Trabalho

Fernando A. B. Sabino da Silva - UFRGS

Este trabalho tem como objetivo colocar em prática os modelos de séries temporais univariadas **AR(p)**, **MA(q)**, **ARMA(p,q)**, **ARCH(m)** e **GARCH(m,n)** em uma série temporal de retornos de um ativo financeiro.

Suponha que r_t é o logaritmo do retorno de um ativo financeiro em t e que $\{r_t\}_{t=1}^T$ é a série temporal do logaritmo de T retornos. Para modelar tal série temporal dentro das classes de modelos vistasno curso, nós temos duas equações que precisam ser estimadas: a média condicional e a variância condicional. Para a equação da média condicional, podemos assumir um modelo $ARMA(p,q)$, neste formato:

$$
\begin{aligned}
r_t &= \mu_t + \epsilon_t, \text{onde} \\
\mu_t &= \phi_0 + \sum_{i=1}^{p} \phi_i r_{t-i} + \sum_{j=1}^{q} \theta_j \epsilon_{t-j}
\end{aligned}
$$

Já para a variância condicional, temos a equação abaixo:

$$
\begin{aligned}
\epsilon_t &= \sigma_t u_t, \text{onde} \\
\sigma_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \sigma_{t-j}^2
\end{aligned}
$$

e, $\{u_t\}_{t=1}^t$ é uma sequência de variáveis aleatórias independente e identicamente distribuídas (iid) com média 0 e variância 1, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$ para $i > 0$ e $j > 0$. Além disso, $\sum_{i=1}^{max(m,n)} (\alpha_i + \beta_i) < 1$ que garante que a variância incondicional de ϵ_t é finita. Usualmente assumimos que ϵ_t segue uma distribuição Normal, t-Student, GED ou outra de interesse (veja mais opções no capítulo 6 do livro Financial Risk Modelling and Portfolio Optimization with R de Pfaff (2016) aqui. Em muitos casos, usamos distribuições assimétricas para ϵ_t.

Obs: Observe que se $n = 0$ a equação da variância condicional se comporta como um modelo $ARCH(m)$.

PROCESSO DE ANÁLISE

1. Especificar a equação para a média condicional (μ_t):
   - Visualizar os dados e identificar observações fora do padrão (*outliers* ou dados faltantes) e eliminá-las.
   - Se necessário, transformar os dados para estabilizar a variância (logaritmo dos dados, variação ou retorno, por exemplo).
   - Testar se os dados são estacionários. Caso tenha raiz unitária é preciso diferenciar os dados até se tornarem estacionários. Para isso, testa-se novamente se a série diferenciada se tornou estacionária.
   - Examinar as funções de autocorrelação (FAC) e autocorrelação parcial (FACP) para determinar as ordens máximas P e Q para os componentes AR e MA da série estacionária (diferenciada, se necessário).
   - Estimar todas as combinações para p, d e q. Aqui, d será fixo e igual ao número de vezes necessárias para tornar a série original estacionáira. Se não foi preciso diferenciar a série, $d = 0$.
   - Escolher dentre todos os modelos estimados no passo anterior, o modelo com menor BIC e/ou AIC.
   - Examinar se os resíduos se comportam como um ruído branco:

- Testar autocorrelação nos resíduos: fazer o teste de Ljung-Box (verificar se você aceita a nula em para pelo menos 20 lags é uma regra de bolso usual). Visualize também a função de autocorrelação (FAC) dos resíduos. Se existem defasagens estatisticamente significante (acima da linha pontilhada), há evidências de que há autocorrelação serial.
- Testar heterocedasticidade condicional: visualizar a função de autocorrelação (FAC) dos resíduos ao quadrado. Se existem defasagens estatisticamente significante (acima da linha pontilhada), há evidências de que haja heterocedasticidade condicional. Outra alternativa é o teste LM de Engle (1982).

Obs: Verifique nos materiais disponibilizados como selecionar os lags significativos para um modelo GARCH(m,n).

- Verificar a distribuição de probabilidade assumida no processo de estimação: realizar teste que verifique se os resíduos se comportam de acordo com a distribuição de probabilidade adotada. Obs: Você poderá rejeitar todas as nulas.

