Medidas resumo

Luan D. Fiorentin

Universidade Federal do Paraná
Departamento de Estatística
Laboratório de Estatística e Geoinformação

21/08/2019

Sumário

Introdução

- Características importantes de qualquer conjunto de dados ou de uma variável aleatória:
  - Centro;
  - Variação;
  - Distribuição;
  - Valores atípicos.

Introdução

- Características importantes de qualquer conjunto de dados ou de uma variável aleatória:
    - Centro;
    - Variação;
    - Distribuição;
    - Valores atípicos.

- Classificaremos as medidas descritivas em dois grupos:
    - Medidas de posição.
    - Medidas de dispersão.

Sumário

Definição

- Medidas de posição central:
    - Úteis para **resumo** e **análise** de dados.
    - As principais medidas são a média, mediana e moda.
- Outras medidas de posição:
    - Extremos: mínimo e máximo.
    - Quantis: 1° quartil, 3° quartil, percentil 5%, entre outras, ...

Moda

- Valor **mais frequente** em um conjunto de dados.
- Dependendo do conjunto de dados, ele pode ser
  - **Sem moda** quando nenhum valor se repete;
  - **Unimodal** quando existe apenas um valor repetido com maior frequência;
  - **Bimodal** quando existem dois valores com a mesma maior frequência;
  - **Multimodal** quando mais de dois valores se repetem com a mesma frequência.

Moda

- Valor **mais frequente** em um conjunto de dados.
- Dependendo do conjunto de dados, ele pode ser
  - **Sem moda** quando nenhum valor se repete;
  - **Unimodal** quando existe apenas um valor repetido com maior frequência;
  - **Bimodal** quando existem dois valores com a mesma maior frequência;
  - **Multimodal** quando mais de dois valores se repetem com a mesma frequência.
- Valor com **maior probabilidade** de ocorrer numa **VA discreta**.
  - Exemplo: lançamento de duas moedas:
    - X: número de caras, $X = \{0, 1, 2\}$.
    - $P(x) = 0.25$, 0.5 e 0.25, respectivamente.
    - Moda: 1.

Mediana

- O **valor do meio** da amostra **ordenada**.
- Separa o conjunto de dados em duas partes iguais, 50% abaixo e 50% acima.
- Considerando as observações ordenadas, denotamos:
  - A menor observação por $x_{(1)}$, a segunda por $x_{(2)}$, e assim por diante:

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(n-1)} \leq x_{(n)}$$

- As observações odenadas são chamadas de **estatísticas de ordem**
  - $x_{(1)}$ é o mínimo da amostra.
  - $x_{(n)}$ é o máximo da amostra.

Média de dados brutos

- Divide-se a soma de todos os dados pelo número total deles:

$$\bar{x}_{obs} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

Média de dados agrupados

- Soma dos produtos dos valores pelas respectivas frequências e divide pela frequência total

$$\bar{x}_{obs} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \cdots + n_k x_k}{n_1 + n_2 + \cdots + n_k} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n}.$$

Exemplo: média de dados discretos agrupados

- Considere a tabela de frequência abaixo:

Número	n_i	f_i
0	4	0,20
1	5	0,25
2	7	0,35
3	3	0,15
5	1	0,05
Total	20	1

A média é calculada por:

$$\bar{x}_{obs} = \frac{0 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 1}{4 + 5 + 7 + 3 + 1} = \frac{33}{20}$$
$$= 1,65$$

Exemplo: média de dados agrupados em classes

- Usar **ponto médio** de cada classe e respectivas frequências

Classe	**PM** $= x_i$	n_i	f_i
$[4, 8)$	6	10	0,278
$[8, 12)$	10	12	0,333
$[12, 16)$	14	8	0,222
$[16, 20)$	18	5	0,139
$[20, 24)$	22	1	0,028
Total	36	1	

Considerando os **pontos médios** de cada classe, a média é calculada por

$$\bar{x}_{obs} = \frac{(6 \cdot 10 + 10 \cdot 12 + \cdots + 22 \cdot 1)}{10 + 12 + 8 + 5 + 1} = \frac{404}{36}$$
$$= 11, 22$$

Exemplo 4.1 do livro

Suponha que parafusos a serem utilizados em tomadas elétricas são embalados em caixas rotuladas como contendo 100 unidades. Em uma construção, 10 caixas de um lote tiveram o número de parafusos contados, fornecendo os valores:

$$amostra = (98, 102, 100, 100, 99, 97, 96, 95, 99, 100)$$

- Calcular média, mediana e moda:
  - $\bar{x}_{obs} = 98.6.$
  - $md_{obs} = 99.$
  - $mo_{obs} = 100.$

