

# Probabilidades

Luan D. Fiorentin

Universidade Federal do Paraná  
Departamento de Estatística  
Laboratório de Estatística e Geoinformação

02/03/2020



# Sumário

## 1 Introdução

## 2 Probabilidades

- Definição clássica
- Definição frequentista

## 3 Regra da adição de probabilidades

## 4 Probabilidade condicional

## 5 Independência

## 6 Teorema do produto

## 7 Teorema da probabilidade total

## 8 Teorema de bayes

## 9 Exercícios recomendados

# Introdução

- A **Teoria das Probabilidades** é o ramo da Matemática que cria, desenvolve e pesquisa modelos que podem ser utilizados para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios.
- A **Inferência Estatística** é totalmente fundamentada na Teoria das Probabilidades.
- O modelo utilizado para estudar um **fenômeno aleatório** pode variar em complexidade, mas todos eles possuem ingredientes básicos comuns:
  - Variável aleatória;
  - Parâmetros.

# Tipos de experimentos

- **Experimentos determinísticos:** quando repetido inúmeras vezes, em condições semelhantes, conduz a resultados essencialmente idênticos:
  - Aceleração da gravidade;
  - Leis da física e da química.
- **Experimentos aleatórios:** repetidos sob as mesmas condições geram resultados diferentes:
  - Lançamento de uma moeda;
  - Lançamento de um dado;
  - Tempo de vida de equipamentos;
  - Peso de um animal.

# Objetivo da probabilidade

- **Objetivo da probabilidade** é construir um modelo estatístico para representar **experimentos aleatórios**.
- As duas etapas essenciais:
  - 1 Descrever o **conjunto de resultados possíveis**;
  - 2 **Atribuir pesos a cada resultado**, refletindo suas chances de ocorrência.

# Conceitos iniciais

- **Espaço amostral** ( $\Omega$ ): é o conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório. Pode conter um número finito ou infinito de ponto.
  - Exemplo:  $\{cara; coroa\}$ ,  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $\mathbb{N}$ , ...
- **Pontos amostrais** ( $\omega$ ): correspondem aos elementos do espaço amostral.
  - Exemplo:  $\omega_1 = cara$  e  $\omega_2 = coroa$ , ...
- **Evento**: todo resultado ou subconjunto de resultados de um experimento aleatório.  
Exemplo:
  - Evento "A": a face cara;
  - Evento "B": a face coroa;
  - Evento "C": carta de espadas;
  - Evento "D": número de peças com defeito.

# Exemplo

Considere o seguinte exemplo:

- **Experimento:** pesar um fruto ao acaso.
- **Espaço amostral:**  $\mathbb{R}^+$ .
- **Pontos amostrais:** espaço amostral é infinito.
- **Eventos:**  $A = \text{"peso menor ou igual que 50 g"}$  e  $B = \text{"peso maior que 100 g"}$ .

# Operações com conjuntos

- **União:** é o evento que consiste da união de todos os pontos amostrais dos eventos que a compõem. Denota-se a união do evento A com B por  $A \cup B = \{\omega \in A \text{ ou } \omega \in B\}$ ;
- **Interseção:** é o evento composto pelos pontos amostrais comuns aos eventos que a compõem. Denota-se a interseção de A com B por  $A \cap B = \{\omega \in A \text{ e } \omega \in B\}$ ;
- **Complemento** é o conjunto de pontos do espaço amostral que não estão no evento. Denotamos o complemento do evento A por  $A^c = \{\omega \notin A\}$ ;
- **Disjuntos** (mutuamente exclusivos): são eventos que possuem interseção nula, ou seja  $A \cap B = \{\emptyset\}$ ;
- **Complementares:** são eventos que a união é o espaço amostral, ou seja  $A \cup B = \Omega$ .



# Exemplo

Considere o lançamento de um dado e os eventos:  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{\omega : \omega \leq 3\}$ ,  $C = \{\text{face par}\}$  e  $D = \{\text{face primo}\}$ .

