Testes de Hipóteses

Luan Fiorentin

UFPR - DEST

2019-05-22

Sumário

Introdução

Objetivos gerais da **inferência estatística** são:

- **Estimar** um parâmetro populacional:
    - Estimativa pontual.
    - Estimativa intervalar.

- **Testar** afirmações ou **hipóteses** em relação a um parâmetro populacional.

- A realização de testes de hipóteses nos fornece meios para que possamos, com determinado **grau de certeza**, concluir se os **valores dos parâmetros** ou mesmo a **distribuição associada à população** considerada, podem representá-la de forma satisfatória.

Conceitos de Testes de Hipóteses

- **Hipótese** é uma **afirmação** a respeito da população ou de um parâmetro dessa população.

- **Teste de hipótese** é um **procedimento** para testar a afirmação sob um parâmetro.

- Permite **tomar decisões** quanto a população de interesse, baseado nas informações de dados amostrais.

Tipos de Hipóteses:

- **Hipótese da Nulidade** H_0: é a hipótese que está sendo testada. É uma afirmativa de que o valor de um parâmetro populacional (θ) é **igual** a algum valor especificado. (O termo nula é usado para indicar nenhuma mudança ou nenhum efeito).

Exemplo: Altura dos alunos da UFPR é $1,71$ m: $H_0 : \mu = 1,71$.

- **Hipótese Alternativa (H_1 ou H_a)**: é uma afirmativa de que o parâmetro tem um valor que, de alguma forma, **difere** da hipótese nula.

Exemplo: Altura dos alunos da UFPR difere de $1,71$ m:
$H_0 : \mu \neq 1,71$. Então, $H_0 : \mu < 1,71$ ou $H_0 : \mu > 1,71$.

Exercício 1

Identifique as hipóteses que estão sendo testadas.

1. A companhia de transporte afirma que, em média, o intervalo entre sucessivos ônibus é de 15 minutos. Uma associação de usuários de transportes coletivos acha que a pontualidade é muito importante e pretende testar a afirmação da companhia.
2. Os amortecedores de automóveis que circulam em cidades têm durabilidade média de 30 mil km, segundo informações de algumas oficinas especializadas. Um proprietário de automóvel deseja testar essa afirmação.
3. Um veterinário conseguiu ganho médio diário de 3 litros de leite por vaca com uma nova composição de ração. Um pecuarista acredita que o ganho não é tão grande assim.

Exercício 1

Identifique as hipóteses que estão sendo testadas.

1. $H_0 = \mu = 20$ contra $H_a = \mu \neq 20$.
2. $H_0 = \mu = 30$ contra $H_a = \mu \neq 30$.
3. $H_0 = \mu = 3$ contra $H_a = \mu < 3$.

Exemplo:

Suponha que, entre pessoas **sadias**, a concentração de certa substância no sangue se comporta segundo um **modelo Normal** com média 14 unidades/ml e desvio padrão 6 unidades/ml.

Pessoas sofrendo de uma **doença** específica tem concentração média da substância alterada para 18 unidades/ml. Admitimos que o **modelo Normal**, com desvio padrão de 6 unidades/ml, continua representado de forma adequada a concentração da substância em pessoas com a doença.

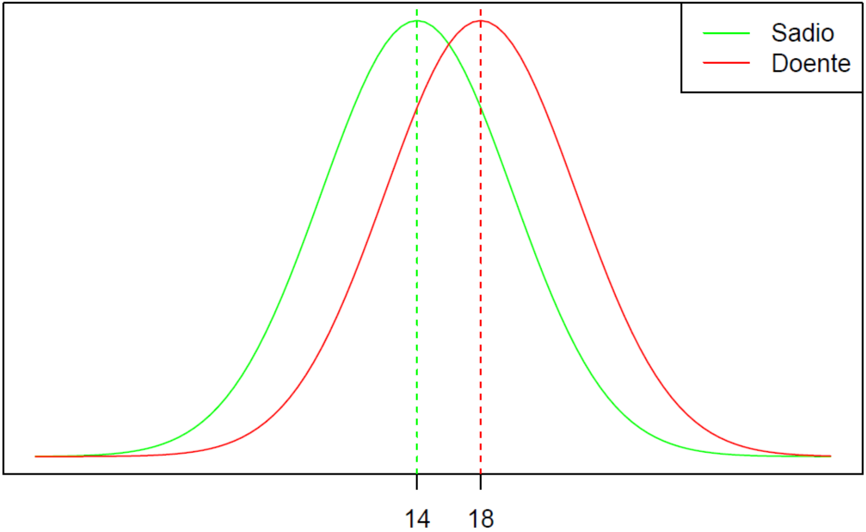


Figura 1: Concentração de certa substância no sangue

Para averiguar se um **tratamento é eficaz** contra a doença, selecionamos uma amostra de 30 indivíduos submetidos ao tratamento.

