Estatística Básica

Lista 4 - Variáveis Aleatórias

Luan Fiorentin

2019-03-17

1. Escreva com suas palavras o que é função de probabilidade, função de densidade de probabilidade e função de distribuição.

   Resposta: A função de probabilidade é uma função que associa probabilidades a cada possível ocorrência de uma variável aleatória discreta. A função de densidade de probabilidade é uma função que associa probabilidade a uma variável aleatória contínua em um dado intervalo. A função de distribuição é uma função que associa probabilidades acumuladas as variáveis aleatórias contínuas e discretas.

2. Considere a variável X como o lançamento de um dado e responda os itens a seguir:

   (a) Faça um gráfico da função de probabilidade.

   (b) Faça um gráfico da função de distribuição.

   (c) Qual a probabildiade de $X = 2$?

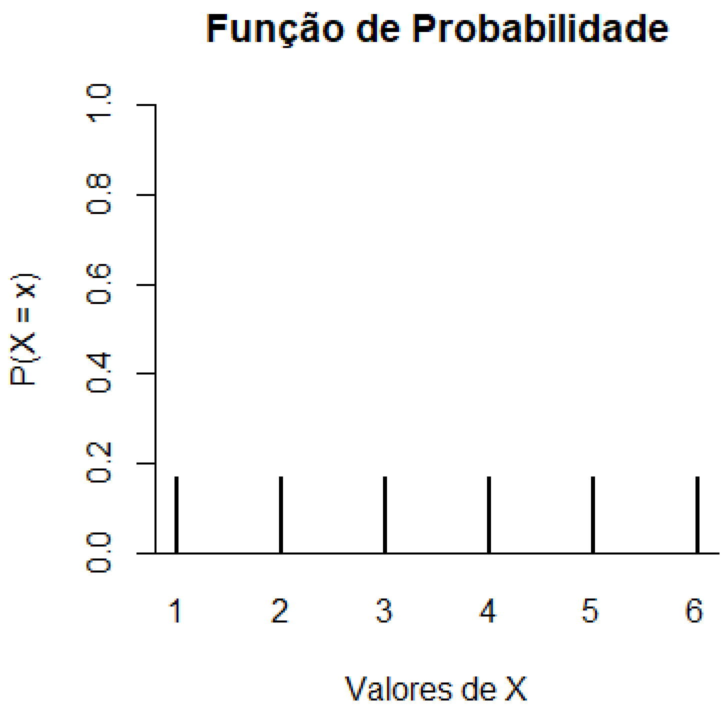
   (d) $P(X < 5)$.

   (e) $P(X < 4)$ ou $P(X > 5)$.

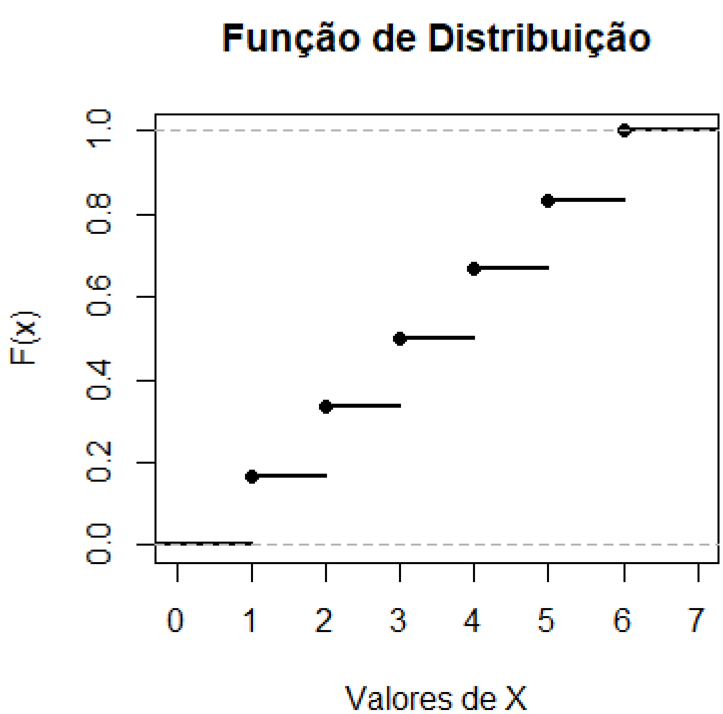
   (f) Qual a esperança de X?

   Resposta:

   (a) Função de probabilidade:



(b) Função de distribuição:



(c) $P(X = 2) = 1/6$.

(d) $P(X < 5) = 4/6$.

(e) $P(X < 4 \cup X > 5) = 4/6$.

(f) $E[X] = 3,5$

3. Uma variável aleatória X tem a seguinte função de distribuição:

$$F(X) \begin{cases} 0 & se \quad x < 10 \\ 0,2 & se \quad 10 \leq x < 12 \\ 0,5 & se \quad 12 \leq x < 13 \\ 0,9 & se \quad 13 \leq x < 25 \\ 1,0 & se \quad \geq 25 \end{cases}$$

(a) Encontre a função de probabilidade de X.

(b) $P(X \leq 12)$.

(c) $P(X < 12)$.

(d) $P(12 \leq X \leq 20)$.

(e) $P(X > 18)$.

Resposta:

(a) Função de probabilidade:

X	P[X = x]
10	0,2
12	0,3
13	0,4
25	0,1

(b) $P(X \leq 12) = 0,5$.