- União:

- $A \cup B =$
- $A \cup C =$
- $A \cup D =$

- Interseção:

- $A \cap B =$
- $A \cap C =$
- $A \cap D =$

- Complementos:

- $A^c =$
- $B^c =$
- $D^c =$

# Exemplo

Considere o lançamento de um dado e os eventos:  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{\omega : \omega \leq 3\}$ ,  $C = \{\text{face par}\}$  e  $D = \{\text{face primo}\}$ .

- União:

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$
- $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6\}$
- $A \cup D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

- Interseção:

- $A \cap B = \{1, 2, 3\}$
- $A \cap C = \{2, 4\}$
- $A \cap D = \{2, 3\}$

- Complementos:

- $A^c = \{5, 6\}$
- $B^c = \{4, 5, 6\}$
- $D^c = \{1, 4, 6\}$

# Sumário

- 1 Introdução
- 2 Probabilidades
  - Definição clássica
  - Definição frequentista
- 3 Regra da adição de probabilidades
- 4 Probabilidade condicional
- 5 Independência
- 6 Teorema do produto
- 7 Teorema da probabilidade total
- 8 Teorema de bayes
- 9 Exercícios recomendados

# Definição de probabilidade

- **Definição axiomática:** probabilidade é uma função  $P(\cdot)$  que atribui valores numéricos aos eventos do espaço amostral, de tal forma que
  - 1  $0 \leq P(A) \leq 1$ , para todo  $A \in \Omega$ ;
  - 2  $P(\Omega) = 1$ ;
  - 3  $P(\emptyset) = 0$ ;
  - 4  $P(\cup_{j=1}^n A_j) = \sum_{j=1}^n P(A_j)$ , com os  $A_j$ s disjuntos.
- Agora, como podemos atribuir probabilidades aos elementos do espaço amostral?

# Como atribuir probabilidades?

Probabilidades de **variáveis aleatórias** podem ser obtidas com:

- Suposições feitas sob a realização do fenômeno (**Clássica**): baseia-se nas características teóricas da realização do fenômeno.
  - Ao lançar um dado, tem-se  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ;
  - Admitindo que o dado é honesto, pode-se assumir que  $P(1) = P(2) = \dots = P(6) = 1/6$ .
- Estudo das frequências (**Frequentista**): baseia-se nas frequências (relativas) de ocorrência do fenômeno.
  - Determinar a probabilidade de ocorrência de cada face de um dado;
  - Sem fazer nenhuma suposição inicial, podemos usar as frequências relativas de sucessivas ocorrências.

# Definição clássica

- A probabilidade de um evento  $A$  qualquer ocorrer é definida por

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis ao evento } A}{\text{número de casos possíveis}}$$

- Exemplo: considere o fenômeno aleatório lançamento de um dado honesto e o evento  $A$  sair número qualquer. Qual a probabilidade deste evento ocorrer?

$$P(A) = \frac{1}{6} = 0,1666\dots$$

- Os eventos para um número qualquer são equiprováveis, com probabilidade  $1/6$ ;
- Quando os resultados **não têm a mesma chance de ocorrer**, a probabilidade dos eventos deve ser calculada pela frequência relativa.

# Definição frequentista

- Podemos então pensar em repetir o experimento aleatório  $n$  vezes, e contar quantas vezes o evento  $A$  ocorre,  $n(A)$ ;
- Então, a frequência relativa de  $A$  nas  $n$  repetições é dada por

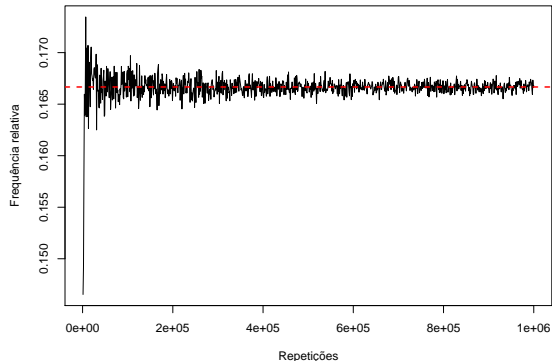
$$f_{n,A} = \frac{n(A)}{n};$$

- Assim, para  $n \rightarrow \infty$  repetições sucessivas e independentes, a frequência relativa de  $A$  tende para uma constante  $p$  como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(A)}{n} = P(A) = p.$$

# Definição frequentista

- Exemplo: Se um dado fosse lançado  $n$  vezes, e contássemos quantas vezes saiu a face 4, qual seria a probabilidade desse evento?





