8,5 ~~9,0~~

UFFS - Ciência da Computação - Cálculo I

Prova 1 Valor 10 pontos - Data: 25/09/2024

Nome e e-mail: Luan Luca de Lino Peloso

1,5 **1ª Questão (valor 1,5 pontos)** Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 & se \quad x < 0 \\ 1 & se \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x} & se \quad x \geq 1 \end{cases}$. Esboce o gráfico da função f e determine os limites indicados, se existirem:

(a) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ (b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ (c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

(d) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ (e) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

1,0 **2ª Questão (valor 1,0 ponto)** Esboce o gráfico de uma função f que satisfaça a todas as condições:

$$f(-2) = 1, \quad \lim_{x\to(-2)^+} f(x) = 2, \quad \lim_{x\to(-2)^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 1} f(x) = \nexists, \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0.$$

1,5 **3ª Questão (valor 2,0 pontos)** Usando as propriedades de limites, determine os seguintes limites, se existirem:

(i) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-x}{x^3+x^2+x-3}$;

(ii) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{2x+5}-3}{x-2}$;

(iii) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3x^4-3x^2+5}{x^2-5x^4-3x}$;

(iv) $\lim\limits_{x\to +\infty} (1+\frac{5}{x})^x$.

0,5 **4ª Questão (valor 1,0 ponto)** Determine as assíntotas verticais e horizontais da função: $f(x) = \frac{2-3x^2}{x^2-16}$;

1,5 **5ª Questão (valor 1,5 pontos)** Dada a equação $e^x = 5 - x^2$, usando o Teorema do Valor Intermediário, apresente um intervalo de comprimento menor ou igual a $0,5$ em que a equação possui solução (raiz). Justifique todas as suas afirmações.

1,0 **6ª Questão (valor 1,0 ponto)** Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = 4 - x^2$ em $x = 1$. Represente geometricamente o gráfico de f e a equação da reta tangente.

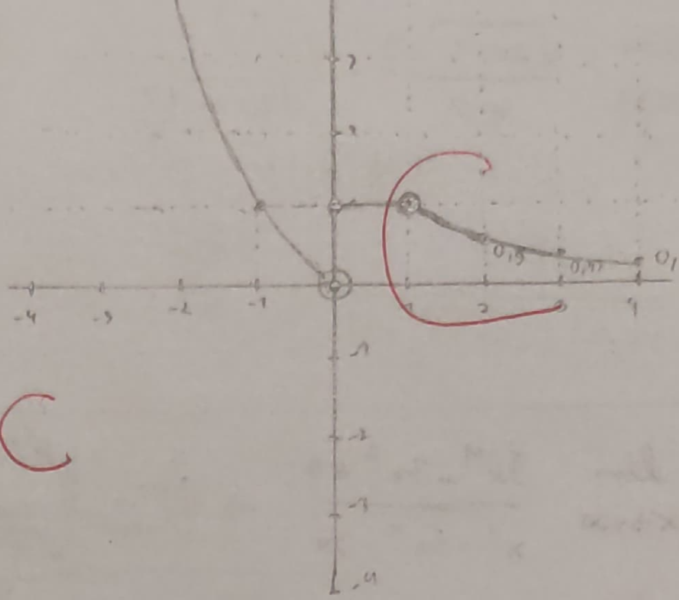
1,5 **7ª Questão (valor 2,0 pontos)** Em cada item determine $y' = \frac{dy}{dx}$, faça simplificações, sempre que possível:

(i) $f(x) = \dfrac{4x^3-3x}{x^2+sen(x)}$; (ii) $f(x) = (3x^3-1)^5 - \dfrac{2}{x^5} + \sqrt{2-2x^3}$;

(iii) $f(x) = (3 - cosx)e^{x^2-2x}$; (iv) $f(x) = cotg(x^2+4) + sec(3x^5)$.

Boa Prova!!

ion Luca de Lima Pelow



1) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x < 0 \\ 1, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x}, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

a) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x^2 = \lim_{x \to 0^-} 0^2 = \underline{0}$

b) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 1 = \underline{1}$

c) $\lim_{x \to 0} f(x) = \underline{\nexists}$, pois $\lim_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim_{x \to 0^-} f(x)$

d) $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x} = \underline{1} = \lim_{x \to 1^-} 1 = \underline{1}$, logo $\lim_{x \to 1} f(x) = \underline{1}$

e) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\infty}$, sabendo que $\lim_{x \to \infty} \frac{n}{x} = 0$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = \underline{0}$

