $D(u,v)$ a distância do ponto e o centro da frequência

Filtro na Frequência de Suavização

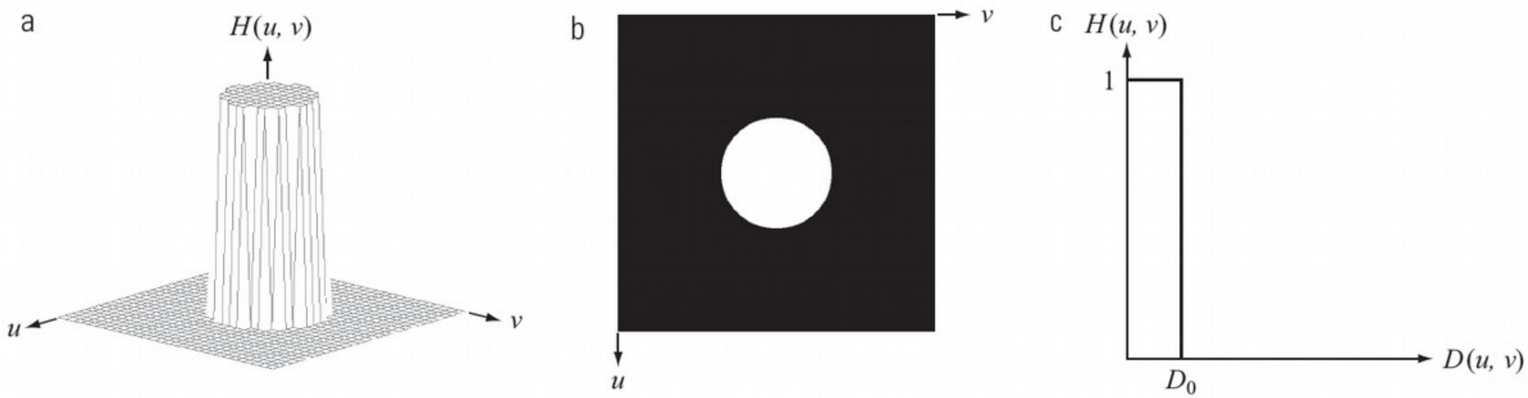


Figura 4.40 (a) Gráfico em perspectiva de uma função de transferência de filtro passa-baixa ideal. (b) Filtro exibido como uma imagem. (c) Corte transversal radial do filtro.

Filtro na Frequência de Suavização

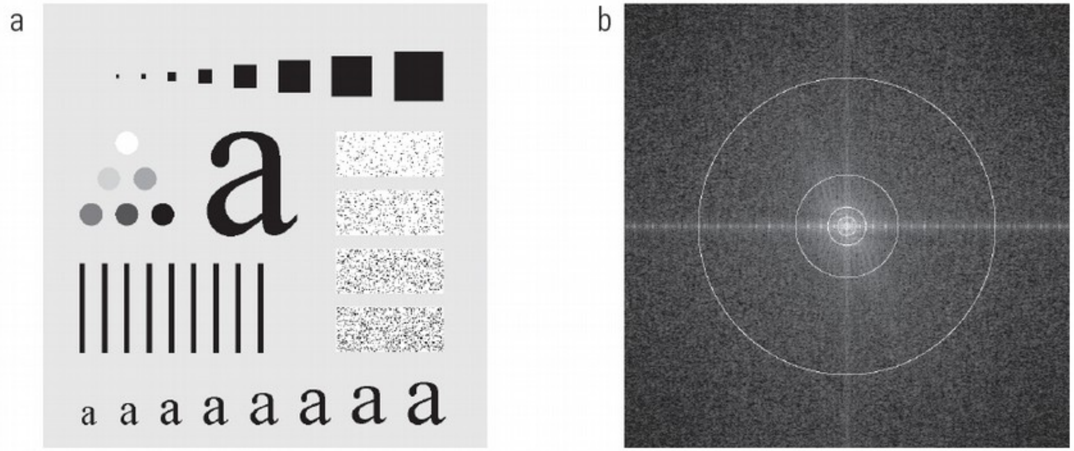


Figura 4.41 (a) Padrão de teste de tamanho 688 × 688 pixels e (b) seu espectro de Fourier. O espectro tem o dobro do tamanho da imagem em virtude do preenchimento, mas é mostrado na metade do tamanho para caber na página. Os círculos sobrepostos têm raios iguais a 10, 30, 60, 160 e 460 em relação à imagem total do espectro. Esses raios incluem 87,0, 93,1, 95,7, 97,8 e 99,2% da potência da imagem preenchida, respectivamente.

