

Resolução de Exercícios

Profª Julienne Borges



Testes de hipóteses

Além do básico

Além do básico!

Teste para igualdade de variâncias

Use um teste para 2 variâncias para determinar se as variâncias ou os desvios padrão de dois grupos são diferentes.

Para um teste para 2 variâncias, as hipóteses são como a seguir:

$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \rightarrow$ Amostras homocedásticas (variâncias iguais)

$H_A: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \rightarrow$ Amostras heterocedásticas (variâncias diferentes)

Algumas opções de teste de igualdade de variâncias que podem ser utilizados: Teste F, teste de Levene, teste de Bartlett (3 ou mais grupos), teste de Cochran, etc.

Além do básico!

Teste para igualdade de variâncias

No R:

```
var.test(x, y, ratio = 1, alternative = c("two.sided",  
"less", "greater"), conf.level = 0.95)
```

x e y são os vetores com os valores das amostras

ratio: é a razão entre as variâncias populacionais de x e y

alternative = c("two.sided", "less", "greater") → representa o tipo de hipótese que será testado:

"two.sided" → bilateral

"less" → Unilateral à esquerda

"greater" → Unilateral à direita

conf.level → você deve especificar o nível de confiança para o teste de hipóteses

Além do básico!

Teste para igualdade de variâncias

No Python:

<https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.stats.bartlett.html#scipy.stats.bartlett>

Além do básico!

Teste para igualdade de variâncias

Máquina A		Máquina B	
145	138	133	135
142	131	123	139
136	139	133	151
133	140	130	136
131	123	129	141
131	137	129	147
132	128	133	145
127	137	137	139
138	133	142	151
139	132	151	139

Exemplo 1

Queremos verificar se 2 máquinas produzem peças com a mesma variabilidade quanto ao diâmetro (em mm). Para isso, sorteamos vinte amostras de peças de cada máquina e obtivemos as seguintes medidas do diâmetro (em mm):

Além do básico!

Teste para igualdade de variâncias

Hipóteses estatísticas:

$H_0: \sigma_A^2 = \sigma_B^2$ → Amostras homocedásticas (variâncias iguais)

$H_A: \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$ → Amostras heterocedásticas (variâncias diferentes)

Considerando um nível de 5% de significância, o que podemos concluir?

Além do básico!

Teste para igualdade de variâncias

```
> maq_a<-c(145,142,136,133,131,131,132,127,138,139,138,131,139,140,123,137,128,137,133,132)
> maq_b<-c(133,123,133,130,129,129,133,137,142,151,135,139,151,136,141,147,145,139,151,139)
> var.test(maq_a, maq_b, ratio = 1, alternative = c("two.sided"), conf.level = 0.95)
```

F test to compare two variances

data: maq_a and maq_b

F = 0.46557, num df = 19, denom df = 19, p-value = 0.1041

alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to 1

95 percent confidence interval:

0.1842775 1.1762348

sample estimates:

ratio of variances

0.4655681

Além do básico!

Teste para igualdade de variâncias

F test to compare two variances

data: maq_a and maq_b

F = 0.46557, num df = 19, denom df = 19, p-value = 0.1041

alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to 1

95 percent confidence interval:

0.1842775 1.1762348

sample estimates:

ratio of variances

0.4655681

Valor p:

SE rejeitarmos H_0 , cometemos um erro de 0,1041 ou 10,41%.

Conclusão do teste:

Concluimos com 5% de significância que as duas máquinas são homocedásticas, ou seja, têm a mesma variância.

Além do básico!

Teste de normalidade para uma variável quantitativa

Use um teste de normalidade para determinar se os dados seguem ou não uma distribuição normal.

Para um teste de normalidade, as hipóteses são as seguintes:

H_0 : os dados seguem uma distribuição normal.

H_A : os dados não seguem uma distribuição normal.

Alguns testes de normalidade que podem ser utilizados: Teste de Shapiro-Wilk, Teste de Kolmogorov-Smirnov, Teste de Anderson-Darling, etc.

Além do básico!

Teste de normalidade para uma variável quantitativa

No Python:

<https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.stats.shapiro.html>

<https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.stats.kstest.html>

Além do básico!