• Se os resíduos e resíduos ao quadrado são bem comportados (ruído branco), **obter as previsões apenas com a estimação da média condicional**. Caso haja evidências de heterocedasticidade condicional (o usual para ativos financeiros - por quê?), **avançe para o próximo passo e estime a variância condicional também**.

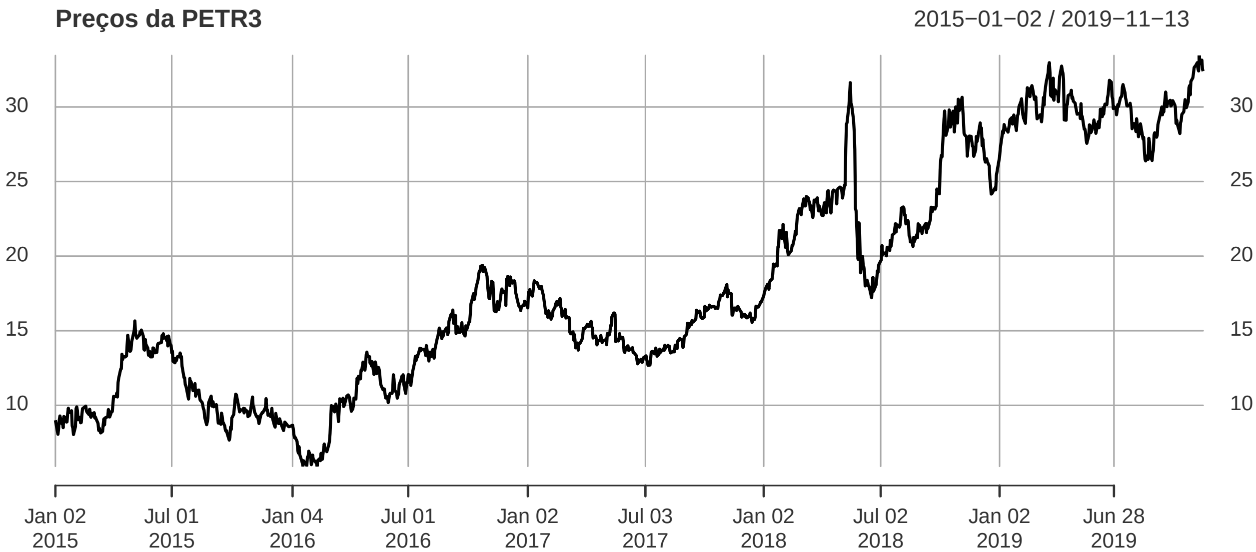
2. Especificar um modelo de volatilidade e estimar **conjuntamente** as equações da média e variância condicional:
   - Examinar as funções de autocorrelação (FAC) e autocorrelação parcial (FACP) dos resíduos ao quadrado **(obtidos da estimação da média condicional)** para determinar as ordens máximas M e N para os componentes ARCH e GARCH, respectivamente.
   - Escolher uma distribuição para os resíduos. Para ativos financeiros a distribuição t e t assimétrica são bastante utilizadas.
   - Estimar todas as combinações para $m = 1, .., M$ e $n = 0, ..., N$ para a variância condicional juntamente com a especificação ARMA(p,q) escolhida no passo 1
   - Escolher o modelo com menor BIC e/ou AIC
3. Verificar o modelo estimado
   - Avaliar o gráfico da função de autocorrelação dos resíduos (padronizados) estimados no passo 2. O ideal é que as defasagens não ultrapassem a linha pontilhada.
   - Avaliar se as restrições impostas sobre os parâmetros são atendidas
   - Testar se os resíduos padronizados se comportam conforme a hipótese de distribuição de probabilidade assumida no passo 2 no momento de estimar conjuntamente a média condicional e a variância condicional.
4. Visualizar os resultados
   - Gráfico da volatilidade condicional

