

**Analysis and development of finite
volume methods for the new generation of
cubed sphere dynamical cores for the
atmosphere**

Luan da Fonseca Santos

REPORT PRESENTED TO THE
INSTITUTE OF MATHEMATICS AND STATISTICS
OF THE UNIVERSITY OF SÃO PAULO
FOR THE DOCTOR OF SCIENCE
QUALIFYING EXAMINATION

Program: Applied Mathematics

Advisor: Prof. Pedro da Silva Peixoto

During the development of this work the author was supported by CAPES and FAPESP (grant number 20/10280-4)

São Paulo
July, 2023

**Analysis and development of finite
volume methods for the new generation of
cubed sphere dynamical cores for the
atmosphere**

Luan da Fonseca Santos

This is the original version of the
qualifying text prepared by candidate
Luan da Fonseca Santos, as submitted
to the Examining Committee.

Resumo

Luan da Fonseca Santos. **Análise e desenvolvimento de métodos de volumes finitos para modelos da nova geração da dinâmica atmosférica baseados na esfera cubada.** Exame de Qualificação (Doutorado). Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2023.

O núcleo dinâmico FV3 do GFDL-NOAA-USA, originalmente projetado para grades de latitude e longitude, foi adaptado para a esfera-cubada com o objetivo de melhorar sua escalabilidade em supercomputadores. No entanto, esse tipo de malha apresenta um erro de padrão de onda de número 4 devido à descontinuidade das coordenadas na esfera-cubada. Neste trabalho, investigamos os operadores de volumes finitos do FV3 na esfera-cubada. Para calcular os estênceis próximos às arestas do cubo, utilizamos a abordagem *duogrid*. Ao contrário das extrapolações usadas no FV3, essa abordagem estende as linhas de grade para painéis adjacentes, reduzindo o erro nas interfaces do cubo. No entanto, a conservação de massa não é mais garantida. Demonstramos que o corretor de massa, que faz a média dos fluxos nas interfaces do cubo, reduz o erro de truncamento local do operador de divergência em um. Em seguida, propomos um corretor de massa que introduz apenas um erro de segunda ordem e gera menos erro nas bordas. Além disso, apresentamos um método para modificar a técnica de splitting do FV3 para obter uma precisão de segunda ordem. Para isso, precisamos calcular os pontos de partida, que envolvem interpolações lineares unidimensionais, adicionando um pequeno esforço computacional adicional. Por fim, apresentamos experimentos numéricos para a equação de advecção que concordam com nossas observações em relação aos diferentes fixadores de massa e splittings.

Palavras-chave: Núcleo dinâmico da atmosfera, esfera cubada, volumes finitos, dimension splitting, ponto de partida, corretor de massa.

Abstract

Luan da Fonseca Santos. **Analysis and development of finite volume methods for the new generation of cubed sphere dynamical cores for the atmosphere.**

Qualifying Exam (Doctorate). Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo, São Paulo, 2023.

The dynamical core FV3 from GFDL-NOAA-USA, originally designed for latitude-longitude grids, has been adapted to the cubed-sphere with the aim of enhancing its scalability on massively parallel supercomputers. However, this type of grid experiences a wavenumber 4 pattern error due to the cubed-sphere coordinate discontinuity. In this study, we investigate the finite-volume operators of FV3 on the cubed-sphere. To compute stencils near the cube edges, we employ the duogrid approach. Unlike the extrapolations used in FV3, this approach extends the grid-lines to adjacent panels, reducing the error at the cube interfaces. Nevertheless, mass preservation is no longer guaranteed. We demonstrate that the mass fixer that averages fluxes at the cube interfaces reduces the local truncation error of the divergence operator by one. Subsequently, we propose a mass fixer that introduces only a second-order error and generates less error at the edges. Additionally, we present a method to modify the splitting technique of FV3 to achieve second-order accuracy. To achieve this, we need to compute departure points, which involve one-dimensional linear interpolations adding a small extra computational effort. Finally, we present numerical experiments for the advection equation that agree with our observations regarding the different mass fixers and splittings.

Keywords: Dynamical core, cubed-sphere, finite-volume, dimension splitting, departure point, mass fixer.

Contents

1	Introduction	1
1.1	Background	1
2	One-dimensional finite-volume methods	3
Appendixes		
A	Numerical Analysis	5
A.1	Finite-difference estimates	5
B	Code availability	7

Chapter 1

Introduction

1.1 Background

Chapter 2

One-dimensional finite-volume methods

Appendix A

Numerical Analysis

A.1 Finite-difference estimates

This Section aims to prove all finite-difference error estimations used throughout this appendix. All the proves are very simple and consist of applying Taylor's expansions, as it is usual when computing the accuracy order of many numerical schemes.

Appendix B

Code availability

