

# Elementos de máquinas 2

Molas

# Molas

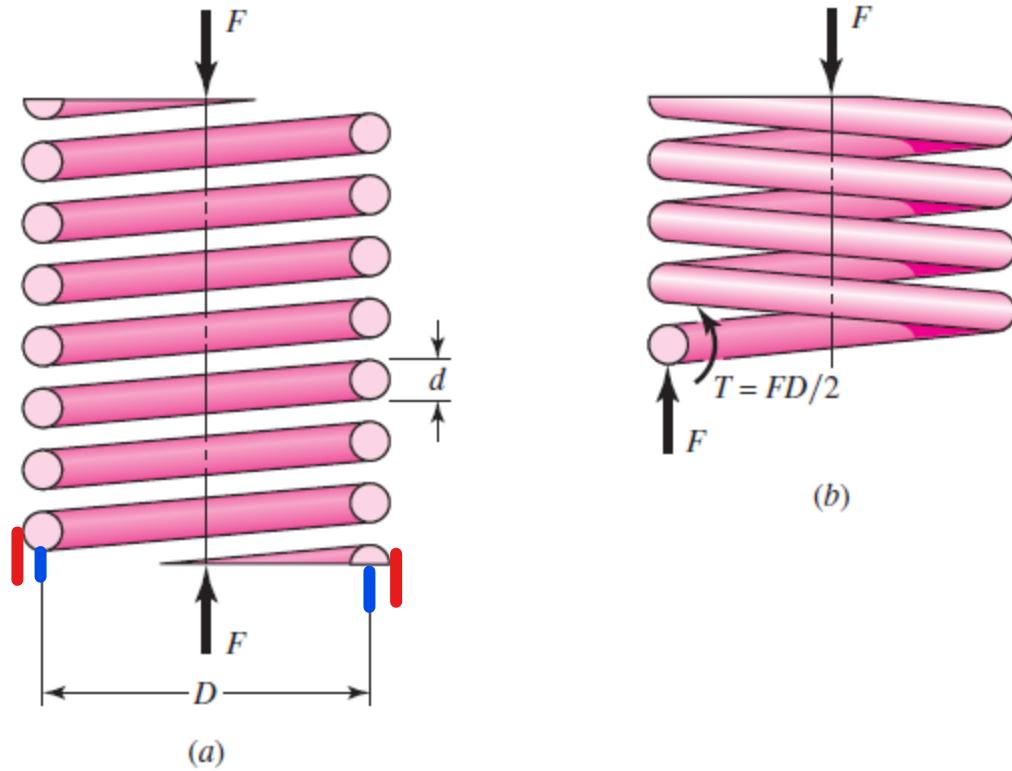
- Flexibilidade às vezes é necessária e pode ser fornecida por corpos metálicos com geometria controlada;
- Esses corpos exibem flexibilidade no grau desejado, podendo ser linear ou não linear ao relacionar deflexão e carga;
- Permitem aplicação controlada de força e torque;
- Podem armazenar e liberar energia em um sistema.

# 10.1 Tensões em molas helicoidais

- Mola helicoidal de compressão de fio redondo carregada pela força axial  $F$ :

**Figure 10-1**

(a) Axially loaded helical spring; (b) free-body diagram showing that the wire is subjected to a direct shear and a torsional shear.



# 10.1 Tensões em molas helicoidais

$D$  = diâmetro médio da espira

$d$  = diâmetro do fio

- Fazendo um diagrama de corpo livre de uma parte da mola (figura 10.1b), temos:

$$T = FD/2$$

# 10.1 Tensões em molas helicoidais

- A tensão máxima no fio é a sobreposição da tensão de cisalhamento direta, mais a tensão de cisalhamento de torção:

$$\tau_{\max} = \frac{Tr}{J} + \frac{F}{A} \quad (a)$$

- Fazendo:  $\tau_{\max} = \tau$ ,  $T = FD/2$ ,  $r = d/2$ ,  $J = \pi d^4/32$  e  $A = \pi d^2/4$ , temos:

$$\tau = \frac{8FD}{\pi d^3} + \frac{4F}{\pi d^2} \quad (10-1)$$

# 10.1 Tensões em molas helicoidais

- Definindo o índice de mola:

$$C = \frac{D}{d} \quad (10-2)$$

- Rearranjando 10.1:

$$\tau = K_s \frac{8FD}{\pi d^3} \quad (10-3)$$

- Onde  $K_s$  é um fator de correção da tensão de cisalhamento:

$$K_s = \frac{2C + 1}{2C} \quad (10-4)$$

- Para a maioria das molas, C varia de 6 a 12.

# 10.1 Tensões em molas helicoidais

- O uso de fio quadrado ou retangular não é recomendado para molas;
- Quando há limitação de espaço, deve-se considerar o uso de molas de fio redondo aninhado: há vantagem econômica e de resistência.

## 10.2 O efeito da curvatura

- A equação 10.1 baseia-se no fio reto. Mas a curvatura do fio aumenta a tensão no lado interno e diminui no lado externo. Essa tensão é importante em fadiga.
- $K_s$  deve ser substituído por outro  $K$ , que corrija o efeito do cisalhamento e da curvatura, dado por qualquer das equações (fator de Wahl ou fator de Bergsträsser):

$$K_W = \frac{4C - 1}{4C - 4} + \frac{0.615}{C} \quad (10-5)$$

$$K_B = \frac{4C + 2}{4C - 3} \quad (10-6)$$

## 10.2 O efeito da curvatura

- O resultado das equações difere de menos de 1%. Assim, a equação 10.6 é preferida;
- Da equação 10.6 e 10.4, obtemos:

$$K_c = \frac{K_B}{K_s} = \frac{2C(4C + 2)}{(4C - 3)(2C + 1)} \quad (10-7)$$

- $K_s$ ,  $K_B$  ou  $k_w$  e  $k_c$  são fatores de correção de tensão aplicados em local crítico para estimar uma tensão particular.
- Maior tensão de cisalhamento:

$$\tau = K_B (8FD) / (\pi d^3)$$

# 10.3 Deflexão de molas helicoidais

- Relações deflexão-força podem ser obtidas pelo teorema de Castigliano. A energia de deformação é composta por uma componente torcional e uma componente de cisalhamento:

$$U = \frac{T^2 l}{2GJ} + \frac{F^2 l}{2AG} \quad (a)$$

- Fazendo:  $T = FD/2$ ,  $l = \pi DN$ ,  $J = \pi d^4/32$ , and  $A = \pi d^2/4$

- Temos:

$$U = \frac{4F^2 D^3 N}{d^4 G} + \frac{2F^2 D N}{d^2 G} \quad (b)$$

- Onde  $N = N_a$  = número de espiras ativas.

# 10.3 Deflexão de molas helicoidais

- Usando o teorema de Castigliano para encontrar a deflexão total  $y$ , temos:

$$y = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{8FD^3N}{d^4G} + \frac{4FDN}{d^2G} \quad (c)$$

- Como  $C = D/d$ , a equação (c) pode ser escrita:

$$y = \frac{8FD^3N}{d^4G} \left( 1 + \frac{1}{2C^2} \right) \doteq \frac{8FD^3N}{d^4G} \quad (10-8)$$

- A constante de mola é  $k = F/y$ . Então:

$$k \doteq \frac{d^4G}{8D^3N} \quad (10-9)$$

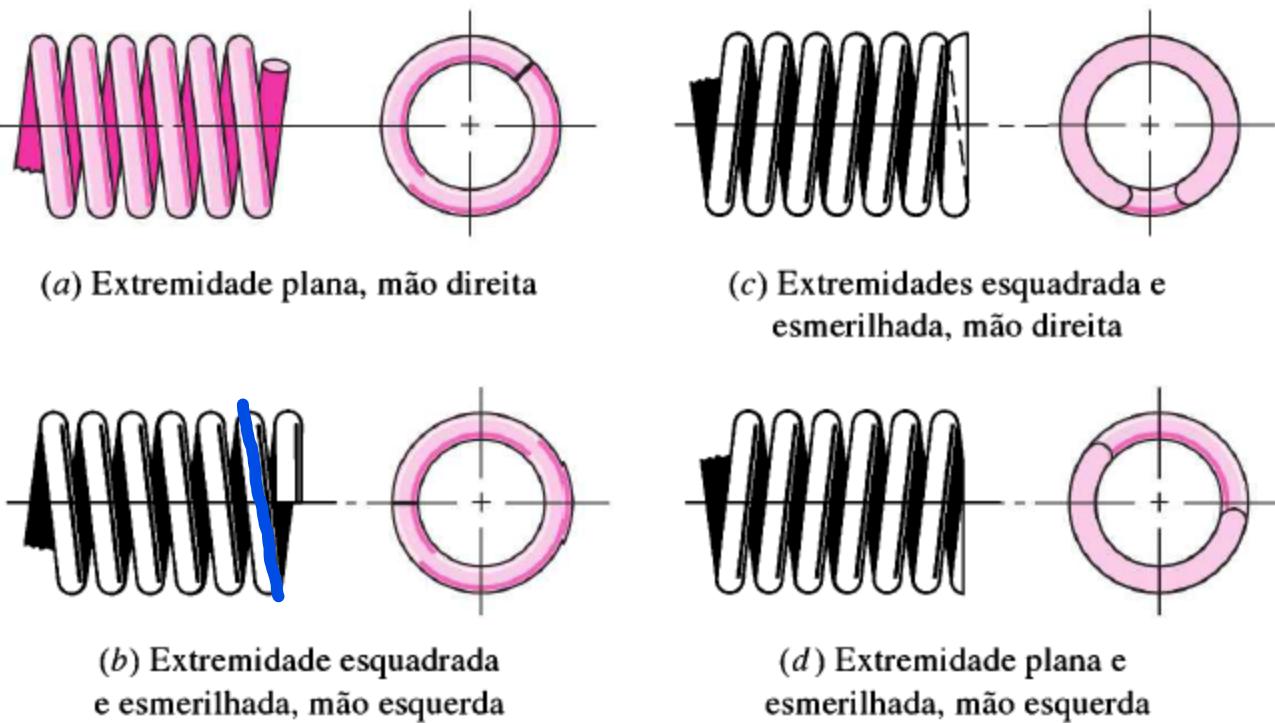
# 10.4 Molas de compressão

- Quatro tipos de extremidades de molas de compressão:

**Figura 10-2**

Tipos de extremidades para molas de compressão.

(a) ambas as extremidades planas; (b) ambas as extremidades esquadradadas; (c) ambas as extremidades esquadradadas e esmerilhadas; (d) ambas as extremidades planas e esmerilhadas.



## 10.4 Molas de compressão

- **Extremidades planas:** corte simples de espiras;
- **Extremidades esquadradadas:** as espiras das extremidades são levadas ao escoamento para torná-las planas e remover seus passos;
- **Extremidades esmerilhadas:** ficam planas e perpendiculares ao eixo da mola.

# 10.4 Molas de compressão

- O tipo de extremidade afeta o número de espiras e o comprimento da mola:

**Tabela 10-1**

Fórmulas para as características dimensionais das molas de compressão.  
( $N_a$  = Número de espirais ativas.)

Fonte: Extraído de *Design Handbook*, 1987, p. 32,  
Cortesia da Associated Spring.

Termo	<i>Tipo de extremidades de mola</i>			
	Plana	Plana e esmerilhada	Esquadriada ou fechada	Esquadriada e esmerilhada
Espirais de extremidade, $N_e$	0	1	2	2
Total de espirais, $N_t$	$N_a$	$N_a + 1$	$N_a + 2$	$N_a + 2$
Comprimento livre, $L_0$	$pN_a + d$	$p(N_a + 1)$	$pN_a + 3d$	$pN_a + 2d$
Comprimento sólido, $L_s$	$d(N_t + 1)$	$dN_t$	$d(N_t + 1)$	$dN_t$
Passo, $p$	$(L_0 - d)/N_a$	$L_0/(N_a + 1)$	$(L_0 - 3d)/N_a$	$(L_0 - 2d)/N_a$

## 10.4 Molas de compressão

- Alguns valores da tabela 10.1 podem exigir um exame mais profundo, pois podem não ser inteiros. Forys considera um comprimento sólido para molas com extremidades esmerilhadas e esquadradadas de:

$$L_s = (N_t - a)d$$

- Onde  $a$  varia com uma média de 0,75, sendo a entrada  $dN_t$  exagerada

## 10.4 Molas de compressão

- **Remoção de assentamento ou pré-ajuste:** processo usado na manufatura de molas de compressão para induzir tensões residuais;
- Fabrica-se a mola mais comprida que o necessário e comprime-a até o comprimento sólido, atingindo a tensão de escoamento. Essa operação ajusta a mola ao comprimento requerido, induzindo tensões residuais em sentidos opostos àqueles em serviço, aumentando a resistência da mola.
- Não deve ser usado em molas sujeitas à fadiga.

## 10.5 Estabilidade

- Uma coluna flamba quando a carga se torna muito grande. O mesmo pode ocorrer com molas helicoidais sujeitas à compressão. A deflexão crítica é dada pela equação:

$$y_{\text{cr}} = L_0 C'_1 \left[ 1 - \left( 1 - \frac{C'_2}{\lambda_{\text{eff}}^2} \right)^{1/2} \right] \quad (10-10)$$

- $y_{\text{cr}}$  é a deflexão correspondente ao início da instabilidade;

## 10.5 Estabilidade

- A razão efetiva de esbeltez é:

$$\lambda_{\text{eff}} = \frac{\alpha L_0}{D} \quad (10-11)$$

- $C_1'$  e  $C_2'$  são constantes elásticas:

$$C_1' = \frac{E}{2(E - G)}$$

$$C_2' = \frac{2\pi^2(E - G)}{2G + E}$$

# 10.5 Estabilidade

- A equação 10.11 contém a constante de condição de extremidade  $\alpha$ . A tabela 10.2 fornece esses valores.

**Tabela 10-2**

Constantes  $\alpha$  de condição de extremidade para molas helicoidais de compressão.\*

Condição de extremidade	Constante $\alpha$
Mola suportada entre superfícies planas paralelas (extremidades fixas)	0,5
Uma extremidade apoiada por superfície plana perpendicular ao eixo de mola (fixo); outra extremidade pivotada (articulada)	0,707
Ambas as extremidades pivotadas (articuladas)	1
Uma extremidade engastada; outra extremidade livre	2

\*Extremidades apoiadas por superfícies planas devem ser esquadradadas e esmerilhadas.

## 10.5 Estabilidade

- A estabilidade absoluta ocorre quando o termo  $C_2'/\lambda_{eff}^2$  é maior que um:

$$L_0 < \frac{\pi D}{\alpha} \left[ \frac{2(E - G)}{2G + E} \right]^{1/2} \quad (10-12)$$

- Para aços:

$$L_0 < 2.63 \frac{D}{\alpha} \quad (10-13)$$

- Para extremidades esquadradadas e esmerilhadas:  $\alpha = 0,5$  e  $L_0 < 5.26D$

## 10.6 Materiais de mola

- Molas são manufaturadas a quente ou a frio;
- Em geral, não se usa fio pré-endurecido se  $D/d < 4$  ou  $d > 6\text{mm}$ ;
- Materiais disponíveis: aços comuns de carbono, aços liga, aços resistentes à corrosão, materiais não ferrosos como bronze-fósforo, latão de mola, cobre berílio, e ligas de níquel;
- A tabela 10.3 descreve os aços mais usados.

**Tabela 10-3**

Aços de mola de liga e alto carbono

Fonte: Extraído de Harold C. R. Carlson, "Selection and Application of Spring Materials", *Mechanical Engineering*, v. 78, 1956, p. 331-334.

Nome do material	Especificação similar	Descrição
Fio musical (ou polido), 0,80–0,95C	UNS G10850 AISI 1085 ASTM A228-51	Este é o melhor, mais tenaz e mais amplamente usado de todos os materiais de mola para pequenas molas. Ele tem a mais elevada resistência de tração e pode aguentar tensões mais elevadas sob carregamento repetido que qualquer outro material de mola. Disponível em diâmetros de 0,12 mm a 3 mm. Não use acima de 120°C ou em temperaturas abaixo de zero.
Fio revenido em óleo, 0,60–0,70C	UNS G10650 AISI 1065 ASTM 229-41	Este aço de mola de propósito geral é usado para muitos tipos de molas de espirais, em que o custo do fio musical é proibitivo e em tamanhos maiores que os disponíveis em fio musical. Não recomendável para carregamento de choque ou impacto. Disponível em diâmetros de 3 mm a 12 mm, mas diâmetros maiores e menores podem ser obtidos. Não recomendado para uso acima de 180°C ou em temperaturas abaixo de zero.
Mola de fio duro estirado, 0,60–0,70C	UNS G10660 AISI 1066 ASTM A227-47	Este é o aço de mola mais barato de propósito geral, e deve ser usado somente quando a vida, acurácia e deflexão não são tão importantes. Disponível em diâmetros de 0,8 mm a 12 mm. Não recomendado para uso acima de 120°C ou em temperaturas abaixo de zero.

Cromo-vanádio

UNS G61500  
AISI 6150  
ASTM 231-41

Este é o mais popular aço-liga de mola para condições envolvendo tensões mais elevadas que pode ser usado com aços de alto-carbono, e para uso em que resistência à fadiga e longa endurança são necessárias. Também bom para cargas de choque e impacto. Amplamente usado para mola de válvulas de motor de aeronaves e em temperaturas até 220°C. Disponível recocido ou pré-revenido, em tamanhos de 0,8 mm a 12 mm de diâmetro.

Cromo-silício

UNS G92540  
AISI 9254

Esta liga é um material excelente para molas altamente tensionadas que requerem viga longa e estão sujeitas a carregamento de choque. Durezas Rockwell de C50 a C53 são muito comuns, e o material pode ser usado até 250°C. Disponível de 0,8 mm a 12 mm de diâmetro.

## 10.6 Materiais de mola

- Aços de mola podem ser comparados pela sua resistência de tração, que depende de:
  - Tamanho do fio;
  - Material;
  - Processamento do material.

## 10.6 Materiais de mola

- O gráfico de resistência à tração x diâmetro do fio é uma reta, quando traçado em escala logarítmica. Pode-se escrever a equação dessa linha como:

$$S_{ut} = \frac{A}{d^m} \quad (10-14)$$

- Fornece um bom meio para estimar as resistências mínimas de tração quando a intersecção  $A$  e a declividade da linha são conhecidas. A tabela 10.4 apresenta tais valores.