Filtro na Frequência de Suavização

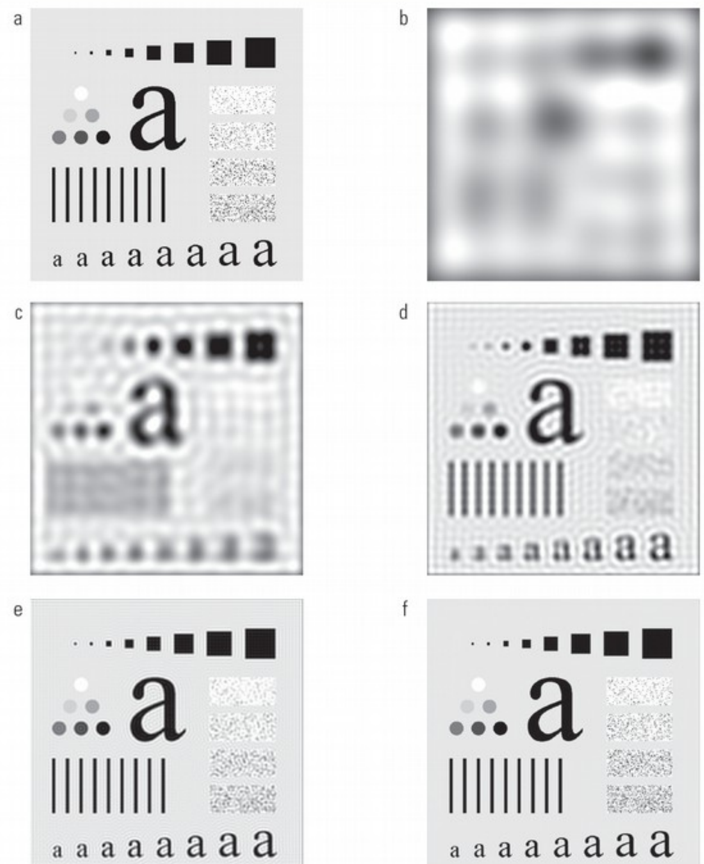


Figura 4.42 (a) Imagem original. (b) a (f) Resultados da filtragem utilizando ILPFs com frequências de corte definidas nos valores de raio 10, 30, 60, 160 e 460, como mostrado na Figura 4.41(b). A potência removida por esses filtros foi de 13, 6,9, 4,3, 2,2 e 0,8% do total, respectivamente.

Filtro na Frequência de Suavização

- Filtros passa-baixa *Butterworth*
  - Um **filtro passa-baixa *Butterworth*** é aquele que **deixa passar**, sem atenuação, **as frequências** a uma distância D_0 a partir da origem
  - Esse tipo de filtro é determinado pela equação:

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + [D(u,v)/D_0]^{2n}}$$

    - D_0 é uma constante positiva; e
    - $D(u,v)$ a distância do ponto e o centro da frequência

Filtro na Frequência de Suavização

- Filtros passa-baixa *Butterworth*
  - Diferentemente dos filtros passa-baixa ideais, a função dos filtros passa-baixa *Butterworth* **não tem** uma **descontinuidade abrupta**
    - A função contém um ***locus* de frequência de corte** que é o responsável por definir uma transferência suave nas regiões recortadas da frequência
  - Esse tipo de filtro reduz em 50% do seu valor máximo 1, quando:

$$D(v,u) = D_0$$

Filtro na Frequência de Suavização

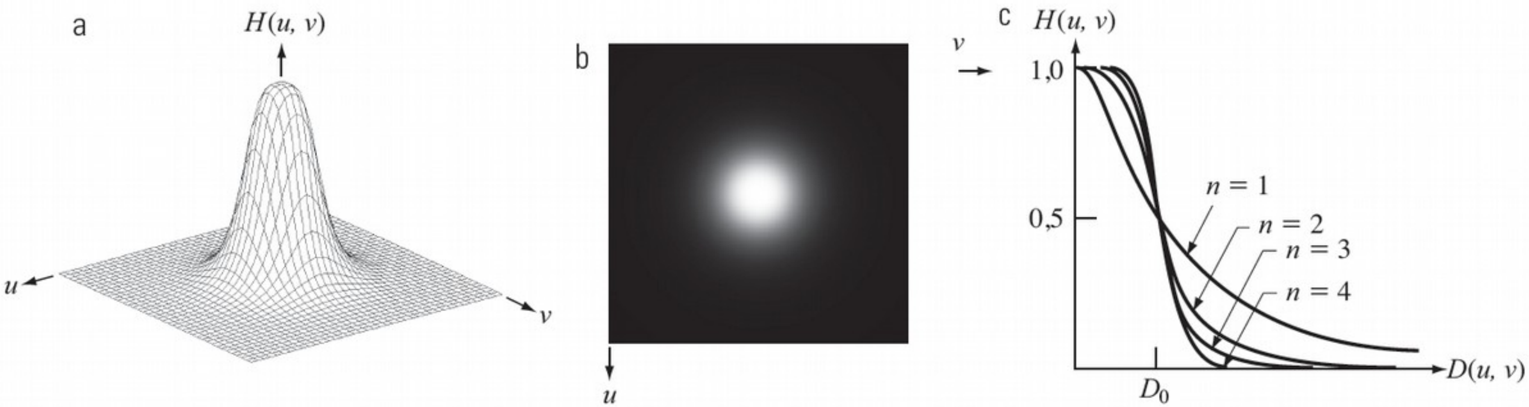


Figura 4.44 (a) Gráfico em perspectiva de uma função de transferência de filtro passa-baixa Butterworth. (b) Filtro exibido como uma imagem. (c) Cortes transversais radiais do filtro de ordens 1 a 4.

Filtro na Frequência de Suavização

Figura 4.45 (a) Imagem original. (b) a (f) Resultados da filtragem utilizando BLPF de ordem 2, com frequências de corte nos raios mostrados na Figura 4.41. Compare com a Figura 4.42.

Filtro na Frequência de Suavização

- Filtros passa-baixa *Gaussiano*
  - Um **filtro passa-baixa *Gaussiano*** é aquele que **deixa passar** as **frequências** sem utilizar uma **constante de multiplicação**
  - Esse tipo de filtro é determinado pela equação:

$$H(u,v) = e^{-\frac{D^2(u,v)}{2{D_0}^2}}$$

    - D_0 é uma constante positiva; e
    - Quando $D(u,v) = D_0$, o filtro passa-baixa *Gaussiano* reduz a frequência naquele ponto em 0,607

