Probabilidades

Luan Fiorentin

UFPR - DEST

2019-04-06

Sumário

Introdução

- A **Teoria das Probabilidades** é o ramo da Matemática que cria, desenvolve e pesquisa modelos que podem ser utilizados para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios.

- A **Inferência Estatística** é totalmente fundamentada na Teoria das Probabilidades.

- O modelo utilizado para estudar um **fenômeno aleatório** pode variar em complexidade, mas todos eles possuem ingredientes básicos comuns:
  - Variável aleatória;
  - Parâmetros.

Tipos de experimentos:

- **Experimentos determinísticos**: quando repetido inúmeras vezes, em condições semelhantes, conduz a resultados essencialmente idênticos:
    - Aceleração da gravidade;
    - Leis da física e da química.

- **Experimentos aleatórios**: repetidos sob as mesmas condições geram resultados diferentes:
    - Lançamento de uma moeda;
    - Lançamento de um dado;
    - Tempo de vida de equipamentos;
    - Peso de um animal.

- **Objetivo da probabilidade** é construir um modelo estatístico para representar **experimentos aleatórios**.

As duas etapas essênciais:

1. Descrever o **conjunto de resultados possíveis**;
2. **Atribuir pesos a cada resultado**, refletindo suas chances de ocorrência.

- **Espaço amostral** (Ω): é o conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório. Pode conter um número finito ou infinito de ponto. Exemplo: $\{cara; coroa\}$, $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathbb{N}$, ...

- **Pontos amostrais** (ω): correspondem aos elementos do espaço amostral. Exemplo: $\omega_1 = cara$ e $\omega_2 = coroa$.

- **Evento**: todo resultado ou subconjunto de resultados de um experimento aleatório. Exemplo:
  - Evento "A": a face cara;
  - Evento "B": a face coroa;
  - Evento "C": carta de espadas;
  - Evento "D": número de peças com defeito.

- Considere o seguinte exemplo:

Experimento: pesar um fruto ao acaso

Espaço amostral: $\mathbb{R}^+$

Pontos amostrais: espaço amostral é infinito

Eventos: A = "peso menor ou igual que 50 g" e B = "peso maior que 100 g"

Operações com conjunto

- **União**: é o evento que consiste da união de todos os pontos amostrais dos eventos que a compõem. Denota-se a união do evento A com B por $A \cup B = \{\omega \in A \text{ ou } \omega \in B\}$.
- **Interseção**: é o evento composto pelos pontos amostrais comuns aos eventos que a compõem. Denota-se a interseção de A com B por $A \cap B = \{\omega \in A \text{ e } \omega \in B\}$.
- **Complemento** é o conjunto de pontos do espaço amostral que não estão no evento. Denotamos o complemento do evento A por por $A^c = \{\omega \notin A\}$.
- **Disjuntos** (mutuamente exclusivos): são eventos que possuem interseção nula, ou seja $A \cap B = \{\emptyset\}$.
- **Complementares**: são eventos que a união é o espaço amostral, ou seja $A \cup B = \Omega$.

Exemplo: Considere o lançamento de um dado e os eventos: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{\omega : \omega \leq 3\}$, $C = \{\text{face par}\}$ e $D = \{\text{face primo}\}$

- União:
  - $A \cup B =$
  - $A \cup C =$
  - $A \cup D =$
- Interseção:
  - $A \cap B =$
  - $A \cap C =$
  - $A \cap D =$
- Complementos:
  - $A^c =$
  - $B^c =$
  - $D^c =$

Exemplo: Considere o lançamento de um dado e os eventos: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{\omega : \omega \leq 3\}$, $C = \{\text{face par}\}$ e $D = \{\text{face primo}\}$

- União:
  - $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$
  - $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6\}$
  - $A \cup D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- Interseção:
  - $A \cap B = \{1, 2, 3\}$
  - $A \cap C = \{2, 4\}$
  - $A \cap D = \{2, 3\}$
- Complementos:
  - $A^c = \{5, 6\}$
  - $B^c = \{4, 5, 6\}$
  - $D^c = \{1, 4, 6\}$

Probabilidade

Definição axiomática: probabilidade é uma função P(·) que atribui valores numéricos aos eventos do espaço amostral, de tal forma que

1. $0 \leq P(A) \leq 1$, para todo $A \in \Omega$;
2. $P(\Omega) = 1$;
3. $P(\emptyset) = 0$;
4. $P(\cup_{j=1}^{n} A_j) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)$, com os A_js disjuntos.