**Tabela 10-4**

Constantes A e m de  $S_{ut} = A/d^m$  para estimar a resistência mínima de tração de fios comuns de mola.  
 Fonte: Extraído do *Design Handbook*, 1987, p.19. Cortesia da Associated Spring.

<b>Material</b>	<b>ASTM nº</b>	<b>Expoente <i>m</i></b>	<b>Diâmetro, mm</b>	<b>A, MPa · mm<sup><i>m</i></sup></b>	<b>Custo relativo do fio</b>
Fio musical*	A228	0,145	0,10–6,5	2211	2,6
Fio temperado e revenido em óleo†	A229	0,187	0,5–12,7	1855	1,3
Mola de fio duro estirado‡	A227	0,190	0,7–12,7	1783	1,0
Fio de cromo-vanádio§	A232	0,168	0,8–11,1	2005	3,1
Fio cromo-silício	A401	0,108	1,6–9,5	1974	4,0
Fio inoxidável#	A313	0,146	0,3–2,5	1867	7,6–11
		0,263	2,5–5	2065	
		0,478	5–10	2911	
Fio fósforo-bronze**	B159	0	0,1–0,6	1000	8,0
		0,028	0,6–2	913	
		0,064	2–7,5	932	

\*Superfície é lisa, livre de defeitos e tem um acabamento brilhante e lustroso.

†Tem uma crosta de termo-tratamento branda, que pode ser removida antes de revestimento.

‡Superfície é lisa e brilhante, sem marcas visíveis.

§Fio revenido de qualidade aeronáutica, pode também ser obtido recozido.

|| Revenido à dureza Rockwell C49, mas pode ser obtido sem revenido.

#Aço Inoxidável tipo 302.

\*\* Revenido CA510.

## 10.6 Materiais de mola

- Saber a resistência ao escoamento torcional é necessário. Entretanto, só são feitos ensaios de tração, normalmente;
- Uma estimativa grosseira de resistência ao escoamento torcional pode ser obtida admitindo-se que a tensão de escoamento à tração fica em torno de 60 a 90% da resistência última à tração.

## 10.6 Materiais de mola

- A teoria da energia de distorção pode ser aplicada para obter a resistência ao escoamento torcional ( $S_{ys} = 0,577S_y$ ). Para aços:

$$0.35S_{ut} \leq S_{sy} \leq 0.52S_{ut} \quad (10-15)$$

- Tabela 10.5 dá a tensão máxima de cisalhamento.

**Tabela 10-5**

Propriedades mecânicas de alguns fios de mola.

Material	Limite elástico, porcentagem de $S_{ut}$ , torção tração	Diâmetro $d$ , mm	$E$ GPa	$G$ GPa
Fio musical A228	65-75	<0,8	203,4	82,7
		0,8-1,6	200	81,7
		1,61-3	196,5	81,0
		>3	193	80,0
Mola de fio duro estirado A227	60-70	<8	198,6	80,7
		0,8-1,6	197,9	80,0
		1,61-3	197,2	79,3
		>3	196,5	78,6
Revenido em óleo A239	85-90	45-50	196,5	77,2
Mola de válvula A230	85-90	50-60	203,4	77,2
Cromo-vanádio A231	88-93	65-75	203,4	77,2
A232	88-93		203,4	77,2
Cromo-silício A401	85-93	65-75	203,4	77,2
Aço inoxidável				
A313*	65-75	45-55	193	69,0
17-7PH	75-80	55-60	208,4	75,8
414	65-70	42-55	200	77,2
420	65-75	45-55	200	77,2
431	72-76	50-55	206	79,3
Fósforo-bronze B159	75-80	45-50	103,4	41,4
Berílio-cobre B197	70	50	117,2	44,8
	75	50-55	131	50,3
Liga inconel X-750	65-70	40-45	213,7	77,2

\*Também inclui 302, 304 e 316.

Nota: Ver a Tabela 10-6 para valores de projeto de tensão torcional admissível.

## 10.6 Materiais de mola

- A tabela 10.6 apresenta valores de tensão máxima admissível de torção para aplicação estática;
- Algumas correlações com molas de aço-carbono mostram que a resistência ao escoamento por tração de fio de mola em torção pode ser estimada a partir de  $0,75 S_{ut}$ .

## 10.6 Materiais de mola

- A estimativa correspondente ao escoamento em cisalhamento é:

$$S_{sy} = 0,577(0,75)S_{ut} = 0,433 S_{ut} = 0,45S_{ut}.$$

- Samónov discute o problema da tensão admissível e mostra que:

$$S_{sy} = \tau_{all} = 0.56S_{ut} \quad (10-16)$$

# 10.6 Materiais de mola

**Tabela 10-6**

Tensões torcionais admissíveis máximas para molas helicoidais de compressão em aplicações estáticas.

Fonte: Robert E. Joerres, "Springs", Capítulo 6 em Joseph E. Shigley, Charles R. Mischke e Thomas H. Brown, Jr. (eds.), *Standard Handbook of Machine Design*, 3. ed., Nova York, McGrawHill, 2004.

Material	Porcentagem máxima de resistência de tração	
	Antes da remoção de assentamento (inclui $K_W$ ou $K_B$ )	Após a remoção de assentamento (inclui $K_S$ )
Fio musical e aço carbono estirado a frio	45	60–70
Aço carbono endurecido e revenido e aço de baixa liga	50	65–75
Aços austeníticos inoxidáveis	35	55–65
Ligas não ferrosas	35	55–65

## 10.6 Materiais de mola

**Exemplo 10-1:** Uma mola helicoidal é feita de fio de música nº 16. O diâmetro externo da mola é de 11 mm. As extremidades são esquadradadas e existe um total de  $12 \frac{1}{2}$  voltas.

- a. Estime a resistência de escoamento torcional do fio;
- b. Estime a carga estática correspondente à resistência de escoamento;
- c. Estime a constante da mola;
- d. Estime a deflexão que seria causada pela carga na parte b;

## 10.6 Materiais de mola

- e. Estime o comprimento sólido da mola;
- f. Que comprimento a mola deveria ter para assegurar que, quando fosse comprimida a sólido e depois solta, não haveria mudança permanente no comprimento livre?
- g. Dado o comprimento encontrado na parte f, a flambagem é uma possibilidade?
- h. Qual o passo da espiral de corpo?

# 10.6 Materiais de mola

**Solução:**

a. Da tabela A-26:  $d = 0,94 \text{ mm}$ ;

Da tabela 10-4:  $A = 2211 \text{ MPa} \cdot \text{mm}$ ,  $m = 0,145$ .

Da equação 10-14:

$$S_{ut} = \frac{A}{d^m} = \frac{2211}{0,94^{0,145}} = 2231 \text{ MPa}$$

Da tabela 10-6:

$$S_{sy} = 0,45 S_{ut} = 0,45(2231) = 1004 \text{ MPa}$$

## 10.6 Materiais de mola

b. Diâmetro médio da espiral:

$$D = 11 - 0,94 = 10,06 \text{ mm}$$

$$\text{Índice de mola: } C = 10,06/0,94 = 10,7$$

Da equação 10-6:

$$K_B = \frac{4C + 2}{4C - 3} = \frac{4(10,7) + 2}{4(10,7) - 3} = 1,126$$

Rearranjando a eq. 10-3, substituindo  $K_s$  por  $K_B$  e  $\tau$  por  $S_{ys}$ , resolvendo para F:

$$F = \frac{\pi d^3 S_{sy}}{8K_B D} = \frac{\pi(0,94^3)1004}{8(1,126)10,06} = 31 \text{ N}$$

## 10.6 Materiais de mola

c. Da tabela 10-1:  $N_a = 12,5 - 2 = 10,5$  voltas.

Da tabela 10-5:  $G = 81700 \text{ MPa}$ .

Da Equação 10-9:

$$k = \frac{d^4 G}{8D^3 N_a} = \frac{0,94^4(81700)}{8(10,06^3)10,5} = 0,9 \text{ N/mm}$$

d.

$$y = \frac{F}{k} = \frac{31}{0,9} = 34,4 \text{ mm}$$

# 10.6 Materiais de mola

e. Da tabela 10-1:

$$L_s = (N_t + 1)d = (12,5 + 1)0,94 = 12,7 \text{ mm}$$

f.  $L_0 = y + L_s = 34,4 + 12,7 = 47,1 \text{ mm}$

g. Para evitar flambagem, da equação 10-13 e tabela 10-2:

$$L_0 < 2,63 \frac{D}{\alpha} = 2,63 \frac{10,06}{0,5} = 52,9 \text{ mm}$$

O comprimento livre é de 47,1mm =>  
flambagem improvável.

h.  $p = \frac{L_0 - 3d}{N_a} = \frac{47,1 - 3(0,94)}{10,5} = 4,4 \text{ mm}$

## 10.7 Projeto de mola helicoidal de compressão para serviço estático

- Índice de mola  $C$  geralmente varia de 4 a 12;
- Índices inferiores são mais difíceis de conformar;
- Índices maiores tendem a enroscar e requerem empacotamento individual.
- Voltas ativas  $N_a$  fica em torno de 3 a 15;

## 10.7 Projeto de mola helicoidal de compressão para serviço estático

- Para manter a linearidade da mola quando a mola esta quase se fechando, deve-se evitar o encosto gradual das espiras.
- A curva força deflexão é aproximadamente linear, exceto nas extremidades;
- Ponto de operação da mola: 75% centrais da curva entre nenhuma carga ( $F = 0$ ) e o fechamento ( $F = F_s$ ).

## 10.7 Projeto de mola helicoidal de compressão para serviço estático

- A força operacional máxima deve ser limitada a  $F_{máx} < (7/8) F_s$ ;
- Definindo o percurso fracionário até o fechamento como  $\xi$ , em que:

$$F_s = (1 + \xi) F_{\max} \quad (10-17)$$

- E:  $F_s = (1 + \xi) F_{\max} = (1 + \xi) \left(\frac{7}{8}\right) F_s$

## 10.7 Projeto de mola helicoidal de compressão para serviço estático

- Além das relações e propriedades dos materiais, existem mais algumas recomendações para seguir:

$$4 \leq C \leq 12 \quad (10-18)$$

$$3 \leq N_a \leq 15 \quad (10-19)$$

$$\xi \geq 0.15 \quad (10-20)$$

$$n_s \geq 1.2 \quad (10-21)$$

- Onde  $n_s$  é o fator de segurança no fechamento (altura sólida).

## 10.7 Projeto de mola helicoidal de compressão para serviço estático

- Dimensionamento de mola para alto volume de produção: o índice de mérito (fom) é o custo do fio, proporcional ao custo relativo do material, peso específico e volume:

$$fom = -(\text{relative material cost}) \frac{\gamma \pi^2 d^2 N_t D}{4} \quad (10-22)$$

- Se a comparação for feita entre aços, o peso específico  $\gamma$  pode ser omitido.

## 10.7 Projeto de mola helicoidal de compressão para serviço estático

- O projeto de mola abrange muitas decisões a serem tomadas, muitos passos de possíveis soluções, bem como soluções;
- Antigamente: cartas, nomogramas, e “regras de cálculo” foram usadas para simplificar o problema;
- Atualmente: o projetista tem auxilio de computador para criar muitas possíveis soluções de diversos modos.

# 10.7 Projeto de mola helicoidal de compressão para serviço estático

## Estratégia de projeto

- Tome as decisões a priori: fio de aço duro estirado (custo relativo do material = 1,0);
- Escolha o tamanho do fio  $d$ ;
- Gere uma coluna de parâmetros:  $d$ ,  $D$ ,  $C$ ,  $OD$  ou  $ID$ ,  $N_a$ ,  $L_s$ ,  $L_o$ ,  $(l_0)_{cr}$ ,  $n_s$  e  $fom$ ;
- Incrementando os tamanhos de fios disponíveis, varre-se a tabela de parâmetros e aplicam-se as recomendações de projeto;

## 10.7 Projeto de mola helicoidal de compressão para serviço estático

- Após os tamanhos de fios serem eliminados, escolhe-se o projeto com mais alto índice de mérito;
- Gera-se um vetor coluna de informação, conforme o fluxograma da figura 10-3. Esse fluxograma é suficiente para considerar as situações de mola enrolada ou com assentamento removido, operando sobre uma haste ou furo ou livre.

## 10.7 Projeto de mola helicoidal de compressão para serviço estático

- Em molas do tipo enrolada, a equação de controle deve ser resolvida para o índice de mola: da equação (10-3), com  $\tau = S_{ys}$ ,  $C = D/d$ ,  $K_B$  da equação 10-6, e a equação 10-17, temos:

$$\frac{S_{sy}}{n_s} = K_B \frac{8F_s D}{\pi d^3} = \frac{4C + 2}{4C - 3} \left[ \frac{8(1 + \xi) F_{max} C}{\pi d^2} \right] \quad (a)$$

- Seja:

$$\alpha = \frac{S_{sy}}{n_s} \quad (b)$$

$$\beta = \frac{8(1 + \xi) F_{max}}{\pi d^2} \quad (c)$$

## 10.7 Projeto de mola helicoidal de compressão para serviço estático

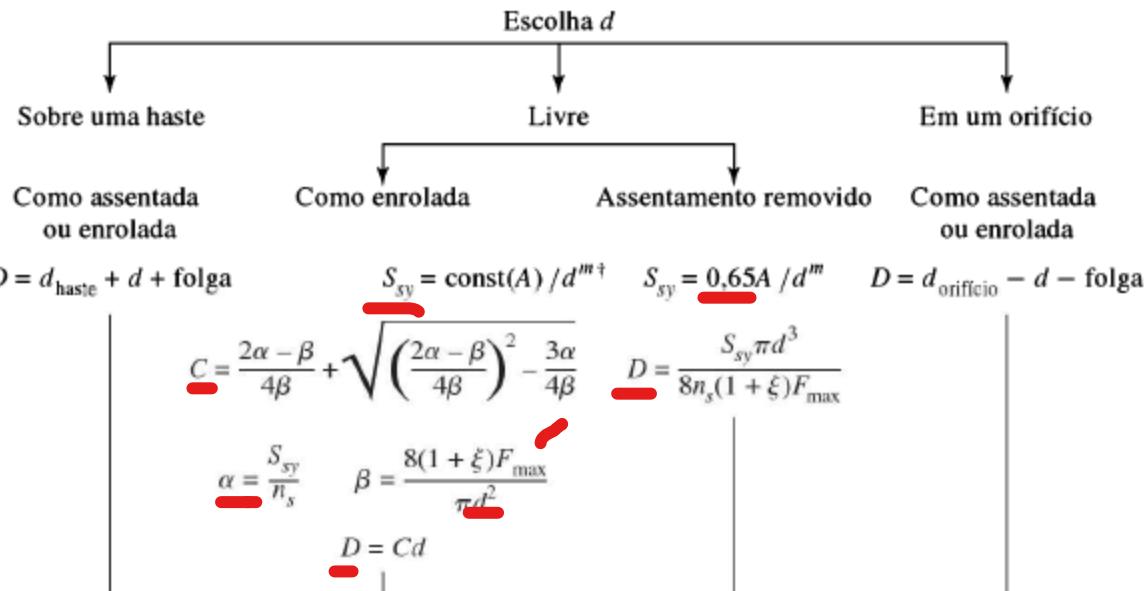
- Substituindo (b) e (c) em (a) e simplificando, obtemos uma equação quadrática em C. A maior das duas soluções gera o índice de mola:

$$C = \frac{2\alpha - \beta}{4\beta} + \sqrt{\left(\frac{2\alpha - \beta}{4\beta}\right)^2 - \frac{3\alpha}{4\beta}} \quad (10-23)$$

### Figura 10-3

Diagrama de fluxo de desenho de mola de compressão de espiral helicoidal para carregamento estático.

#### DESENHO ESTÁTICO DE MOLA



$$C = D / d$$

$$K_B = (4C + 2) / (4C - 3)$$

$$\tau_s = K_B 8(1 + \xi)F_{\max} D / (\pi d^3)$$

$$n_s = S_{sy} / \tau_s$$

$$\bullet \text{ OD} = D + d$$

$$\bullet \text{ ID} = D - d$$

$$\bullet N_a = Gd^4 y_{\max} / (8D^3 F_{\max})$$

$$\bullet N_f: \text{Tabela 10-1}$$

$$L_s: \text{Tabela 10-1}$$

$$L_O: \text{Tabela 10-1}$$

$$(L_O)_{cr} = 2,63D / \alpha$$

$$fom = -(custo rel.) \gamma \pi^2 d^2 N_f D / 4$$

# 10.7 Projeto de mola helicoidal de compressão para serviço estático

Imprima ou mostre:  $d$ ,  $D$ ,  $C$ , OD, ID,  $N_a$ ,  $N_t$ ,  $L_s$ ,  $L_O$ ,  $(L_O)_{cr}$ ,  $n_s$ , fom.

Construa uma tabela, conduza a avaliação de desenho por inspeção.

Elimine desenhos inexequíveis mostrando restrições ativas.

Escolha entre os desenhos satisfatórios usando a figura de mérito.

<sup>†</sup> A constante é encontrada por meio da Tabela 10–6.

- **Exemplo 10.2:** Uma mola de compressão helicoidal de fio musical necessita suportar uma carga de 89 N após ser comprimida de 50,8 mm. Por causa de considerações de montagem, a altura sólida não pode exceder 25,4 mm e o comprimento livre não pode ser mais que 101,6 mm. Projete a mola.