Teste de normalidade para uma variável quantitativa

Exemplo 2

Um engenheiro de alimentos de uma empresa fabricante de alimentos processados deseja avaliar o percentual de gordura nos molhos engarrafados da empresa. O percentual anunciado é 15%. O engenheiro mede o percentual de gordura em 20 amostras aleatórias.

Deseja-se verificar a suposição de normalidade antes de realizar o teste de hipótese. Utilize $\alpha=5\%$.

Percentual de Gordura	
15,2	18,5
12,4	16,3
15,4	20
16,5	19,2
15,9	12,3
17,1	12,8
16,9	17,9
14,3	16,3
19,1	18,7
18,2	16,2

Além do básico!

Teste de normalidade para uma variável quantitativa

```
> gordura<-  
c(15.2,12.4,15.4,16.5,15.9,17.1,16.9,14.3,19.1,18.2,18.5,16.3,20,19.2,12.3,1  
2.8,17.9,16.3,18.7,16.2)  
> shapiro.test(gordura)
```

Shapiro-Wilk normality test

```
data:  gordura  
W = 0.9484, p-value = 0.3434
```

Lembrando que, nesse teste, as hipóteses estatísticas são:

H_0 : os dados seguem uma distribuição normal.

H_A : os dados não seguem uma distribuição normal.

O que você pode concluir utilizando um nível de 5% de significância?

Além do básico!

Teste de normalidade para uma variável quantitativa

Shapiro-Wilk normality test

```
data: gordura
```

```
W = 0.9484, p-value = 0.3434
```

H_0 : os dados seguem uma distribuição normal.

H_A : os dados não seguem uma distribuição normal.

Valor p = 0,3434 → SE rejeitarmos H_0 , cometemos um erro de 0,3434 ou 34,34%.

Conclusão do teste:

Pode-se dizer, com 5% de significância, que o percentual de gordura nos molhos engarrafados da empresa segue uma distribuição normal.

Além do básico!

Teste para duas proporções

Exemplo 3

Um analista de sistemas deseja comparar o desempenho de duas amostras de programas na solução de um problema. Na amostra 1, os programas foram feitos na linguagem de programação A, em 40 diferentes algoritmos. Na amostra 2, os programas foram feitos na linguagem de programação B, em 60 diferentes algoritmos. Na amostra 1, a proporção de acerto da resposta do problema foi de 65% e na B, 90%. Considerando um nível de 1% de significância, há evidência suficiente para dizer que existe diferença na proporção de acerto da resposta entre as duas linguagens de programação?

Além do básico!

Teste para duas proporções

Dados do enunciado:

Programação	Tamanho amostral	Proporção de acerto	Número de acertos
A	40	0,65	$40 \cdot 0,65 = 26$
B	60	0,90	$60 \cdot 0,90 = 54$

Hipóteses estatísticas:

$$H_0: p_A = p_B$$

$$H_A: p_A \neq p_B$$

Além do básico!

Teste para duas proporções

```
> prop.test(x=c(26,54), n=c(40,60),alternative =c("two.sided"), conf.level =  
0.95, correct=FALSE)
```

```
2-sample test for equality of proportions without continuity  
correction
```

```
data: c(26, 54) out of c(40, 60)  
X-squared = 9.375, df = 1, p-value = 0.0022  
alternative hypothesis: two.sided  
95 percent confidence interval:  
 -0.41616403 -0.08383597  
sample estimates:  
prop 1 prop 2  
 0.65   0.90
```

Além do básico!

Teste para duas proporções

2-sample test for equality
of proportions without continuity
correction

data: c(26, 54) out of c(40, 60)
X-squared = 9.375, df = 1, p-value
= 0.0022

alternative hypothesis: two.sided
95 percent confidence interval:
-0.41616403 -0.08383597

sample estimates:
prop 1 prop 2
0.65 0.90

Hipóteses estatísticas:

$H_0: p_A = p_B$

$H_A: p_A \neq p_B$

O que você pode concluir?

Considerando um nível de 1% de significância, há evidência suficiente para dizer que existe diferença na proporção de acerto da resposta entre as duas linguagens de programação.

Além do básico!