Assumimos que todos os elementos da amostra $(X_1, X_2, ..., X_{30})$ possuem a **mesma distribuição**: $X_i \sim N(\mu, 36)$, onde:

- $\mu = 14$ se o tratamento for eficiente.
- $\mu = 18$ se o tratamento não for eficiente.

Se a média da amostra for próxima de 14, temos **evidências** de que o tratamento é eficaz. Se for mais próxima de 18, as **evidências** são contrárias ao tratamento.

Então, a pergunta é: o quão próximo é "próximo"?

Teste para Média Populacional: σ Conhecido

Continuando com o exemplo:

- Interesse geral $\mu = 14$?
- Distribuição da média amostral para $n = 30 : N(\mu; 36/30)$.
- Critério para decidir sobre o valor de μ.
- Valor crítico, digamos x_c, tal que se a média amostral $(\bar{x})$ for maior que x_c concluímos que a amostra pertence a população com média 18.
- Como $\bar{X}$ é uma variável aleatória, devem existir erros associados.

- Quando fazemos um **teste de hipótese**, chegamos a um dos dois possíveis resultados:

1. Rejeitar H_0 em favor da hipótese alternativa H_1.
2. Não rejeitar H_0 e conclui-se que não existem diferenças.

- O termo **aceitar a hipótese nula** é filosoficamente **incorreto**, pois não se pode aceitar uma hipótese baseada apenas em evidências amostrais (mesmo em um teste de hipótese formal).

- E ainda existe um **erro** associado a todo teste de hipótese

Tipos de Testes:

- **Teste Simples**:
  - H_0 : Tratamento não é eficaz ($\mu = 18$)
  - H_1 : Tratamento é eficaz ($\mu = 14$)

- **Teste Bilateral (Bicaudal)**:
  - H_0 : Tratamento não é eficaz ($\mu = 18$)
  - H_1 : Tratamento é eficaz ($\mu \neq 18$)

- **Teste Unilateral à Esquerda (Unicaudal)**:
  - H_0 : Tratamento não é eficaz ($\mu = 18$)
  - H_1 : Tratamento é eficaz ($\mu < 18$)

Erros na Decisão

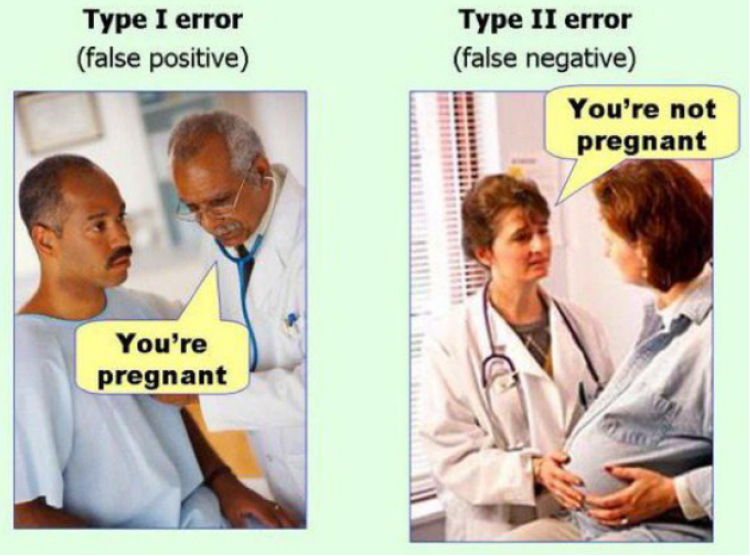


Figura 2: Tipos de Erros

Os **tipos de erros** que podem ser cometidos ao se realizar um teste de hipóteses são:

- **Erro Tipo I**: rejeitar H_0, quando H_0 é verdadeira.
- **Erro Tipo II**: não rejeitar H_0 quandoH_0 é falsa.