Média e mediana

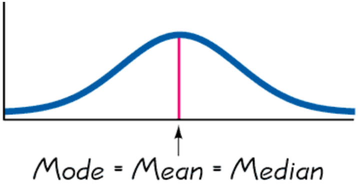
- Notar a influência de valores extremos na média (se ao invés de 95, o valor fosse 45):

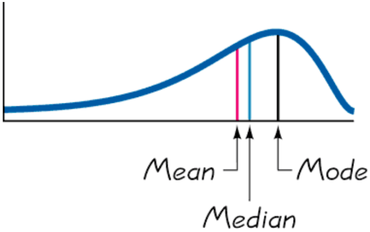
$$95 \quad 96 \quad 97 \quad 98 \quad 99 \quad 99 \quad 100 \quad 100 \quad 100 \quad 102 \quad \Rightarrow \quad \bar{x}_{obs} = 98,6 \text{ e } Md = 99$$

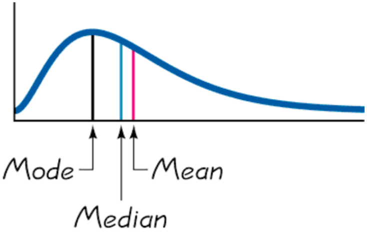
$$45 \quad 96 \quad 97 \quad 98 \quad 99 \quad 99 \quad 100 \quad 100 \quad 100 \quad 102 \quad \Rightarrow \quad \bar{x}_{obs} = 93,6 \text{ e } Md = 99$$

- Devido a esse fato, a mediana é uma medida de posição central **robusta**, ou seja, *não é influenciada por valores extremos*.

Média, mediana e moda







Exemplo 4.3 do livro

Foram coletadas 150 observações da variável X, representando o número de vestibulares FUVEST (um por ano) que um mesmo estudande prestou. Com os dados da tabela abaixo, calcule as medidas de posição de X.

X	n_i
1	75
2	47
3	21
4	7

Ainda, suponha que o interesse é estudar o gasto dos alunos associado com as despesas do vestibular. Para simplificar, suponha que se atribui, para cada aluno, uma despesa fixa de R$ $1300,00$ relativa a preparação e mais R$ 50 para cada vestibular prestado. Calcule as medidas de posição central para a variável D (despesa com vestibular).

Exemplo 4.4 do livro

Um estudante está procurando um estágio para o próximo ano. As companhias A e B têm programas de estágios e oferecem uma remuneração por 20 horas semanais com as seguintes características:

Companhia	A	B
média	$2,5$	$2,0$
mediana	$1,7$	$1,9$
moda	$1,5$	$1,9$

- Qual companhia você escolheria?

Medidas de posição para VAs discretas

- Sabemos que a descrição completa do comportamento de uma VA discreta é feita através de sua **função de probabilidade**.
- Assim como fizemos para um conjunto de dados qualquer, podemos obter as medidas de posição para qualquer variável aleatória.
- Considerando que os possíveis valores de uma VA X são $x_1, x_2, \ldots, x_k$, com correspondentes probabilidades $p_1, p_2, \ldots, p_k$, então as medidas de posição podem ser definidas a seguir.

Medidas de posição para VAs discretas:

- A Média é chamada de **valor esperado** ou **esperança**

$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i.$$

- A Mediana é o valor *Md* que satisfaz as seguintes condições

$$P(X \leq Md) \geq 1/2 \quad \text{e} \quad P(X \geq Md) \geq 1/2.$$

- A Moda é o valor (ou valores) com maior probabilidade de ocorrência

$$P(X = Mo) = \max\{p_1, p_2, ..., p_k\}.$$

Exemplo 4.5 do livro

Considere a VA X com a seguinte função discreta de probabilidade:

X	-5	10	15	20
p_i	0.3	0.2	0.4	0.1

- Calcule as medidas de tendência central.

Exemplo 4.6 do livro

Considere uma VA X com função de probabilidade dada por

X	2	5	8	15	20
p_i	0.1	0.3	0.2	0.2	0.2

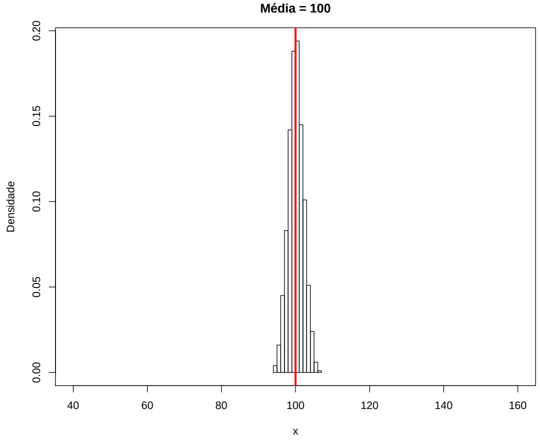
- Calcule as medidas de posição para a VA Y, em que $Y = 5X - 10$.