Agora, como podemos atribuir probabilidades aos elementos do espaço amostral?

Probabilidades de **variáveis aleatórias** pode ser obtida com:

- Suposições feitas sob a realização do fenômeno (**Clássica**): baseia-se nas características teóricas da realização do fenômeno.
  - Ao lançar um dado, tem-se $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
  - Admitindo que o dado é honesto, pode-se assumir que $P(1) = P(2) = ... = P(6) = 1/6$.

- Estudo das frequências (**Frequentista**): baseia-se nas frequências (relativas) de ocorrência do fenômeno.
  - Determinar a probabilidade de ocorrência de cada face de um dado;
  - Sem fazer nenhuma suposição inicial, podemos usar as frequências relativas de sucessivas ocorrências.

Definição **Clássica**:

A probabilidade de um evento A qualquer ocorrer é definida por

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis ao evento A}}{\text{número de casos possíveis}}$$

Exemplo: considere o fenômeno aleatório lançamento de um dado honesto e o evento A sair número qualquer. Qual a probabilidade deste evento ocorrer?

$$P(A) = \frac{1}{6} = 0,1666...$$

Os eventos para um número qualquer são equiprováveis, com probabilidade 1/6. Quando os resultados **não têm a mesma chance de ocorrer**, a probabilidade dos eventos deve ser calculada pela frequência relativa.

Definição **Frequentista**:

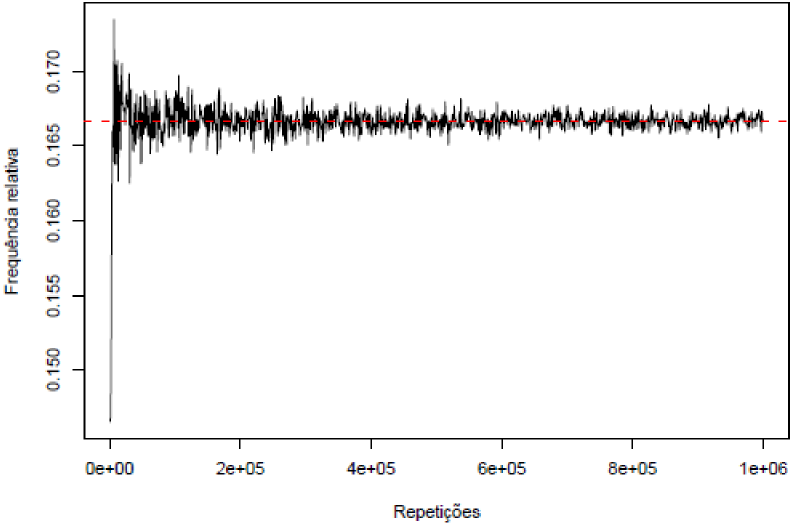
Podemos então pensar em repetir o experimento aleatório n vezes, e contar quantas vezes o evento A ocorre, $n(A)$ Então, a frequência relativa de A nas n repetições é dada

$$f_{n,A} = \frac{n(A)}{n}.$$

Assim, para $n \to \infty$ repetições sucessivas e independentes, a frequência relativa de A tende para uma constante p

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(A)}{n} = P(A) = p.$$

Exemplo: Se um dado fosse lançado n vezes, e contássemos quantas vezes saiu a face 4, qual seria a probabilidade desse evento?



- As probabilidades calculadas a partir de frequências relativas, são **estimativas da verdadeira probabilidade**.
- À medida que o número de repetições vai aumentando, as **frequências relativas se estabilizam** em um número que chamamos de probabilidade.
- **Lei dos Grandes Números**: A Lei dos Grandes Números nos diz que as estimativas dadas pelas frequências relativas tendem a ficar melhores com mais observações.
- Em ciências biológicas e humanas essa é a forma mais comum de atribuir probabilidades.