RESULTADOS

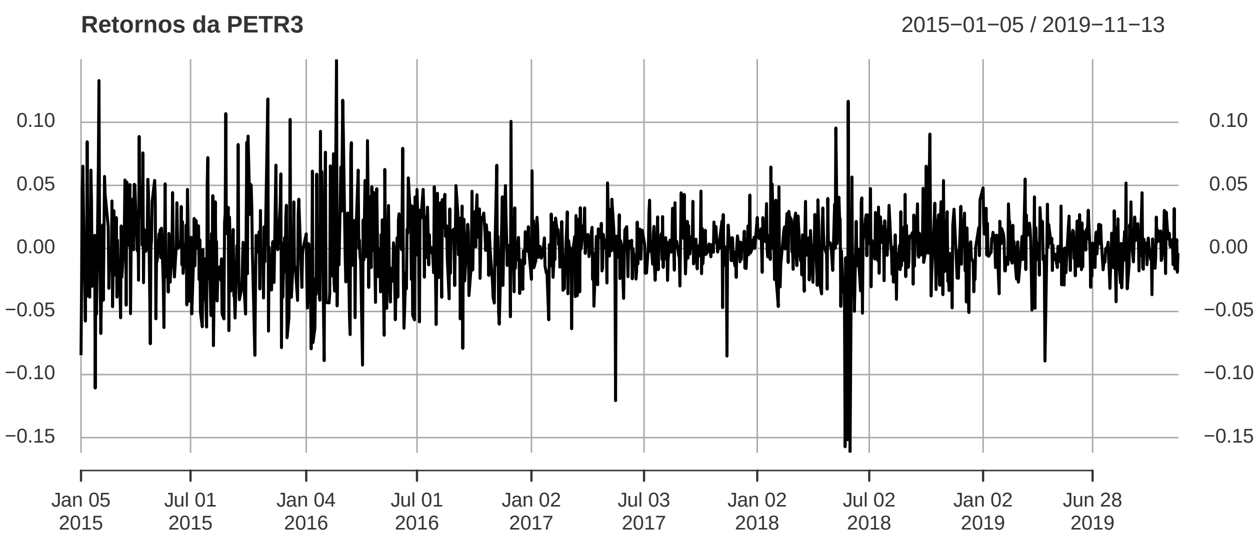
Exemplo: A ação `PETR3.SA` da Petrobras Brasileiro S.A. negociada na BM&FBOVESPA foi escolhida e o período de análise é de 02-01-2015 até 14-11-2019. Seguindo o processo proposto, temos os seguintes resultados:

1. Especificar a equação para a média condicional (μ_t):

- O gráfico abaixo mostra a série temporal da `PETR3.SA`. É possível perceber que não existe dados faltantes na série e as mudanças abruptas nos preços está condizente com acontecimentos de mercado, tais como.... Desta forma, optou-se por não eliminar qualquer observação da série temporal



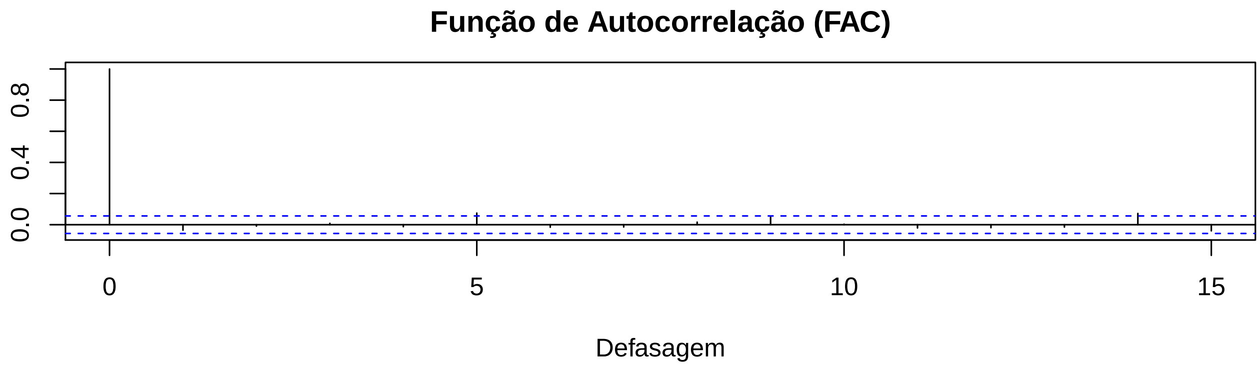
- Como sabemos, os retornos financeiros raramente apresentam tendência ou sazonalidade, com exceção eventualmente de retornos intradiários que não é o caso da série temporal em análise. Além disso, a série temporal de retornos parece ter média constante (próxima a zero). Em função dessas características, optamos por usar a série temporal dos retornos da `PETR3.SA`. O gráfico abaixo mostra a série temporal dos retornos da `PETR3.SA`:

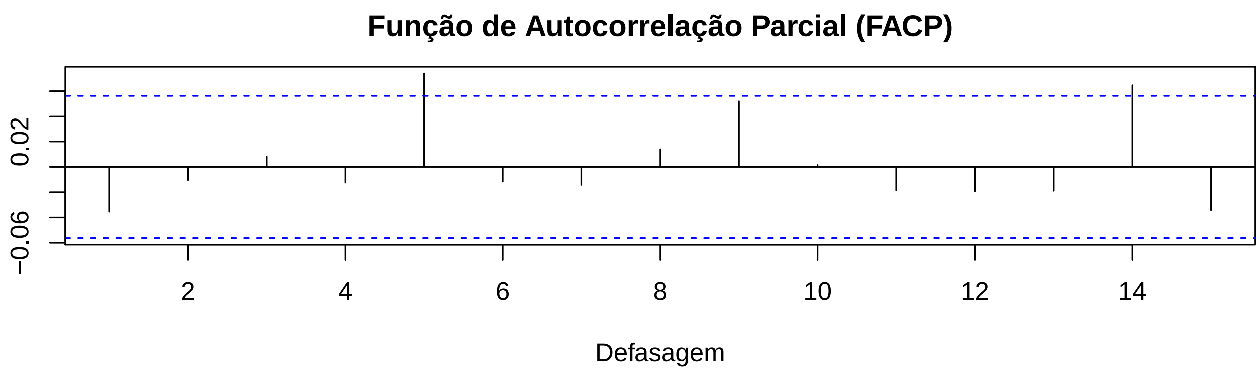


- Teste de estacionariedade: a tabela abaixo apresenta os resultados do teste de raiz unitária proposto por Dickey and Fuller (1979) para cada três possíveis especificações (passeio aleatório, passeio aleatório com drift e passeio aleatório com drift e tendência). Rejeitamos a hipótese nula de presença de raiz unitária (não estacionária) ao nível de significância de 5% (p-valor < 0.05)

Especificação	Estatística do Teste	P-valor
Passeio Aleatório	-20.1907	0.01
Passeio Aleatório com drift	-20.2382	0.01
Passeio Aleatório com drift e tendência	-20.2298	0.01

- Com a série temporal dos retornos (não há a necessidade de diferenciação), examinamos os gráficos da função de autocorrelação (FAC) e da função de autocorrelação parcial (FACP) abaixo. Como resultado temos que nenhuma defasagem p e q foi encontrada analisando a FACP e FAC, respectivamente. Assim, nosso equação da média condicional terá apenas um intercepto, ou seja, sem parâmetros para a parte AR e MA do modelo ARMA(p,q).





- Caso fosse encontrado valores para p e q diferentes dos anteriores, deveríamos estimar todas as combinações para p, d e q. Aqui, d será fixo e igual ao número de vezes necessárias para tornar a série original estacionária. Como não foi preciso diferenciar a série dos retornos da `PETR3.SA`, $d = 0$.

	especificacao	ln_verossimilhanca	quant_parametros	tamanho_amostra	aic	bic
1	arma000	2497.399	2	1213	-4990.799	-4980.597

- Como temos apenas um modelo estimado, não precisamos escolher o modelo com menor BIC e/ou AIC e continuaremos com o modelo $ARMA(0,0)$ e a equação da média condicional será:

$$
\begin{aligned}
r_t &= \mu_t + \epsilon_t, \text{onde} \\
\mu_t &= \phi_0
\end{aligned}
$$

Obs: Usualmente um AR(1) ou um ARMA(1,1) são bons ajustes para uma série de retornos.

A tabela abaixo mostra o resultado para a estimação de tal equação. É possível observar que o parâmetro ϕ_0

estimado não é estatisticamente significante. Isso já é esperado pela característica de uma série temporal de retornos.