# Definição frequentista

- As probabilidades calculadas a partir de frequências relativas são **estimativas da verdadeira probabilidade**;
- A medida que o número de repetições vai aumentando, as **frequências relativas se estabilizam** em um número que chamamos de probabilidade;
- **Lei dos Grandes Números**: a Lei dos Grandes Números nos diz que as estimativas dadas pelas frequências relativas tendem a ficar melhores com mais observações;
- Em ciências biológicas e humanas essa é a forma mais comum de atribuir probabilidades.

## Exemplo 1

Considere a tabela de frequências abaixo. O número de alunos na turma A é 26, enquanto na turma B é 24, sendo 37 pessoas do sexo Feminino e 13 do sexo Masculino.

Eventos	F	M	Total
A	21	5	26
B	16	8	24
Total	37	13	50

- 1 Calcule a  $P(F)$ ,  $P(M)$ ,  $P(A)$  e  $P(B)$ .
- 2 Calcule a  $P(F \cup B)$ . Qual a explicação para o resultado?

## Exemplo 1

- 1 Calcule a  $P(F)$ ,  $P(M)$ ,  $P(A)$  e  $P(B)$ .

$$P(F) = \frac{37}{50} = 0,74; \quad P(M) = \frac{13}{50} = 0,26;$$

$$P(A) = \frac{26}{50} = 0,52; \quad P(B) = \frac{24}{50} = 0,48.$$

- 2 Calcule a  $P(F \cup B)$ . Qual a explicação para o resultado?

$$P(F \cup B) = P(F) + P(B) - P(F \cap B)$$

$$P(F \cup B) = \frac{37}{50} + \frac{24}{50} - \frac{16}{50} = 0,90.$$

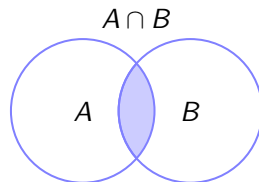
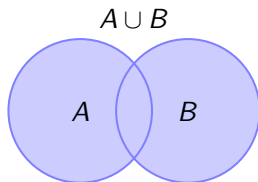
# Sumário

- 1 Introdução
- 2 Probabilidades
  - Definição clássica
  - Definição frequentista
- 3 Regra da adição de probabilidades
- 4 Probabilidade condicional
- 5 Independência
- 6 Teorema do produto
- 7 Teorema da probabilidade total
- 8 Teorema de bayes
- 9 Exercícios recomendados

# Regra

- A probabilidade da **união** entre dois eventos quaisquer,  $A$  e  $B$ , é dada pela regra da adição de probabilidades

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

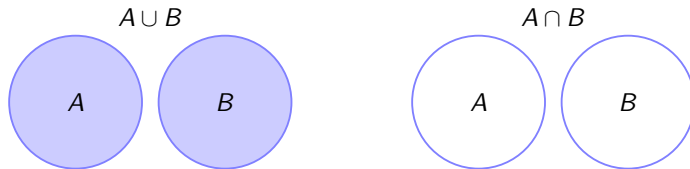


# Regra

- Note que a regra da adição pode ser simplificada **se e somente se** os eventos  $A$  e  $B$  forem **disjuntos** (ou mutuamente exclusivos):

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B),$$

pois  $(A \cap B) = \emptyset$ , então  $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$ .



# Regra

- Como consequência da regra da adição, para qualquer evento  $A \subseteq \Omega$ ,

$$P(A) = 1 - P(A^c),$$

que pode ser verificada aplicando a regra da adição com  $A^c$  no lugar de  $B$ .

- Então, temos que

$$P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) - P(A \cap A^c)$$

$$P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$$

Como  $P(A \cup A^c) = P(\Omega) = 1$ , seque imediatamente a igualdade.

## Exemplo 2

Um estudo realizado por uma empresa de recursos humanos mostrou que 45% dos funcionários de uma multinacional saíram da empresa porque estavam insatisfeitos com seus salários, 28% porque consideraram que a empresa não possibilitava o crescimento profissional e 8% indicaram insatisfação tanto com o salário como com sua impossibilidade de crescimento profissional.