Exercício 1

Considere a tabela de frequências abaixo. O número de alunos na turma A é 26, enquanto na turma B é 24, sendo 37 pessoas do sexo Feminino e 13 do sexo Masculino.

Eventos	F	M	Total
A	21	5	26
B	16	8	24
Total	37	13	50

1. Calcule a $P(F)$, $P(M)$, $P(A)$ e $P(B)$.
2. Calcule a $P(F \cup B)$. Qual a explicação para o resultado?

Exercício 1

1. Calcule a $P(F)$, $P(M)$, $P(A)$ e $P(B)$.

$$P(F) = \frac{37}{50} = 0,74; P(M) = \frac{13}{50} = 0,26;$$

$$P(A) = \frac{26}{50} = 0,52; P(B) = \frac{24}{50} = 0,48.$$

2. Calcule a $P(F \cup B)$. Qual a explicação para o resultado?

$$P(F) = P(F) + P(B) - P(F \cap B)$$

$$P(F) = \frac{37}{50} + \frac{24}{50} - \frac{16}{50} = 0,90.$$

Regra da Adição de Probabilidades

- A probabilidade da **união** entre dois eventos quaisquer, A e B, é dada pela regra da adição de probabilidades

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

- Note que a regra da adição pode ser simplificada **se e somente se** os eventos A e B forem **disjuntos** (ou mutuamente exclusivos):

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B),$$

pois $(A \cap B) = \emptyset$, então $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$.

- Como consequência da regra da adição, para qualquer evento $A \subseteq \Omega$,

$$P(A) = 1 - P(A^c),$$

que pode ser verificada aplicando a regra da adição com A^c no lugar de B. Temos que

$$P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) - P(A \cap A^c)$$

$$P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$$

Como $P(A \cup A^c) = P(\Omega) = 1$, seque imediatamente a igualdade.

Exercício 2

Um estudo realizado por uma empresa de recursos humanos mostrou que 45% dos funcionários de uma multinacional saíram da empresa porque estavam insatisfeitos com seus salários, 28% porque consideraram que a empresa não possibilitava o crescimento profissional e 8% indicaram insatisfação tanto com o salário como com sua impossibilidade de crescimento profissional.

Considere o evento S: o funcionário sai da empresa em razão do salário; e o evento I: o funcionário sai da empresa em razão da impossibilidade de crescimento profissional.

Qual é a probabilidade de um funcionário sair desta empresa devido a insatisfação com o salário ou insatisfação com sua impossibilidade de crescimento profissional??

Exercício 2

$$P(S \cup I) = P(S) + P(I) - P(S \cap I)$$

$$P(S \cup I) = 0,45 + 0,28 - 0,08$$

$$P(S \cup I) = 0,65$$

Probabilidade Condicional

- O fenômeno aleatório com o qual trabalhamos pode ser separado em etapas em muitas situações práticas.

- A informação do que ocorreu em uma determinada etapa pode **influenciar** nas probabilidades de ocorrências das etapas sucessivas.

- Assim, **ganhamos informações** e podemos recalcular as probabilidades de interesse. Essas probabilidades recalculadas recebem o nome de probabilidade condicional.

- Dados dois eventos, A e B, a probabilidade condicional de A ocorrer, dado que ocorreu B, é representado por $P(A|B)$, sendo dada por

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

para $P(B) > 0$.

- Caso $P(B) = 0$, define-se

$$P(A|B) = P(A).$$

Exemplo:

- Um dado foi lançado, qual é a probabilidade de ter ocorrido face 4?

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $n(\Omega) = 6$

$A =$ face $4 = \{4\}$, então $n(A) = 1 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{6}$

- Suponha que o dado foi jogado, e, sem saber o resultado, você recebe a informação de que ocorreu face par. Qual é a probabilidade de ter saido face 4 com essa nova informação?