Observe a legenda mostrada para cada `*` que nos diz que quanto maior a quantidade de `*` menor o p-valor e maior a probabilidade de rejeitar a hipótese nula do teste. Quando não há `*` para um coeficiente, quer dizer que seu p-valor é maior do que os apresentados na legenda, ou seja, não conseguimos rejeitar a hipótese nula. Caso queira visualizar o p-valor para cada parâmetro, use a função `lmtest::coeftest()`.

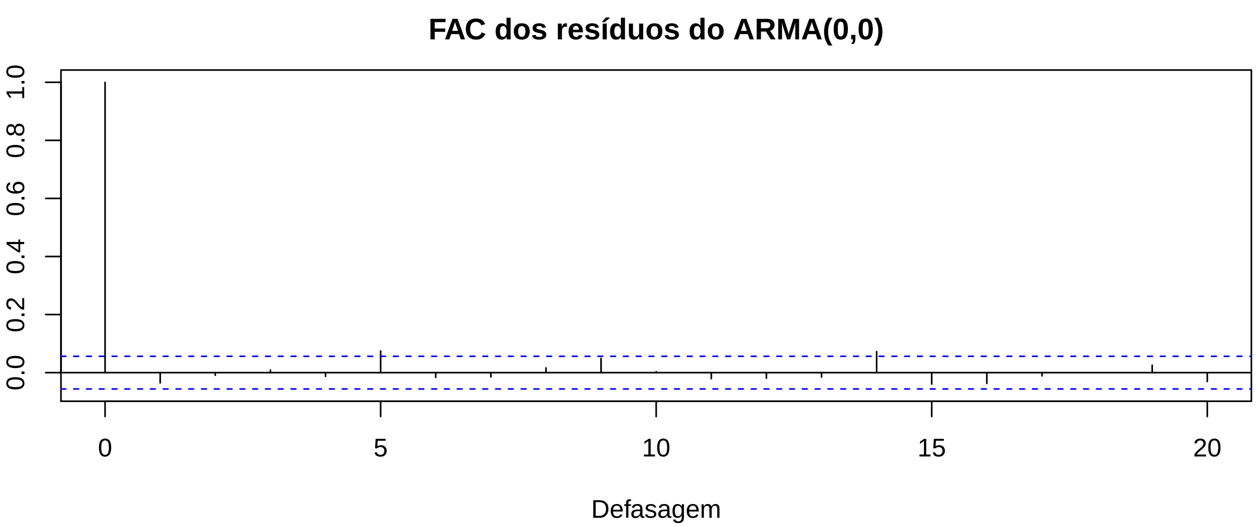
Table 1: Resultado Estimação modelo ARMA(0,0)

	Dependent variable:
	log_day_return
intercept	0.001
	(0.001)
Observations	1,213
Log Likelihood	2,497.399
σ^2	0.001
Akaike Inf. Crit.	−4,990.799
Note:	*p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01

- Examinar se os resíduos se comportam como um ruído branco:

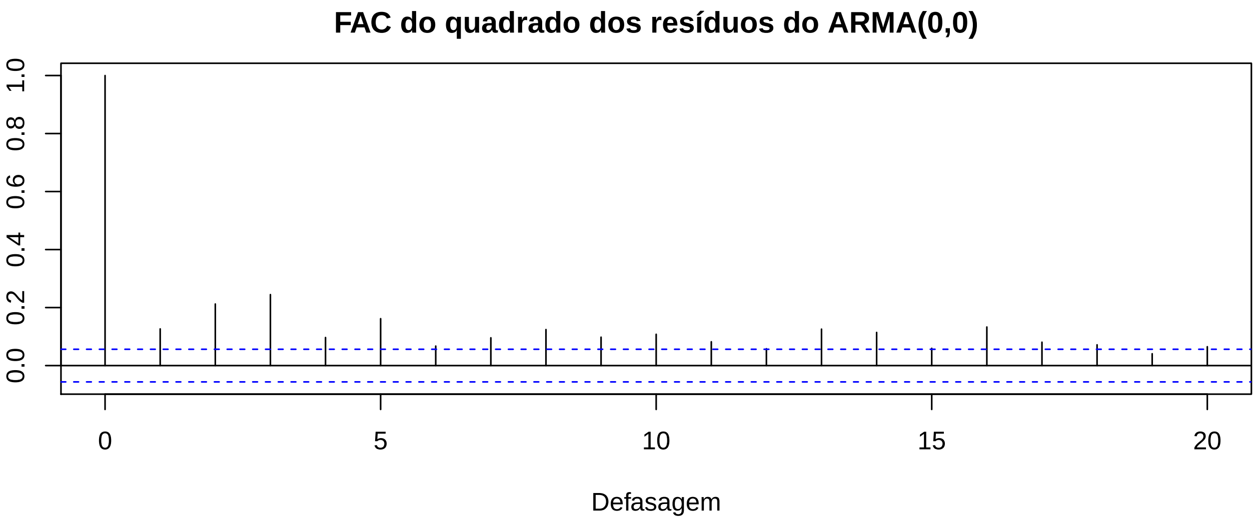
No processo de definição do modelo $ARMA(p, q)$ assumimos que o termo de erro ϵ_t não é autocorrelacionado, ou seja, $E[(\epsilon_t - E(\epsilon_t))(\epsilon_{t-1} - E(\epsilon_t))] = E[\epsilon_t \epsilon_{t-1}] = 0$. Como teste para verificar a validade de tal hipótese, temos abaixo o gráfico da função de autocorrelação (FAC) dos resíduos (nossa estimativa para o termo de erro) e encontramos que não há presença de autocorrelação serial dado que a grande maioria das defasagens não são estatisticamente significantes.