Teste para duas proporções

```
2-sample test for  
equality of proportions without  
continuity  
correction
```

```
data:  c(26, 54) out of c(40, 60)  
X-squared = 9.375, df = 1, p-  
value = 0.0022  
alternative hypothesis: two.sided  
95 percent confidence interval:  
 -0.41616403 -0.08383597  
sample estimates:  
prop 1 prop 2  
 0.65   0.90
```

Observe que as hipóteses podem ser reescritas da seguinte forma:

$$H_0: p_A - p_B = 0$$

$$H_A: p_A - p_B \neq 0$$

Conclusão do intervalo de confiança:

Podemos dizer com 95% de confiança, que a proporção de acertos da linguagem A é inferior a proporção da linguagem B, sendo que essa diferença pode variar de 8,38% a 41,62%.

Além do básico!

Teste para duas médias

Testes Paramétricos para comparação de duas médias

Amostras
Dependentes

Teste t pareado
 $gl = n-1$

Amostras
Independentes

Variâncias
populacionais
conhecidas

Teste Z

Variâncias
populacionais
desconhecidas

Iguais

Teste t
 $gl = n_1 + n_2 - 2$

Diferentes

Teste t
 $gl = v$

Testes paramétricos são aplicáveis quando as duas populações seguem a distribuição normal. Faça o teste de normalidade, ok? Escolha o teste de acordo com o esquema ao lado. Não normal? Veja opções de testes não paramétricos!

Além do básico!

Teste para duas médias

```
t.test(x, y, alternative = c("two.sided", "less", "greater"), paired = FALSE,  
var.equal = FALSE, conf.level = 0.95)
```

`x` e `y` → representam os vetores de valores observados nas amostras.

`alternative = c("two.sided", "less", "greater")` → representa o tipo de hipótese que será testado:

 "two.sided" → bilateral

 "less" → Unilateral à esquerda

 "greater" → Unilateral à direita

`paired` → TRUE: teste t para amostras pareadas, FALSE: teste para amostras independentes

`var.equal` → TRUE: amostras homocedásticas, FALSE: amostras heterocedásticas

`conf.level` → você deve especificar o nível de confiança para o teste de hipóteses

Além do básico!

Teste para duas médias

Exemplo 4

(Bussab, 2007) Para verificar o grau de adesão de uma nova cola para vidros, prepararam-se dois tipos de montagem: cruzado (A), onde a cola é posta em forma de X, e quadrado (B), onde a cola é posta apenas nas quatro bordas. Os resultados da resistência para 10 amostras em cada tipo de montagem estão a seguir. Que tipo de conclusão poderia ser tirada? Utilize um nível de 5% de significância.

Método cruzado (A): 16, 14, 19, 18, 19, 20, 15, 18, 17, 18.

Método quadrado (B): 13, 19, 14, 17, 21, 24, 10, 14, 13, 15.

Além do básico!

Teste para duas médias

Parâmetro: Resistência média



Grupos: 2 (métodos A e B)



Amostras independentes



Variâncias populacionais
desconhecidas



$H_0: \mu_A = \mu_B$

$H_A: \mu_A \neq \mu_B$

Para escolher o teste mais adequado para a comparação dessas duas médias precisamos responder duas questões:

1. As amostras seguem a distribuição normal?
2. As amostras são homocedásticas ou heterocedásticas?

Além do básico!

Teste para duas médias

1. As amostras seguem a distribuição normal?

Hipóteses:

H_0 : os dados seguem uma distribuição normal.

H_A : os dados não seguem uma distribuição normal.

Vamos utilizar o teste de Shapiro-Wilk.

```
> cruzado_a<-c(16, 14, 19, 18, 19, 20, 15,
18, 17, 18)
> quadrado_b<-c(13, 19, 14, 17, 21, 24,
10, 14, 13, 15)
> shapiro.test(cruzado_a)
```

```
Shapiro-Wilk normality test
data: cruzado_a
W = 0.94181, p-value = 0.5733
```

```
> shapiro.test(quadrado_b)
```

```
Shapiro-Wilk normality test
data: quadrado_b
W = 0.94277, p-value = 0.5842
```


Além do básico!

Teste para duas médias

```
> cruzado_a<-c(16, 14, 19, 18, 19, 20, 15,
18, 17, 18)
> quadrado_b<-c(13, 19, 14, 17, 21, 24,
10, 14, 13, 15)
> shapiro.test(cruzado_a)
```

```
      Shapiro-Wilk normality test
data:  cruzado_a
W = 0.94181, p-value = 0.5733
```

```
> shapiro.test(quadrado_b)
```

```
      Shapiro-Wilk normality test
data:  quadrado_b
W = 0.94277, p-value = 0.5842
```

Hipóteses:

H_0 : os dados seguem uma distribuição normal.

