INTRODUÇÃO

Modelos Lineares Generalizados

Luan Fiorentin

12 de maio de 2021

Sumário

Introdução

Introdução

- **Inventário florestal** envolve a coleta de informações quali- quantitativas de variáveis da floresta.
- **Variáveis**:
  - Altura;
  - Diâmetro;
  - Presença de ataques de pragas;
  - Número de árvores por unidade amostral;
  - Entre outras.
- Fundamental reconhecer a **natureza** das variáveis.

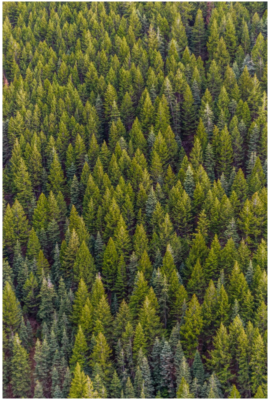

Figura 1. Floresta. Imagem de Brandon Montrone no Pexels

Introdução

Variável
→ Característica.
→ Atributo.

Quantitativa
→ Expressa em números.
→ Variável **métrica**.

Discreta
→ **Finitos** valores em um intervalo.

→ Número de árvores.
→ Número de galhos.
→ Número de espécies.
→ Árvores atacadas por pragas.

Contínua
→ **Infinitos** valores em um intervalo.

→ Volume da árvore.
→ Diâmetro da árvore.
→ Altura total da árvore.
→ Área basal por hectare.

Qualitativa
→ Expressa em rótulos.
→ Variável **categórica**.

Nominal
→ Sem ordenação.
→ **Rótulo**.

→ Projeto.
→ Tipo de espécie.
→ Sanidade da árvore.
→ Presença de bifurcação.

Ordinal
→ Com ordenação.
→ **Grau** ou **nível**.

→ Classe de sítio.
→ Classe de idade.
→ Qualidade do fuste.
→ Qualidade da madeira.

Figura 2. Principais tipos de variáveis.

Variável aleatória

Variável aleatória

- **Espaço amostral** (Ω) é o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.
- **Evento** é um subconjunto de resultados de um experimento aleatório.
- Definição de **variável aleatória** (v.a.):
  - Descrição numérica do resultado de um experimento aleatório.
- **Notação**: Y denota a variável aleatória, enquanto y denota os valores realizados de uma variável aleatória.

O evento é o lançamento de duas moedas honestas de forma independente e $Y =$ número de resultados cara (C).

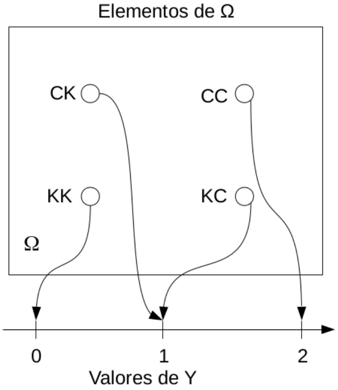

Figura 3. Variável aleatória definida sobre pontos do espaço amostral.

Variável aleatória

- Tipos de espaço amostral:
  - **Espaço amostral discreto** contêm apenas um número finito ou contável de elementos.
  - **Espaço amostral contínuo** contêm um número infinito de elementos.
- Tipos de variáveis aleatórias:
  - Variável aleatória é **discreta** se seu espaço amostral é discreto.
  - Variável aleatória é **contínua** se seu espaço amostral é contínuo.

- Reta real: $\Omega = \Re$.
- Estritamente positivos: $\Omega = \Re_+$.
- Positivos com zeros: $\Omega = \Re_0 = [0,\infty)$.
- Proporções: $\Omega = (0,1)$.
- Direções: $\Omega = [0, 2\pi)$.
- Contagem: $\Omega = \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\ldots\}$.
- Contagem limitada: $\Omega = \{0,1,2,\ldots,m\}$.

Função discreta de probabilidade

Função discreta de probabilidade

- A **função de probabilidade** (fp) da v.a. discreta Y, que assume os valores $y_1, y_2, \ldots, y_n$, é a função que atribui probabilidades a cada um dos possíveis valores: $\{y_i, p(y_i)\}, i = 1, 2, \ldots$, ou seja,

$$\mathrm{P}(Y = y_i) = p(y_i) = p_i, \quad i = 1, 2, \ldots$$

  com as seguintes propriedades:

  - A probabilidade de cada valor deve estar entre 0 e 1,

$$0 \leq p(y_i) \leq 1, \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots.$$

  - A soma de todas as probabilidades é igual a 1

$$\sum_i p(y_i) = 1.$$

Exemplo 1

Seja o experimento de lançar duas moedas honestas e Y = número de resultados cara (C). Encontre a fp de Y.

- Propriedades da fp:
  - $\text{P}(Y = y_i)$ estão entre 0 e 1.
  - Soma das probabilidades é igual a 1.
- Relembre que $\Omega = \{CC, KK, CK, KC\}$.