	H_0 Verdadeira	H_0 Falsa
Rejeitar H_0	**Erro Tipo I**	Decisão Correta
Não Rejeitar H_0	Decisão Correta	**Erro Tipo II**

Definimos por α e β as **probabilidades** de cometer os erros do tipo I e II, respectivamente:

- α = P[Erro Tipo I] = P[Rejeitar H_0 | H_0 Verdadeira]
- β = P[Erro Tipo II] = P[Não Rejeitar H_0 | H_0 Falsa]

Considerando as hipóteses $H_0 : \mu = 18$ e $H_1 : \mu < 18$, temos a seguinte interpretação:

- α = P[Concluir que o tratamento é eficaz quando na verdade ele não é]
- β = P[Concluir que o tratamento não é eficaz quando na verdade ele é]

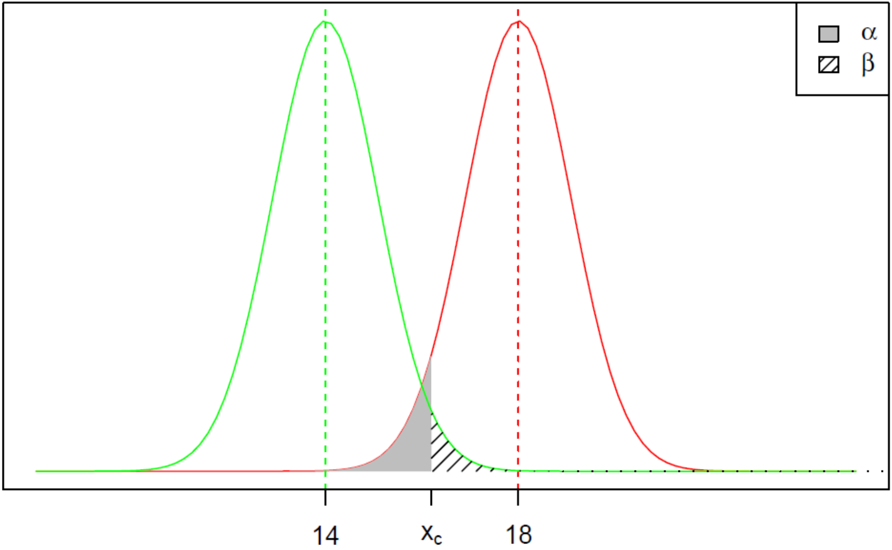


Figura 3: Representação gráfica dos erros

- A situação ideal é aquela em que **ambas as probabilidades**, α e β, são próximas de zero.
- No entanto, à medida que **diminuimos** α, a probabilidade β tende a aumentar.
- Assim, ao formular as hipóteses, devemos cuidar para que o **erro mais importante a ser evitado** seja sempre o **erro do tipo I**.
- Logo, a probabilidade α recebe o nome de **nível de significância** do teste, e é esse erro que devemos controlar.

- Suponha α conhecido, vamos descrever como determinar o **valor crítico** x_c. Note que

$$\alpha = P[\text{Erro Tipo I}] = P[Rejeitar \quad H_0|H_0 \quad Verdadeira]$$

$$P[\bar{X} < x_c|\mu = 18] = P\left[\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{x_c - 18}{6/\sqrt{30}}\right]$$

$$P[Z < z_c].$$

Mas sabe-se que $Z \sim N(0, 1)$.

- Dado α, obtemos z_c na tabela **Normal padrão** e calculamos o x_c da seguinte forma:

$$z_c = \frac{x_c - 18}{6/\sqrt{30}} \Rightarrow x_c = 18 + z_c \frac{6}{\sqrt{n}}$$

$$0,05 = P[Z < z_c] \Rightarrow z_c = -1,64$$

Portanto,

$$x_c = 18 - 1,64 \frac{6}{\sqrt{30}} = 16,20.$$

Conclusão: dado que foi coletada uma amostra aleatória, se a estimativa $\bar{x}$ é tal que $\bar{x} < 16,20$, **rejeitamos** H_0, concluindo que o tratamento é eficaz.

