Estatística Básica

Lista 5 GABARITO - Distribuições de Probabilidade

Luan Fiorentin

2019-03-17

1. Uma caixa tem 20 bolas azuis e 30 verdes. Retira-se uma bola dessa caixa. Seja X o número de bolas verdes.

    (a) Escreva a expressão da $P(X = x)$.

    (b) Determine a probabilidade de retirar uma bola verde.

    (c) Determine a probabilidade de não retirar uma bola verde.

    Resposta:

    (a) $P(X = x) = p^x q^{1-x}, \quad x = 0, 1.$

    (b) $P(X = 1) = (0,60)^1(0,40)^{1-1} = 0,60.$

    (c) $P(X = 0) = (0,60)^0(0,40)^{1-0} = 0,40.$

2. Discuta a validade do modelo Binomial nos seguintes casos:

    (a) Dos alunos de uma grande universidade, sortea-se 5 e conta-se quantos se declaram usuários de drogas?

    (b) Escolhemos 20 lâmpadas ao acaso na prateleira de um supermercado, sendo 10 de uma fábrica e 10 de outra. Contamos o número total de defeituosas.

    (c) Quinze automóveis 0 km de uma mesma marca e tipo são submetidos a um teste antipoluição e contamos o número de deles que passaram no teste.

    (d) Um motorista é submetido a um teste em que deve estacionar seu veículo num pequeno espaço. Em 10 tentativas, contamos o número de vezes em que o motorista estacionou corretamente.

    Resposta:

    (a) Possível, supondo independência e mesma probabilidade de resposta positiva.

    (b) Não aplicável.

    (c) Sim, se todos usam o mesmo combustível.

    (d) Não, pois o motorista aprende a cada teste.

3. Uma moeda é lançada 6 vezes. Qual a probabilidade de:

    (a) Ocorrer exatamente 2 caras?

    (b) Ocorrer pelo menos 4 caras?

    (c) Ocorrer pelo menos 1 cara?

    Resposta:

    (a) $P(X = 2) = 0,234.$

    (b) $P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) = 0,234 + 0,094 + 0,016 = 0,344.$

    (c) $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,016 = 0,984.$

4. Em um determinando município, há uma probabilidade de 0,70 de uma empresa de materiais recicláveis ter seguro contra incêndio. Qual a probabilidade de que, dentre cinco empresas:

(a) Nenhuma tenha seguro contra incêndio?

(b) Exatamente quatro tenham seguro contra incêndio?

Resposta:

(a) $P(X = 0) = 0,002$.

(b) $P(X = 4) = 0,360$.

5. Sabe-se que 5% das válvulas fabricadas em uma indústria são defeituosas. Para um lote de 4 válvulas, calcule a probabilidade de:

   (a) Exatamente 2 serem defeituosas?

   (b) Qual a média do número de válvulas defeituosas?

   (c) Qual o desvio padrão do número de válvulas defeituosas

   Resposta:

   (a) $P(X = 2) = 0,014$.

   (b) $P(X = 4) = 0,360$.

   (c) $\mu = E[X] = np = 4 \cdot 0,05 = 0,20$.

   (d) $\sigma^2 = Var[X] = npq = np(1-p) = 4 \cdot 0,05 = 0,19$.

6. Uma variável aleatória Y segue uma distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda = 2$.

   (a) $P(Y < 2)$.

   (b) $P(2 \leq Y < 4)$.

   (c) $P(Y > 0)$.

   (d) $P(Y = 1|Y < 3)$.

   Resposta:

   (a) $P(X < 2) = 0,406$.

   (b) $P(2 \leq Y < 4) = 0,451$.

   (c) $P(Y > 0) = 0,865$.

   (d) $P(Y = 1|Y < 3) = 0,400$.

7. Verificou-se que a probabilidade de falha de um transistor em um instrumento eletrônico, durante uma hora de operação, é igual a 0,005.

   (a) Calcular a probabilidade de não haver falhas em 60 horas de operação.

   (b) Calcule a probabilidade do número de falhas ser inferior ou igual a 2 falhas em 60 horas?

   Resposta:

   (a) Para $p = 0,005$, tem-se que $\mu = np = 60 \cdot 0,005 = 0,30$.

   Logo, $P(X = 0) = 0,741$.

   (b) $P(X \leq 2) = 0,996$.

8. Numa central telefônica, o número de chamadas chega segundo uma distribuição de Poisson, com a média de oito chamadas por minuto. Determinar qual a probabilidade de que num minuto se tenha:

   (a) Três ou mais chamadas.

   (b) Menos que 2 chamadas.

(c) Entre 3 (inclusive) e 5 (exclusive) chamadas.

Resposta:

(a) $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 0,986$.

(b) $P(X < 2) = 0,003$.

(c) $P(3 \leq X < 5) = 0,086$.

9. Suponha que a probabilidade de que um item produzido por uma máquina seja defeituoso é de 0,2. Se dez itens produzidos por essa máquina são selecionados ao acaso, qual é a probabilidade de que não mais do que um defeituoso seja encontrado? Use a distribuição Binomial e a distribuição de Poisson e compare os resultados.

   Resposta:

   Para a distribuição binomial, tem-se que $p = 0,2$ e $n = 10$. Como o interesse está em encontrar a probabilidade de que não mais do que um item seja defeituoso, então calcula-se $P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,376$.