Considere o evento  $S$ : o funcionário sai da empresa em razão do salário; e o evento  $I$ : o funcionário sai da empresa em razão da impossibilidade de crescimento profissional.

- Qual é a probabilidade de um funcionário sair desta empresa devido a insatisfação com o salário ou insatisfação com sua impossibilidade de crescimento profissional?



## Exemplo 2

- Qual é a probabilidade de um funcionário sair desta empresa devido a insatisfação com o salário ou insatisfação com sua impossibilidade de crescimento profissional?

$$P(S \cup I) = P(S) + P(I) - P(S \cap I)$$

$$P(S \cup I) = 0,45 + 0,28 - 0,08$$

$$P(S \cup I) = 0,65.$$

# Sumário

- 1 Introdução
- 2 Probabilidades
  - Definição clássica
  - Definição frequentista
- 3 Regra da adição de probabilidades
- 4 Probabilidade condicional
- 5 Independência
- 6 Teorema do produto
- 7 Teorema da probabilidade total
- 8 Teorema de bayes
- 9 Exercícios recomendados

# O que é?

- O fenômeno aleatório com o qual trabalhamos pode ser separado em etapas em muitas situações práticas.
- A informação do que ocorreu em uma determinada etapa pode **influenciar** nas probabilidades de ocorrências das etapas sucessivas.
- Assim, **ganhamos informações** e podemos recalcular as probabilidades de interesse. Essas probabilidades recalculadas recebem o nome de probabilidade condicional.

## Como calcular?

- Dados dois eventos,  $A$  e  $B$ , a probabilidade condicional de  $A$  ocorrer, dado que ocorreu  $B$ , é representado por  $P(A|B)$ , sendo dada por

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

para  $P(B) > 0$ .

- Caso  $P(B) = 0$ , define-se

$$P(A|B) = P(A).$$

## Exemplo 3.1

- Um dado foi lançado, qual é a probabilidade de ter ocorrido face 4?

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ e } n(\Omega) = 6$$

$$A = \text{face 4} = \{4\}, \text{ então } n(A) = 1 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{6}$$

- Suponha que o dado foi jogado, e, sem saber o resultado, você recebe a informação de que ocorreu face par. Qual é a probabilidade de ter saído face 4 com essa nova informação?

$$B = \text{face par} = \{2, 4, 6\}, \text{ então } n(B) = 3 \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6}$$

$$C = \text{face 4, dado que ocorreu face par } \{4\}, n(C) = \frac{1}{3}.$$

## Exemplo 3.1

- Usando a definição formal de probabilidade condicional:

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \frac{1}{6}.$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6}.$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A|B) = \frac{1/6}{3/6}$$

$$P(A|B) = \frac{1}{3}.$$

## Exemplo 3.2

Em uma universidade foi selecionada uma amostra de 500 alunos que cursaram a disciplina de Estatística. Entre as questões levantadas estava: Você gostou da disciplina de Estatística? De 240 homens, 140 responderam que sim. De 260 mulheres, 200 responderam que sim.

- 1 Organize os dados em uma tabela.
- 2 Dado que o aluno escolhido gostou ( $G$ ) da disciplina de Estatística, Qual a probabilidade de que o aluno seja um homem ( $H$ )?
- 3 Dado que o aluno escolhido é uma mulher ( $M$ ), Qual a probabilidade de que ela não gostou ( $NG$ ) da disciplina de Estatística?

## Exemplo 3.2

1 Tabela de resumo dos dados:

Sexo	Gostou		Total
	Sim	Não	
Homem	140	100	240
Mulher	200	60	260
Total	340	160	500

2

$$P(H|G) = \frac{P(H \cap G)}{P(G)} = \frac{140}{340} = 0,41.$$

3

$$P(NG|M) = \frac{P(NG \cap M)}{P(M)} = \frac{60}{260} = 0,23.$$



# Sumário

- 1 Introdução
- 2 Probabilidades
  - Definição clássica
  - Definição frequentista
- 3 Regra da adição de probabilidades
- 4 Probabilidade condicional
- 5 Independência**
- 6 Teorema do produto
- 7 Teorema da probabilidade total
- 8 Teorema de bayes
- 9 Exercícios recomendados

# O que é?

- Para **probabilidades condicionais**,  $P(A|B)$ , saber que o evento  $B$  ocorreu nos dá uma informação extra sobre a ocorrência do evento  $A$ ;
- No entanto, há situações nas quais saber que o evento  $B$  ocorreu não tem qualquer **interferência** na ocorrência do evento  $A$ ;
- Nesses casos, pode-se dizer que os eventos  $A$  e  $B$  são **independentes**.