## 10.7 Projeto de mola helicoidal de compressão para serviço estático

**Solução:** As decisões a priori são:

- Fio musical A228; Da tabela 10-4,  $A = 2211 \text{ MPa} \cdot \text{mm}^m$ ;  $m = 0,145$ ; da tabela 10-5:  $E = 196,5 \text{ GPa}$ ;  $G = 81 \text{ GPa}$  (considerando  $d > 1,61 \text{ mm}$ ).
- Extremidades esquadradadas e esmerilhadas;
- Função  $F_{\max} = 89 \text{ N}$ ;  $y_{\max} = 50,8 \text{ mm}$ ;
- Segurança: use o fator de projeto de altura sólida de  $(n_s)_d = 1,2$ ;
- Linearidade robusta:  $\xi = 0,15$ ;

## 10.7 Projeto de mola helicoidal de compressão para serviço estático

- Use mola do tipo enrolada (mais barata):  $S_{sy} = 0,45 S_{ut}$  da tabla 10-6;
- Variável de decisão:  $d = 2,03 \text{ mm}$ , bitola de fio musical #30, Tabela A-26. Com base na figura 10-3 e na tabela 10-6,

$$S_{sy} = 0,45 \frac{2211}{2,03^{0,145}} = 897,9 \text{ MPa}$$

## 10.7 Projeto de mola helicoidal de compressão para serviço estático

Da figura 10-3 ou da equação (10-23):

$$\alpha = \frac{S_{sy}}{n_s} = \frac{897,9}{1,2} = 748,3 \text{ MPa}$$

$$\beta = \frac{8(1 + \xi) F_{\max}}{\pi d^2} = \frac{8(1 + 0,15)89}{\pi(2,03^2)} = 63,2 \text{ MPa}$$

$$C = \frac{2(748,3) - 63,2}{4(63,2)} + \sqrt{\left[ \frac{2(748,3) - 63,2}{4(63,2)} \right]^2 - \frac{3(748,3)}{4(63,2)}} = 10,5$$

## 10.7 Projeto de mola helicoidal de compressão para serviço estático

Ainda da figura 10-3:

$$D = Cd = 10,5(2,03) = 21,3 \text{ mm}$$

$$K_B = \frac{4(10,5) + 2}{4(10,5) - 3} = 1,128$$

$$\tau_s = 1,128 \frac{8(1 + 0,15)89(21,3)}{\pi(2,03)^3} = 748 \text{ MPa}$$

$$n_s = \frac{897,9}{748} = 1,2$$

## 10.7 Projeto de mola helicoidal de compressão para serviço estático

$$\text{OD} = 21,3 + 2,03 = 23,3 \text{ mm}$$

$$N_a = \frac{2,03^4(81\,000)50,8}{8(21,3)^389} = 10,16 \text{ voltas}$$

$$N_t = 10,16 + 2 = 12,16 \text{ total de voltas}$$

$$L_s = 2,03(12,16) = 24,3 \text{ mm}$$

$$L_0 = 24,3 + (1 + 0,15)50,8 = 82,7 \text{ mm}$$

$$(L)_{\text{cr}} = 2,63(21,3)0,5 = 112 \text{ mm}$$

$$\text{fom} = 2,6 \frac{\pi^2(2,03)^212,16(21,3)}{4(25,4)^3} = 0,417$$

# 10.7 Projeto de mola helicoidal de compressão para serviço estático

- Repetindo para outros diâmetros:

<b><i>d:</i></b>	<b>1,6</b>	<b>1,7</b>	<b>1,8</b>	<b>1,9</b>	<b>2,03</b>	<b>2,1</b>	<b>2,3</b>	<b>2,4</b>
<i>D</i>	9,9	12,2	14,6	17,5	21,3	25,2	31,1	36,0
<i>C</i>	6,2	7,2	8,1	9,2	10,5	12,0	13,5	15,0
<i>OD</i>	11,5	13,8	16,4	19,3	23,3	27,8	32,8	38,4
<i>N<sub>a</sub></i>	39,1	26,9	19,3	14,2	10,2	7,3	5,4	4,1
<i>L<sub>s</sub></i>	65,2	48,8	38,1	30,7	24,3	19,9	16,8	14,6
<i>L<sub>0</sub></i>	123,8	107,3	96,6	89,1	82,7	78,3	75,2	73
<i>(L<sub>0</sub>)<sub>cr</sub></i>	52,1	63,7	76,9	91,5	112	160,5	161,0	189,9
<i>n<sub>s</sub></i>	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2
fom	-0,41	-0,40	-0,40	-0,404	-0,42	-0,44	-0,47	-0,51

# 10.7 Projeto de mola helicoidal de compressão para serviço estático

- Versão no sistema inglês

<b><math>d:</math></b>	<b>0.063</b>	<b>0.067</b>	<b>0.071</b>	<b>0.075</b>	<b>0.080</b>	<b>0.085</b>	<b>0.090</b>	<b>0.095</b>
$D$	0.391	0.479	0.578	0.688	0.843	1.017	1.211	1.427
$C$	6.205	7.153	8.143	9.178	10.53	11.96	13.46	15.02
OD	0.454	0.546	0.649	0.763	0.923	1.102	1.301	1.522
$N_a$	39.1	26.9	19.3	14.2	10.1	7.3	5.4	4.1
$L_s$	2.587	1.936	1.513	1.219	0.964	0.790	0.668	0.581
$L_0$	4.887	4.236	3.813	3.519	3.264	3.090	2.968	2.881
$(L_0)_{cr}$	2.06	2.52	3.04	3.62	4.43	5.35	6.37	7.51
$n_s$	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2
fom	-0.409	-0.399	-0.398	-0.404	-0.417	-0.438	-0.467	-0.505

## 10.7 Projeto de mola helicoidal de compressão para serviço estático

- Após feito o projeto, verifica-se se existe uma mola padronizada com essas especificações;
- Pode ser que não haja uma mola exatamente como projetada, mas algumas que apresentam especificações próximas. Cabe ao projetista decidir se usa essa ou manda fazer uma específica.

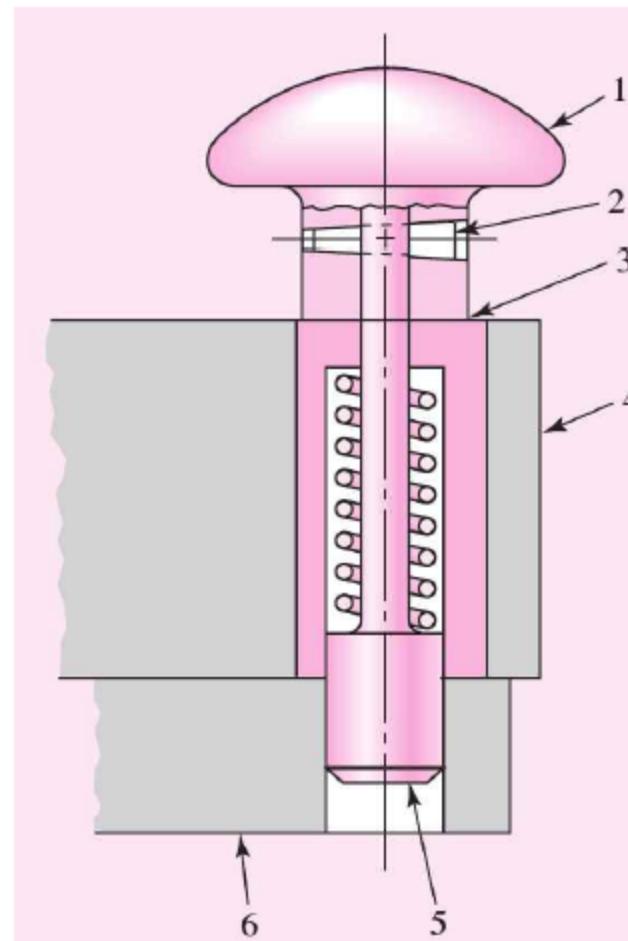
## 10.7 Projeto de mola helicoidal de compressão para serviço estático

**Exemplo 10-3:** A indexação é usada em operações de máquina quando uma peça circular sendo manufaturada deve ser dividida em certo número de segmentos. A figura 10-4 mostra a porção de um acessório usado para posicionar sucessivamente uma peça para a operação. Quando a maçaneta é momentaneamente puxada para cima, a parte 6, que segura a peça, gira em relação ao eixo vertical para a próxima posição e trava no lugar soltando o pino de índice. Neste exemplo, desejamos projetar a mola para exercer uma força de cerca de 13 N para caber no espaço definido na legenda da figura.

# 10.7 Projeto de mola helicoidal de compressão para serviço estático

**Figura 10-4**

Parte 1, maçaneta de puxar; parte 2, pino cônico de retenção; parte 3, bucha endurecida com ajuste a pressão; parte 4, corpo do acessório; parte 5, pino de índice; parte 6, suporte da peça. O espaço da mola tem 16 mm de diâmetro externo (OD), 6 mm de diâmetro interno (ID), e 35 mm de comprimento, com o pino abaixado como está mostrado. A maçaneta de puxar deve ser levantada 19 mm para permitir a indexação.



## 10.7 Projeto de mola helicoidal de compressão para serviço estático

Solução: Visto que o acessório não é um item de alta produção, uma mola de estoque será selecionada. Estas estão disponíveis em fio de música. Em um catálogo existem 76 molas de estoque disponíveis, com um diâmetro externo de 12 mm, que foram projetadas para trabalhar em um furo de 12,7 mm. Elas são confeccionadas em sete diferentes tamanhos de fio, variando de 1 mm a 1,6 mm, e em comprimentos livres de 12,7 a 64 mm, dependendo do tamanho do fio.

## 10.7 Projeto de mola helicoidal de compressão para serviço estático

Visto que a maçaneta de puxar deve ser levantada 19 mm para indexação e o espaço para a mola é de 35 mm de comprimento quando o pino está baixado, o comprimento sólido não pode ser mais de 16 mm.

Vamos começar selecionando uma mola com um diâmetro externo de 12 mm, um tamanho de fio de 1,3 mm, um comprimento livre de 44 mm, 11  $\frac{1}{2}$  total de voltas e extremidades planas. Então  $m = 0,145$  e  $A = 2211 \text{ MPa} \cdot \text{mm}^m$  para fio musical.

## 10.7 Projeto de mola helicoidal de compressão para serviço estático

Assim:

$$S_{sy} = 0,45 \frac{A}{d^m} = 0,45 \frac{2211}{1,3^{0,145}} = 958 \text{ MPa}$$

Com extremidades planas, da tabela 10-1:

$$N_a = N_t = 11,5 \text{ voltas}$$

O diâmetro médio da espiral é  $D = OD - d = 12 - 1,3 = 10,7 \text{ mm}$ . Da equação (10-9) com  $G = 81 \text{ GPa}$  (tabela 10-5):

$$k = \frac{d^4 G}{8D^3 N_a} = \frac{1,3^4 (81) 10^3}{8(10,7)^3 11,5} = 2,053 \text{ N/mm}$$

## 10.7 Projeto de mola helicoidal de compressão para serviço estático

Da tabela 10-1:

$$L_s = d(N_t + 1) = 1,3(11,5 + 1) = 16,25 \text{ mm}$$

A força de mola quando o pino é abaixado é:

$$F_{\min} = ky_{\min} = 2,053(44 - 35) = 18,5 \text{ N}$$

Quando a mola é comprimida a sólido, a força de mola é:

$$F_s = ky_s = k(L_0 - L_s) = 2,053(44 - 16,25) = 57 \text{ N}$$

## 10.7 Projeto de mola helicoidal de compressão para serviço estático

Visto que o índice de mola  $C = D/d = 10,7/2,3 = 8,23$ :

$$K_B = \frac{4C + 2}{4C - 3} = \frac{4(8,23) + 2}{4(8,23) - 3} = 1,167 \text{ N}$$

E para a mola do tipo enrolada, a tensão de cisalhamento quando comprimida a sólido é:

$$\tau_s = K_B \frac{8F_s D}{\pi d^3} = 1,167 \frac{8(57)10,7}{\pi(1,3)^3} = 825 \text{ MPa}$$

O fator de segurança quando a mola é comprimida a sólido é:

$$n_s = \frac{S_{sy}}{\tau_s} = \frac{958}{825} = 1,16$$

## 10.7 Projeto de mola helicoidal de compressão para serviço estático

Visto que  $n_s$  é marginalmente adequado e  $L_s$  é maior que 16 mm, devemos investigar outras molas com um tamanho de fio menor. Após várias investigações, uma outra mola apresenta possibilidades. Ela é de fio de música do tipo enrolada, com  $d = 1,15$  mm, bitola 20 (tabela A-26), OD = 12 mm,  $N_t = 11,5$  voltas,  $L_0 = 44$  mm.  $S_{sy} = 958$  MPa e:

## 10.7 Projeto de mola helicoidal de compressão para serviço estático

$$D = \text{OD} - d = 12 - 1,15 = 10,85 \text{ mm}$$

$$N_a = N_t = 11,5 \text{ voltas}$$

$$k = \frac{1,15^4(81)10^3}{8(10,85)^311,5} = 1,206 \text{ N/mm}$$

$$L_s = d(N_t + 1) = 1,15(11,5 + 1) = 14 \text{ mm}$$

$$F_{\min} = ky_{\min} = 1,206(44 - 35) = 10,9 \text{ N}$$

$$F_s = 1,206(44 - 14) = 36,2 \text{ N}$$

$$C = \frac{D}{d} = \frac{10,58}{1,15} = 9,2$$

## 10.7 Projeto de mola helicoidal de compressão para serviço estático

Agora,  $n_s > 1,2$ , a flambagem não é possível pois as espirais estão resguardadas pela superfície do furo e o comprimento sólido é menor que 16 mm. Assim, esta mola é selecionada.

Usando a mola de estoque, tiramos vantagem da economia de escala.

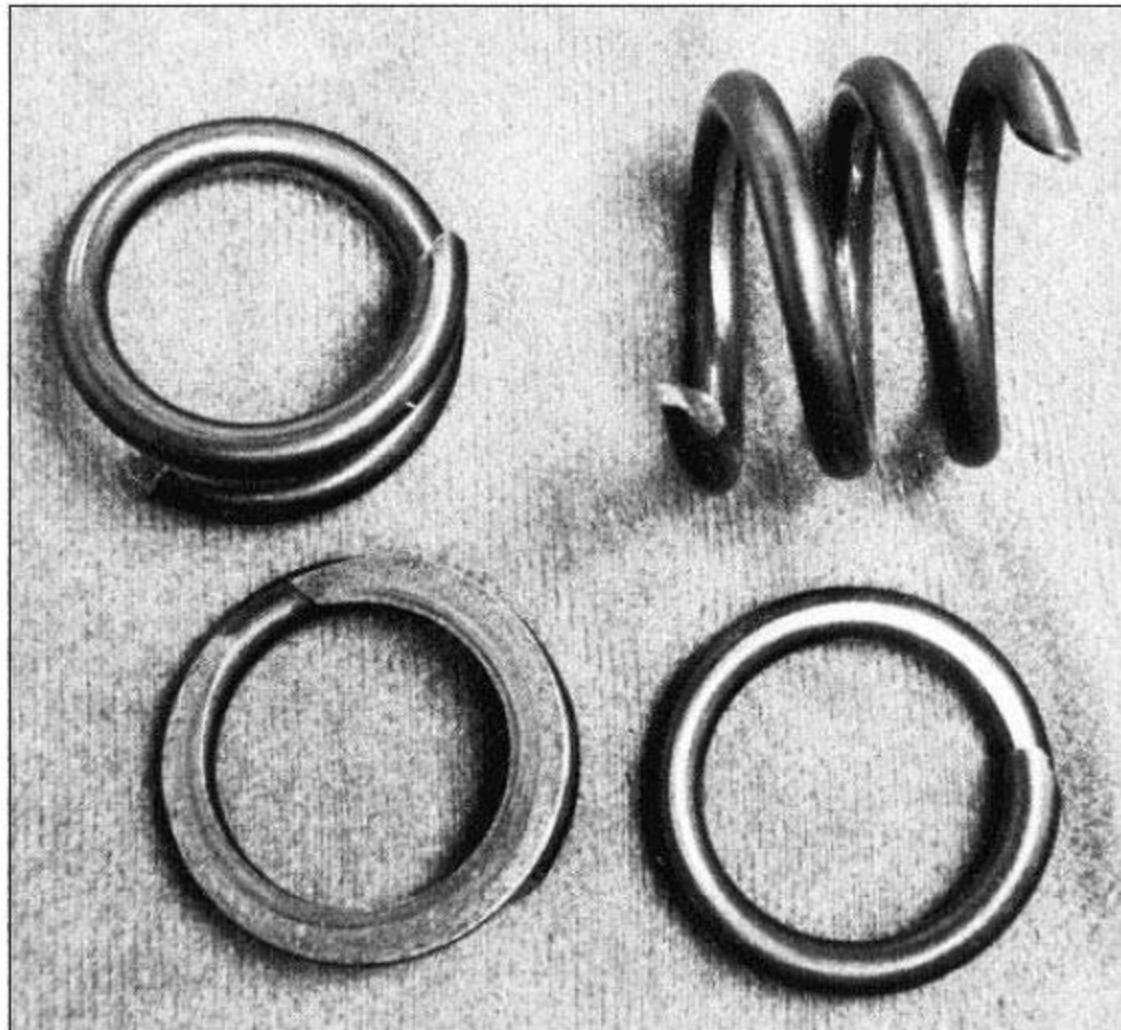
## 10.8 Frequência crítica de molas helicoidais

- Se uma extremidade de uma mola de compressão for fixa a uma superfície plana e a outra extremidade sofrer uma perturbação, uma onda de compressão é criada e viaja de uma extremidade à outra, como ocorre com uma onda em uma piscina.
- Quando se projetam molas helicoidais usadas em aplicações que requerem movimento alternante da mola, é necessário se preocupar com a frequência natural da mola.

# 10.8 Frequência crítica de molas helicoidais

**Figure 10-5**

Valve-spring failure in an overrevved engine. Fracture is along the  $45^\circ$  line of maximum principal stress associated with pure torsional loading.



## 10.8 Frequência crítica de molas helicoidais

- Se a frequência de operação da mola for próxima à sua frequência natural, pode ocorrer ressonância e a ruptura da mola, já que seu amortecimento é muito baixo.
- A equação para vibração translacional de uma mola é a de onda:

## 10.8 Frequência crítica de molas helicoidais

- A equação para vibração translacional de uma mola é a de onda:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{W}{kgl^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (10-24)$$

- Onde:

- $k$  = razão de mola;
- $g$  = aceleração da gravidade;
- $l$  = comprimento de mola;
- $W$  = peso de mola;
- $x$  = coordenada ao longo do comprimento de mola;
- $u$  = movimento de qualquer partícula à distância  $x$ .

## 10.8 Frequência crítica de molas helicoidais

- A solução para a equação depende das propriedades físicas e das condições de extremidade da mola.
- As frequências naturais da mola, em *rad/s*, são:

$$\omega = m\pi \sqrt{\frac{kg}{W}} \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

- A frequência fundamental, em Hz, é:

$$f = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{kg}{W}} \quad (10-25)$$

- Supondo que as extremidades estejam sempre em contato.