$B =$ face par $= \{2, 4, 6\}$, então $n(B) = 3 \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6}$

$C =$ face 4, dado que ocorreu face par $\{4\}$, $n(C) = \frac{1}{3}$

Exemplo:

Usando a definição formal de probabilidade condicional:

$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \frac{1}{6}$

$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6}$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A|B) = \frac{1/6}{3/6}$$

$$P(A|B) = \frac{1}{3}$$

Exercício 3

Em uma universidade foi selecionada uma amostra de 500 alunos que cursaram a disciplina de Estatística. Entre as questões levantadas estava: Você gostou da disciplina de Estatística? De 240 homens, 140 responderam que sim. De 260 mulheres, 200 responderam que sim.

1. Organize os dados em uma tabela.
2. Dado que o aluno escolhido gostou da disciplina de Estatística. Qual a probabilidade de que o aluno seja um homem?
3. Dado que o aluno escolhido é uma mulher. Qual a probabilidade de que ela não gostou da disciplina de Estatística?

Exercício 3

1. Tabela de resumo dos dados:

Sexo	Gostou		Total
	Sim	Não	
Homem	140	100	240
Mulher	200	60	260
Total	340	160	500

2. $$P(H|G) = \frac{P(H \cap G)}{P(G)} = \frac{140}{340} = 0,41.$$

3. $$P(NG|M) = \frac{P(NG \cap M)}{P(M)} = \frac{60}{260} = 0,23.$$

Independência Probabilística

- Para **probabilidades condicionais**, $P(A|B)$, saber que o evento B ocorreu nos dá uma informação extra sobre a ocorrência do evento A.

- No entanto, há situações nas quais saber que o evento B ocorreu não tem qualquer **interferência** na ocorrência do evento A.

- Nesses casos, pode-se dizer que os eventos A e B são **independentes**.

- Os eventos A e B são ditos **eventos independentes** se a ocorrência de B não altera a probabilidade de ocorrência de A, ou seja, eventos A e B são independentes se

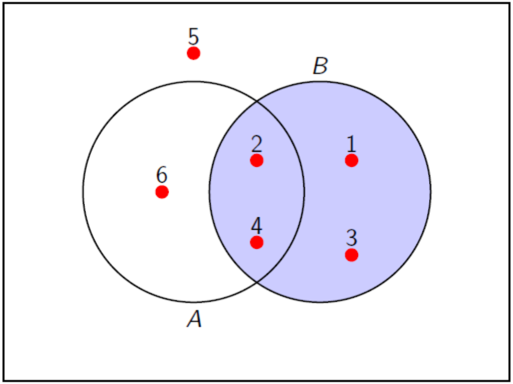
$$P(A|B) = P(A)$$
$$P(B|A) = P(B).$$

- Assim, e com a regra do produto, temos que

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = P(B) \cdot P(A)$$
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(A) \cdot P(B).$$

Exemplo:

- Considere o lançamento de um dado e os seguintes eventos:
  - A = "resultado é um número par".
  - B = "resultado é um número menor ou igual a 4".
- Os eventos A e B são independentes?



Exemplo:

$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$P(A)P(B) = \frac{1}{2}\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Agora, como

$P(A \cap B) = P(A)P(B),$

$\frac{1}{3} = \frac{1}{3},$

então $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ e os eventos A e B são considerados independentes. Saber que ocorreu A não muda a probabilidade de B ocorrer e vice-versa.

Exercício 4

Um lote contém 10 peças, sendo 7 boas (B) e 3 defeituosas (D). Retiramos duas peças, ao acaso e com reposição, para inspeção, com a finalidade de verificar a probabilidade de encontrar duas peças defeituosas no lote.

1. Qual o evento de interesse?
2. Qual o espaço amostral Ω?
3. Qual a probabilidade de se obter duas peças defeituosas?

Exercício 4

1. O evento de interesse é A: retirar duas peças defeituosas, ao acaso e com reposição, para inspeção.
2. $$\Omega = \{(D_1, D_2); (D_1, B_2); (B_1, B_2); (B_1, D_2)\}.$$
3. $$P(A) = P(D_1, D_2) = P(D_1 \cap D_2) = P(D_1)P(D_2)$$

$$P(A) = \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{9}{100}.$$

Teorema do Produto

- O **teorema do produto** é uma expressão derivada do conceito de probabilidade condicional. Uma vez que

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

temos que

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B).$$

- A expressão anterior permite calcular probabilidades em espaços amostrais que são realizados em **sequência**, onde a ocorrência da segunda etapa depende (ou não) da ocorrência da primeira etapa.