Assim, o conjunto dos números reais menores que $16,20$ é denominado de **Região de Rejeição** ou **Região Crítica** (RC):

$$RC = \{x \in \mathbb{R} : x < 16,20\}$$

No exemplo, se a média amostral dos 30 indivíduos foi $\bar{x} = 16,04$, então rejeitamos H_0, ao nível de significância $\alpha = 0,05$. Nesse caso, $\bar{x} < x_c$ está dentro da RC.

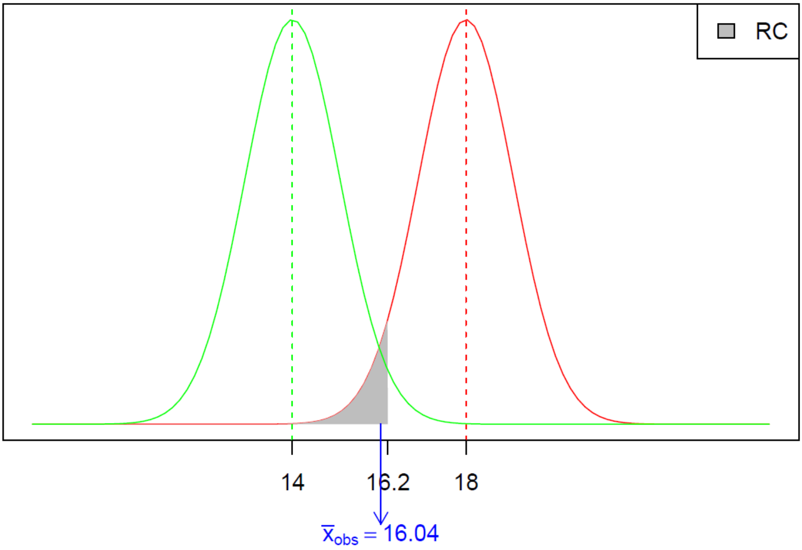


Figura 4: Representação gráfica da região de rejeição unilateral

Região Crítica

- Quando efetua-se um Teste de Hipóteses (ou de significância), a probabilidade α, também denotada de **nível de significância**, estará intimamente ligada a **Regra de Decisão do Teste**.

- Ao estabelecer α, pode-se **construir uma região** onde deve-se rejeitar H_0.

- Sob H_0, a região é chamada de **Região Crítica** (ou de Região de Rejeição), e contém todas as possíveis amostras raras de ocorrerem.
  - Estabelecendo $\alpha = 0,05$: amostra cuja probabilidade de ocorrência for menor que $0,05$ nos levará a **Decisão de Rejeitar** H_0.

- Podemos definir um teste de **hipótese bilateral**:

Definindo as hipóteses

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{e} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

A Região Crítica será dada por

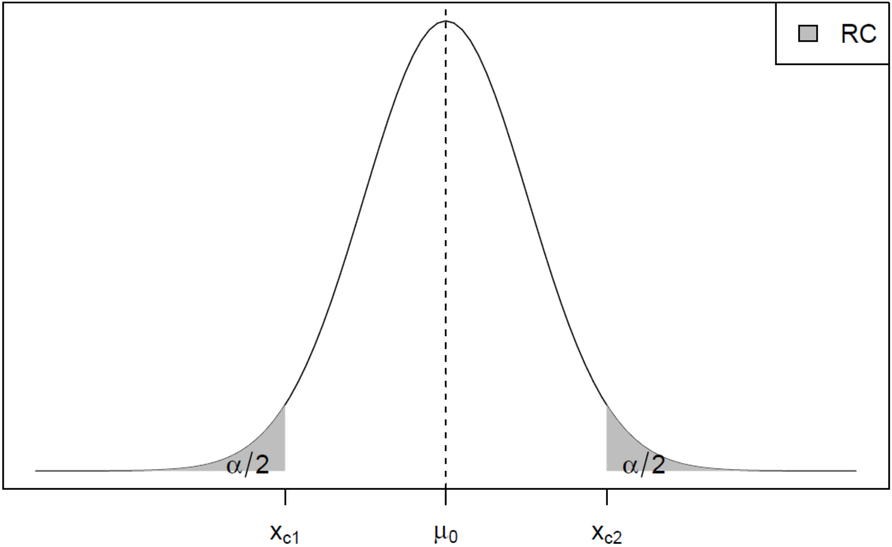
$$RC = \{x \in \mathbb{R} | x < x_{c1} \quad \text{ou} \quad x > x_{c2}\}.$$