Obs: Faça também o teste de Ljung-Box.



Porém, quando avaliamos o gráfico da função de autocorrelação (FAC) do quadrado dos resíduos abaixo, observamos que existem defasagens estatisticamente significante (acima da linha pontilhada). Isso confirma a presença de heterocedasticidade condicional assim como um teste LM de Engle (1982) caso realizado.

Isso não condiz com a hipótese assumida na definição do modelo $ARMA(p, q)$ de que a variância do termo de erro é contante e independente do tempo, ou seja, que $Var(\epsilon_t) = \sigma^2_\epsilon$.



Por fim, podemos avaliar se os resíduos do modelo estimado tem a distribuição especificada. Relembre que a definição do modelo $ARMA(p,q)$ assume que ϵ_t é independente e identicamente distribuído (iid) e quando executamos a estimação no R por meio da função `arima` assumimos, por default, que ϵ_t segue uma distribuição Normal.

A tabela abaixo mostra o resultado para os testes de Shapiro-Wilk e Jarque Bera. A hipótese nula dos testes é que a amostra provém de **uma população com distribuição Normal** contra a hipótese alternativa que a amostra **não provém de uma população com distribuição Normal**. Como o p-valor de ambos os testes é praticamente nulo (o R arredondou), rejeitamos e hipótese nula e os resíduos obtidos da estimação da equação da média condicional não são provenientes de uma população Normal.

Obs: Isto é muito comum e provavelmente rejeitaremos qualquer hipótese nula (quando a amostra for grande). Por quê?

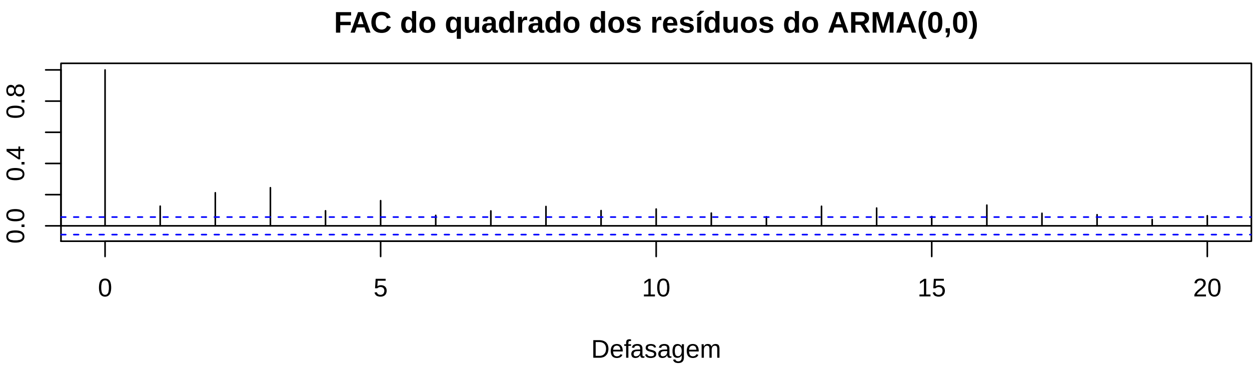
Obs 2: Veja mais detalhes no capítulo 6 do livro Financial Risk Modelling and Portfolio Optimization with R de Pfaff (2016).