Filtro na Frequência de Suavização

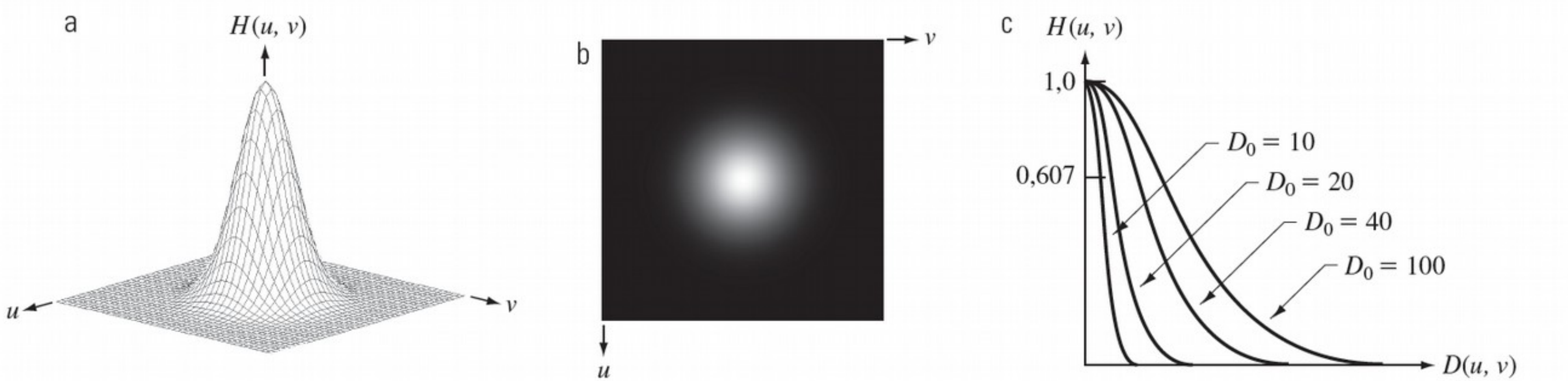


Figura 4.47 (a) Um gráfico em perspectiva de uma função de transferência GLPF. (b) Filtro exibido como uma imagem. (c) Cortes transversais radiais do filtro para vários valores de D_0.

Filtro na Frequência de Suavização

Figura 4.48 (a) Imagem original. (b) a (f) Resultados da filtragem utilizando GLPFs com frequências de corte nos raios mostrados na Figura 4.41. Compare com as figuras 4.42 e 4.45.

Filtro na Frequência de Aguçamento

- São utilizados **filtros passa-alta** para aguçar determinadas regiões de uma imagem no domínio da frequência
  – O aguçamento é obtido no domínio da frequência pela passagem das altas frequências
  – Vamos analisar três tipos de filtros passa-baixas:
    - Filtros passa-alta ideais
    - Filtros passa-alta *Butterworth*
    - Filtros passa-alta *Gaussiano*

Filtro na Frequência de Aguçamento

- Um **filtro passa-alta** (HP, de *highpass*) é obtido a partir de um **filtro passa-baixa** (LP, de *lowpass*) , por meio da equação:

$$H_{HP}(u,v) = 1 - H_{LP}(u,v)$$

  – Sendo $H_{LP}(u,v)$ a função de transferência do filtro passa-baixa

  – Isso significa que filtros passa-baixa atenuam frequências, enquanto filtros passa-alta as passa, e vice-versa

