Estatística Básica

Lista 4 - Variáveis Aleatórias

Luan Fiorentin

2019-03-17

1. Escreva com suas palavras o que é função de probabilidade, função de densidade de probabilidade e função de distribuição.
2. Considere a variável X como o lançamento de um dado e responda os itens a seguir:
   (a) Faça um gráfico da função de probabilidade.
   (b) Faça um gráfico da função de distribuição.
   (c) Qual a probabildiade de $X = 2$?
   (d) $P(X < 5)$.
   (e) $P(X < 4)$ ou $P(X > 5)$.
   (f) Qual a esperança de X?
3. Uma variável aleatória X tem a seguinte função de distribuição:

$$F(X) \begin{cases} 0 & se \quad x < 10 \\ 0,2 & se \quad 10 \leq x < 12 \\ 0,5 & se \quad 12 \leq x < 13 \\ 0,9 & se \quad 13 \leq x < 25 \\ 1,0 & se \quad \geq 25 \end{cases}$$

   (a) Encontre a função de probabilidade de X.
   (b) $P(X \leq 12)$.
   (c) $P(X < 12)$.
   (d) $P(12 \leq X \leq 20)$.
   (e) $P(X > 18)$.
4. Considere que uma Universidade Federal possui 10.000 alunos estudantes, e considere uma V. A. X: número de aprovações que um aluno selecionado ao acaso teve no período passado. A frequência absoluta está apresentada na tabela abaixo. Responda os itens a seguir.

X	2	3	4	5	6
Frequência	800	2000	4000	2800	400

   (a) Encontre a função de probabilidade de X.
   (b) Faça um gráfico da função de probabilidade.
   (c) Faça um gráfico da função de distribuição.
   (d) Qual a probabilidade de um aluno selecionado ao acaso ser aprovado em até 4 disciplinas.
   (e) Qual o valor médio esperado de aprovações por aluno?
   (f) Qual a variância do número de aprovações por aluno?
   (g) Qual o desvio padrão do número de aprovações por aluno?

(h) Qual o coeficiente de varição do número de aprovações por aluno?

5. Em um estudo sobre incidência de câncer, foi registrado para cada paciente com esse diagnóstico o número de casos de câncer em parentes próximos (X) dados na tabela a seguir.

Paciente	Incidência	Paciente	Incidência	Paciente	Incidência	Paciente	Incidência
1	2	8	3	15	5	22	4
2	5	9	3	16	2	23	0
3	0	10	2	17	2	24	0
4	2	11	0	18	3	25	3
5	1	12	1	19	2	29	3
6	5	13	1	20	1		
7	3	14	4	21	5		

(a) Encontre a função de probabilidade de X.

(b) Encontre a função de distribuição.

(c) Qual o número esperado de casos de câncer em parentes próximos?

6. Verifique se as expressões a seguir são funções de densidade de probabilidade:

(a) $f(x) = 3x$, se $0 \leq x \leq 1$.

(b) $f(x) = x^2/2$, se $x \geq 0$.

(c) $f(x) = (x - 3)/2$, se $3 \leq x \leq 5$.

(d) $f(x) = 2$, se $0 \leq x \leq 2$.

7. Considere uma variável aleatória X com função de densidade de probabilidade dada a seguir. Determine o valor de c.

$$f(x) = c(x^2 + x), \quad se \quad (0 \leq x \leq 1).$$

8. Dada a função

$$f(x) = 2exp\{-2x\}, \quad se \quad x \geq 0.$$

(a) Mostre que é uma função de densidade de probabilidade.

(b) Calcule a probabilidade de $x > 1$.

(c) Calcule a probabilidade de que $0,2 \leq x \leq 0.8$.

9. A quantia gasta anualmente, em milhões de reais, na manutenção do asfalto em uma cidade do interior é representada pela variável Y com densidade dada por:

$$f(y) = \frac{8y}{9} - \frac{4}{9} \quad se \quad (0,5 \leq x \leq 2,0).$$

(a) $P(Y < 0,8)$.

(b) O valor esperado de Y.

(c) $P(Y > 1,5|Y \geq 1)$.

10. Seja X uma variável aleatória com distribuição Bernoulli de parâmetro p. Mostre que $E[X] = p$ e $V[X] = p(1 - p)$. Considere a seguinte parametrização:

$$p(x) = p^x(1 - p)^{1-x}, \quad x = \{0, 1\}, p \in (0, 1)$$

11. Seja X uma variável aleatória com distribuição Uniforme e parâmetros $(0, \theta)$. Mostre que $E[X] = \frac{\theta}{2}$ e $Var[X] = \frac{\theta^2}{12}$. Considere a seguinte parametrização:

$$f(x) = \frac{1}{(\theta - 0)}$$

12. Seja X uma variável aleatória com distribuição Exponencial e parâmetro (θ). Mostre que $E[X] = \frac{1}{\theta}$ e $Var[X] = \frac{1}{\theta^2}$. Considere a seguinte parametrização:

$$f(x) = \theta e^{-\theta x}, \theta > 0, x \in \mathbb{R}^+$$

13. Mostre que $E[cX] = cE[X]$, tanto para variável discreta quanto contínua.
14. Mostre que $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$, tanto para variável discreta quanto contínua.
15. Mostre que $V[X+Y] = V[X] + V[Y]$.
16. Mostre que $V[cX] = c^2V[X]$.