## 10.8 Frequência crítica de molas helicoidais

- Se a mola tiver uma extremidade livre e outra sobre uma placa plana, então:

$$f = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{kg}{W}} \quad (10-26)$$

- O peso da parte ativa da mola helicoidal é:

$$W = AL\gamma = \frac{\pi d^2}{4} (\pi DN_a)(\gamma) = \frac{\pi^2 d^2 DN_a \gamma}{4} \quad (10-27)$$

- A frequência crítica fundamental deve ser de 15 a 20 vezes a frequência de força ou movimento da mola. Caso isso não ocorra, deve-se refazer o projeto, aumentando  $k$  ou reduzindo  $W$ .

## 10.9 Carregamento de fadiga de molas helicoidais de compressão

- Molas estão quase sempre sujeitas a carregamento de fadiga;
- Número de ciclos: da ordem de milhares (mola de cadeado) até milhões (válvula de motor de automóvel). Nesse último caso, projeta-se para vida infinita;

## 10.9 Carregamento de fadiga de molas helicoidais de compressão

- Para melhorar a resistência à fadiga:  
jateamento de granalhas:
  - Aumenta a resistência à fadiga torcional em 20% ou mais;
  - Tamanho da granalha: 0,4 mm;
  - Melhores dados sobre fadiga de mola: Zimmerli

## 10.9 Carregamento de fadiga de molas helicoidais de compressão

- Zimmerli descobriu que tamanho, material e resistência à tração não têm efeito sobre limites de resistência à fadiga (em vida infinita) em aços de mola com menos de 10mm.
- Limites de resistência à fadiga tendem a se nivelar a altas resistências de tração.

## 10.9 Carregamento de fadiga de molas helicoidais de compressão

- Molas sem jateamento de granalha: testadas de 138 MPa a 620 MPa;
- Molas com jateamento : de 138 MPa a 930 MPa;
- Correspondentes componentes de resistências à fadiga para vida infinita:

➤ Sem jateamento:

$$S_{sa} = 35 \text{ kpsi (241 MPa)} \quad S_{sm} = 55 \text{ kpsi (379 MPa)} \quad (10-28)$$

➤ Com jateamento:

$$S_{sa} = 57.5 \text{ kpsi (398 MPa)} \quad S_{sm} = 77.5 \text{ kpsi (534 MPa)} \quad (10-29)$$

## 10.9 Carregamento de fadiga de molas helicoidais de compressão

- Para corpos de prova cilíndricos, polidos, sem entalhe, sujeitos à tensão de cisalhamento torcional, a tensão alternante máxima sem causar falha é constante e independe da tensão média do ciclo, desde que a tensão máxima não atinja o escoamento;
- Geralmente molas são livres de entalhes e suas superfícies costumam ser lisas.
- Esse critério é conhecido como *critério de falha de Sines* em fadiga torcional.

## 10.9 Carregamento de fadiga de molas helicoidais de compressão

- Para construir o critério de falha no diagrama de falha torcional, é necessário o módulo torcional de ruptura  $S_{su}$ :

$$S_{su} = 0.67S_{ut} \quad (10-30)$$

- Em molas, o carregamento de fadiga na forma de tensões reversas não ocorre. Na pior das hipóteses, não existe pré-carga, ou seja:  $\tau_{\min} = 0$ .

## 10.9 Carregamento de fadiga de molas helicoidais de compressão

- Definindo:

$$F_a = \frac{F_{\max} - F_{\min}}{2} \quad (10-31a)$$

$$F_m = \frac{F_{\max} + F_{\min}}{2} \quad (10-31b)$$

- A amplitude da tensão de cisalhamento é:

$$\tau_a = K_B \frac{8F_a D}{\pi d^3} \quad (10-32)$$

Onde  $K_B$  é o fator de Bergsträsser (eq 10-6), pode ser substituído por  $K_w$  (seção 10-2).

## 10.9 Carregamento de fadiga de molas helicoidais de compressão

- A tensão de cisalhamento média é dada por:

$$\tau_m = K_B \frac{8F_m D}{\pi d^3} \quad (10-33)$$

## 10.9 Carregamento de fadiga de molas helicoidais de compressão

**Exemplo 10-4:** Uma mola helicoidal de compressão do tipo enrolada, feita de fio de música, tem um tamanho de fio de 2,3 mm, um diâmetro externo de espiral de 14 mm, um comprimento livre de 98 mm, 21 espirais ativas e ambas extremidades esquadradadas e esmerilhadas. A mola não é jateada com granalha. Ela deve ser montada com uma pré-carga de 22 N e operará com uma carga máxima de 156 N durante uso.

## 10.9 Carregamento de fadiga de molas helicoidais de compressão

- a. Calcule o fator de segurança que resguarda contra falha por fadiga usando um critério de falha por fadiga torcional de Gerber com dados de Zimmerli;
- b. Repita a parte (a) usando critério de fadiga torcional de Sines ( a componente de tensão estável não tem qualquer efeito), com dados de Zimmerli;
- c. Repita usando um critério de falha torcional de Goodman com dados Zimmerli;
- d. Estime a frequência crítica da mola.

## 10.9 Carregamento de fadiga de molas helicoidais de compressão

**Solução:** O diâmetro médio de espiral é  $D = 14 - 2,3 = 11,7$  mm. O índice de mola é  $C = D/d = 11,7/2,3 = 5,09$ . Então:

$$K_B = \frac{4C + 2}{4C - 3} = \frac{4(5,09) + 2}{4(5,09) - 3} = 1,288$$

Por meio das equações (10-31):

$$F_a = \frac{156 - 22}{2} = 67 \text{ N} \quad F_m = \frac{156 + 22}{2} = 89 \text{ N}$$

## 10.9 Carregamento de fadiga de molas helicoidais de compressão

Componente alternante da tensão de cisalhamento (equação 10-32):

$$\tau_a = K_B \frac{8F_a D}{\pi d^3} = (1,288) \frac{8(67)11,7}{\pi(2,3)^3} = 211,3 \text{ MPa}$$

Componente média da tensão de cisalhamento (equação 10-33):

$$\tau_m = K_B \frac{8F_m D}{\pi d^3} = (1,288) \frac{8(89)11,7}{\pi(2,3)^3} = 280,7 \text{ MPa}$$

## 10.9 Carregamento de fadiga de molas helicoidais de compressão

Da tabela 10-4, encontramos:  $A = 2211 \text{ MPa} \cdot \text{mm}^m$  e  $m = 0,145$ . A resistência máxima de tração é estimada por meio da equação (10-44):

$$S_{ut} = \frac{A}{d^m} = \frac{2211}{2,3^{0,145}} = 1\,959 \text{ MPa}$$

A resistência máxima de cisalhamento é estimada como:

$$S_{su} = 0,67S_{ut} = 0,67(1\,959) = 1\,312 \text{ MPa}$$

## 10.9 Carregamento de fadiga de molas helicoidais de compressão

A declividade da carga é:

$$r = \tau_a / \tau_m = 211,3 / 280,7 = 0,75$$

a. A ordenada de intersecção de Gerber para os dados de Zimmerli, equação (10-28) é:

$$S_{se} = \frac{S_{sa}}{1 - (S_{sm}/S_{su})^2} = \frac{241}{1 - (379/1312)^2} = 263 \text{ MPa}$$

## 10.9 Carregamento de fadiga de molas helicoidais de compressão

A componente de amplitude de resistência,  $S_{sa}$ , da tabela 6-7, é:

$$S_{sa} = \frac{r^2 S_{su}^2}{2 S_{se}} \left[ -1 + \sqrt{1 + \left( \frac{2 S_{se}}{r S_{su}} \right)^2} \right]$$
$$= \frac{0,75^2 1312^2}{2(263)} \left\{ -1 + \sqrt{1 + \left[ \frac{2(263)}{0,75(1312)} \right]^2} \right\} = 246,5 \text{ MPa}$$

E o fator de segurança de fadiga  $n_f$  é:

$$n_f = \frac{S_{sa}}{\tau_a} = \frac{246,5}{211,3} = 1,17$$

## 10.9 Carregamento de fadiga de molas helicoidais de compressão

b. O critério da falha de Sines ignora  $S_{sm}$ . Assim, para os dados de Zimmerli, com  $S_{sa} = 241 \text{ MPa}$ :

$$n_f = \frac{S_{sa}}{\tau_a} = \frac{241}{211,3} = 1,14$$

c. A ordenada da intersecção  $S_{se}$  para o critério de falha de Goodman com os dados de Zimmerli é:

$$S_{se} = \frac{S_{sa}}{1 - (S_{sm}/S_{su})} = \frac{241}{1 - (379/1312)} = 338,9 \text{ MPa}$$

## 10.9 Carregamento de fadiga de molas helicoidais de compressão

A componente de amplitude da resistência  $S_{sa}$  para o critério de Goodman, com base na Tabela 6-6 é:

$$S_{sa} = \frac{r S_{se} S_{su}}{r S_{su} + S_{se}} = \frac{0,75(338,9)1\,312}{0,75(1\,312) + 338,9} = 252 \text{ MPa}$$

O fator de segurança de falha é dado por:

$$n_f = \frac{S_{sa}}{\tau_a} = \frac{252}{211,3} = 1,19$$

## 10.9 Carregamento de fadiga de molas helicoidais de compressão

d. Usando a equação (10-9) e a tabela 10-5, estimamos a razão de mola como:

$$k = \frac{d^4 G}{8D^3 N_a} = \frac{2,3^4 (81\,000)}{8(11,7)^3 21} = 8,4 \text{ N/mm}$$

Por meio da equação (10-27), calculamos o peso da mola:

$$W = \frac{\pi^2 (2,3^2) 11,7 (21) 82 \times 10^{-6}}{4} = 0,26 \text{ N}$$

## 10.9 Carregamento de fadiga de molas helicoidais de compressão

Por meio da equação (10-25), a frequência de onda fundamental é:

$$f_n = \frac{1}{2} \left[ \frac{8400(9,81)}{0,26} \right]^{1/2} = 281 \text{ Hz}$$

Se a frequência de operação ou excitação for maior que  $281/20 = 14,1 \text{ Hz}$ , a mola talvez tenha de ser redesenhada.

## 10.9 Carregamento de fadiga de molas helicoidais de compressão

- No exemplo 10-4 foram usadas três abordagens para estimar o fator de segurança. Os resultados foram:
  - Sines: 1,18;
  - Gerber: 1,21;
  - Goodman: 1,23.
- Como é uma estimativa, só é possível definir qual seria o critério mais correto (estatisticamente) através de ensaios.

## 10.10 Projeto de mola helicoidal de compressão para carregamento de fadiga

- Para comparar uma mola estática com uma mola dinâmica, projetaremos a mola do exemplo 10-2 para serviço dinâmico.
- **Exemplo 10-5:** Mola de compressão helicoidal de fio musical com vida infinita para resistir a uma carga dinâmica que varia de 20 a 80N com uma frequência de 5 Hz. Deflexão varia de 12 a 50 mm. Altura sólida máx = 25 mm, compr livre máx = 100 mm. Tamanhos de fios em estoque: 1,7; 1,8; 2,0, 2,15; 2,3; 2,4; 2,6 e 2,8 mm.

## 10.10 Projeto de mola helicoidal de compressão para carregamento de fadiga

**Solução:** Decisões a priori:

- Fio de música:  $A = 2211 \text{ MPa} \cdot \text{mm}^m$ ,  $m = 0,145$ ,  $G = 81 \text{ Gpa}$ , custo relativo = 2,6;
- Sem jateamento superficial;
- Extremidades esquadradadas e esmerilhadas;
- Linearidade robusta  $\xi = 0,15$ ;
- Fixação: condição enrolada;
- $n_f = 1,5$  (Critério de Sines – Zimmerli)
- $F_{\min} = 20 \text{ N}$ ;  $F_{\max} = 80 \text{ N}$ ;  $y_{\min} = 12 \text{ mm}$ ;  $y_{\max} = 50 \text{ mm}$ , mola sem haste ou furo.

## 10.10 Projeto de mola helicoidal de compressão para carregamento de fadiga

- Fixando  $d = 2,8\text{mm}$ :

$$F_a = \frac{80 - 20}{2} = 30 \text{ N} \quad F_m = \frac{80 + 20}{2} = 50 \text{ N}$$

$$k = \frac{F_{\max}}{y_{\max}} = \frac{80}{50} = 1,6 \text{ N/mm}$$

$$S_{ut} = \frac{2211}{2,8^{0,145}} = 1904 \text{ MPa} \quad \text{Eq 10.14}$$

$$S_{su} = 0,67(1904) = 1276 \text{ MPa} \quad \text{Eq 10.30}$$

$$S_{sy} = 0,45(1904) = 857 \text{ MPa} \quad \text{Tab 10.6}$$

## 10.10 Projeto de mola helicoidal de compressão para carregamento de fadiga

- Eq 10.28: (critério de Sines)  $S_{se} = S_{sa} = 241 \text{ MPa}$
- Eq 10.23, onde  $S_{se}$  no lugar de  $S_{sy}$ ,  $n_f$  no lugar de  $n_s$  e  $F_a$  no lugar de  $(1 + \xi)F_{\max}$ :

$$\alpha = \frac{S_{se}}{n_f} = \frac{241}{1,5} = 161 \text{ MPa}$$

$$\beta = \frac{8F_a}{\pi d^2} = \frac{8(30)}{\pi(2,8^2)} = 9,7 \text{ MPa}$$

$$C = \frac{2(161) - 9,7}{4(9,7)} + \sqrt{\left[ \frac{2(161) - 9,7}{4(9,7)} \right]^2 - \frac{3(161)}{4(9,7)}} = 15,3$$

## 10.10 Projeto de mola helicoidal de compressão para carregamento de fadiga

$$C = \frac{2(161) - 9,7}{4(9,7)} + \sqrt{\left[ \frac{2(161) - 9,7}{4(9,7)} \right]^2 - \frac{3(161)}{4(9,7)}} = 15,3$$

$$D = Cd = 15,3(2,8) = 42,8 \text{ mm}$$

$$F_s = (1 + \xi)F_{\max} = (1 + 0,15)80 = 92 \text{ N}$$

$$N_a = \frac{d^4 G}{8D^3 k} = \frac{2,8^4 (81\,000)}{8(42,8)^3 1,6} = 4,96 \text{ voltas}$$

$$N_t = N_a + 2 = 4,96 + 2 = 6,96 \text{ voltas}$$

$$L_s = dN_t = 2,8 (6,96) = 19,5 \text{ mm}$$

$$L_0 = L_s + \frac{F_s}{k} = 19,5 + 92/1,6 = 77 \text{ mm}$$

## 10.10 Projeto de mola helicoidal de compressão para carregamento de fadiga

$$ID = 42,8 - 2,8 = 40 \text{ mm}$$

$$OD = 42,8 + 2,8 = 45,6 \text{ mm}$$

$$y_s = L_0 - L_s = 77 - 19,5 = 57,5 \text{ mm}$$

$$(L_0)_{\text{cr}} < \frac{2,63D}{\alpha} = 2,63 \frac{(42,8)}{0,5} = 225 \text{ mm}$$

$$K_B = \frac{4(15,3) + 2}{4(15,3) - 3} = 1,09$$

$$W = \frac{\pi^2 d^2 D N_a \gamma}{4} = \frac{\pi^2 2,8^2 (42,8) 4,96 (82 \times 10^{-6})}{4} = 0,34 \text{ N}$$

## 10.10 Projeto de mola helicoidal de compressão para carregamento de fadiga

$$f_n = 0,5\sqrt{\frac{9,81k}{W}} = 0,5\sqrt{\frac{9,81(1\,600)}{0,34}} = 107 \text{ Hz}$$

$$\tau_a = K_B \frac{8F_a D}{\pi d^3} = 1,09 \frac{8(30)42,8}{\pi 2,8^3} = 162 \text{ MPa}$$

$$\tau_m = \tau_a \frac{F_m}{F_a} = 162(50)/30 = 270 \text{ MPa}$$

$$\tau_s = \tau_a \frac{F_s}{F_a} = 162(92)/30 = 497 \text{ MPa}$$

## 10.10 Projeto de mola helicoidal de compressão para carregamento de fadiga

$$n_f = \frac{S_{sa}}{\tau_a} = 241/162 = 1,5$$

$$n_s = \frac{S_{sy}}{\tau_s} = 857/497 = 1,7$$

$$\text{fom} = - (\text{custo relativo do material}) \pi^2 d^2 N_t D / 4$$

$$= - 2,6 \pi^2 (2,8)^2 6,96 (42,8) / [4(25)^3] = - 1,01$$

## 10.10 Projeto de mola helicoidal de compressão para carregamento de fadiga

- As condições são satisfeitas exceto para  $4 \leq C \leq 12$ .
- Repetindo o processo para outros tamanhos de fios, obtém-se o seguinte resultado:

# 10.10 Projeto de mola helicoidal de compressão para carregamento de fadiga

<b><i>d:</i></b>	<b>1,7</b>	<b>1,8</b>	<b>2,0</b>	<b>2,15</b>	<b>2,3</b>	<b>2,4</b>	<b>2,6</b>	<b>2,8</b>
<i>D</i>	9,5	10,6	15,4	18,7	22,5	26,4	34,8	42,8
ID	6,3	7,2	11,9	15,0	18,6	22,6	32,1	40
OD	9,9	10,9	16,1	19,4	23,2	27,5	37,4	45,6
C	5,6	5,9	7,7	8,7	9,8	11,0	<b>13,4</b>	<b>15,3</b>
<i>N<sub>a</sub></i>	<b>105,2</b>	<b>84,7</b>	<b>37,0</b>	<b>25,21</b>	<b>17,61</b>	<b>12,73</b>	7,13	4,96
<i>L<sub>s</sub></i>	<b>194,3</b>	<b>161,5</b>	<b>81,5</b>	<b>59,9</b>	<b>45,8</b>	<b>36,1</b>	<b>24,4</b>	19,5
<i>L<sub>0</sub></i>	<b>270,3</b>	<b>234,1</b>	<b>145,6</b>	<b>121,7</b>	<b>106,0</b>	95,3	82,3	77
( <i>L<sub>0</sub></i> ) <sub>cr</sub>	<b>42,6</b>	<b>47,6</b>	<b>80,8</b>	<b>90,7</b>	110,1	131,8	182,8	225
<i>n<sub>f</sub></i>	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5
<i>n<sub>s</sub></i>	1,82	1,81	1,78	1,77	1,75	1,74	1,71	1,7
<i>f<sub>n</sub></i>	<b>86,7</b>	<b>88,9</b>	<b>96,0</b>	<b>98,8</b>	101,0	102,8	105,6	107
fom	-1,17	-1,12	-0,98	-0,95	-0,93	-0,93	-0,96	-1,01

## 10.10 Projeto de mola helicoidal de compressão para carregamento de fadiga

- Restrições específicas para o problema:

$$L_s \leq 25 \text{ mm}$$

$$L_0 \leq 100 \text{ mm}$$

$$f_n \geq 5(20) = 100 \text{ Hz}$$

- Restrições gerais:

$$3 \leq N_a \leq 15$$

$$4 \leq C \leq 12$$

$$(L_0)_{\text{cr}} > L_0$$

## 10.10 Projeto de mola helicoidal de compressão para carregamento de fadiga

- Nenhum dos diâmetros satisfaz todos os critérios;
- $d = 2,6\text{mm}$  é o mais próximo, exceto por  $C = 13,4$ . Esse não é um desvio sério e pode ser tolerado;
- Restrição apertada de  $L_s$  necessita ser tratada. Se puder ser aceito  $L_s = 24,3 \text{ mm}$ , é uma solução. Do contrário, usar  $d = 2,8\text{mm}$  e  $C = 15,3$  e empacotar as molas individualmente.