Filtro na Frequência de Aguçamento

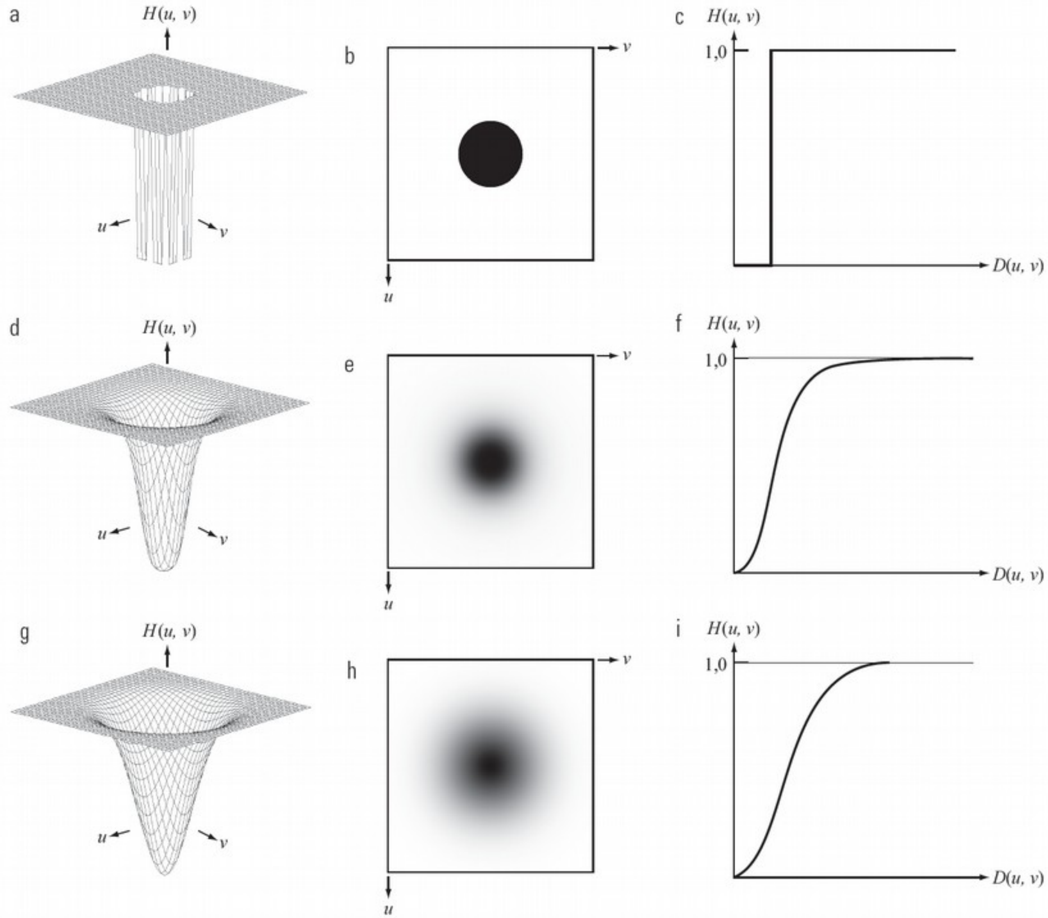


Figura 4.52 Linha superior: gráfico em perspectiva, representação na forma de imagem e corte transversal de um filtro passa-alta ideal típico. Linha do meio e inferior: a mesma sequência para filtros passa-alta Butterworth e gaussiano, respectivamente.

Filtro na Frequência de Aguçamento

- Filtros passa-alta ideais
  - Um **filtro passa-alta ideal** 2D é aquele que **elimina** todas **as frequências dentro de em um círculo** de raio D_0 a partir da origem
    - Enquanto passa todas as frequências fora do círculo
  - Ele é determinado pela seguinte função:

$$H(u,v) = \begin{cases} 0 & se\ D(u,v) \leq D_0 \\ 1 & se\ D(u,v) > D_0 \end{cases}$$

    - D_0 é uma constante positiva; e
    - $D(u,v)$ a distância do ponto e o centro da frequência

Filtro na Frequência de Aguçamento

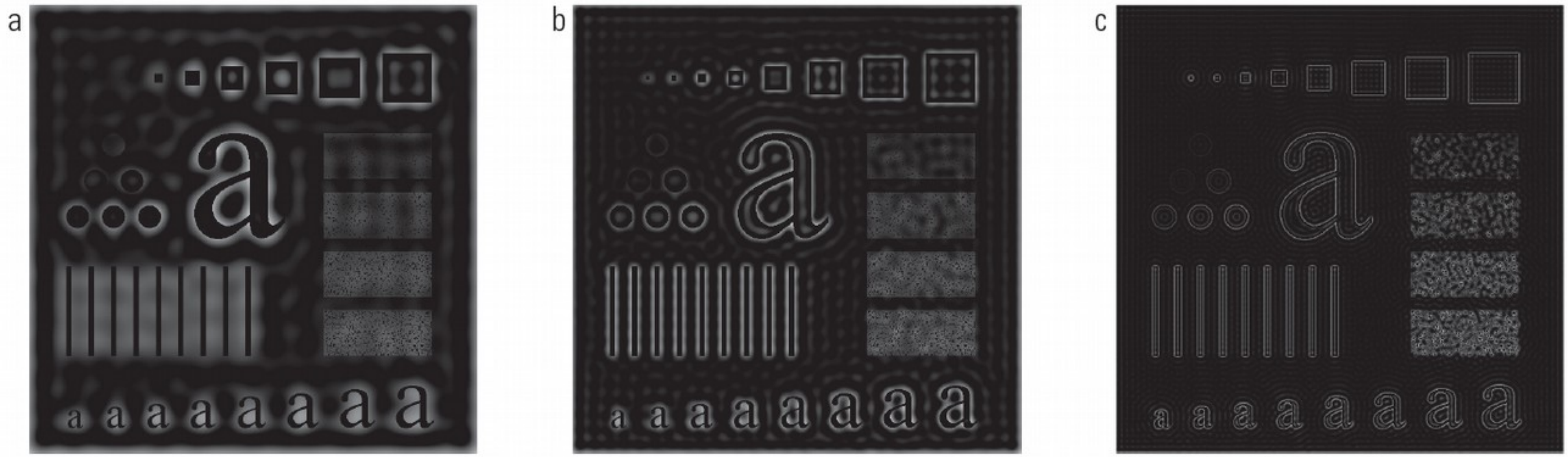


Figura 4.54 Resultados da filtragem passa-alta da imagem da Figura 4.41(a) utilizando um IHPF com D_0 = 30, 60 e 160.