Y	Frequência	$\text{P}(Y = y_i)$	$\text{P}(Y \leq y_i)$
0	1	1/4	
1	2	2/4	
2	1	1/4	
Total	4	1	

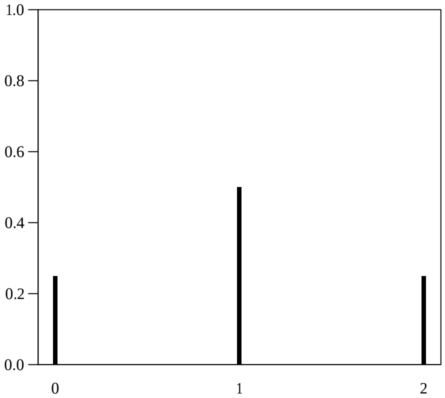

Figura 4. Grafico de $P(y)$.

Função de distribuição de probabilidade

Função de distribuição de probabilidade

- Em muitas situações, é útil calcular a probabilidade **acumulada** até um certo valor.
- Define-se a **função de distribuição** ou **função acumulada de probabilidade** de uma v.a. Y pela expressão
$$F(y) = \mathrm{P}(Y \leq y)$$
para qualquer número real y.
- Procedimento é análogo a distribuição de frequência acumulada.

Exemplo 1

Seja o experimento aleatório de lançar duas moedas honestas. Defina Y = número de resultados cara (C). Encontre a função de probabilidade de Y.

- Relembre que $\Omega = \{CC, KK, CK, KC\}$.

Y	Frequência	$P(Y = y_i)$	$P(Y \leq y_i)$
0	1	1/4	1/4
1	2	2/4	3/4
2	1	1/4	1
Total	4	1	

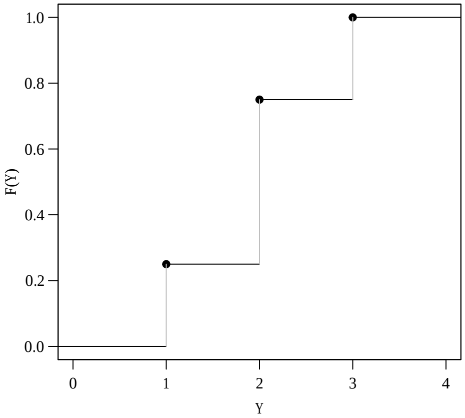

Figura 5. Grafico de $F(y)$.

Função densidade de probabilidade

Função densidade de probabilidade

- Não podemos atribuir probabilidades à valores específicos, pois há uma quantidade **não enumerável** (infinita) de valores em um ponto.
- Atribuimos probabilidades à intervalos de valores, por meio de uma **função**. Portanto, as probabilidades são representadas por áreas.

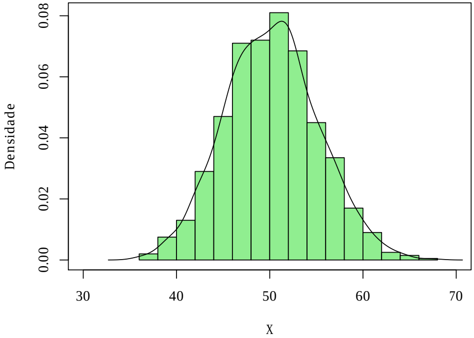

Figura 6. Histrograma com suavização.

Função densidade de probabilidade

- A **função densidade de probabilidade** (fdp) atribui probabilidades à intervalos de valores do tipo (a,b), e é definida por

$$P(a < Y < b) = \int_a^b f(y)dy$$

com as seguintes propriedades:

- É uma função não negativa

$$f(y) \geq 0.$$

- A área total sob a curva deve ser igual a 1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)dy = 1.$$

Função densidade de probabilidade

- Qualquer **função** $f(\cdot)$ que seja **não negativa** e cuja **área total** sob a curva seja igual à uma unidade caracterizará uma v.a. contínua.
- $f(y)$ **não** representa a probabilidade de ocorrência de algum evento. A área sob a curva entre dois pontos é que fornecerá a probabilidade.
- Note que
  - $\mathrm{P}(a \leq Y \leq b) = \mathrm{P}(a < Y \leq b) = \mathrm{P}(a \leq Y < b) = \mathrm{P}(a < Y < b)$.
  - $\mathrm{P}(Y = y) = 0$.

Função de distribuição acumulada

Função de distribuição acumulada

- Definição: a **função de distribuição acumulada** $F(y)$ de uma v.a. contínua Y com densidade $f(y)$ é

$$F(y) = \mathrm{P}(Y \leq y) = \int_{-\infty}^{y} f(t)dt, \quad \text{para} \quad -\infty < y < \infty.$$

- De imediato, tem-se

$$\mathrm{P}(a < Y < b) = F(b) - F(a) \quad \text{e} \quad f(y) = \frac{dF(y)}{dy},$$

desde que a derivada exista.

