Variáveis Aleatórias

Luan Fiorentin

UFPR - DEST

2019-04-22

Sumário

Introdução

- Tipos de experimentos:
  - **Experimentos determinísticos**: Aceleração da gravidade; Leis da física e química...
  - **Experimentos aleatórios**: Lançamento de uma moeda; Lançamento de um dado; Tempo de vida de equipamentos...

- Probabilidades de variáveis aleatórias podem ser obtidas a partir do:
  - Estudo das frequências (**Frequentista**).
  - Suposições feitas sob a realização do fenômeno (**Clássica**).

Variável Aleatória

- Dada a realização de um experimento aleatório qualquer, com um certo espaço de probabilidade, deseja-se estudar a **estrutura probabilística** de quantidades associadas a esse experimento.
- Antes da realização de um experimento, não sabemos seu resultado, entretanto seu **espaço de probabilidade** pode ser previamente estabelecido.
- Dessa forma, podemos atribuir probabilidades aos eventos desse espaço amostral, dando origem ao conceito de **variável aleatória** (V. A.).

- **Definição**: em probabilidade, variável aleatória é uma função X que associa a cada evento do espaço amostral um número real $X(\omega) \in \mathbb{R}$.

- A variável aleatória pode ser **discreta** ou **contínua**, dependendo do domínio de X (ou seja, dos valores possíveis de X).

- Em geral, denota-se a probabilidade de uma V. A. X assumir determinado valor x como

$$P[X] \quad \text{ou} \quad P[X = x].$$

Exemplo: o número de alunos em uma sala é uma V. A. (discreta), denotada por X (maiúsculo). Uma observação dessa variável é denotada pela respectiva letra minúscula, ou seja, x = 3 alunos.

- Existem diversos modelos probabilísticos que procuram descrever as variáveis aleatórias, denominados de **distribuições de probabilidade** de variáveis aleatórias (discretas ou contínuas).

- A **distribuição de probabilidade** é a descrição das probabilidades associadas com os possíveis valores de X.

- Os valores que X assume determinam o suporte (S) da V.A.:
    - **Variáveis discretas**: suporte em um conjunto de valores enumeráveis (finitos ou infinitos).
    - **Variáveis contínuas**: suporte em um conjunto não enumerável de valores.

Dada uma variável de interesse, tem-se diferentes formas de atribuir valores de probabilidades:

- **Função de probabilidade** (fp): para variáveis aleatórias discretas.
- **Função densidade de probabilidade** (fdp): para variáveis aleatórias contínuas.

Variável Aleatória Discreta

- A **função de probabilidade** (fp) da V.A. discreta X, a qual assume os valores $x_1, x_2, ..., x_n$, é a função que atribui probabilidades a cada um dos possíveis valores:

$$P[X = x_i] = p(x_i) = p_i,$$

onde $i = 1, 2, ..., n$, com as seguintes propriedades:

1. A probabilidade de cada valor deve estar entre 0 e 1:

$$0 \leq p(x_i) \leq 1, \forall_i = 1, 2, ...$$

2. A soma de todas as probabilidade é igual a 1:

$$\sum_i p(x_i) = 1.$$

Exemplos de V.A. **discretas**:

1. Número de peças defeituosas entre n peças.
2. Número de partículas radioativas desintegradas em um dado intervalo de tempo.
3. Número de veículos que passam por um posto de pedágio em um dado intervalo de tempo.
4. Número de promogênitos do sexo masculino em dez famílias.
5. ...

Exercício 1

Estamos interessados no lançamento de duas moedas. A variável aleatória X corresponde ao número de resultados cara (C).

1. Defina a variável aleatória.
2. Espaço amostral.
3. Valores de X.
4. $P[X = 1]$.
5. Verifique se as propriedades da função de probabilidade são satisfeitas.

Exercício 1

1. Defina a variável aleatória: número de resultados cara.
2. Espaço amostral: $\Omega = \{(C, C), (C, K), (K, C)), (KK)\}$.
3. Valores de X: $\{0, 1, 2\}$.
4. $P[X = 1] = 1/2$.
5. Propriedades:
   1) As probabilidades $P(X = x_i)$ estão entre 0 e 1.
   2) A soma de todas as probabilidades $P(X = x_i) = 1$.

Função de Distribuição Acumulada

Em muitas situações práticas, é útil calcularmos a probabilidade acumulada até um certo valor.