Filtro na Frequência de Aguçamento

- Filtros passa-alta *Butterworth*
  - Um **filtro passa-alta *Butterworth*** é aquele que **elimina as frequências** a uma distância D_0 a partir da origem
  - Esse tipo de filtro é determinado pela equação:

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + [D_0/D(u,v)]^{2n}}$$

    - D_0 é uma constante positiva; e
    - $D(u,v)$ a distância do ponto e o centro da frequência

Filtro na Frequência de Aguçamento

Figura 4.55 Resultados da filtragem passa-alta da imagem da Figura 4.41(a) utilizando um BHPF de ordem 2 com $D_0 = 30$, 60 e 160, correspondendo aos círculos mostrados na Figura 4.41(b). Esses resultados são muito mais suaves do que os obtidos com um IHPF.

Filtro na Frequência de Aguçamento

- Filtros passa-alta *Gaussiano*
  - Um **filtro passa-alta *Gaussiano*** é aquele que **elimina as frequências** sem utilizar uma **constante de multiplicação**
  - Esse tipo de filtro é determinado pela equação:

$$H(u,v) = 1 - e^{-\frac{D^2(u,v)}{2{D_0}^2}}$$

    - D_0 é uma constante positiva; e

Filtro na Frequência de Aguçamento

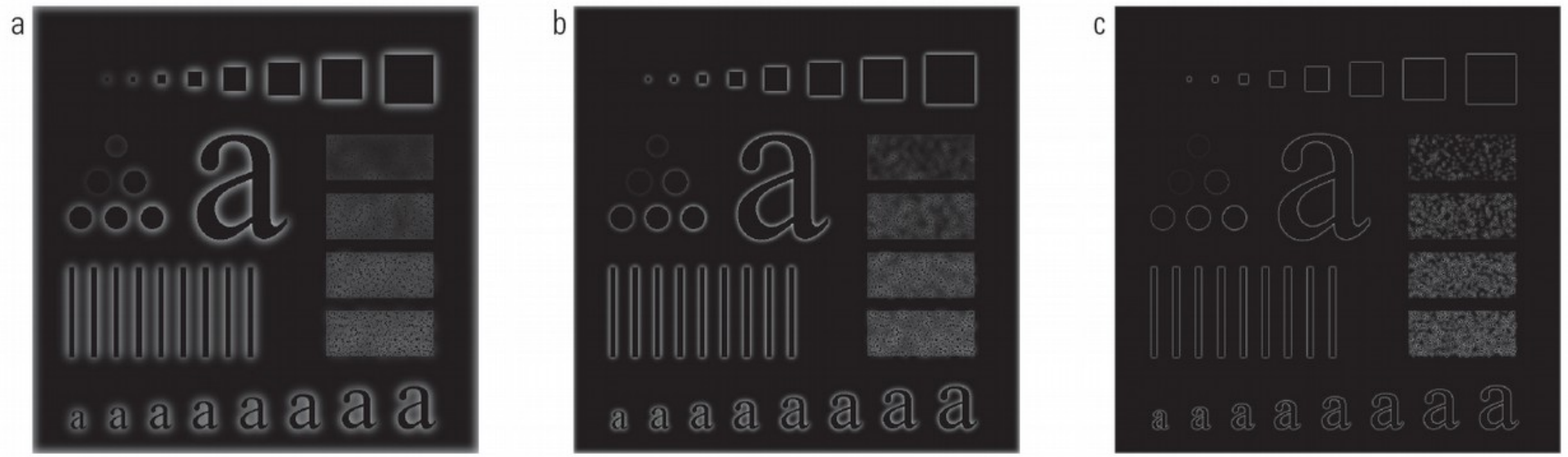


Figura 4.56 Resultados da filtragem passa-alta da imagem da Figura 4.41(a) utilizando um GHPF com D_0 = 30, 60, 160, correspondendo aos círculos da Figura 4.41(b). Compare com as figuras 4.54 e 4.55.

Imagens

- A maioria das imagens utilizadas nesses slides foram extraídas do livro "Processamento Digital de Imagens" (Gonzalez e Woods):