## 10.11 Molas de tração

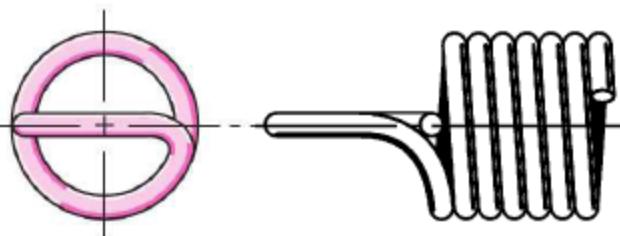
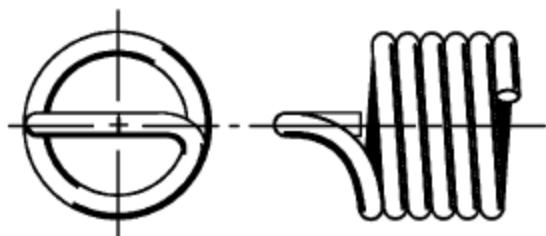
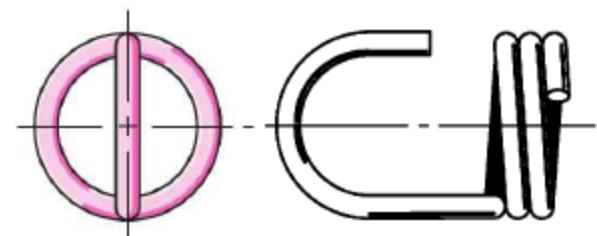
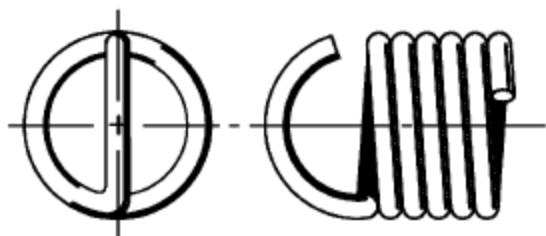
- Molas de tração requerem algum meio para transferir a carga do suporte ao corpo da mola;
- Essa transferência de carga pode ser feita com um tampão rosqueado ou um gancho giratório, mas ambos elevam o custo da mola. Assim, usam-se alguns outros métodos frequentemente, mostrados na figura a seguir:

# 10.11 Molas de tração

**Figura 10-6**

Tipos de extremidades usadas em molas de extensão.

(Cortesia da Associated Spring.)

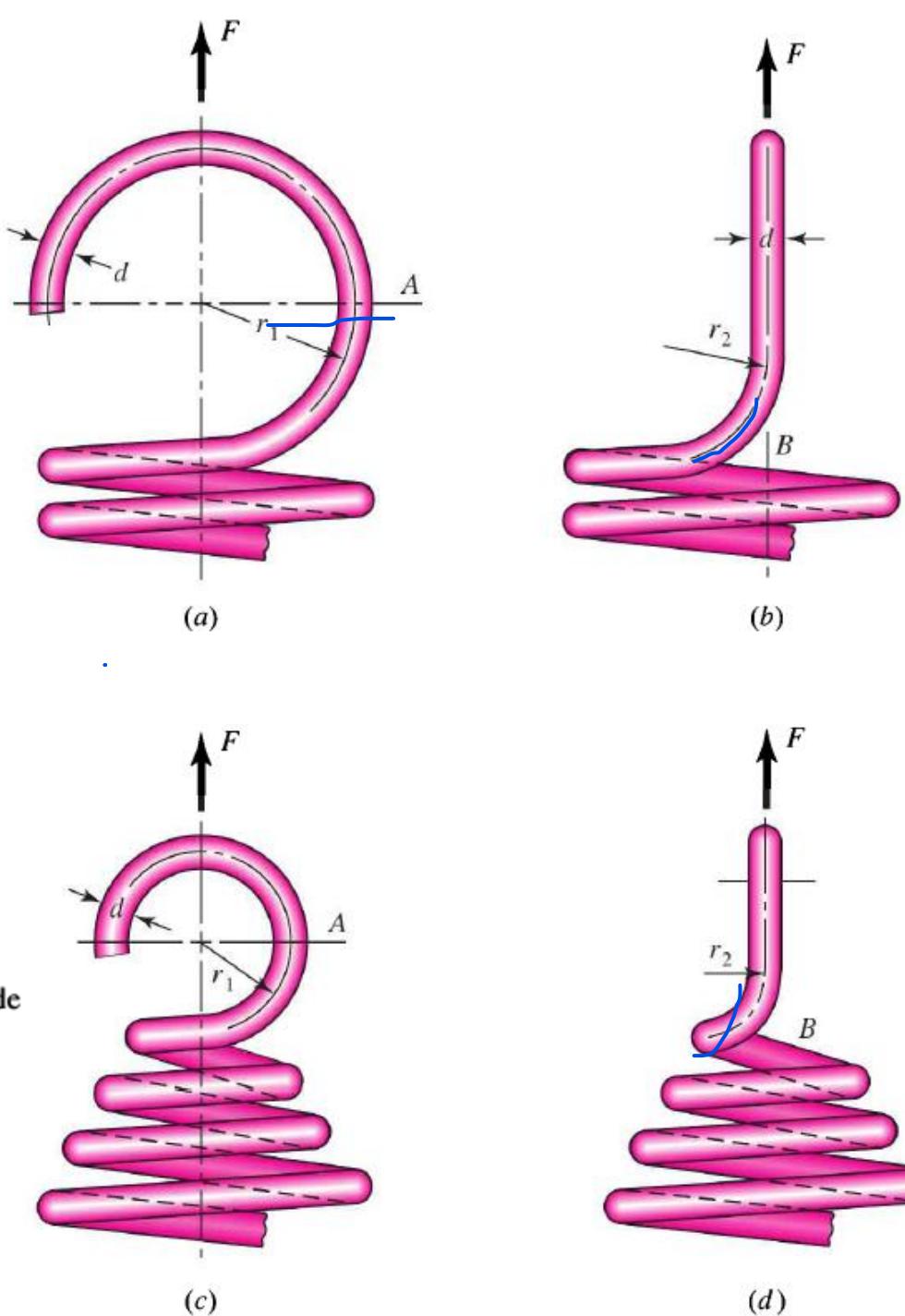


## 10.11 Molas de tração

- As tensões nas molas de tração são tratadas da mesma maneira das molas de compressão;
- Em molas com uma extremidade de gancho, a flexão e a torção no gancho devem ser incluídas na análise;
- A figura 10-7 apresenta um método comumente utilizado para projetar a extremidade.

## Figura 10-7

Extremidades para molas de extensão: (a) desenho usual; tensão em A é devida à força axial combinada e o momento flexor; (b) vista lateral da parte a; tensão é decorrente, principalmente, de torção em B; (c) desenho melhorado; tensão em A é devida à força axial combinada e ao momento flexor; (d) vista lateral da parte c; tensão em B é decorrente, principalmente, de torção.



Nota: Raio  $r_1$  está no plano da espiral de extremidade para tensão de flexão de viga curvada. Raio  $r_2$  está a um ângulo reto com a espiral de extremidade para tensão de cisalhamento torcional.

## 10.11 Molas de tração

- A tensão de tração máxima em  $A$ , devido à flexão e carregamento axial, é dada por:

$$\sigma_A = F \left[ (K)_A \frac{16D}{\pi d^3} + \frac{4}{\pi d^2} \right] \quad (10-34)$$

- Onde  $(K)_A$  é um fator de concentração de tensão de flexão para curvatura:

$$(K)_A = \frac{4C_1^2 - C_1 - 1}{4C_1(C_1 - 1)} \quad C_1 = \frac{2r_1}{d} \quad (10-35)$$

## 10.11 Molas de tração

- A tensão máxima torcional no ponto B é dada por:

$$\tau_B = (K)_B \frac{8FD}{\pi d^3} \quad (10-36)$$

- O fator de correção de tensão para a curvatura,  $(K)_B$  é:

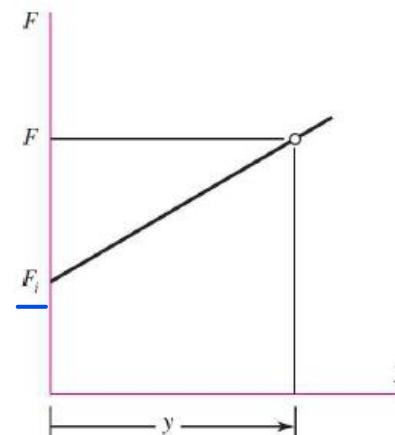
$$(K)_B = \frac{4C_2 - 1}{4C_2 - 4} \quad C_2 = \frac{2r_2}{d} \quad (10-37)$$

## 10.11 Molas de tração

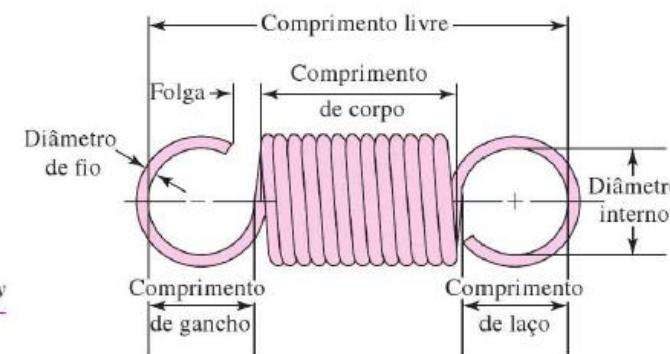
- Quando a mola é feita com espirais em contato, uma com a outra, é denominada *enrolamento fechado*;
- Geralmente, há uma tração inicial nas molas com enrolamento fechado;
- A curva carga-deflexão é mostrada a seguir;
  - $y$  é a extensão além do comprimento livre  $L_0$ ;
  - $F_i$  é a tração inicial na mola.

**Figura 10-8**

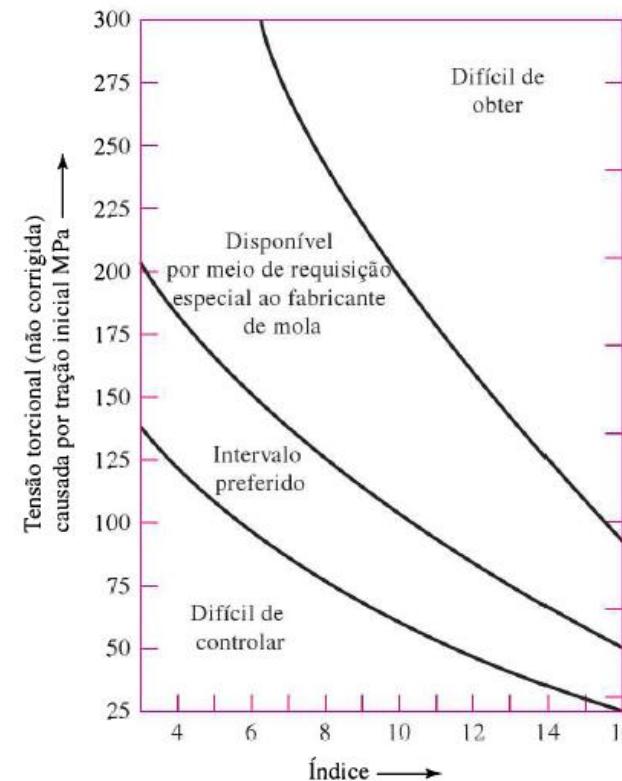
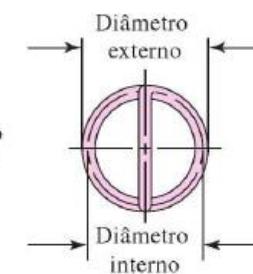
(a) Geometria da curva de força e extensão  $y$  de uma mola de extensão;  
 (b) geometria da mola de extensão; e (c) tensões torcionais devido à tração inicial como uma função do índice de mola  $C$  em molas de extensão helicoidais.



(a)



(b)



(c)

## 10.11 Molas de tração

- Da figura, a relação carga – deflexão é:

$$F = F_i + ky \quad (10-38)$$

- Onde  $k$  é a constante da mola;
- $L_0$  pode ser expresso como:

$$L_0 = 2(D - d) + (N_b + 1)d = (2C - 1 + N_b)d \quad (10-39)$$

- Em que  $D$  é o diâmetro médio da espiral,  $N_b$  é o número de espirais do corpo e  $C$  é o índice de curvatura da mola.

## 10.11 Molas de tração

- Com laços comuns de extremidades torcidas (figura 10-8b), deve-se considerar o número de espiras ativas  $N_a$  para determinar a constante de mola  $k$ . Nesse caso:

$$N_a = N_b + \frac{G}{E} \quad (10-40)$$

- Onde  $G$  e  $E$  são os módulos de elasticidade transversal e longitudinal.

## 10.11 Molas de tração

- A tensão inicial de uma mola de extensão é criada durante o processo de enrolamento da mesma;
- A quantidade de tração inicial que pode ser incorporada está na figura 10-8;
- O intervalo preferido pode ser expresso em termos da *tensão torcional não corrigida*:

$$\tau_i = \frac{231}{\exp(0,105C)} \pm 6,9 \left( 4 - \frac{C-3}{6,5} \right) \text{ MPa} \quad (10-41)$$

Em que  $C$  é o índice de curvatura da mola.

# 10.11 Molas de tração

- Diretrizes para tensões corrigidas máximas admissíveis para aplicações estáticas de molas de extensão são dadas:

**Tabela 10-7**

Tensões máximas admissíveis ( $K_w$  ou  $K_B$  corrigido) para molas helicoidais de extensão em aplicações estáticas.

Fonte: Extraído do *Design Handbook*, 1987, p. 52.  
Cortesia da Associated Spring.

Material	Porcentagem de resistência de tração		
	Em torção Corpo	Em torção Extremidade	Em flexão Extremidade
Patenteado, estirado a frio ou aço-carbono endurecido e revenido e aços baixa-liga	45–50	40	75
Aços austeníticos inoxidáveis e ligas não ferrosas	35	30	55

Esta informação baseia-se nas seguintes condições: assentamento não removido e tratamento térmico aplicado de baixa temperatura. Para molas que requerem tração inicial, use a mesma porcentagem de resistência de tração que para extremidades.

## 10.11 Molas de tração

- **Exemplo 10-6:** Uma mola de extensão de fio de aço estirado a frio com um diâmetro de 0,9 mm, diâmetro externo de espiral de 6,3 mm, raios de gancho  $r_1 = 2,7$  mm e  $r_2 = 2,3$  mm, e uma tração inicial de 5 N. Número de voltas de corpo é 12,17. Determine:
  - Determine os parâmetros físicos da mola;
  - Verifique as condições iniciais de tensão de pré - carga;
  - Encontre os fatores de segurança sob uma carga estática de 23 N.

## 10.11 Molas de tração

Solução: a.

$$D = \text{OD} - d = 6,3 - 0,9 = 5,4 \text{ mm}$$

$$C = \frac{D}{d} = \frac{5,4}{0,9} = 6,0$$

$$K_B = \frac{4C + 2}{4C - 3} = 1,24$$

Equação (10–40):  $N_a = N_b + G/E = 12,17 + 79/198 = 12,57$  voltas

Equação (10–9):  $k = \frac{d^4 G}{8D^3 N_a} = \frac{0,9^4 (79\,000)}{8(5,4^3)12,57} = 3,27 \text{ N/mm}$

Equação (10–39):  $L_0 = (2C - 1 + N_b)d = [2(6,0) - 1 + 12,17] 0,9 = 20,9 \text{ mm}$

A deflexão sob a carga de serviço é

$$y_{\max} = \frac{F_{\max} - F_i}{k} = \frac{23 - 5}{3,27} = 5,5 \text{ mm}$$

em que o comprimento da mola se torna  $L = L_0 + y = 20,9 + 5,5 = 26,4 \text{ mm}$ .

## 10.11 Molas de tração

(b) A tensão inicial não corrigida é dada pela Equação (10–3) sem o fator de correção, isto é,

$$(\tau_i)_{\text{não corrigida}} = \frac{8F_i D}{\pi d^3} = \frac{8(5)(5,4)}{\pi(0,9^3)} = 94,3 \text{ MPa}$$

O intervalo preferido é dado pela Equação (10–41), e para este caso é

$$\begin{aligned} (\tau_i)_{\text{pref}} &= \frac{231}{\exp(0,105C)} \pm 6,9 \left( 4 - \frac{C - 3}{6,5} \right) \\ &= \frac{231}{\exp[0,105(6,0)]} \pm 6,9 \left( 4 - \frac{6,0 - 3}{6,5} \right) \\ &= 123 \pm 24,4 = 147,4, 98,6 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Assim, a tração inicial de 94,3 MPa ~~está~~ no intervalo preferido.

## 10.11 Molas de tração

(c) Para mola de fio duro estirado, segundo a Tabela 10–4,  $m = 0,190$  e  $A = 1738 \text{ MPa} \cdot \text{mm}^m$ .