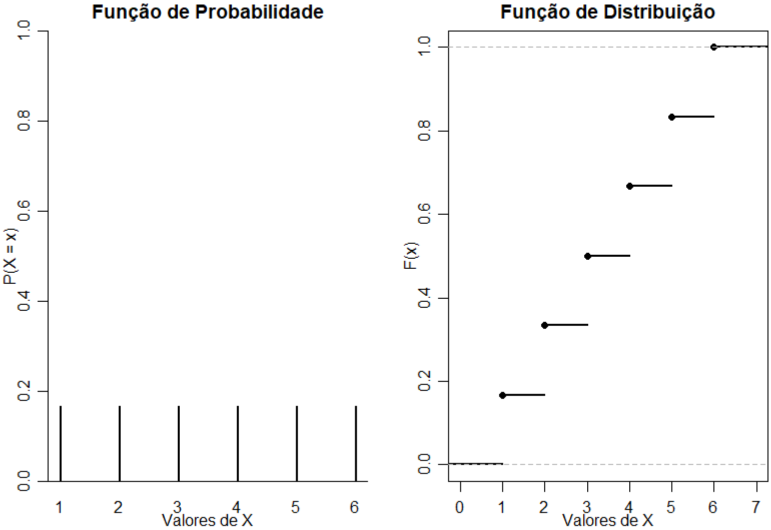
- **Definição**: a **função de distribuição** ou **função acumulada** de probablidade de uma V. A. X é dada pela expressão:

$$F(x) = P(X \leq x),$$

para qualquer número real x, com as propriedades:

1. $0 \leq F(X) \leq 1$.
2. $F(x)$ é não decrescente e contínua a direita.
3. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

As **propriedades** são **válidas** para o caso **discreto** e **contínuo**.


Função de Probabilidade
P(X = x)
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1
2
3
4
5
6
Valores de X
Função de Distribuição
F(x)
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0
1
2
3
4
5
6
7
Valores de X

Exercício 2

Uma amostra de 1000 crianças foi analisada para determinar a efetividade de uma vacina contra um tipo de alergia. As crianças recebiam uma dose da vacina e, após um mês, passavam por novo teste. Caso ainda tivessem tido alguma reação alérgica, recebiam outra dose. Todas as crianças foram consideradas imunizadas após 5 doses. Qual a probabilidade de uma criança ter recebido 2 doses? E até 2 doses?

X	Freq.	Freq. Relativa
1	245	0,245
2	288	0,288
3	256	0,256
4	145	0,145
5	66	0,066
Total	1000	1,000

Exercício 2

X	Freq.	Freq. Relativa	Freq. Relativa Acum.
1	245	0,245	0,245
2	288	0,288	0,533
3	256	0,256	0,789
4	145	0,145	0,934
5	66	0,066	1,000
Total	1000	1,000	

$P[X = 2] = 0,288.$
$P[X \leq 2] = 0,533.$

Variável Aleatória Contínua

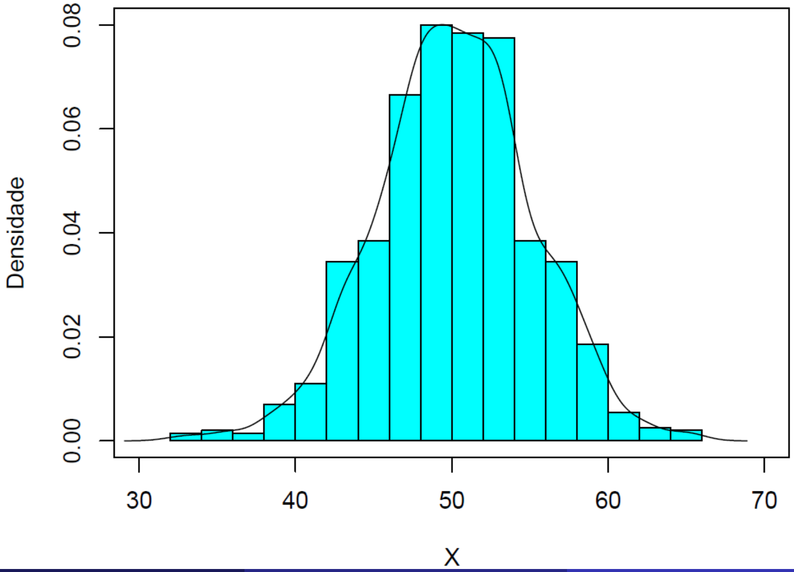
- Uma V. A. é classificada como **contínua** se assume valores em qualquer intervalo dos números reais, ou seja, um conjunto de valores não enumerável.