# Regra

- Os eventos  $A$  e  $B$  são ditos **eventos independentes** se a ocorrência de  $B$  não altera a probabilidade de ocorrência de  $A$ , ou seja, eventos  $A$  e  $B$  são independentes se

$$P(A|B) = P(A)$$

$$P(B|A) = P(B);$$

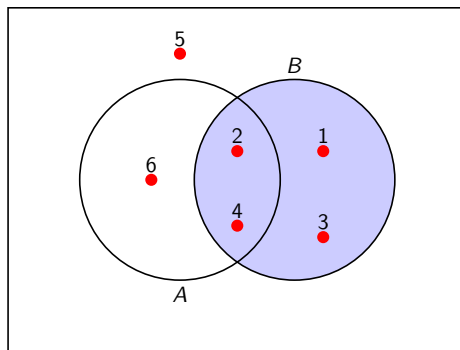
- Assim, e com a regra do produto, temos que

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = P(B) \cdot P(A)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(A) \cdot P(B).$$

## Exemplo 4.1

- Considere o lançamento de um dado e os seguintes eventos:
  - $A$  = “resultado é um número par”;
  - $B$  = “resultado é um número menor ou igual a 4”.
- Os eventos  $A$  e  $B$  são independentes?



## Exemplo 4.1

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Agora, como

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B), \quad \frac{1}{3} = \frac{1}{3},$$

então  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$  e os eventos  $A$  e  $B$  são considerados independentes. Saber que ocorreu  $A$  não muda a probabilidade de  $B$  ocorrer e vice-versa.

## Exemplo 4.2

Um lote contém 10 peças, sendo 7 boas ( $B$ ) e 3 defeituosas ( $D$ ). Retiramos duas peças, ao acaso e com reposição, para inspeção, com a finalidade de verificar a probabilidade de encontrar duas peças defeituosas no lote.

- 1 Qual o evento de interesse?
- 2 Qual o espaço amostral  $\Omega$ ?
- 3 Qual a probabilidade de se obter duas peças defeituosas?

## Exemplo 4.2

- 1 O evento de interesse é  $A$ : retirar duas peças defeituosas, ao acaso e com reposição, para inspeção.

2

$$\Omega = \{(D_1, D_2); (D_1, B_2); (B_1, B_2); (B_1, D_2)\}.$$

3

$$P(A) = P(D_1, D_2) = P(D_1 \cap D_2) = P(D_1)P(D_2)$$

$$P(A) = \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{9}{100}.$$

# Sumário

- 1 Introdução
- 2 Probabilidades
  - Definição clássica
  - Definição frequentista
- 3 Regra da adição de probabilidades
- 4 Probabilidade condicional
- 5 Independência
- 6 Teorema do produto**
- 7 Teorema da probabilidade total
- 8 Teorema de bayes
- 9 Exercícios recomendados



## O que é?

- O **teorema do produto** permite calcular probabilidade da ocorrência simultânea de dois eventos  $A$  e  $B$ , do mesmo espaço amostral. É uma expressão derivada do conceito de probabilidade condicional. Uma vez que

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

temos que

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B);$$

- A expressão anterior permite calcular probabilidades em espaços amostrais que são realizados em **sequência**, onde a ocorrência da segunda etapa depende (ou não) da ocorrência da primeira etapa.

## Exemplo 5.1

Um lote contém 10 peças, sendo 7 boas ( $B$ ) e 3 defeituosas ( $D$ ). Retiramos duas peças, ao acaso e sem reposição, para inspeção, com a finalidade de verificar a probabilidade de encontrar duas peças defeituosas no lote.