Para um valor de α fixado, determinamos x_{c1} e x_{c2} de modo que

$$P(\bar{X} < x_{c1} \cup \bar{X} > x_{c2}) = \alpha$$

Assim, distribuimos a área α igualmente entre as duas partes da RC

$$P(\bar{X} < c_{c1}) = \frac{\alpha}{2} \quad \text{e} \quad P(\bar{X} > c_{c2}) = \frac{\alpha}{2}.$$


RC
α/2
α/2
x_{c1}
μ_0
x_{c2}

Etapas de um **teste de hipótese**:

1. Estabelecer as hipóteses nula e alternativa.
2. Definir a forma da região crítica, com base na hipótese alternativa.
3. Identificar a distribuição do estimador e obter sua estimativa.
4. Fixar α e obter a região crítica.
5. Concluir o teste com base na estimativa e na região crítica.

Exercício 2

Um pesquisador deseja estudar o efeito de certa substância no tempo de reação de seres vivos a um certo tipo de estímulo. Um experimento é desenvolvido com cobaias que são inoculadas com a substância e submetidas a um estímulo elétrico, com seus tempos de reação (em segundos) anotados. Os seguintes valores foram obtidos: 9,1; 9,3; 7,2; 7,5; 13,3; 10,9; 7,2; 9,9; 8,0; 8,6.

Admite-se que o tempo de reação segue o modelo Normal com média 8 e desvio padrão $\sigma = 2$ segundos. O pesquisador desconfia que o tempo médio sofre alteração por influência da substância.

Efetue um teste de hipótese para verificar se o pesquisador tem razão. Use $\alpha = 0,06$ e calcule a probabilidade do erro tipo II supondo que $\mu = 9$.

Exercício 2

- Hipóteses formuladas H_0: as cobaias apresentam tempo de reação padrão e H_1: as cobaias não apresentam tempo de reação padrão (há alteração no tempo).

Outra forma de apresentar as hipóteses:

$H_0 : \mu = 8,0$ e $H_1 : \mu \neq 8,0$.

- $RC = \{x \in \mathbb{R} : x < x_{c1} \quad \text{ou} \quad x > x_{c2}\}$

Exercício 2

- O estimador $\bar{X}$, quando devidamente padronizado, segue uma distribuição normal padrão $(Z \sim N(0,1))$. A estimativa do $\bar{X} = 9,1$.
- Fixando $\alpha = 0,06$, temos que

$0,06 = P(\bar{X} < x_{c1} \quad \text{ou} \quad \bar{X} > x_{c2} | \mu = 8,0)$

$0,06 = \frac{x_{cj} - 8,0}{\sqrt{4/10}}$

$x_{cj} = 8 - 1,88\sqrt{4/10} \quad \text{e} \quad x_{cj} = 8 + 1,88\sqrt{4/10}$

$RC = \{x \in \mathbb{R} : x < 6,8 \quad \text{ou} \quad x > 9,2\}$

- Portanto, calculando a média amostral obtemos $\bar{x} = 9,1$. Como este valor não pertence à RC, não rejeitamos a hipótese H_0 ao nível de significância de 6%. Em outras palavras, concluímos que o tempo de reação das cobais submetidas à substância não fica alterada.

Exercício 2

- $\beta(9,0) = P(\text{erro tipo II})$

$\beta(9,0) = P(\text{não rejeitar} \quad H_0|H_0 \quad \text{falsa})$

$\beta(9,0) = P(6,8 \leq \bar{X} \leq 9,2|\mu = 9,0)$

$\beta(9,0) = P\left(\frac{x_{cj}-9,0}{\sqrt{4/10}}\right)$

$\beta(9,0) = P(-3,48 \leq Z \leq 0,32)$

$0,4997 + 0,1255$

$0,6252.$

Assim, em sendo $\mu = 9,0$ estaríamos concluindo de forma equivocada que H_0 não deveria ser rejeitada, com probabilidade de 0,6252.

Exercício 3

Um relatório de uma companhia afirma que 40% de toda a água obtida, através de poços artesianos no nordeste, é salobra.
Há muitas controvérsias sobre essa afirmação, alguns dizem que a proporção é maior, outros que é menor.
Para dirimir as dúvidas, 400 poços foram sorteados e observou-se que em 120 deles há água salobra. Qual seria a conclusão ao nível de 3%?