- Assim, não é possível atribuir probabilidades para um ponto específico, apenas para **intervalos da reta**, pois há uma **quantidade não enumerável** (infinita) de valores em um ponto.

Exemplos de V. A. **contínuas**:

1. Peso de animais.
2. Altura de pessoas.
3. Retorno financeiro de um investimento.
4. Salinidade da água do mar.
5. Biomassa de árvores por unidade amostral.
6. ...

- Atribui-se probabilidades à **intervalos**, por meio de uma função. Logo, as probabilidades são representadas por áreas.



- A **função de densidade de probabilidade** (fdp) atribui probabilidades à intervalos de valores do tipo $[a, b]$, e é definida por

$$P[a < x < b] = \int_a^b f(x)dx,$$

com as seguintes propriedades:

1. é uma função não negativa:

$$f(x) \geqslant 0.$$

2. A área total sob a curva deve ser igual a 1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

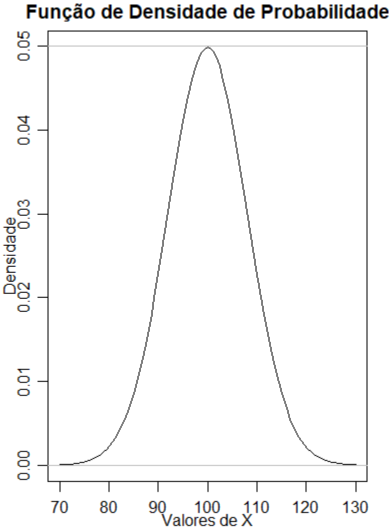
Observações:

- Como $P[X = x] = 0$, então

$$P[a \leq X \leq b] = P[a < X \leq b] = P[a \leq X < b] = P[a < X < b].$$

- Qualquer função $f(\cdot)$ que seja não negativa e cuja área total sob a curva seja igual à uma unidade caracterizará uma V. A. contínua.

- $f(\cdot)$ **não** representa a probabilidade de ocorrência de algum evento. A **área sob a curva entre dois pontos** é que fornecer a probabilidade.



Função de Densidade de Probabilidade
Densidade
0.00
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
70
80
90
100
110
120
130
Valores de X
Função de Distribuição
F(X)
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
70
80
90
100
110
120
130
Valores de X

Exercício 3

Dada a função

$$f(x) = \frac{3x^2}{2}, \quad \text{se} -1 \leq x \leq 1$$

1. Verifique se é uma função de densidade de probabilidade.
2. Calcule $P[2 \leq X \leq 5]$.
3. Calcule $P[X > 0]$.
4. Calcule $P[0 \leq X \leq 1/2]$.

Exercício 3

1. Verifique se é uma função de densidade de probabilidade:

$$f(x) \geq 0.$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{3x^2}{2} dx = \frac{x^3}{2}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1^3}{2} - \frac{(-1)^3}{2} = \frac{1}{2} - \frac{-1}{2} = 1.$$

2. $P[2 \leq X \leq 5] = 0.$
3. $P[X > 0] = \int_0^1 \frac{3x^2}{2} dx = \frac{1^3}{2} - \frac{(0)^3}{2} = \frac{1}{2}.$
4. $P[0 \leq X \leq 1/2] = \int_0^{1/2} \frac{3x^2}{2} dx = \frac{(1/2)^3}{2} - \frac{(0)^3}{2} = \frac{1}{16}.$

Esperança Matemática ($E[x]$)

- **Definição**: o valor esperado (ou média) da V. A. **discreta** X com função de probabilidade $P[X = x]$, é dado pela expressão:

$$E[X] = \mu = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P[X = x_i], \quad i = 1, 2...$$

- **Definição**: o valor esperado (ou média) da V. A. **contínua** X com função de densidade de probabilidade $f(x)$, é dado pela expressão:

$$E[X] = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

Exercício 4

Estamos interessados no lançamento de duas moedas. A variável aleatória X corresponde ao número de resultados cara (C). Calcule o valor esperado (média) da variável aleatória.

Exercício 5

Dada a função

$$f(x) = \frac{3x^2}{2}, \quad \text{se} -1 \leq x \leq 1$$

Calcule o valor esperado (média) da variável aleatória.