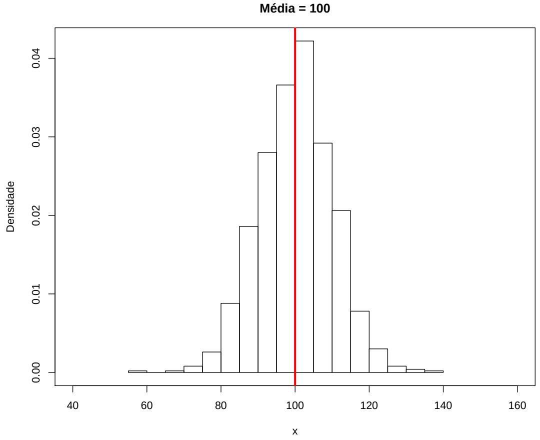
Sumário

Introdução

- O resumo de um conjunto de dados exclusivamente por uma medida de centro, **esconde** toda a informação sobre a variabilidade do conjunto de observações.
- Não é possível analisar um conjunto de dados apenas através de uma medida de tendência central.
- Por isso precisamos de medidas que resumam a **variabilidade** dos dados em relação à um valor central.

Exemplo: mesma média, diferente dispersão





Exemplo 3.2 do livro do Bussab e Morettin

Cinco grupos de alunos se submeteram a um teste, obtendo as seguintes notas

Grupo	**Notas**	$\bar{x}$
A	3, 4, 5, 6, 7	5
B	1, 3, 5, 7, 9	5
C	5, 5, 5, 5, 5	5
D	3, 5, 5, 7	5
E	3, 5, 5, 6, 6	5

- O que a média diz a respeito das notas quando comparamos os grupos?

Definição

- São medidas estatísticas que caracterizam o quanto um conjunto de dados está disperso em torno de sua tendência central.
- Ferramentas para **resumo** e **análise** de dados:
    - Amplitude;
    - Desvio-médio (ou mediano);
    - Variância;
    - Desvio-padrão;
    - Coeficiente de Variação.

Amplitude

- A **amplitude** de um conjunto de dados é a diferença entre o maior e o menor valor:

$$\Delta = \max - \min = x_{(n)} - x_{(1)}$$

Grupo	**Notas**	**Δ**
A	3, 4, 5, 6, 7	4
B	1, 3, 5, 7, 9	8
C	5, 5, 5, 5, 5	0
D	3, 5, 5, 7	4
E	3, 5, 5, 6, 6	3

- **Apenas** usar máximo e mínimo torna a medida **sensível** a valores extremos.
  - Melhor medida de variabilidade: considerar **todos os dados disponíveis**.
  - **Desvio** de cada valor em relação à uma medida de posição central (média ou mediana).

Desvio médio e mediano

- Um **resumo** da variabilidade: **média** dos desvios **absolutos**:
- **Desvio mediano**: a **mediana** como medida de posição central

$$\text{desvio mediano} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - md_{obs}|.$$

- **Desvio médio**: a **média** como medida de posição central

$$\text{desvio médio} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \bar{x}_{obs}|.$$

Exemplo: Desvio médio

Considere as notas do grupo A do exemplo anterior ($\bar{x}_{obs} = 5$).

O desvio médio (DM) pode ser calculado da seguinte forma:

Grupo A	$x_i - \bar{x}$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$
3	-2	2
4	-1	1
5	0	0
6	1	1
7	2	2
Soma	0	6

$$\text{DM} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \lvert x_i - \bar{x}_{obs} \rvert = \frac{6}{5} = 1,2$$

- O desvio médio é baseado em uma operação **não algébrica** (módulo), o que torna mais difícil o estudo de suas propriedades.

Variância de um conjunto de dados

- Uma alternativa melhor é usar a **soma dos quadrados dos desvios**, que dá origem à **variância** de um conjunto de dados

$$var_{obs} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_{obs})^2.$$

- Uma expressão alternativa da variância (mais fácil de calcular) é

$$var_{obs} = \hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}_{obs}^2$$

Desvio-padrão de um conjunto de dados

- Para manter a mesma unidade de medida dos dados originais, definimos o **desvio padrão** como

$$dp_{obs} = \hat{\sigma} = s = \sqrt{var_{obs}}.$$

- O desvio padrão é mais interpretável em um primeiro momento porque é dado na mesma unidade de medida dos dados originais.