Exemplo:

- Um lote contém 10 peças, sendo 7 boas (B) e 3 defeituosas (D). Retiramos duas peças, ao acaso e sem reposição, para inspeção, com a finalidade de verificar a probabilidade de encontrar duas peças defeituosas no lote.
- Eventos:
    - $D1$: a primeira peça é defeituosa.
    - $D2$: a segunda peça é defeituosa.

$P(D1) = \frac{3}{10}$.

$P(D2/D1) = \frac{2}{9}$.

$P(D1 \cap D2) = P(D1)P(D2|D1) = \frac{3}{10}\frac{2}{9} = \frac{6}{90}$.

Exercício 5A

Uma empresa de peças metálicas sabe que 65% dos seus clientes usam cartões de crédito no pagamento da conta.

1. Qual é a probabilidade de os 2 próximos clientes usarem, cada um deles, um cartão de crédito?
2. Qual é a probabilidade de os 5 próximos clientes usarem, cada um deles, um cartão de crédito?

Exercício 5A

Considere os eventos: A: o primeiro cliente usa cartão de crédito; e o evento B: o segundo cliente usa cartão de crédito.

1. $$P(A \cap B) = P(A)P(B) = (0,65)(0,65) = 0,42.$$

2. $$P(A \cap B \cap C \cap D \cap E) = (0,65)^5 = 0,12.$$

Exercício 5B

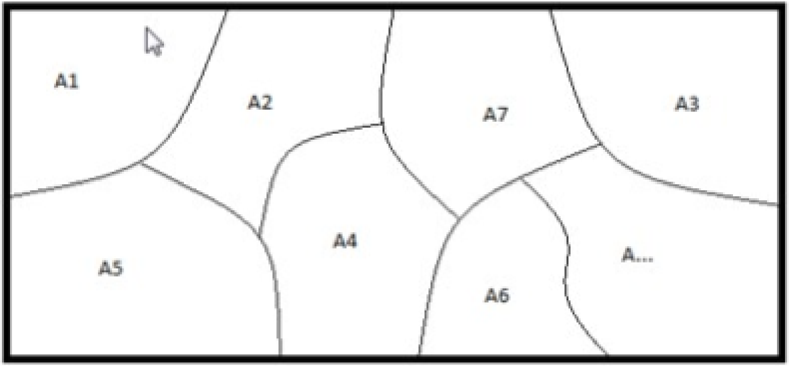
Um governo realizou uma pesquisa para determinar qual a preferência de partido das pessoas que moram na cidade de Curitiba nas próximas eleições. Os dados mostraram que 65% das pessoas votam no partido A.

1. Qual é a probabilidade de duas pessoas ao acaso votar, cada uma delas, no partido A?
2. Qual é a probabilidade de 5 pessoas ao acaso votar, cada uma delas, no partido A?

Teorema da Probabilidade Total

- Considere que os eventos $A_1, A_2, ..., A_k$ formam uma **partição do espaço amostral** (ou seja, não tem interseção entre si), e a sua união é igual ao espaço amostral.

- Isto é, $A_i \cap A_j = \emptyset$, para $\forall i \neq j$, e $\cup_{i=1}^{k} A_i = \Omega$.



- Permite calcular probabilidades de um evento a partir do **conjunto de probabilidades condicionais** que envolvam esse evento.