Exercício 3

- Sabendo que $\hat{p} \sim N(p, p(1-p)/n)$
- $H_0 : p = 0,4$ e $H_1 : p \neq 0,4$.
- Fixando $\alpha = 0,06$, temos que

$0,03 = P(\bar{X} < p_{c1} \quad \text{ou} \quad \bar{X} > p_{c2} | p = 0,4)$

$2,17 = \frac{p_{cj} - 0,4}{\sqrt{0,24/400}}$

$p_{cj} = 0,4 - 2,17\sqrt{0,24/400}$ e $p_{cj} = 0,4 + 2,17\sqrt{0,24/400}$

- $RC = \{x \in \mathbb{R} : x < 0,347 \quad \text{ou} \quad x > 0,453\}$.
- Portanto, calculando a proporção amostral obtemos um $\bar{p} = 0,300$. Como este valor pertence à RC, rejeitamos a hipótese H_0 ao nível de significância de 3%. Em outras palavras, concluímos que o relatório da companhia não está correto.

Testes para Média Populacional: σ Desconhecido

Teste t de Hipóteses para a Média: σ^2 é desconhecido:

- Maior parte das situações não se conhece a **variância da população** (σ^2).
- Logo, utiliza-se a **variância da amostra** s^2 como um estimador para a variância populacional σ^2.

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2\right)$$

- A variável padronizada segue um distribuição t com $n-1$ graus de liberdade.

$$t = \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}.$$

Exercício 4

Deseja-se investigar se uma certa moléstia que ataca o rim altera o consumo de oxigênio desse órgão. Para indivíduos sadios, admite-se que esse consumo tem distribuição Normal com média 12 cm^3/min.
Os valores medidos em cinco pacientes com a moléstia foram: 14,4; 12,9; 15,0; 13,7; 13,5.
Qual seria a conclusão ao nível de 1% de significância?

Exercício 4

- Sabendo que $\bar{x} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$
- $H_0 : \mu = 12$ e $H_1 : \mu \neq 12$.
- Fixando $\alpha = 0,01$, temos que
$RC = \{t \in \mathbb{R} : t < -4,604 \quad \text{ou} \quad t > 4,604\}$.
- Considerando que $\bar{x} = 13,9$ e $s^2 = 0,67$, então podemos obter o valor crítico de t como
$t_c = \frac{\bar{x}-12}{0,82\sqrt{5}} = \frac{13,9-12}{0,82\sqrt{5}} = 5,18$.
- Portanto, como t_c pertence a RC, então decidimos pela rejeição da hipótese nula, ou seja, a moléstia tem influência no consumo renal médio de oxigênio ao nível de 1%.

Nível descritivo

- Em geral, α é pré-fixado para construir a **regra de decisão**.
- Uma alternativa é deixar em aberto a escolha de α para quem for tomar a decisão.
- A ideia é calcular, supondo que a **hipóese nula é verdadeira**, a probabilidade de se obter estimativas mais extremas do que aquela fornecida pela amostra.
- Essa probabilidade é chamada de **nível descritivo**, sendo denotada por α^* (ou P-valor).
- Valores pequenos de α^* evidenciam que a **hipótese nula é falsa**.
- O conceito de "pequeno" fica para quem decide qual α deve usar para comparar com α^*.

- Para testes unilaterais, sendo $H_0 : \mu = \mu_0$, a expressão de α^* depende da hipótese alternativa:

$$\alpha^* = P(\bar{X} < x_{obs} | H0 \quad \text{verdadeira}) \quad \text{para} \quad H_1 : \mu < \mu_0$$

$$\alpha^* = P(\bar{X} > x_{obs} | H0 \quad \text{verdadeira}) \quad \text{para} \quad H_1 : \mu > \mu_0.$$

- Para testes bilaterais, temos $H_0 : \mu = \mu_0$ contra $H0 : \mu \neq \mu_0$, a definição do nível descritivo depende da relação entre x_{obs} e μ_0:

$$\alpha^* = 2 \cdot P(\bar{X} < x_{obs} | H0 \quad \text{verdadeira}) \quad \text{se} \quad H_1 : x_{obs} < \mu_0$$

$$\alpha^* = 2 \cdot P(\bar{X} > x_{obs} | H0 \quad \text{verdadeira}) \quad \text{se} \quad H_1 : x_{obs} > \mu_0.$$

Exercício 5

Uma associação de defesa do consumidor desconfia que embalagens de 450 gramas de um certo tipo de biscoito estão abaixo do peso.