H_A : os dados não seguem uma distribuição normal.

Conclusão do teste:

Pode-se dizer, com 5% de significância, que a resistência pelo método cruzado e pelo método quadrado segue uma distribuição normal.

Além do básico!

Teste para duas médias

2. As amostras são homocedásticas ou heterocedásticas?

Hipóteses:

$H_0: \sigma_A^2 = \sigma_B^2 \rightarrow$ Amostras homocedásticas (variâncias iguais)

$H_A: \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2 \rightarrow$ Amostras heterocedásticas (variâncias diferentes)

Vamos utilizar o teste F.

```
> var.test(cruzado_a, quadrado_b, ratio =  
1, alternative = c("two.sided"),  
conf.level = 0.95)
```

```
      F test to compare two variances  
data:  cruzado_a and quadrado_b  
F = 0.2, num df = 9, denom df = 9, p-value  
= 0.02507  
alternative hypothesis: true ratio of  
variances is not equal to 1  
95 percent confidence interval:  
 0.04967717 0.80519883  
sample estimates:  
ratio of variances  
      0.2
```

Além do básico!

Teste para duas médias

```
> var.test(cruzado_a, quadrado_b, ratio =  
1, alternative = c("two.sided"),  
conf.level = 0.95)
```

```
      F test to compare two variances  
data:  cruzado_a and quadrado_b  
F = 0.2, num df = 9, denom df = 9, p-value  
= 0.02507  
alternative hypothesis: true ratio of  
variances is not equal to 1  
95 percent confidence interval:  
 0.04967717 0.80519883  
sample estimates:  
ratio of variances  
          0.2
```

Hipóteses:

$H_0: \sigma_A^2 = \sigma_B^2 \rightarrow$ Amostras
homocedásticas (variâncias iguais)

$H_A: \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2 \rightarrow$ Amostras
heterocedásticas (variâncias
diferentes)

Conclusão:

Concluimos com 5% de significância
que a resistência pelos métodos
cruzado e quadrado são
heterocedásticas, ou seja, NÃO têm a
mesma variância.

Além do básico!

Teste para duas médias

Parâmetro: Resistência média



Grupos: 2 (métodos A e B)



Amostras independentes



Variâncias populacionais
desconhecidas



$$H_0: \mu_A = \mu_B$$

$$H_A: \mu_A \neq \mu_B$$

1. As amostras seguem a distribuição normal? **SIM**
2. As amostras são homocedásticas ou heterocedásticas?
HETEROCEDÁSTICAS



**Teste t para comparação de duas
médias com amostras independentes e
variâncias diferentes!**

Além do básico!

Teste para duas médias

Hipóteses:

$$H_0: \mu_A = \mu_B$$

$$H_A: \mu_A \neq \mu_B$$

```
> t.test(cruzado_a,  
quadrado_b, alternative =  
c("two.sided"), paired =  
FALSE, var.equal = FALSE,  
conf.level = 0.95)
```

Welch Two Sample t-test

```
data: cruzado_a and quadrado_b  
t = 0.95258, df = 12.462, p-value  
= 0.3589
```

```
alternative hypothesis: true  
difference in means is not equal  
to 0
```

```
95 percent confidence interval:  
-1.789083 4.589083
```

```
sample estimates:  
mean of x mean of y  
17.4 16.0
```

Além do básico!

Teste para duas médias

Welch Two Sample t-test

```
data: cruzado_a and quadrado_b
t = 0.95258, df = 12.462, p-value
= 0.3589
alternative hypothesis: true
difference in means is not equal
to 0
95 percent confidence interval:
 -1.789083  4.589083
sample estimates:
mean of x mean of y
    17.4      16.0
```

Hipóteses:

$$H_0: \mu_A = \mu_B$$

$$H_A: \mu_A \neq \mu_B$$

Conclusão do teste:

Podemos concluir com 5% de significância que NÃO há diferença na resistência média quando comparamos os dois métodos (cruzado e quadrado).

Testes de hipóteses no R

https://www.est.ufmg.br/portal/arquivos/rts/RTE_02_2018.pdf



PUC Minas
Virtual