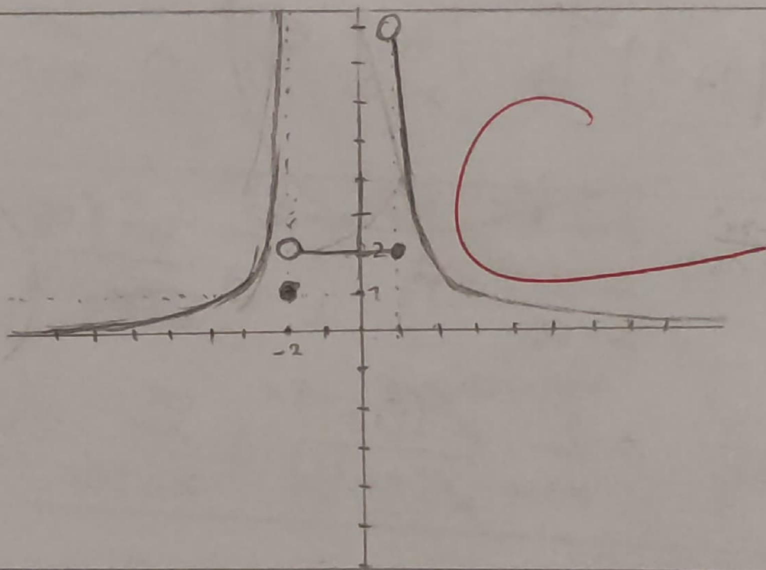
2) • $f(-2) = 1$

• $\lim_{x \to (-2)^+} f(x) = 2$

• $\lim_{x \to (-2)^-} f(x) = +\infty$

• $\lim_{x \to 1} f(x) = \nexists$

• $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$



3) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x}{x^3 + x^2 + x - 3} = \text{ind } \frac{0}{0} = 0,1666$

$x^3 + x^2 + x - 3 \;\underline{|\; x^2 - x}$

$x^3 + x^2 \qquad x + 2$

$2x^2 + x$

$2x^2 - x$

-3

$\frac{x^2 - x}{(x+2)(x^2 - x + \frac{-3}{x+2})}$

X	1	0,5	0,9	1	1,1	1,5
Y		0,111	0,160	$\nexists$	0,174	0,181

?

0

0,177
−0,160

0,166

$\frac{-3}{x+2}$

3) ii - $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{2x+5}-3}{x-2} \cdot \frac{\sqrt{2x+5}+3}{\sqrt{2x+5}+3} = \lim_{x\to 2} \frac{2x+5-9}{(x-2)(\sqrt{2x+5}+3)} = \lim_{x\to 2} \frac{2x-4}{(x-2)(\sqrt{2x+5}+3)}$

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

$\lim_{x\to 2} \frac{2\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(\sqrt{2x+5}+3)} \quad \lim_{x\to 2} \frac{2}{3+3} = \boxed{\lim_{x\to 2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0{,}333\ldots}$

C

3) iii - $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4-3x^2+5}{x^2-5x^4-3x} \to \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^4}(3-\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x^4})}{\cancel{x^4}(\frac{1}{x^2}-5-\frac{3}{x^3})} \to \lim_{x\to\infty} \frac{(3-\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x^4})}{(-5+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3})}$

$\boxed{x\to\infty \quad \frac{n}{x}=0}$ $\quad \lim_{x\to\infty} \frac{3-0+0}{-5+0-0} \to \boxed{\lim_{x\to\infty} -\frac{3}{5} = -0{,}6}$

C

3) iv - $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{5}{x}\right)^x$ seja $\frac{1}{u} = \frac{5}{x}$, ou $5u = x$ $\quad \to \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{\cancel{5}}{\cancel{5}u}\right)^{5u} \longrightarrow$

$\left[\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{u}\right)^u\right]^5 \to \left[\lim_{x\to\infty} e\right]^5 \to \lim_{x\to\infty} = e^5$

C

4) $f(x) = \frac{2-3x^2}{x^2-16}$ Assíntota horizontal $\lim_{x\to\infty} f(x) = a \quad \to \frac{2-3\infty}{\infty-16} = \frac{\infty}{\infty}$

$\boxed{\frac{n}{x} = 0 \quad x\to\infty}$

$\lim_{x\to\infty} \frac{2-3x^2}{x^2-16} \to \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}(\frac{2}{x^2}-3)}{\cancel{x^2}(1-\frac{16}{x^2})} \to \lim_{x\to\pm\infty} = \frac{0-3}{1-0} \to \boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -3}$

$\boxed{\frac{n}{x} \quad x\to 0 \quad = \infty}$

Assíntota Vertical

$\lim_{x\to a} \frac{2-3x^2}{x^2-16} = \infty \to \nexists$

$x^2-16=0$

Lucas de Lima Peloso

$e^x = 5 - x^2$

$f(x) = 5 - x^2 - e^x$

$x = -2 \to 5 - 4 - 0{,}13\ldots \approx 0{,}86466$

$x = 2 \to 1 - 7{,}38\ldots \approx -6{,}38\ldots$

$x = 0 \to 5 - 1 = 4$

$x = 1 \to 4 - 2{,}71\ldots \to 1{,}28\ldots$

$\boxed{x = 1{,}25} \to -0{,}3052$

$x = 1{,}10 \to 0{,}78\ldots$

$x = 1{,}15 \to 0{,}51$

$\boxed{x = 1{,}20} \to 0{,}23$

$f(x) = 0 \in \mathbb{R} \mid x > 1{,}2$ e $x < 1{,}25$

Pois, sendo $f(x)$ contínuo e $f(x_1) > 0$, $f(x_2) < 0$, existe pelo menos um x_3 no intervalo (x_1, x_2) tal que $f(x_3) = 0$