Exemplo

No exemplo anterior:

Grupo A	$x_i - \bar{x}$	$\|x_i - \bar{x}\|$	$(x_i - \bar{x})^2$	x_i^2
3	-2	2	4	9
4	-1	1	1	16
5	0	0	0	25
6	1	1	1	36
7	2	2	4	49
Soma	0	6	10	135

- A variância é:

$var_{obs} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_{obs})^2 = \frac{10}{5} = 2.$

Usando a fórmula alternativa, temos que

$var_{obs} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}_{obs}^2 = \frac{135}{5} - 5^2 = 2.$

Coeficiente de variação

- O **coeficiente de variação** para um conjunto de dados é definido por

$$cv_{obs} = \frac{dp_{obs}}{\bar{x}_{obs}}.$$

- É uma medida **adimensional**, e geralmente apresentada na forma de porcentagem como

$$cv_{obs} = \frac{dp_{obs}}{\bar{x}_{obs}} \cdot 100.$$

Exemplo

No exemplo anterior, temos que $dp_{obs} = \sqrt{var_{obs}} = \sqrt{2} = 1,414214$.

- O desvio padrão é:

$$cv_{obs} = \frac{dp_{obs}}{\bar{x}_{obs}} = \frac{1,414214}{5} = 0,2828427 \approx 28,3\%.$$

Variância em tabelas de frequência

- Assim como no caso da média, se tivermos n observações da variável X, das quais n_1 são iguais a x_1, n_2 são iguais a x_2, ..., n_k são iguais a x_k, então a variância pode ser definida por

$$var_{obs}(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \bar{x}_{obs})^2.$$

- Pela fórmula alternativa, temos que

$$var_{obs}(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - \bar{x}_{obs}^2.$$

Exemplo

Como exemplo, considere a tabela de frequência abaixo, com média $\bar{x} = 1,65$:

Número	n_i	f_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
0	4	0,20	-1,65	2,72
1	5	0,25	-0,65	0,42
2	7	0,35	0,35	0,12
3	3	0,15	1,35	1,82
5	1	0,05	3,35	11,22
Total	20	1		

- A variância é calculada por:

$$\begin{aligned} var_{obs} =& \frac{(4 \cdot 2,72 + 5 \cdot 0,42 + \cdots + 1 \cdot 11,22)}{4+5+7+3+1} = \frac{30,55}{20} \\ =& 1,528. \end{aligned}$$

Exemplo

Considere a seguinte tabela de distribuição de frequência, com média $\bar{x} = 11,22$:

Classe	**PM** $= x_i$	n_i	f_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
$[4, 8)$	6	10	0,278	-5,222	27,272
$[8, 12)$	10	12	0,333	-1,222	1,494
$[12, 16)$	14	8	0,222	2,778	7,716
$[16, 20)$	18	5	0,139	6,778	45,938
$[20, 24)$	22	1	0,028	10, 778	116,160
Total		36	1		

Considerando os **pontos médios** de cada classe como os valores x_i, a variância pode ser calculada por

$$var_{obs} = \frac{(10 \cdot 27,272 + 12 \cdot 1,494 + \cdots + 1 \cdot 116,160)}{10 + 12 + 8 + 5 + 1} = \frac{698,22}{36}$$
$$= 19,395.$$

Exemplo 4.9 do livro

No Exemplo 4.3, definimos a quantidade D, despesa no vestibular, obtida a partir de X pela expressão $D = 50X + 1300$, com X indicando o número de vestibulares prestados.

X	n_i
1	75
2	47
3	21
4	7

- Calcule a variância de D.
- Calcule a variância do Exemplo 4.10 do livro.

Variância de uma VA discreta

- Calcular o valor esperado

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i.$$

- Multiplicar o quadrado dos desvios em torno do valor esperado pela probabilidade e somar

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 p_i.$$

- Alternativamente, podemos usar

$$Var(X) = E[(X - \mu)^2] = E(X^2) - E(X)^2$$

com $E(X^2) = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 p_i$.

Exemplo 4.11 do livro

Uma pequena cirurgia dentária pode ser realizada por três métodos diferentes cujos tempos de recuperação (em dias) são modelados pelas variáveis X_1, X_2 e X_3. Admita suas funções de probabilidades dadas por

X_1	0	4	5	6	10
p_i	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

X_2	1	5	9
p_i	1/3	1/3	1/3

X_3	4	5	6
p_i	0.3	0.4	0.3

- Calcule as medidas de posição central e dispersão para cada VA e decida sobre o método mais eficiente.

Propriedades da média e da variância

Conjunto de Dados	Variável Aleatória
$Y = a \cdot X + b$	$Y = a \cdot X + b$
$\bar{y} = a \cdot \bar{x} + b$	$E[Y] = a \cdot E[X] + b$
$s^2(Y) = a^2 \cdot s^2(X)$	$s^2(Y) = a^2 \cdot s^2(X)$

Sumário

Exercícios recomendados

- Seção 4.2: Ex. 1, 2, 3, 4 e 6.
- Seção 4.3: Ex. 1, 2, 3, 4 e 5.
- Extras: Seção 4.4: Ex. 1, 2, 4, 7, 10 e 19.