- Eventos:

- $D1$ : a primeira peça é defeituosa;
- $D2$ : a segunda peça é defeituosa.

$$P(D1) = \frac{3}{10}; \quad P(D2/D1) = \frac{2}{9}.$$

- Qual a probabilidade de encontrar duas peças defeituosas?

$$P(D1 \cap D2) = P(D1) \cdot P(D2|D1) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{6}{90}.$$

## Exemplo 5.2

Uma empresa de peças metálicas sabe que 65% dos seus clientes usam cartões de crédito no pagamento da conta.

- 1 Qual é a probabilidade de os 2 próximos clientes usarem, cada um deles, um cartão de crédito?
- 2 Qual é a probabilidade de os 5 próximos clientes usarem, cada um deles, um cartão de crédito?

## Exemplo 5.2

Considere os eventos:

- $A$ : o primeiro cliente usa cartão de crédito;
- $B$ : o segundo cliente usa cartão de crédito.

1

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = (0,65) \cdot (0,65) = 0,42.$$

2

$$P(A \cap B \cap C \cap D \cap E) = (0,65)^5 = 0,12.$$

## Exemplo 5.3

Um governo realizou uma pesquisa para determinar qual a preferência de partido das pessoas que moram na cidade de Curitiba nas próximas eleições. Os dados mostraram que 55% das pessoas votam no partido *GFP*.

- 1 Qual é a probabilidade de duas pessoas ao acaso votar, cada uma delas, no partido *GFP*?
- 2 Qual é a probabilidade de 5 pessoas ao acaso votar, cada uma delas, no partido *GFP*?

## Exemplo 5.3

Considere os eventos:

- $A$ : a primeira pessoa vota no partido *GFP*;
- $B$ : a segunda pessoa vota no partido *GFP*.

1

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = (0,55) \cdot (0,55) = 0,30.$$

2

$$P(A \cap B \cap C \cap D \cap E) = (0,55)^5 = 0,05.$$

# Sumário

- 1 Introdução
- 2 Probabilidades
  - Definição clássica
  - Definição frequentista
- 3 Regra da adição de probabilidades
- 4 Probabilidade condicional
- 5 Independência
- 6 Teorema do produto
- 7 Teorema da probabilidade total**
- 8 Teorema de bayes
- 9 Exercícios recomendados

# O que é?

- Considere que os eventos  $A_1, A_2, \dots, A_k$  formam uma **partição do espaço amostral** (ou seja, não tem interseção entre si), e a sua união é igual ao espaço amostral.
- Isto é,  $A_i \cap A_j = \emptyset$ , para  $\forall i \neq j$ , e  $\cup_{i=1}^k A_i = \Omega$ .





# O que é?

- Permite calcular probabilidades de um evento a partir do **conjunto de probabilidades condicionais** que envolvam esse evento. Então,

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B)$$

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B)$$

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3).$$

## Exemplo 6

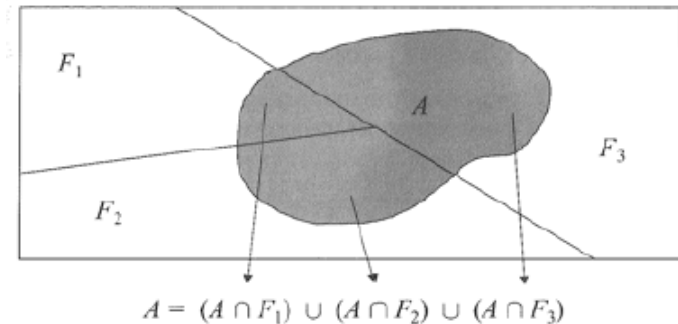
Exemplo: Suponha que um fabricante de sorvetes recebe 20% de todo o leite que utiliza de uma fazenda  $F1$ , 30% de uma outra fazenda  $F2$  e 50% de  $F3$ .

Um órgão de fiscalização inspecionou as fazendas de surpresa e observou que 20% do leite produzido por  $F1$  estava adulterado por adição de água, enquanto para  $F2$  e  $F3$ , essa proporção era de 5% e 2%, respectivamente.