   Para a distribuição Poisson, tem-se que $\lambda = np = 0,2 \cdot 10 = 2$. Então, $P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,406$.

   Note que os valores de probabilidade são parecidos. Esse resultado ocorre porque a distribuição Binomial pode ser aproximada pela distribuição Poisson sempre que n é grande e p pequeno. Assim, quando maior n e menor p, melhor é a aproximação.

10. Por engano, três peças defeituosas foram misturadas com peças boas formando um lote com 12 peças no total. Ao acaso, 4 peças foram selecionadas do lote. Note que a variável aleatória número de peças defeituosas em um lote segue uma distribução hipergeométrica.

    (a) Qual a probabilidade de pelo menos 2 peças serem defeituosas.

    (b) Qual a probabilidade de no máximo 1 peça ser defeituosa.

    Resposta:

    (a) $P(D \geq 2) = 0,236$.

    (b) $P(D \leq 1) = 0,764$.

11. Sendo $X\ Exp(1)$.

    (a) $P(0 < X < 2)$.

    (b) $P(X < 2)$.

    (c) $P(1 < X < 4)$.

    (d) $P(X > 3)$.

    (e) $P(X < 2|X > 1)$.

    Resposta:

    (a) $P(0 < X < 2) = 0,865$.

    (b) $P(X < 2) = 0,865$.

    (c) $P(1 < X < 4) = 0,350$.

    (d) $P(X > 3) = 0,050$.

    (e) $P(X < 2|X > 1) = 0,633$.

12. Uma indústria fabrica lâmpadas especiais que ficam em operação continuamente. A empresa oferece a seus clientes a garantia de reposição, caso a lâmpada dure menos de 50 horas. A vida útil dessas lâmpadas é modelada através da distribuição Exponencial com parâmetro 1/8000.

    (a) Determine a proporção de trocas por defeito de fabricação.

    (b) Qual a duração média das lâmpadas?

    (c) Qual a variância da duração das lâmpadas?

    (d) Qual o desvio padrão da duração das lâmpadas?

    Resposta:

    (a) $0,006$ ou 0,6 %.

    (b) $\mu = 1/\alpha = 8.000$ horas.

    (c) $\sigma^2 = 1/\alpha^2 = 64.000.000$ $horas^2$.

    (d) $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 8.000$ $horas$.

13. O intervalo de tempo, em minutos, entre emissões consecutivas de uma fonte radioativa é uma variável aleatória com distribuição Exponencial de parâmetro $\alpha = 1/5$. Calcule a probabilidade de haver uma emissão em um intervalo inferior a 2 minutos.

    Resposta:

    Calcula-se a integral para encontrar a $P(X < 2) = P(0 < X < 2) = 0,33$.

14. Seja $X \sim N(4, 1)$.

    (a) $P(X \leq 4)$.

    (b) $P(4 < X < 5)$.

    (c) $P(2 \leq X < 5)$.

    (d) $P(5 \leq X \leq 7)$.

    (e) $P(X \leq 1)$.

    (f) $P(0 \leq X \leq 2)$.

    Resposta:

    (a) $P(X \leq 4) = 0,500$.

    (b) $P(4 < X < 5) = 0,341$.

    (c) $P(2 \leq X < 5) = 0,819$.

    (d) $P(5 \leq X \leq 7) = 0,157$.

    (e) $P(X \leq 1) = 0,001$.

    (f) $P(0 \leq X \leq 2) = 0,022$.

15. Seja $X \sim N(90, 100)$.

    (a) $P(X \leq 115)$.

    (b) $P(X > 80)$.

    (c) $P(X < 75)$.

    (d) $P(85 \leq X \leq 110)$.

    Resposta:

(a) $P(X \leq 115) = 0,994$.

(b) $P(X > 80) = 0,841$.

(c) $P(X < 75) = 0,067$.

(d) $P(85 \leq X \leq 110) = 0,669$.

16. Um conjunto de pessoas que estão sofrendo de uma certa moléstia são submetidas a um tratamento intesivo cujo o tempo de cura foi modelado por uma distribuição Normal, de média 15 e desvio padrão 2 (em dias). A variável aleatória X foi o tempo de cura e, portanto, tem-se que $X \sim N(15, 4)$.

    (a) Qual a probabilidade de um paciente, escolhido ao acaso, demorar mais que 17 dias para se recuperar?

    (b) Qual a probabilidade de um paciente, escolhido ao acaso, apresentar tempo de recuperação inferior a 20 dias?

    Resposta:

    (a) $P(X > 17) = P\left(\frac{X-15}{\sqrt{4}} > \frac{17-15}{\sqrt{4}}\right) = P(Z > 1) = 0,159$.

    (b) $P(X < 20) = P\left(\frac{X-15}{\sqrt{4}} > \frac{20-15}{\sqrt{4}}\right) = P(Z > 2,5) = 0,994$.

17. A média pluviométrica durante o mês de Janeiro em uma cidade é de 86,8 milímetro. Suponha que uma distribuição Normal seja aplicável e que o desvio padrão seja de 20,3 mm. Em qual porcentagem do tempo a quantidade de chuva foi inferior a 76 mm em Janeiro?

    Resposta:

    $P(X < 76) = P\left(\frac{X-86{,}8}{20{,}3} > \frac{76-86{,}8}{20{,}3}\right) = P(Z < -0,53) = 0,298$.