Para verificar tal afirmação, foram coletados ao acaso 80 pacotes em vários supermercados, obtendo-se uma média de peso de 447 gramas.

Admitindo-se que o peso dos pacotes segue o modelo Normal com desvio padrão 10 gramas, que conclusão pode ser tirada através do nível descritivo?

Exercício 5

- Sabendo que $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$
- $H_0 : \mu = 450$ e $H_1 : \mu < 450$.
- Considerando que $\bar{x} = 447$ e $s = 10$, então podemos obter o valor crítico de t como

$\alpha^* = P(\bar{X} < \bar{x}_{obs}|H_0 \quad \text{verdadeira}) = P(\bar{X} < 447|\mu = 450)$

$\alpha^* = P(Z < -2,68) = 0,0037.$

- Portanto, o nível descritivo é de 0,37% (p-valor), indicando a probabilidade de que encontremos valores da estimativa mais desfavoráveis à hipótese nula. Note que o valor do nível descritivo se relaciona diretamente com o nível de significância. Neste exemplo, se tivéssemos fixado o nível de significância em qualquer valor igual ou superior a 0,37% a conclusão seria pela rejeição de H_0, ao passo que valores inferiores a 0,37% conduziriam à não rejeição da hipótese nula.

Exemplo: considere o Exercício 2. As hipóteses formuladas sobre o tempo de reação de cobaias, submetidas a um estímulo elétrico, foram as seguintes:

- $H_0 : \mu = 8$ e $H_1 : \mu \neq 8$.
- Qual a conclusão a 5%? E de 10%?
- Com uma amostra de tamanho 10, observou-se $x_{obs} = 9,1$, e sabe-se que $\sigma = 2$. Assim,

$$\alpha^* = 2 \cdot P(\bar{X} > \bar{x}_{obs} | H0 \quad \text{verdadeira})$$

$$\alpha^* = 2 \cdot P(\bar{X} > 9,1 | \mu = 8)$$

$$\alpha^* = 2 \cdot P(Z > 1,74)$$

$$\alpha^* = 0,0818 \approx 8,18\%.$$

Testes Qui-Quadrado

- Até o momento, o nosso problema foi **testar hipóteses** sobre os parâmetros de média e proporção.

- Em geral, as formas das distribuições de probabilidade eram conhecidas (ou seriam aproximadas) e tinhamos que decidir quanto **rejeitar ou não uma hipótese** sobre o valor de algum parâmetro.

- Em termos práticos, é comum termos observações de uma variável aleatória cuja **distribuição de probabilidade é desconhecida**.

- Nesse caso, podemos tentar identificar o comportamento da variável associando um **modelo teórico**.

- Assim, podemos verificar se o **modelo proposto é adequado** ou não para a variável aleatória.

- Testes que utilizam o modelo Qui-Quadrado como estrutura probabilística são denomindos genericamente de **Testes Qui-Quadrado**.

- Esse mesmo modelo pode ser utilizado para testes com finalidades diferentes, por exemplo:
    - **Teste de aderência**: verifica se uma variável segue uma determinada distribuição.
    - **Teste de independência**: verifica a independência entre duas variáveis.
    - **Teste de homogeneidade**: verifica se uma variável se comporta de maneira similar em várias subpopulações.

- De maneia geral, qualquer teste Qui-Quadrado envolve a quantidade

$$Q^2 = \sum_{i,j} \frac{(o_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}},$$