Da Equação (10–14)

$$S_{ut} = \frac{A}{d^m} = \frac{1783}{0,9^{0,190}} = 1819 \text{ MPa}$$

Para cisalhamento torcional no corpo principal da mola, com base na Tabela 10–7,

$$S_{sy} = 0,45S_{ut} = 0,45(1819) = 818,6 \text{ MPa}$$

A tensão de cisalhamento sob carga de serviço é

$$\tau_{\max} = \frac{8K_B F_{\max} D}{\pi d^3} = \frac{8(1,24)23(5,4)}{\pi(0,9^3)} = 538 \text{ MPa}$$

Logo, o fator de segurança é

$$n = \frac{S_{sy}}{\tau_{\max}} = \frac{818,6}{538} = 1,52$$

# 10.11 Molas de tração

Para a flexão do gancho de extremidade em A,

$$C_1 = 2r_1/d = 2(2,7)/0,9 = 6$$

Da Equação (10–35)

$$(K)_A = \frac{4C_1^2 - C_1 - 1}{4C_1(C_1 - 1)} = \frac{4(6^2) - 6 - 1}{4(6)(6 - 1)} = 1,14$$

Da Equação (10–34)

$$\begin{aligned}\sigma_A &= F_{\max} \left[ (K)_A \frac{16D}{\pi d^3} + \frac{4}{\pi d^2} \right] \\ &= 23 \left[ 1,14 \frac{16(5,4)}{\pi(0,9^3)} + \frac{4}{\pi(0,9^2)} \right] = 1025,8 \text{ MPa}\end{aligned}$$

## 10.11 Molas de tração

A resistência de escoamento, com base na Tabela 10–7, é dada por

$$S_y = 0,75S_{ut} = 0,75(1819) = 1364,3 \text{ MPa}$$

O fator de segurança para flexão do gancho de extremidade em  $A$  é então

$$n_A = \frac{S_y}{\sigma_A} = \frac{1364,3}{1025,8} = 1,33$$

## 10.11 Molas de tração

Para o gancho de extremidade em torção em  $B$ , por meio da Equação (10–37)

$$C_2 = 2r_2/d = 2(2,3)/0,9 = 5,1$$

$$(K)_B = \frac{4C_2 - 1}{4C_2 - 4} = \frac{4(5,1) - 1}{4(5,1) - 4} = \underline{\underline{1,18}}$$

e a tensão correspondente, dada pela Equação (10–36), é

$$\tau_B = (K)_B \frac{8F_{\max} D}{\pi d^3} = 1,18 \frac{8(23)5,4}{\pi(0,9^3)} = \underline{\underline{511,9 \text{ MPa}}}$$

Usando a Tabela 10–7 para resistência de escoamento, o fator de segurança para torção do gancho de extremidade em  $B$  é

$$n_B = \frac{(S_{sy})_B}{\tau_B} = \frac{0,4(1819)}{511,9} = 1,42$$

O escoamento devido à flexão do gancho de extremidade ocorrerá primeiro.

## 10.11 Molas de tração

- Considerando o problema de fadiga

**Exemplo 10-7:** A mola do exemplo 10-6 está sujeita a um carregamento dinâmico de 6,5 a 20 N. Estime os fatores de segurança usando o critério de falha de Gerber para:

- a. Fadiga de espiral;
- b. Escoamento de espiral;
- c. Fadiga flexional do gancho de extremidade no ponto A da figura 10-7a;
- d. Fadiga torcional do gancho de extremidade no ponto B da figura 10-7b.

## 10.11 Molas de tração

Solução:

Quantidades iguais às do exemplo 10-6:

$d = 0,9 \text{ mm}$ ,  $S_{ut} = 1819 \text{ MPa}$ ,  $D = 5,4 \text{ mm}$ ,  $r_1 = 2,7 \text{ mm}$ ,  $C = 6$ ,  $K_B = 1,24$ ,  $(K)_A = 1,14$ ,  $(K)_B = 1,18$ ,  $N_b = 12,17$  voltas,  $L_0 = 20,9 \text{ mm}$ ,  $k = 3,27 \text{ N/mm}$ ,  $F_i = 5 \text{ N}$  e  $(\tau_i)_{\text{não corrigida}} = 94,3 \text{ MPa}$ .

E:

$$F_a = (F_{\max} - F_{\min})/2 = (20 - 6,5)/2 = 6,75 \text{ N}$$

$$F_m = (F_{\max} + F_{\min})/2 = (20 + 6,5)/2 = 13,25 \text{ N}$$

## 10.11 Molas de tração

Do exemplo 10-6, temos:

$S_{ut} = 1819 \text{ MPa}$ ;  $S_y = 1364,3 \text{ MPa}$ ,  $S_{sy} = 818,6 \text{ MPa}$ . Da equação (10-30) obtemos a resistência última de cisalhamento estimada:

$$S_{su} = 0,67S_{ut} = 0,67(1819) = 1218,7 \text{ MPa}$$

a. Fadiga de espiral de corpo:

$$\tau_a = \frac{8K_B F_a D}{\pi d^3} = \frac{8(1,24)6,75(5,4)}{\pi(0,9^3)} = 157,9 \text{ MPa}$$

$$\tau_m = \frac{F_m}{F_a} \tau_a = \frac{13,25}{6,75} 157,9 = 310 \text{ MPa}$$

## 10.11 Molas de tração

Usando dados de Zimmerli da equação 10-28, obtemos:

$$S_{se} = \frac{S_{sa}}{1 - \left(\frac{S_{sm}}{S_{su}}\right)^2} = \frac{241}{1 - \left(\frac{379}{1218,7}\right)^2} = 266,8 \text{ MPa}$$

Da tabela 6-7, o critério de fadiga de Gerber para cisalhamento é:

## 10.11 Molas de tração

$$(n_f)_{\text{corpo}} = \frac{1}{2} \left( \frac{S_{su}}{\tau_m} \right)^2 \frac{\tau_a}{S_{se}} \left[ -1 + \sqrt{1 + \left( 2 \frac{\tau_m}{S_{su}} \frac{S_{se}}{\tau_a} \right)^2} \right]$$
$$= \frac{1}{2} \left( \frac{1218,7}{310} \right)^2 \frac{157,9}{266,8} \left[ -1 + \sqrt{1 + \left( 2 \frac{310}{1218,7} \frac{266,8}{157,9} \right)^2} \right] = 1,46$$

- A linha de carga para o corpo de espiral começa em  $S_{sm} = \tau_i$  e tem uma declividade  $r = \tau_a / (\tau_m - \tau_i)$ .
- A intersecção com a linha de escoamento é dada por  $(S_{sa})_y = [r/(r + 1)][S_{sy} - \tau_i]$ .

## 10.11 Molas de tração

Consequentemente,  $\tau_i = (F_i/F_a)/\tau_a = (5/6,75)/157,9 = 117 \text{ MPa}$ ,  $r = 157,9/(310 - 117) = 0,82$ . E:

$$(S_{sa})_y = \frac{0,82}{0,82 + 1} (818,6 - 117) = 316 \text{ MPa}$$

Assim:

$$(n_y)_{\text{corpo}} = \frac{(S_{sa})_y}{\tau_a} = \frac{316}{157,9} = 2,0$$

## 10.11 Molas de tração

c. Fadiga de gancho de extremidade. Usando as equações (10-34) e (10-35), obtemos:

$$\begin{aligned}\sigma_a &= F_a \left[ (K)_A \frac{16D}{\pi d^3} + \frac{4}{\pi d^2} \right] \\ &= 6,75 \left[ 1,14 \frac{16(5,4)}{\pi(0,9^3)} + \frac{4}{\pi(0,9^2)} \right] = 301 \text{ MPa}\end{aligned}$$

$$\sigma_m = \frac{F_m}{F_a} \sigma_a = \frac{13,25}{6,75} 301 = 590,9 \text{ MPa}$$

## 10.11 Molas de tração

Para estimar o limite de resistência à tração usando a teoria da energia de deformação:

$$S_e = S_{se}/0,577 = 266,8/0,577 = 462,4 \text{ MPa}$$

Usando o critério de Gerber para tração,

$$(n_f)_A = \frac{1}{2} \left( \frac{S_{ut}}{\sigma_m} \right)^2 \frac{\sigma_a}{S_e} \left[ -1 + \sqrt{1 + \left( 2 \frac{\sigma_m}{S_{ut}} \frac{S_e}{\sigma_a} \right)^2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{1819}{590,9} \right)^2 \frac{301}{462,4} \left[ -1 + \sqrt{1 + \left( 2 \frac{590,9}{1819} \frac{462,4}{301} \right)^2} \right] = 1,27$$

## 10.11 Molas de tração

d. Fadiga torcional de gancho de extremidade.  
Da equação (10-36):

$$(\tau_a)_B = (K)_B \frac{8F_a D}{\pi d^3} = 1,18 \frac{8(6,75)(5,4)}{\pi(0,9^3)} = \underline{150,2 \text{ MPa}}$$

$$(\tau_m)_B = \frac{F_m}{F_a} (\tau_a)_B = \frac{13,25}{6,75} 150,2 = \underline{294,8 \text{ MPa}}$$

Usando o critério de Gerber:

$$(n_f)_B = \frac{1}{2} \left( \frac{S_{su}}{\tau_m} \right)^2 \frac{\tau_a}{S_{se}} \left[ -1 + \sqrt{1 + \left( 2 \frac{\tau_m}{S_{su}} \frac{S_{se}}{\tau_a} \right)^2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{1218,7}{294,8} \right)^2 \frac{150,2}{266,8} \left[ -1 + \sqrt{1 + \left( 2 \frac{294,8}{1218,7} \frac{266,8}{150,2} \right)^2} \right] = 1,53$$

## 10.11 Molas de tração

- As análises dos exemplos 10-6 e 10-7 mostram como as molas de tração diferem das de compressão
  - Os ganchos de extremidade são usualmente a parte mais fraca, com flexão dominando;
  - Falha de fadiga separa a mola de extensão sob carga, podendo gerar fragmentos voando, que podem causar falta de segurança pessoal. Assim, fatores de projeto mais elevados são considerados nas molas de tração.

## 10.11 Molas de tração

- No exemplo 10-7, o limite de resistência à fadiga para gancho em flexão foi estimado usando dados de Zimmerli, que se baseiam em torção de molas de compressão e na teoria de distorção. Uma outra possibilidade é usar a tabela 10-8, que é baseada na razão de tensão  $R = \tau_{mín}/\tau_{máx} = 0$ . Para este caso,  $\tau_a = \tau_m = \tau_{máx}/2$ :

# 10.11 Molas de tração

**Tabela 10-8**

Tensões máximas admissíveis para molas de extensão helicoidais de aço inoxidável ASTM A228 e tipo 302 em aplicações cíclicas.

Fonte: Extraído de *Design Handbook*, 1987, p. 52.

Cortesia da Associated Sppng.

Número de ciclos	Porcentagem de resistência de tração		
	<u>Em torção</u> Corpo	<u>Em torção</u> Extremidade	<u>Em flexão</u> Extremidade
<u><math>10^5</math></u>	36	34	51
<u><math>10^6</math></u>	33	30	47
<u><math>10^7</math></u>	30	28	45

Esta informação baseia-se nas seguintes condições: sem jateamento de granilha, sem surgimento e meio ambiente com tratamento térmico de baixa temperatura aplicado. Razão de tensão = 0.

Resistência para flexão da tabela 10-8 =  $S_r$ ;

Resistência para torção da tabela 10-8 =  $S_{sr}$ .

## 10.11 Molas de tração

- Assim, para torção, por exemplo,  $S_{sa} = S_{sm} = S_{sr}/2$ , e a ordenada de intersecção de Gerber (equação 6-41) para cisalhamento é:

$$S_{se} = \frac{S_{sa}}{1 - (S_{sm}/S_{su})^2} = \frac{S_{sr}/2}{1 - \left(\frac{S_{sr}/2}{S_{su}}\right)^2} \quad (10-42)$$

## 10.11 Molas de tração

- No exemplo 10-7, uma estimativa para o limite de resistência à fadiga por flexão, de acordo com a tabela 10-8 seria:

$$S_r = 0,45 \quad S_{ut} = 0,45(1819) = 818,6 \text{ MPa}$$

- E a partir da equação 10-42:

$$S_e = \frac{S_r/2}{1-[S_r/(2S_{ut})]^2} = \frac{818,6/2}{1-\left(\frac{818,6/2}{1819}\right)^2} = 431 \text{ MPa}$$

Usar essa no lugar de 462,4 MPa, no exemplo 10-7, resulta em  $(n_f)_A = 1,21$ , uma redução de 5%.

## 10.12 Molas helicoidais de torção

- Mola de bobinas helicoidais sujeita à torção nas extremidades.
- Usualmente é de enrolamento fechado (como mola de tração), mas com tensionamento inicial desprezível;
- Corpo simples ou duplo (figura 10-9);
- Têm extremidades configuradas para aplicar torção ao corpo da bobina;
- As extremidades conectam uma força a uma distância do eixo de bobinamento para aplicar torque;

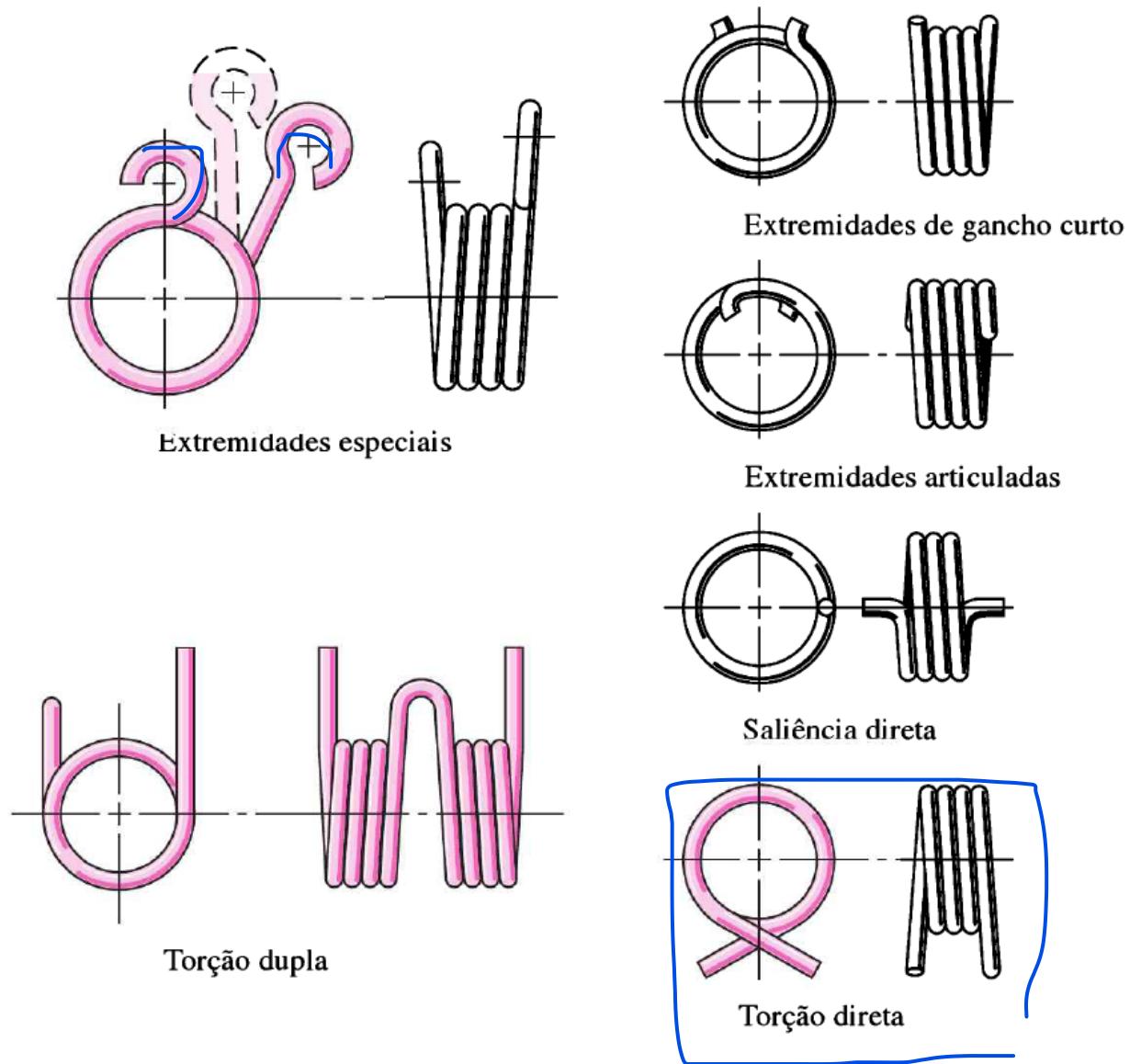
## 10.12 Molas helicoidais de torção

- Extremidade mais frequente: torção direta;
- Se o atrito entre os helicoides tem que ser evitado, a mola pode ser enrolada com um passo que os separa;
- São geralmente usadas com uma haste ou eixo para suporte de reações, para manter alinhamento e resistir à flambagem;

# 10.12 Molas helicoidais de torção

**Figura 10-9**

Molas de torção.  
(Cortesia da Associated Spring.)



## 10.12 Molas helicoidais de torção

- O fio de uma mola de torção está sob flexão (em molas de tração e compressão – torção);
- As molas são projetadas para enrolar em serviço;
- Com o aumento do torque, ocorre diminuição do diâmetro interno da espiral;
- Exemplos de molas de torção: prendedores de roupas, ratoeiras, além de catracas e componentes de máquinas.

# 10.12 Molas helicoidais de torção

## Descrevendo a localização da extremidade

- As extremidades devem ser localizadas uma em relação à outra;
- Tolerâncias comerciais estão na tabela 10-9;
- Esquema mais simples: ângulo  $\beta$  definindo a fração da volta presente no corpo da espiral:  
 $N_p = \beta/360^\circ$ , onde  $N_p$  é o número de voltas parciais.  
(Figura 10-10);
- É muito comum o uso do ângulo  $\alpha$  pelos fabricantes.

# 10.12 Molas helicoidais de torção

**Tabela 10-9**

Tolerâncias de posicionamento de extremidade para molas de torção de espiral helicoidal (para razões  $D/d$  até e incluindo 16).

Fonte: Extraído do *Design Handbook*, 1987, p. 52.  
Cortesia da Associated Spring.