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B)$$

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B)$$

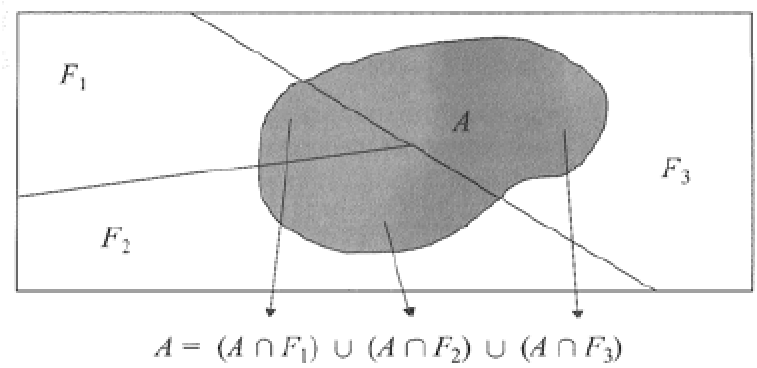
$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3).$$

Exercício 6

Exemplo: Suponha que um fabricante de sorvetes recebe 20% de todo o leite que utiliza de uma fazenda $F1$, 30% de uma outra fazenda $F2$ e 50% de $F3$.
Um órgão de fiscalização inspecionou as fazendas de surpresa e observou que 20% do leite produzido por $F1$ estava adulterado por adição de água, enquanto para $F2$ e $F3$, essa proporção era de 5% e 2%, respectivamente.
Na indústria de sorvetes os galões de leite são armazenados em um refrigerador sem identificação das fazendas. Para um galão escolhido ao acaso, qual a probabilidade do leite estar adulterado?

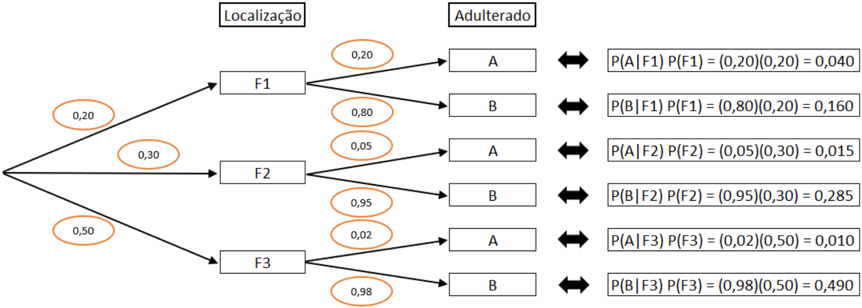
Exercício 6

Considerando o evento A: o leite está adulterado, podemos defini-lo como:



Exercício 6

Diagrama de árvore pode auxiliar no cálculo das probabilidades:



Exercício 6

$$P(A) = P(F_1 \cap A) + P(F_2 \cap A) + P(F_3 \cap A)$$

$$P(A) = P(A|F_1) \cdot P(F_1) + P(A|F_2) \cdot P(F_2) + P(A|F_3) \cdot P(F_3)$$

$$P(A) = 0,20 \cdot 0,20 + 0,30 \cdot 0,05 + 0,5 \cdot 0,02$$

$$P(A) = 0,065.$$

Teorema de Bayes

- Suponha que os eventos $A_1, A_2, ..., A_k$ **formem uma partição de Ω** e que suas probabilidades sejam conhecidas. Suponha, ainda, que para um evento B, se conheçam as probabilidades $P(B|A_i)$ para todo $i = 1, 2, ..., k$. Então, para qualquer i,

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(A_i) \cdot P(B|A_i)},$$

em que $i = 1, 2, ..., k$.

Exercício 7

Considerando o exemplo anterior do fabricante de sorvete, podemos calcular a probabilidade de que o leite adulterado tenha sido obtido a partir da fazenda F_i.

1. Qual a probabilidade de que o leite adulterado tenha sido obtido a partir da fazenda $F1$.
2. Qual a probabilidade de que o leite adulterado tenha sido obtido a partir da fazenda $F2$.
3. Qual a probabilidade de que o leite adulterado tenha sido obtido a partir da fazenda $F3$.

Exercício 7

$$P(F_1|A) = \frac{P(F_1 \cap A)}{P(A)}$$

$$P(F_1|A) = \frac{P(A|F_1)P(F_1)}{P(A)}$$

$$P(F_1|A) = \frac{0,2 \cdot 0,2}{0,2 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,05 + 0,5 \cdot 0,02}$$

$$P(F_1|A) = 0,615.$$

$$P(F_2|A) = 0,231; P(F_3|A) = 0,154.$$