(c) $P(X < 12) = 0,2$.

(d) $P(12 \leq X \leq 20) = 0,7$.

(e) $P(X > 18) = 0,1$.

4. Considere que uma Universidade Federal possui 10.000 alunos estudantes, e considere uma V. A. X: número de aprovações que um aluno selecionado ao acaso teve no período passado. A frequência absoluta está apresentada na tabela abaixo. Responda os itens a seguir.

X	2	3	4	5	6
Frequência	800	2000	4000	2800	400

(a) Encontre a função de probabilidade de X.

(b) Faça um gráfico da função de probabilidade.

(c) Faça um gráfico da função de distribuição.

(d) Qual a probabilidade de um aluno selecionado ao acaso ser aprovado em até 4 disciplinas.

(e) Qual o valor médio esperado de aprovações por aluno ($E[X]$)?

(f) Qual a variância do número de aprovações por aluno ($Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$)?

(g) Qual o desvio padrão do número de aprovações por aluno ($s = \sqrt{Var[X]}$)?

(h) Qual o coeficiente de variação do número de aprovações por aluno?

Resposta:

(a) Função de probabilidade:

X	2	3	4	5	6
Frequência	800	2000	4000	2800	400
$P[X = x]$	0,08	0,20	0,40	0,28	0,04
$P[X \leq x]$	0,08	0,28	0,68	0,96	1,00

(b) Construir o gráfico igual ao exercício anterior.

(c) Construir o gráfico igual ao exercício anterior.

(d) $P(X < 5) = P(X \leq 4) = 0,68$.

(e) $E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot P(X = x_i) = 4$.

(f) Calculamos primeiro a $E[X^2]$.

$E[X^2] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \cdot P(X = x_i) = 16,96$

$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = 16,96 - 4^2 = 0,96$.

(g) $s = 0,98$.

(h) $CV = 24,49\%$.

5. Em um estudo sobre incidência de câncer, foi registrado para cada paciente com esse diagnóstico o número de casos de câncer em parentes próximos (X) dados na tabela a seguir.

Paciente	Incidência	Paciente	Incidência	Paciente	Incidência	Paciente	Incidência
1	2	8	3	15	5	22	4
2	5	9	3	16	2	23	0
3	0	10	2	17	2	24	0
4	2	11	0	18	3	25	3
5	1	12	1	19	2	29	3
6	5	13	1	20	1		
7	3	14	4	21	5		

(a) Encontre a função de probabilidade de X.

(b) Encontre a função de distribuição.

(c) Qual o número esperado de casos de câncer em parentes próximos?

Resposta:

(a) Função de probabilidade dada na sequência.

(b) Função de distribuição dada na sequência.

Indidência	0	1	2	3	4	5
$P[X = x]$	0,1	0,1	0,3	0,3	0,1	0,1
$F[X]$	0,1	0,2	0,5	0,8	0,9	1,0

(c) $E[X] = 2,5$.

6. Verifique se as expressões a seguir são funções de densidade de probabilidade:
   (a) $f(x) = 3x$, se $0 \leq x \leq 1$.
   (b) $f(x) = x^2/2$, se $x \geq 0$.
   (c) $f(x) = (x-3)/2$, se $3 \leq x \leq 5$.
   (d) $f(x) = 2$, se $0 \leq x \leq 2$.

   Resposta:
   (a) Não é fdp, pois não integra 1.
   (b) Não é fdp, pois não integra 1.
   (c) É fdp, pois integra 1 e a função é sempre maior que zero.
   (d) Não é fdp, pois não integra 1.

7. Considere uma variável aleatória X com função de densidade de probabilidade dada a seguir. Determine o valor de c.

$$f(x) = c(x^2 + x), \quad se \quad (0 \leq x \leq 1).$$

   Resposta: O valor é $c = 6/5$.

8. Dada a função

$$f(x) = 2exp\{-2x\}, \quad se \quad x \geq 0.$$

   (a) Mostre que é uma função de densidade de probabilidade.
   (b) Calcule a probabilidade de $x > 1$.
   (c) Calcule a probabilidade de que $0,2 \leq x \leq 0.8$.

   Resposta:
   (a) Note que:
      1) $f(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 0$.
      2) $\int_0^\infty 2exp\{-2x\}dx = 1$.
   (b) $P(x > 1) = \int_1^\infty 2exp\{-2x\}dx = e^{-2} = 0,135$.
   (c) $P(x > 1) = \int_{0,2}^{0,8} 2exp\{-2x\}dx = 0,468$.

9. A quantia gasta anualmente, em milhões de reais, na manutenção do asfalto em uma cidade do interior é representada pela variável Y com densidade dada por:

$$f(y) = \frac{8y}{9} - \frac{4}{9} \quad se \quad (0,5 \leq x \leq 2,0).$$

   (a) $P(Y < 0,8)$.
   (b) O valor esperado de Y.
   (c) $P(Y > 1,5 | Y \geq 1)$.

   Resposta:
   (a) $P(Y < 0,8) = \int_{0,5}^{0,8} \frac{8y}{9} - \frac{4}{9}dy = 0,04$.
   (b) $E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} yf(y)dy = \int_{0,5}^{2,0} y(\frac{8y}{9} - \frac{4}{9})dy = 3/2 = 1,5$.

(c) $P(Y > 1,5|Y \geq 1) = 0,626.$