6) $f(x) = 4 - x^2$, $x = 1$

$f(x) = -x^2 + 4$

$f'(x) = 2 \cdot -x + 0$

$f'(x) = -2x$

$m = -2 \cdot 1$

$\boxed{m = -2}$

$y = 4 - x^2$

$y = 4 - 1$

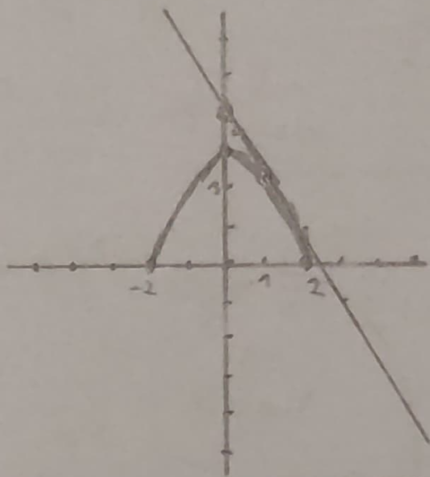
$\boxed{y = 3}$

$y = m \cdot x + n$

$3 = -2 \cdot 1 + n$

$\boxed{n = 5}$

→ Logo, a reta tangente à $f(x) = 4 - x^2$ no ponto $(1, 3)$ é $y = -2x + 5$



7) i- $f(x) = \dfrac{4x^3 - 3x}{x^2 + sen(x)} = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ $h = x^2 + u(x)$

$x^2 + sen(x)$

$2 + \cos(x) \cdot 1$

$$\frac{(4x^3 - 3x)' \cdot (x^2 + sen(x)) - (4x^3 - 3x) \cdot (x^2 + sen(x))'}{(x^2 + sen(x))^2}$$

$$\frac{(12x^2 - 3)(x^2 + sen(x)) - [(4x^3 - 3x)(2x + \cos(x)]}{(x^2 + sen(x))^2}$$

$$\frac{12x^4 + 12x \cdot sen(x) - 3x^2 - 3 \cdot sen(x) - (8x^3 + 4x^3 \cdot \cos(x) - 6x - 3x \cdot \cos(x))}{(x^2 + sen(x))^2}$$

$$\frac{12x^4 - 3x^2 + 12x \cdot sen(x) - 3 \cdot sen(x) - 8x^3 - 6x + 4x^3 \cdot \cos(x) - 3x \cdot \cos(x)}{(x^2 + sen(x))^2}$$

$$\frac{12x^4 - 8x^3 - 3x^2 - 6x + sen(x)(12x - 3) + \cos(x)(4x^3 - 3x)}{(x^2 + sen(x))^2}$$

ii) $f(x) = (3x^3 - 1)^5 - \frac{2}{x^5} + \sqrt{2-2x^3}$

$f'(x) = g(x)' - h(x)' + i(x)'$

$g(x) = (3x^3 - 1)^5$

$g'(x) = u^5 = 5.(3x^3-1)^4 . 6$

$u' = 6x$

$g'(x) = \boxed{5.(3x^3-1)^4 . 9x^2}$

$h(x) = \frac{2}{u} = \frac{0.u - u'.2}{u^2} = \boxed{\frac{-5x^4}{x^{10}}}$

$u(x) = x^5$

$u'(x) = 5x^4$

$i(x) = \sqrt{2-2x^3} = (2-2x^3)^{\frac{1}{2}}$ $(0 - 6x^2)$

$i'(x) = u^{\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{1}{2}(2-2x^3)^{-\frac{1}{2}} . (-6x^2)} \rightarrow \frac{1}{2} . (-6x^2) . \frac{1}{(2-2x^3)^{1/2}}$

$f'(x) = 30.(3x^3-1)^4 + \frac{5x^4}{x^{10}} + \frac{3x^2}{(2-2x^3)^{1/2}}$

$\boxed{e^{x^2-2x} = e^{x^2-2x} . 2x-2}$

7) iii) $f(x) = (3 - \cos x) . e^{x^2-2x}$

$(3-\cos(x))' . e^{x^2-2x} + (e^{x^2-2x})' . (3-\cos(x))$

$(-sen(x)) . e^{x^2-2x} + (e^{x^2-2x} . 2x-2) . (3-\cos(x))$

$-e^{x^2-2x} . sen(x) + 3e^{x^2-2x} . 2x-2 - e^{x^2-2x} . 2x-2 . \cos(x)$

$e^{x^2-2x} (-sen(x) + 6x-2 - 2x-2 . \cos(x))$

Luca Luca L. Peloro

7) IV $f(x) = cotg(x^2+4) + sec(3x+5)$

$F'(x) = cotg(x^2+4)' + sec(3x+5)'$

$F'(x) = (-cosec^2(x^2+4).2x) + (sec(3x+5).tg(3x+5).3)$

$-2x\, cosec^2(x^2+4) + 3.(sec(3x+5).(tg(3x+5))$

C