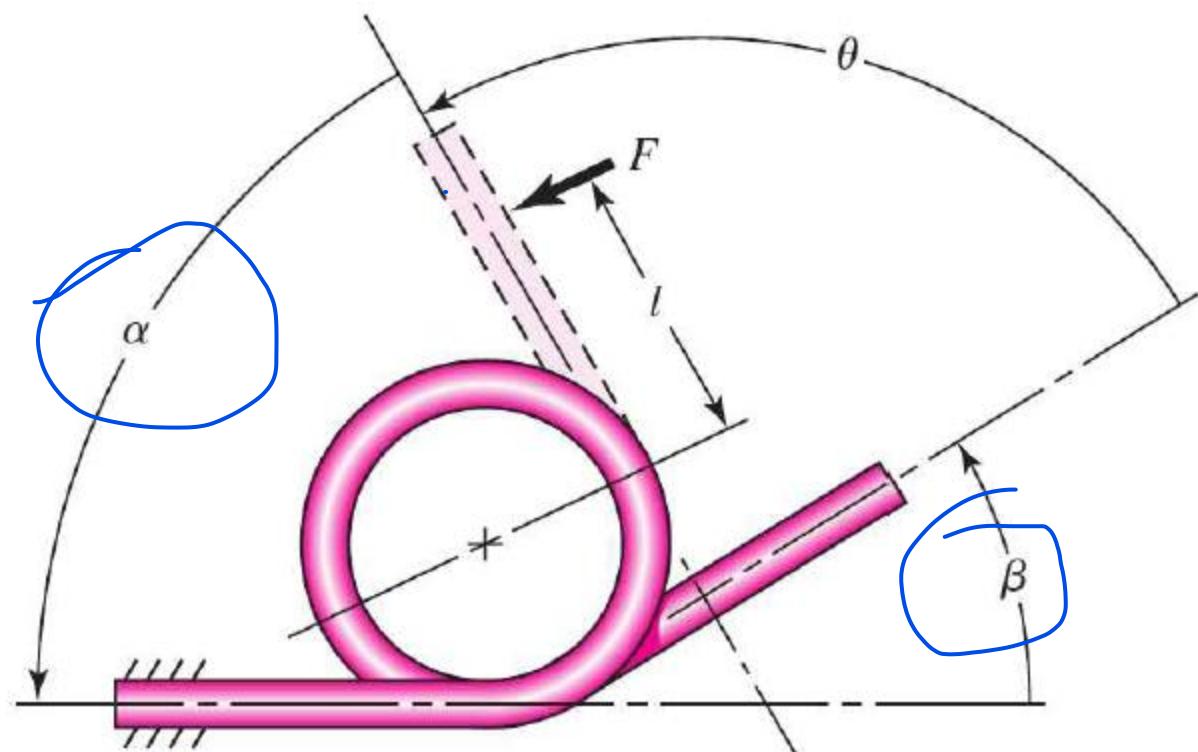
<b>Espirais totais</b>	<b>Tolerância: <math>\pm</math> Graus*</b>
Até 3	8
De 3 a 10	10
De 10 a 20	15
De 20 a 30	20
De 30	25

\* Tolerâncias mais apertadas disponíveis por meio de solicitação.

# 10.12 Molas helicoidais de torção

**Figura 10-10**

O ângulo de posicionamento da extremidade livre é  $\beta$ . A coordenada rotacional  $\theta$  é proporcional ao produto  $Fl$ . O contra-ângulo é  $\alpha$ . Para todas as posições da extremidade móvel  $\theta + \alpha = \Sigma = \text{constante}$ .



## 10.12 Molas helicoidais de torção

- $N_b$  é o número de voltas do corpo = número de voltas no corpo livre da mola:

$$N_b = \text{integer} + \frac{\beta}{360^\circ} = \text{integer} + N_p$$

- Está relacionado com  $\beta$  e  $N_p$ .
- $N_b$  assume valores discretos não inteiros: 5,3; 6,3; 7,3; ...

# 10.12 Molas helicoidais de torção

## Tensão de Flexão

- Mola de torção tem flexão induzida nas espirais;
- Tensões residuais têm mesma direção e sentido oposto às tensões de trabalho;
- Enrijecimento por deformação bloqueia tensões residuais opostas às tensões de trabalho e provê que a carga esteja sempre aplicada no sentido do enrolamento;
- Podem operar em tensões superiores à tensão de escoamento do fio.

## 10.12 Molas helicoidais de torção

- Tensão de flexão: teoria de vigas curvas

$$\sigma = K \frac{Mc}{I}$$

- $K$  é o fator de correção de tensão;
- $K$  depende da forma da seção transversal do fio. Para fio redondo:

$$K_i = \frac{4C^2 - C - 1}{4C(C - 1)} \quad K_o = \frac{4C^2 + C - 1}{4C(C + 1)} \quad (10-43)$$

$C$  é o índice de curvatura da mola e os subscritos  $i$  e  $o$  indicam as fibras internas e externas.

## 10.12 Molas helicoidais de torção

- $K_0$  é sempre menor que 1. Assim, usaremos  $K_i$ .
- O momento fletor é:  $M = Fr$  e o módulo da seção é:  $I/c = \pi d^3/32$ .
- Assim:

$$\sigma = K_i \frac{32Fr}{\pi d^3} \quad (10-44)$$

# 10.12 Molas helicoidais de torção

## Deflexão e constante da mola

- Deflexão angular pode ser expressa em radianos ou revoluções (voltas) da mola.
  - Quando o termo contiver unidades em revoluções, aparece uma “’“. Exemplo:  $k'$  (torque por revolução),  $\theta'$  em voltas;
  - A constante de mola, se linear, fica:
- $$k' = \frac{M_1}{\theta'_1} = \frac{M_2}{\theta'_2} = \frac{M_2 - M_1}{\theta'_2 - \theta'_1} \quad (10-45)$$
- M pode ser expresso por  $Fl$  ou  $Fr$ .

## 10.12 Molas helicoidais de torção

- O ângulo pela deflexão de uma viga em balanço, quando visto da extremidade engastada é:

$$\theta_e = \frac{y}{l} = \frac{Fl^2}{3EI} = \frac{Fl^2}{3E(\pi d^4/64)} = \frac{64Ml}{3\pi d^4 E} \quad (10-46)$$

- Para mola de torção de extremidade reta, a correção da equação 10-46 deve ser incluída;
- A energia de deformação é:

$$U = \int \frac{M^2 dx}{2EI}$$

## 10.12 Molas helicoidais de torção

- Para mola de torção:  $M = Fl = Fr$ ;
- $F$  defletirá por uma distância  $r\theta$ , onde  $\theta$  é a deflexão angular;
- Aplicando o teorema de Castigliano:

$$r\theta = \frac{\partial U}{\partial F} = \int_0^{\pi DN_b} \frac{\partial}{\partial F} \left( \frac{F^2 r^2 dx}{2EI} \right) = \int_0^{\pi DN_b} \frac{Fr^2 dx}{EI}$$

- Fazendo  $I = \pi d^4/64$  e resolvendo para  $\theta$ :

$$\theta = \frac{64FrDN_b}{d^4E} = \frac{64MDN_b}{d^4E}$$

## 10.12 Molas helicoidais de torção

- A deflexão angular total é obtida adicionando a equação 10-46 a cada extremidade de comprimento  $l_1$  e  $l_2$ :

$$\theta_t = \frac{64MDN_b}{d^4E} + \frac{64Ml_1}{3\pi d^4E} + \frac{64Ml_2}{3\pi d^4E} = \frac{64MD}{d^4E} \left( N_b + \frac{l_1 + l_2}{3\pi D} \right) \quad (10-47)$$

- Número equivalente de voltas ativas:

$$N_a = N_b + \frac{l_1 + l_2}{3\pi D} \quad (10-48)$$

## 10.12 Molas helicoidais de torção

- Rigidez torcional da mola (em torque/rad):

$$k = \frac{Fr}{\theta_t} = \frac{M}{\theta_t} = \frac{d^4 E}{64DN_a} \quad (10-49)$$

➤ Em torque por volta:

$$k' = \frac{2\pi d^4 E}{64DN_a} = \frac{d^4 E}{10.2DN_a} \quad (10-50)$$

➤ Considerando o efeito do atrito entre as espirais:

$$k' = \frac{d^4 E}{10.8DN_a} \quad (10-51)$$

➤ A equação 10-47 fica:

$$\theta'_t = \frac{10.8MD}{d^4 E} \left( N_b + \frac{l_1 + l_2}{3\pi D} \right) \quad (10-52)$$

## 10.12 Molas helicoidais de torção

- Molas de torção costumam ter pinos;
- Quando aplica-se carga sobre mola de torção, o diâmetro interno diminui;
- O diâmetro interno da espiral não pode ficar menor que o do pino;
- Diâmetro de hélice do helicoide  $D'$ , após aplicação da carga, fica:

$$D' = \frac{N_b D}{N_b + \theta'_c} \quad (10-53)$$

## 10.12 Molas helicoidais de torção

- $\theta'_c$  é a deflexão angular do corpo da espiral em número de voltas:

$$\theta'_c = \frac{10.8MDN_b}{d^4E} \quad (10-54)$$

- O novo diâmetro interno  $D'_i = D' - d$  faz com que a folga diametral  $\Delta$  entre o corpo e o pino de diâmetro  $D_p$  seja:

$$\Delta = D' - d - D_p = \frac{N_b D}{N_b + \theta'_c} - d - D_p \quad (10-55)$$

## 10.12 Molas helicoidais de torção

- Resolvendo 10-55 para  $N_b$ :

$$N_b = \frac{\theta'_c(\Delta + d + D_p)}{D - \Delta - d - D_p} \quad (10-56)$$

- $N_b$  é o número de voltas de corpo correspondendo a uma folga diametral especificada.
- O ângulo pode não estar de acordo com a volta parcial necessária. Nesse caso, a folga pode ser um pouco maior.

# 10.12 Molas helicoidais de torção

## Resistência estática

➤ Divide-se a primeira coluna da tabela 10-6 por 0,577 para se obter:

$$S_y = \begin{cases} 0,78S_{ut} & \text{Fio musical de aços-carbono estirados a frio} \\ 0,87S_{ut} & \text{Aços baixa-liga e aços-carbono temperado e revenido em óleo} \\ 0,61S_{ut} & \text{Aço inoxidável austenítico e ligas não ferrosas} \end{cases} \quad (10-57)$$

# 10.12 Molas helicoidais de torção

## Resistência à fadiga

- Fio em flexão: equação de Sines não é aplicável;
- Resultados de Zimmerli: molas de compressão (fio em torção pura);
- Usaremos valores de tensão de flexão repetida da tabela 10-10.

# 10.12 Molas helicoidais de torção

**Tabela 10-10**

Tensões de flexão máximas recomendadas ( $K_B$  corrigido) para molas de torção helicoidais em aplicações cíclicas como porcentagem de  $S_{ut}$ . (Cortesia da Associated Spring.)

Vida de fadiga, ciclos	ASTM A228 e tipo 302 aço inoxidável		ASTM A230 e A232	
	Não jateado de granalha	Jateado de granalha*	Não jateado de granalha	Jateado de granalha*
$10^5$	53	62	55	64
$10^6$	50	60	53	62

Esta informação baseia-se nas seguintes condições: nenhum surgimento e molas estão na condição de “semelhante a tensões aliviadas”.

\*Nem sempre possível.

## 10.12 Molas helicoidais de torção

- Usando o critério de falha de fadiga de Gerber, equação 10-40, a resistência à fadiga é:

$$S_e = \frac{S_r/2}{1 - \left(\frac{S_r/2}{S_{ut}}\right)^2} \quad (10-58)$$

- Os valores de  $S_r$  e  $S_e$  foram corrigidos para tamanho, condição de superfície e tipo de carregamento, mas não estão corrigidos para temperatura e efeitos diversos.

## 10.12 Molas helicoidais de torção

A componente de amplitude de resistência é dada pela tabela 6-7 (pg 325) como:

$$S_a = \frac{r^2 S_{ut}^2}{2S_e} \left[ -1 + \sqrt{1 + \left( \frac{2S_e}{r S_{ut}} \right)^2} \right] \quad (10-59)$$

Em que a declividade da linha de carga é:

$$r = M_a / M_m$$

## 10.12 Molas helicoidais de torção

- O fator de segurança para falha por fadiga é:

$$n_f = \frac{S_a}{\sigma_a} \quad (10-60)$$

- Pode-se encontrar o  $n_f$  diretamente da tabela 6-7:

$$n_f = \frac{1}{2} \frac{\sigma_a}{S_e} \left( \frac{S_{ut}}{\sigma_m} \right)^2 \left[ -1 + \sqrt{1 + \left( 2 \frac{\sigma_m}{S_{ut}} \frac{S_e}{\sigma_a} \right)^2} \right] \quad (10-61)$$

## 10.12 Molas helicoidais de torção

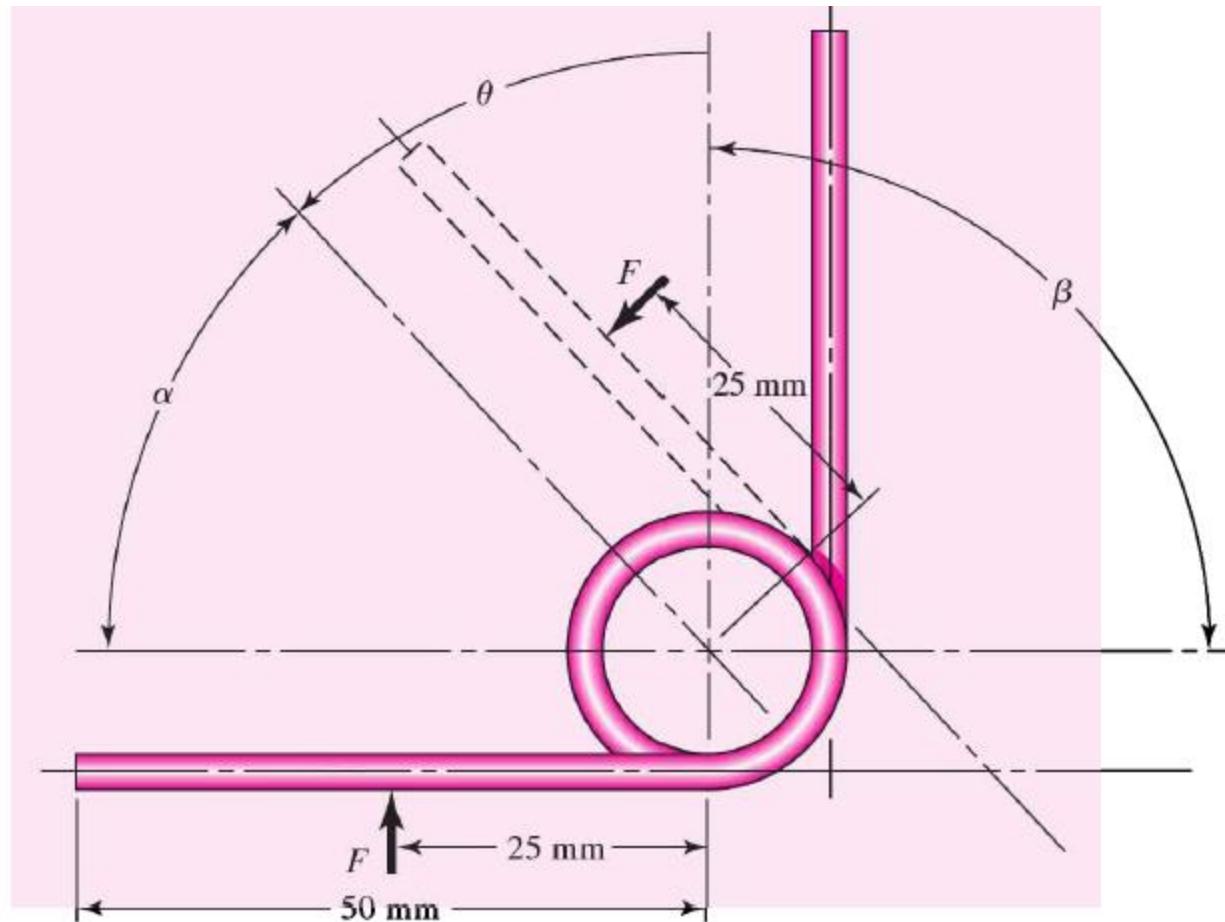
**Exemplo 10-8:** Uma mola de estoque é mostrada na figura. Ela é feita de fio musical de 1,8 mm de diâmetro e tem  $4 \frac{1}{4}$  voltas de corpo com extremidades retas de torção. Ela trabalha sobre um pino de 10 mm de diâmetro. O diâmetro externo da espiral é de 15 mm.

- a. Encontre o torque operacional máximo e a correspondente rotação para carregamento estático.
- b. Estime o diâmetro interno da espiral e a folga diametral do pino quando a mola está sujeita ao torque da parte (a).
- c. Calcule o fator de segurança de fadiga,  $n_f$  caso o momento aplicado varie entre  $M_{\min} = 0,1$  a  $M_{\max} = 0,5$  N-m.

# 10.12 Molas helicoidais de torção

**Figura 10-11**

Ângulos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\theta$  são medidos entre a linha de centro da extremidade reta transladados para o eixo da espiral. O diâmetro externo OD da espiral é de  $19/32$  in.



## 10.12 Molas helicoidais de torção

Solução:

- a. Para fio musical, da Tabela 10-4:  $A = 2211 \text{ MPa} \cdot \text{mm}^m$  e  $m = 0,145$ . Assim:

$$S_{ut} = \frac{A}{d^m} = \frac{2210}{(1,8)^{0,145}} = 2029 \text{ MPa}$$

Da equação 10-57:

$$S_y = 0,78S_{ut} = 0,78(2029) = 1582 \text{ MPa}$$

## 10.12 Molas helicoidais de torção

O diâmetro médio da mola é:

$$D = 15 - 1,8 = 13,2 \text{ mm}$$

O índice de mola é:

$$C = D/d = 13,2/1,8 = 7,33$$

Da equação (10-43):

$$K_i = \frac{4(7,33)^2 - 7,33 - 1}{4(7,33)(7,33 - 1)} = 1,113$$

## 10.12 Molas helicoidais de torção

Reorganizando a equação 10-44 e substituindo  $S_y$  por  $\sigma$ , e resolvendo para torque máximo  $F.r$ , obtemos:

$$M_{\max} = (Fr)_{\max} = \frac{\pi d^3 S_y}{32K_i} = \frac{\pi(1,8)^3 1583}{32(1,113)} = 814 \text{ N}\cdot\text{mm}$$

➤ Nenhum fator de segurança foi usado.