Exemplo 2

Seja a função

$$f(y) = \begin{cases} \frac{3}{2}y^2, & \text{se } -1 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- Mostre que é uma fdp.
- Calcule:
  1. $P(Y > 0)$.
  2. $P(Y > 0.5)$.
  3. $P(-0.5 \leq Y \leq 0.5)$.
  4. $P(Y \leq 1)$.
  5. $P(Y < 0.5)$.
  6. $P(Y < 0 \cup Y > 0.5)$.

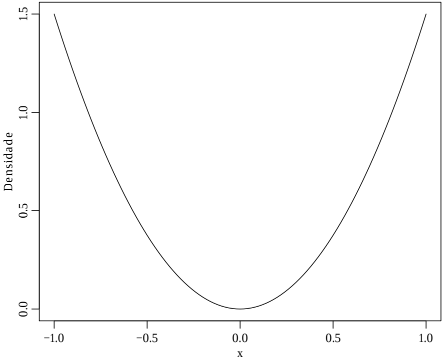

Figura 7. Gráfico da fdp.

Exemplo 2

- Para mostrar que é fdp, temos que verificar:
  - $f(y) \geq 0$ (trivial).

$$f(y_i) \geq 0 \quad \forall \quad i = \{-1, +1\}.$$

  - $\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)dy = 1$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)dy = \int_{-1}^{1} \frac{3}{2}y^2 dy = \frac{3}{2}\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{3}{2}\left[\frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3}\right] = \frac{3}{2}\left[\frac{2}{3}\right] = 1.$$

- Para calcular as probabilidades, vamos primeiro obter a distribuição acumulada.

$$F(y) = \int_{-\infty}^{y} f(t)dt = \int_{-1}^{y} \frac{3}{2}t^2 dt = \frac{3}{2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{y} = \frac{3}{2}\left[\frac{y^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3}\right] = \frac{3y^3}{6} + \frac{3}{6} = 0.5y^3 + 0.5.$$

Exemplo 2

Relembre que $F(y) = 0.5y^3 + 0.5$.

1. $\mathrm{P}(Y > 0) = 1 - \mathrm{P}(Y \leq 0) = 1 - F(0) = 0.5000$.
2. $\mathrm{P}(Y > 0.5) = 1 - \mathrm{P}(Y \leq 0.5) = 1 - F(0.5) = 1 - 0.5625 = 0.4375$.
3. $\mathrm{P}(-0.5 \leq Y \leq 0.5) = F(0.5) - F(-0.5) = 0.5625 - 0.4375 = 0.1250$.
4. $\mathrm{P}(Y < 1) = \mathrm{P}(Y \leq 1) = 1$.
5. $\mathrm{P}(Y < 0.5) = F(0.5) = 0.5625$.
6. $\mathrm{P}(Y < 0 \cup Y > 0.5) = F(0) + (1 - F(0.5)) = 0.5 + 0.4375 = 0.9375$.

Exemplo 2

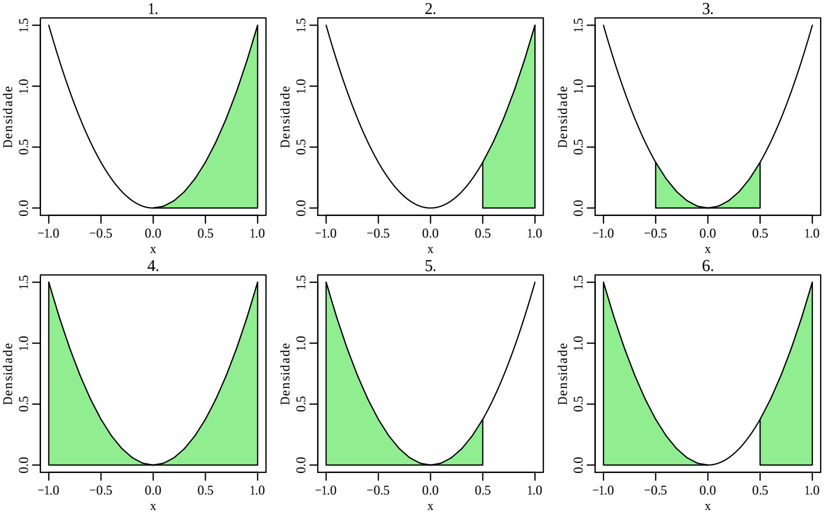

Figura 8. Gráficos da fdp com áreas indicando as probabilidades.

Considerações finais

Considerações finais

- É importante entender qual a **natureza da variável**.
- Há funções específicas para calcular **probabilidades** para cada tipo de variável.
- Probabilidade forma a base teórica dos modelos que descrevem o **comportamento probabilístico** de variáveis aleatórias.

Figura 9. Fórmulas. Imagem de Nothing Ahead no Pexels