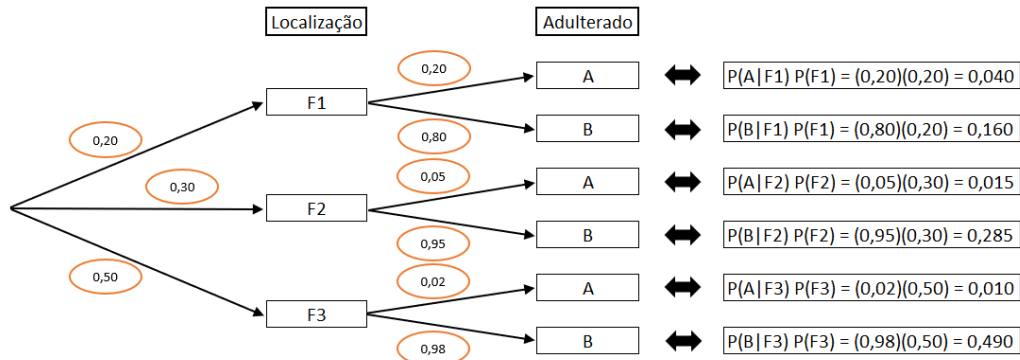
- Na indústria de sorvetes os galões de leite são armazenados em um refrigerador sem identificação das fazendas. Para um galão escolhido ao acaso, qual a probabilidade do leite estar adulterado?

## Exemplo 6

Considerando o evento  $A$ : o leite está adulterado, podemos defini-lo como:



## Exemplo 6



## Exemplo 6

$$P(A) = P(F_1 \cap A) + P(F_2 \cap A) + P(F_3 \cap A)$$

$$P(A) = P(A|F_1) \cdot P(F_1) + P(A|F_2) \cdot P(F_2) + P(A|F_3) \cdot P(F_3)$$

$$P(A) = 0,20 \cdot 0,20 + 0,05 \cdot 0,30 + 0,02 \cdot 0,50$$

$$P(A) = 0,065.$$

# Sumário

- 1 Introdução
- 2 Probabilidades
  - Definição clássica
  - Definição frequentista
- 3 Regra da adição de probabilidades
- 4 Probabilidade condicional
- 5 Independência
- 6 Teorema do produto
- 7 Teorema da probabilidade total
- 8 Teorema de bayes**
- 9 Exercícios recomendados

# O que é?

- Suponha que os eventos  $A_1, A_2, \dots, A_k$  **formem uma partição de  $\Omega$**  e que suas probabilidades sejam conhecidas. Suponha, ainda, que para um evento  $B$ , se conheçam as probabilidades  $P(B|A_i)$  para todo  $i = 1, 2, \dots, k$ . Então, para qualquer  $i$ ,

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^k P(A_i) \cdot P(B|A_i)},$$

em que  $i = 1, 2, \dots, k$ .

## Exemplo 7

Considerando o exemplo anterior do fabricante de sorvete, podemos calcular a probabilidade de que o leite adulterado tenha sido obtido a partir da fazenda  $F_i$ .

- 1 Qual a probabilidade de que o leite adulterado tenha sido obtido a partir da fazenda  $F1$ ?
- 2 Qual a probabilidade de que o leite adulterado tenha sido obtido a partir da fazenda  $F2$ ?
- 3 Qual a probabilidade de que o leite adulterado tenha sido obtido a partir da fazenda  $F3$ ?



## Exemplo 7

$$P(F_1|A) = \frac{P(F_1 \cap A)}{P(A)}$$

$$P(F_1|A) = \frac{P(A|F_1)P(F_1)}{P(A)}$$

$$P(F_1|A) = \frac{0,2 \cdot 0,2}{0,2 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,05 + 0,5 \cdot 0,02}$$

$$P(F_1|A) = 0,615;$$

$$P(F_2|A) = 0,231; \quad P(F_3|A) = 0,154.$$

# Sumário

- 1 Introdução
- 2 Probabilidades
  - Definição clássica
  - Definição frequentista
- 3 Regra da adição de probabilidades
- 4 Probabilidade condicional
- 5 Independência
- 6 Teorema do produto
- 7 Teorema da probabilidade total
- 8 Teorema de bayes
- 9 Exercícios recomendados

# Exercícios recomendados

- Seção 2.1: Ex. 1, 2, 3, 4 e 5.
- Seção 2.2: Ex. 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7.
- Seção 2.3: Ex. 1, 3, 5, 8, 9, 11, 15, 19 e 21.