Da equação 10-54, o número de voltas da espiral fica:

$$\theta'_c = \frac{10,8MDN_b}{d^4 E} = \frac{10,8(814)13,2(4,25)}{1,8^4(196000)} = 0,24 \text{ volta}$$

$$(\theta'_c)_{\text{graus}} = 0,24(360^\circ) = 86,4^\circ$$

## 10.12 Molas helicoidais de torção

Da equação 10-48 obtemos o número de voltas ativas:

$$N_a = N_b + \frac{l_1 + l_2}{3\pi D} = 4,25 + \frac{25 + 25}{3\pi(13,2)} = 4,65 \text{ voltas}$$

A razão de mola da mola completa é, pela equação 10-51:

$$k' = \frac{1,8^4(196000)}{10,8(13,2)4,65} = 3104 \text{ N}\cdot\text{mm}$$

O número de voltas da mola completa é:

$$\theta' = \frac{M}{k'} = \frac{814}{3104} = 0,26 \text{ volta}$$

$$(\theta'_s)_{\text{graus}} = 0,26(360^\circ) = 93,6^\circ$$

## 10.12 Molas helicoidais de torção

b. Sem carga, o diâmetro médio da espiral da mola é 13,2 mm. Da equação 10-53:

$$D' = \frac{N_b D}{N_b + \theta'_c} = \frac{4,25(13,2)}{4,25 + 0,24} = 12,5 \text{ mm}$$

A folga diametral entre a parte interna da mola e o pino, quando a mola está carregada:

$$\Delta = D' - d - D_p = 12,5 - 1,8 - 10 = 0,7 \text{ mm}$$

# 10.12 Molas helicoidais de torção

Fadiga:

$$M_a = (M_{\max} - M_{\min})/2 = (500 - 100)/2 = 200 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$M_m = (M_{\max} + M_{\min})/2 = (500 + 100)/2 = 300 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$r = \frac{M_a}{M_m} = \frac{2}{3}$$

$$\sigma_a = K_i \frac{32M_a}{\pi d^3} = 1,113 \frac{32(200)}{\pi 1,8^3} = 388,8 \text{ MPa}$$

$$\sigma_m = \frac{M_m}{M_a} \sigma_a = \frac{3}{2}(388,8) = 583,2 \text{ MPa}$$

## 10.12 Molas helicoidais de torção

Com base na tabela 10-10,  $S_r = 0,50 S_{ut} = 0,50(2029) = 1014,5$ . Então:

$$S_e = \frac{1014,5/2}{1 - \left(\frac{1014,5/2}{2029}\right)^2} = 541 \text{ MPa}$$

A componente de amplitude da resistência  $S_a$ , pela equação (10-59) é:

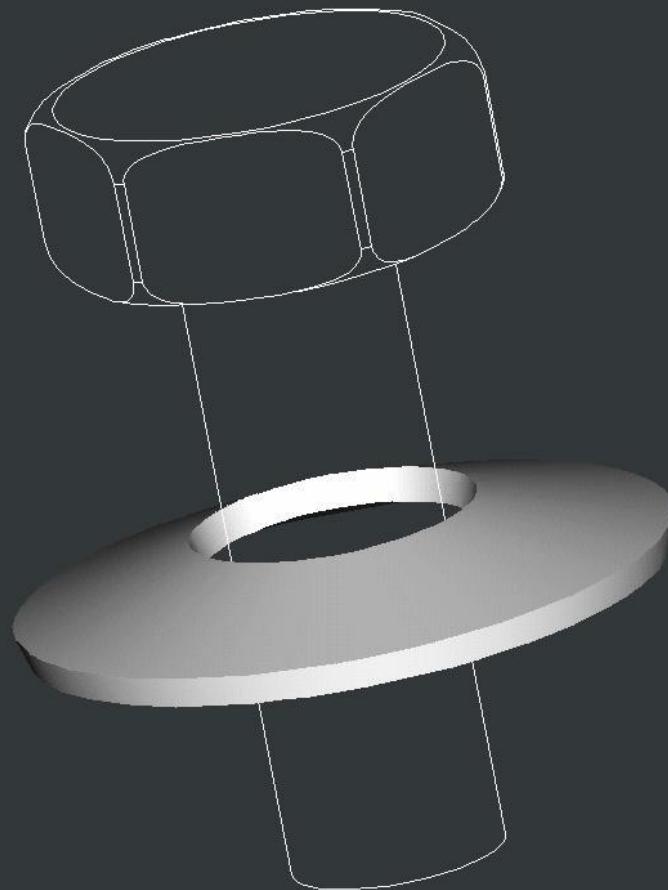
$$S_a = \frac{(2/3)^2 2029^2}{2(541)} \left[ -1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2}{2/3} \frac{541}{2029}\right)^2} \right] = 474,4 \text{ MPa}$$

## 10.12 Molas helicoidais de torção

O fator de segurança para fadiga fica:

$$n_f = \frac{S_a}{\sigma_a} = \frac{474,4}{388,8} = 1,22$$

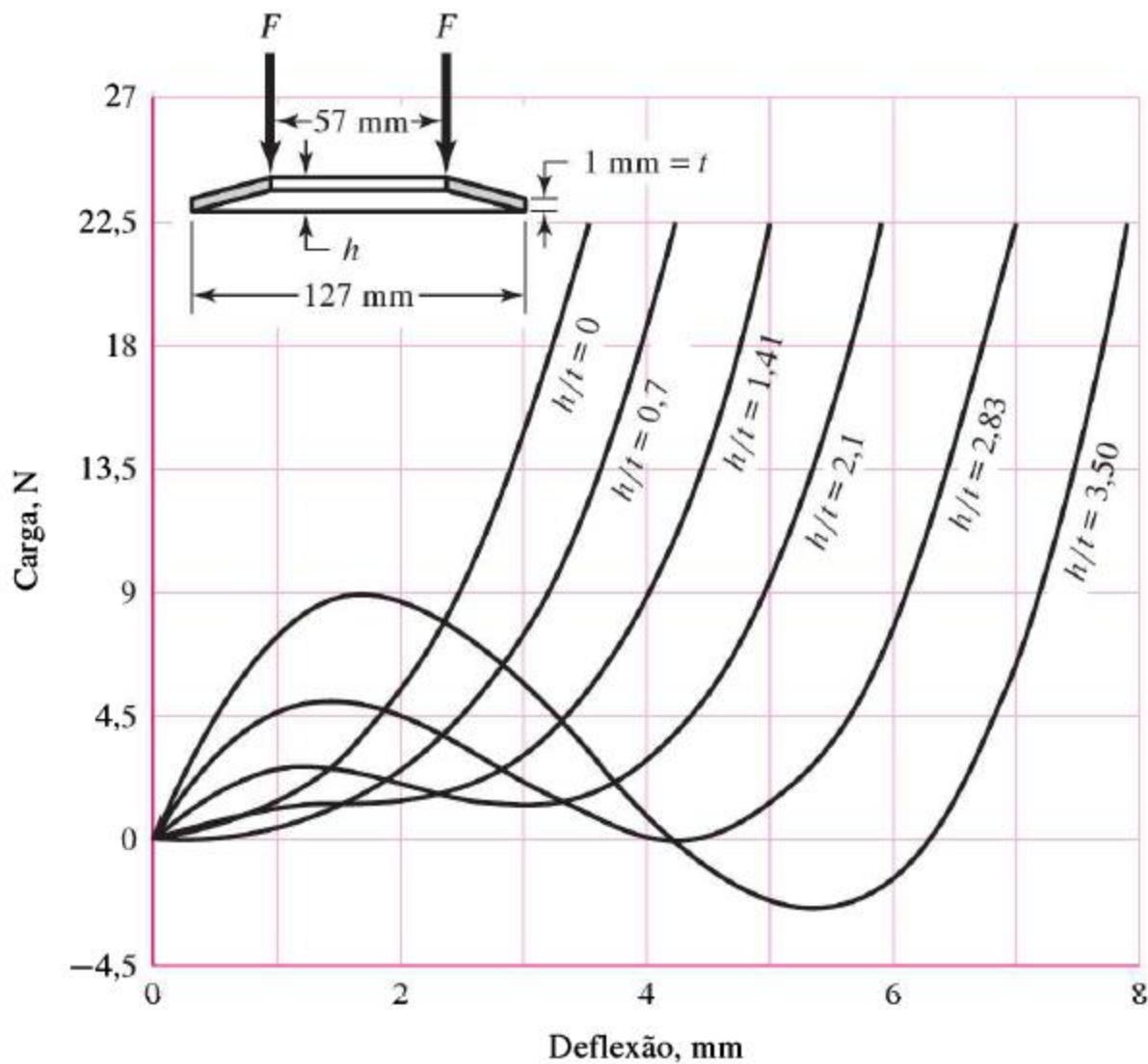
# 10.13 Molas Belleville



# 10.13 Molas Belleville

**Figura 10-12**

Curva carga-deflexão para molas Belleville.  
(Cortesia da Associated Spring.)



## 10.13 Molas Belleville

- Vantagem: ocupa pouco espaço;
- Variando a razão  $h/t$ , obtém-se uma ampla variedade de curvas carga-deflexão. Exemplo:  $h/t > 2,83$  resulta numa curva em S, que pode ser útil para mecanismo de ação de fechamento;  $h/t$  entre 1,41 e 2,1 faz a porção central da curva se tornar horizontal (carga constante sobre um considerável trecho de deflexão).

## 10.13 Molas Belleville

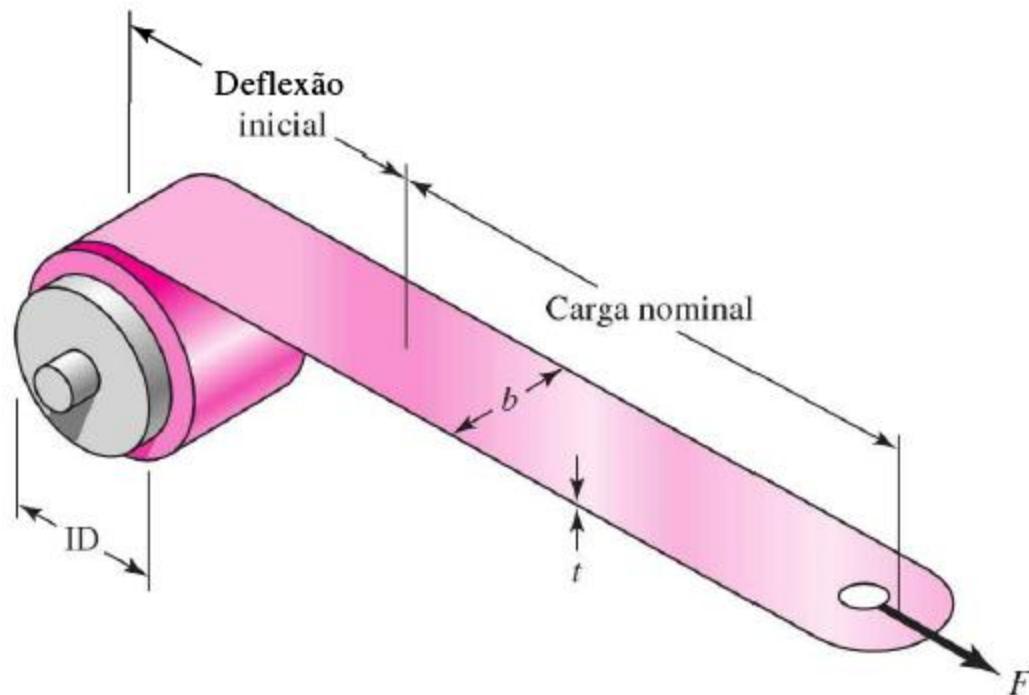
- Empilhamento de molas em paralelo (aninhamento) permite uma carga mais elevada para uma dada deflexão;
- Empilhamento em série produz deflexão maior para a mesma carga, mas pode gerar instabilidade.

# 10.14 Molas diversas

## Mola de extensão

**Figura 10-13**

Mola de força constante.  
(Cortesia da *Vulcan Spring & Mfg. Co.*, Telford, PA,  
[www.vulcanspring.com](http://www.vulcanspring.com).)



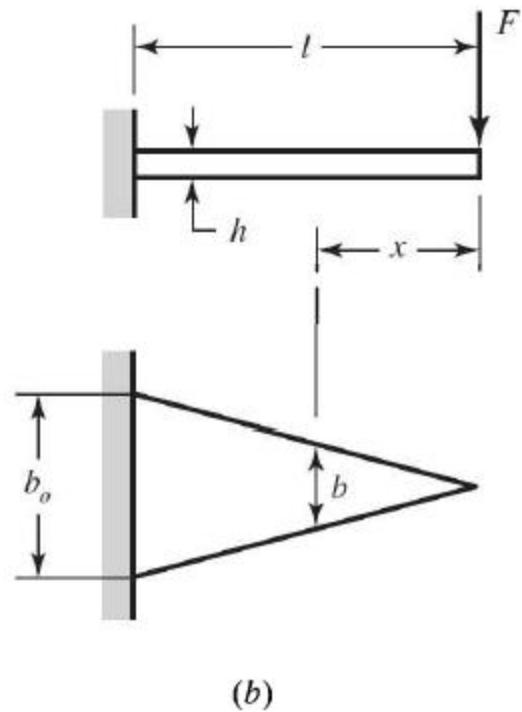
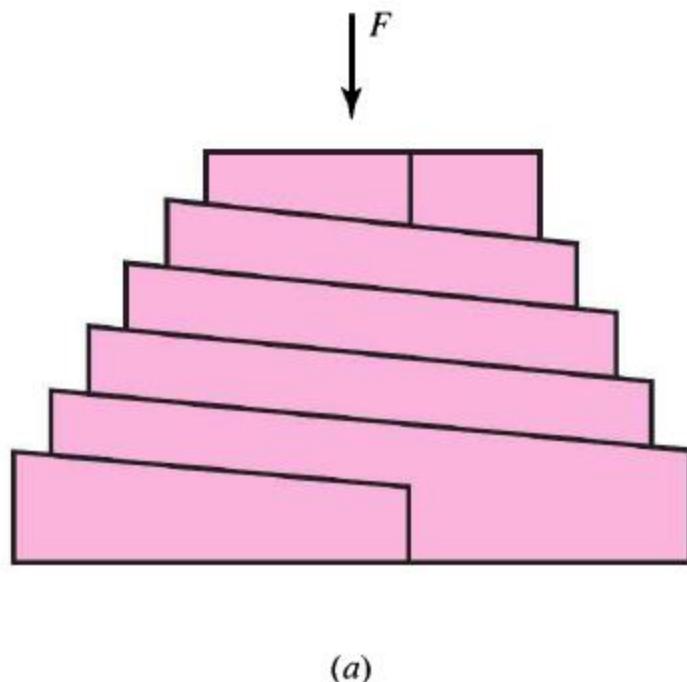
## 10.14 Molas diversas

- Figura 10-13: Mola de extensão
  - Força requerida para desenrolá-la permanece constante (equivale a  $k = 0$ );
  - Pode ser manufaturada para ter constante positiva ou negativa.

# 10.14 Molas diversas

**Figura 10-14**

- (a) Uma mola de voluta;  
(b) uma mola triangular plana.



## 10.14 Molas diversas

**Mola de voluta** (Figura 10.14a)



## 10.14 Molas diversas

- Altura sólida é igual à largura da tira;
- Uma mola de rigidez variável pode ser obtida ao se permitir que as espirais tenham contato com o apoio. À medida que a deflexão aumenta, o número de espirais ativas decresce;
- Se as espirais forem feitas de modo que deslizem umas sobre as outras, o atrito dinâmico servirá para amortecer vibrações.

## 10.14 Molas diversas

**Mola cônica** (Figura 10.14 b)



## 10.14 Molas diversas

- Normalmente são molas de compressão espirais enroladas com fio redondo (mola de voluta é uma mola cônica também);
- Seu comprimento sólido é o diâmetro do fio;
- Exemplos (matéria prima comum): Molas de relógio, de potência, de torção, molas em balanço e mola de cabelo (mola do balanço);
- Exemplos (forma especial): mola para prendedor de fusível, de relé, arruelas de mola, anéis de engate e retentores.

## 10.14 Molas diversas

- Ao projetar molas de tira ou materiais planos, o custo da mola é proporcional ao material, ou à rigidez desta. Para mola em balanço de seção uniforme:

$$\sigma = \frac{M}{I/c} = \frac{Fx}{I/c} \quad (a)$$

- Se  $I/c$  é constante,  $\sigma$  é proporcional a  $x$ ;
- Não é necessário  $I/c$  ser constante. Pode-se dimensionar uma mola como a da figura 10.14b.

## 10.14 Molas diversas

Mola da figura 10.14b:

- $h$  é constante, mas a largura é variável;
- Como  $I/c = bh^2/6$ , da equação (a):

$$\frac{bh^2}{6} = \frac{Fx}{\sigma}$$

ou

$$b = \frac{6Fx}{h^2\sigma} \quad (b)$$

Como  $b$  varia linearmente com  $x$ :

$$b_o = \frac{6Fl}{h^2\sigma} \quad (10-62)$$

## 10.14 Molas diversas

- Boas aproximações podem ser encontradas usando Teorema de Castigliano;
- Supondo a deflexão de uma mola triangular plana seja devido à flexão e desprezando a força de cisalhamento transversal:
  - O momento fletor é:  $M = -Fx$
  - A largura é:  $b = b_0 x / l$

## 10.14 Molas diversas

- A deflexão é dada pela equação (4-25):

$$y = \int_0^l \frac{M(\partial M / \partial F)}{EI} dx = \frac{1}{E} \int_0^l \frac{-Fx(-x)}{\frac{1}{12}(b_o x/l)h^3} dx \quad (10-63)$$

$$= \frac{12Fl}{b_o h^3 E} \int_0^l x dx = \frac{6Fl^3}{b_o h^3 E}$$

- A constante de mola  $k = F/y$  é estimada como:

$$k = \frac{b_o h^3 E}{6l^3} \quad (10-64)$$