Exercício 4

$$E[X] = \mu = \sum_{i=1}^{3} x_i P[X = x_i] = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 0 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} = 1.$$

Exercício 5

$$E[X] = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-1}^{1} x \frac{3x^2}{2} dx$$

$$E[X] = \mu = \int_{-1}^{1} \frac{3x^3}{2} dx = \left. \frac{3x^4}{4 \cdot 2} \right|_{-1}^{1}$$

$$E[X] = \mu = \frac{3 \cdot (1)^4}{8} - \frac{3 \cdot (-1)^4}{8} = 0.$$

Variância ($V[x]$)

- **Definição**: a variância de V. A. **discreta** ou **contínua** é dada pela expressão:

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2.$$

Note que a $E[X^2]$ para V. A. discreta e contínua é dado por, respectivamente,

$$E[X^2] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 P[X = x_i], \quad i = 1, 2...$$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx.$$

Exercício 6

Estamos interessados no lançamento de duas moedas. A variável aleatória X corresponde ao número de resultados cara (C). Calcule a variância da variável aleatória.

Exercício 7

Dada a função

$$f(x) = \frac{3x^2}{2}, \quad \text{se} -1 \leq x \leq 1$$

Calcule a variância da variável aleatória.

Exercício 6

$$E[X^2] = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 P[X = x_i] = 0^2 \cdot \frac{1}{4} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} = 0 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{3}{2} - (1)^2 = \frac{1}{2}.$$

Exercício 7

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-1}^{1} x^2 \frac{3x^2}{2} dx$$

$$E[X^2] = \int_{-1}^{1} \frac{3x^4}{2} dx = \frac{3x^5}{5 \cdot 2}\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$E[X^2] = \frac{3 \cdot (1)^5}{10} - \frac{3 \cdot (-1)^5}{10} = \frac{6}{10}.$$

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{6}{10} - (0)^2 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Propriedades da $E[X]$ e $V[x]$

- Propriedades da **Esperança**:

1. Se $X = c$, onde c é uma constante. Então $E[X] = c$;
2. Seja c uma constante e X uma variável aleatória. Então $E[cX] = cE[X]$;
3. Sejam X e Y duas variáveis aleatórias quaisquer. Então, $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$;
4. Sejam n variáveis aleatórias $X_1, X_2, ..., X_n$. Então, $E[X_1 + X_2 + ... + X_n] = E[X_1] + E[X_2] + ... + E[X_n]$;
5. Sejam X e Y duas variáveis aleatórias quaisquer independentes. Então $E[XY] = E[X]E[Y]$.

- Propriedades da **Variância**:

1. Se $X = c$, onde c é uma constante. Então $V[X] = 0$;
2. Seja c uma constante e X uma variável aleatória. Então $V[X + c] = V[X]$;
3. Seja c uma constante e X uma variável aleatória. Então $V[cX] = c^2V[X]$;
4. Sejam X e Y duas variáveis aleatórias quaisquer. Então, $V[X + Y] = V[X] + V[Y]$;
5. Sejam n variáveis aleatórias $X_1, X_2, ..., X_n$. Então, $V[X_1 + X_2 + ... + X_n] = V[X_1] + V[X_2] + ... + V[X_n]$;

Exercício 8

Uma corretora negocia títulos na Bolsa de Valores e utiliza um modelo probabilístico para avaliar seus lucros. Suas aplicações financeiras de compra e venda atingem três áreas: agricultura, indústria e comércio. Admita que o seguinte modelo representa o comportamento do lucro diário da corretora (em milhares):

$$L = 2L_A + 5L_I + 3L_C,$$

onde L_A, L_I e L_C representam os lucros diários nos setores de agricultura, indústria e comércio.
As distribuições de probabilidades dessas variáveis aleatórias são $L_A \sim N(3, 4)$, $L_I \sim N(6, 9)$ e $L_C \sim N(4, 16)$. Supondo independência entre os três setores, qual será o lucro esperado e a variância de L?

Exercício 8

$$E[L] = E[2L_A + 5L_I + 3L_C] = 2E[L_A] + 5E[L_I] + 3E[L_C]$$

$$E[L] = 2 \cdot 3 + 5 \cdot 6 + 3 \cdot 4 = 48.$$

$$V[L] = V[2L_A + 5L_I + 3L_C] = 4V[L_A] + 25V[L_I] + 9V[L_C]$$

$$V[L] = 4 \cdot 4 + 25 \cdot 9 + 9 \cdot 16 = 385.$$