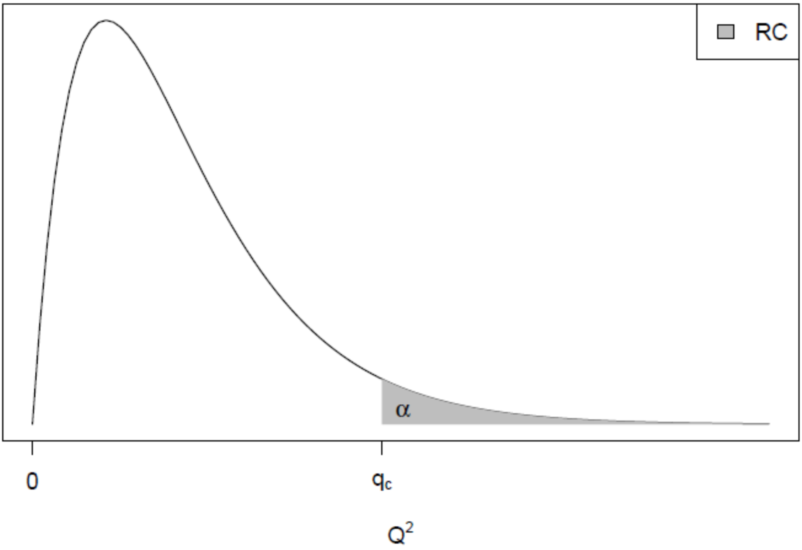
que mede discrepâncias entre as **frequências observadas** (o_{ij}) e as **frequências esperadas** (e_{ij}). Pode-se mostrar que Q^2 possui distribuição Qui-Quadrado com ν graus de liberdade, ou seja, $Q^2 \sim \chi^2_\nu$, onde ν depende do teste utilizado.

- A Região Crítica (RC) é constituída de valores grandes de Q^2,

$$RC = \{\omega : \omega \geq q_c\},$$

com q_c sendo determinado pelo nível de significância do teste

$$\alpha = P(Q^2 \geq q_c | H_0 \quad \text{verdadeira}).$$


RC
α
0
qc
Q2

Exemplo: Deseja-se estudar a tolerância de um equipamento eletrônico ao número de impactos termo-elétricos.

Pelas características de fabricação do equipamento, é possível admitir que a probabilidade de falha seja constante, isto é, após cada impacto, existe uma probabilidade p que ele falhe.

Representando por X a variável número de impactos anteriores à falha, pretende-se verificar se o modelo Geométrico com $p = 0,4$ é adequado para caracterizar essa variável.

$$P(X = k) = p(1 - p)^k$$

onde $k = 0, 1, 2, ...$ e $0 \leq p \leq 1$ é a probabilidade de sucesso.

Notação: $X \sim Geo(p)$.

Uma amostra de 80 ensaios foi obtida, e cada ensaio representou os testes feitos até a interrupção por falha no equipamento, resultado em 80 observações da variável de interesse.

Pretende-se verificar se o modelo Geométrico com $p = 0,4$ é adequado.

Podemos definir as hipóteses $H_0 = X \sim Geo(0,4)$ e $H_0 = X$ tem outra distribuição.

A decisão será baseada no comportamento da Q^2. Considerando o tamanho da amostra grande, a distribuição Q^2 pode ser aproximada pela Qui-Quadrado, com número de graus de liberdade que depende de quantas categorias serão estabelecidas. A região critíca é definida por valores grandes de Q^2,

$$RC = \{\omega : \omega \geq q_c\}.$$

Para determinar o valor observado Q^2, denotado por q^2_{obs}, precisamos obter as frequências esperadas. Se H_0 for verdadeiro, X segue o modelo geométrico, i.e,

$$P(X = k) = p_k = 0,4 \cdot 0,6^k.$$

Logo, a frequência esperada de resistência a k impactos é $80 \cdot p_k = 80 \cdot 0,4 \cdot 0,6^k$

Impactos	0	1	2	3	4	mais de 4
Freq. Obs.	30	26	10	5	5	4
Freq. Esp.	32,0	19,2	11,5	6,9	4,1	6,3

Como a categoria 4 tem frequência esperada menor que 5, agregamos as duas últimas categorias formando a dos maiores de 3, a qual terá a frequência observada de 9 e esperada de 10,4.

$$q_{obs} = \frac{(30-32,0)^2}{32,0} + \frac{(26-19,2)^2}{19,2} + ... + \frac{(9-10,4)^2}{10,4} = 3,44.$$

Se $\alpha = 0,05$, vamos determinar q_c utilizando a distribuição Qui-Quadrado, com 4 graus de liberdade. Então, temos que

$$P(Q^2 \geq q_c | H_0) = \alpha \to P(Q^2 \geq q_c | H_0) = 0,05.$$

Consultando a tabela χ^2 na linha correspondente a 4 G.L. e na coluna de 5%, o valor crítico será $q_c = 9,49$, que é maior que o valor observado de 3,44.

Então, concluímos pela não rejeição do modelo proposto.