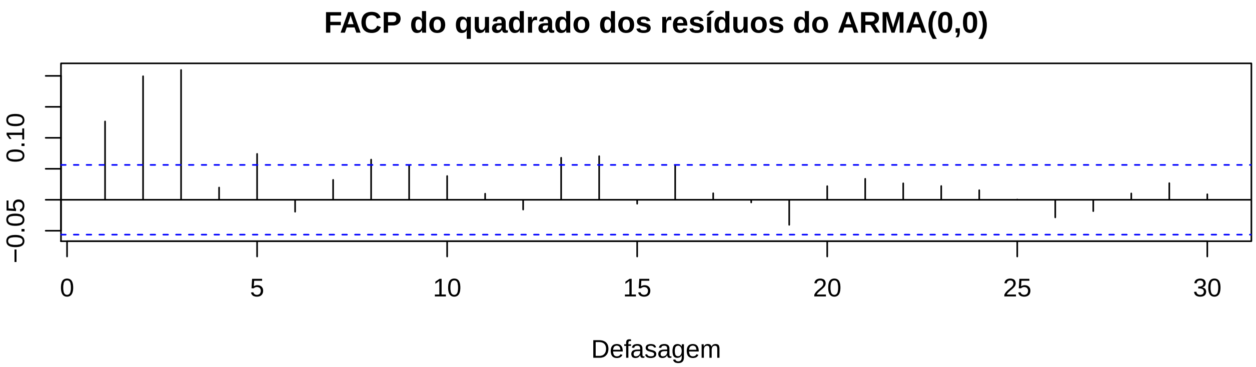
Série temporais de retornos de ativos financeiros apresentam, comumente, variância condicional assimétrica (maior volatilidade na cauda inferior da distribuição do que na superior) (Hafner (1998)). Desta forma, não podemos assumir que apenas a estimação da equação da média condicional é o suficiente para uma série como o da `PETR3.SA` e precisamos estimar a variância condicional também.

Teste de Normalidade	Estatística do Teste	P-valor
Shapiro	0.9625	0
Jarque Bera	512.5653	0

2. Especificar um modelo de volatilidade e estimar **conjuntamente** as equações da média e variância condicional:

- Precisamos examinar as funções de autocorrelação (FAC) e autocorrelação parcial (FACP) dos resíduos ao quadrado **(obtidos da estimação da média condicional)** para determinar as ordens máximas M e N para os componentes ARCH e GARCH, respectivamente. Como resultado, temos abaixo tais gráficos e optamos para o exercício trabalhar com $M = 3$ e $N = 3$ (não é usual e geralmente não é robusto escolher valores muito grandes para M e N - um GARCH(1,1) é considerado o benchmark). Relembre que a escolha das ordens do GARCH é um pouco diferente da de um ARIMA. Para relembrar veja a página 277 de Bueno (2012) ou a equação (34) aqui.





- Antes de executarmos a estimação em conjunto das equações para a média condicional e variância condicional, eu gostaria que vocês avaliassem a distribuição dos resíduos. Um exemplo pode ser visto no capítulo 6 de Pfaff (2016) aqui usando a função stepAIC.ghyp(). Você não deve usar esta função e sim verificar dentre as distribuições que o modelo GARCH suporta no R qual delas se ajusta melhor aos dados (veja a opção cond.dist = c("norm", "snorm", "ged", "sged", "std", "sstd", "snig", "QMLE") na função garchFit()). Para tal rode o modelo com todas as variações e escolha aquele com menor BIC e/ou AIC.

Obs: O objetivo aqui é um treinamento. Na prática, é comum começar com "ideias". A t assimétrica, por exemplo, atende usualmente os propósitos de acordo com os fatos estilizados. O que eu pedi acima é um procedimento data-driven, mas é razoável "pensar" e usar as informações disponíveis para a tomada de decisões.

- Uma vez que definimos as ordens máximas para M e N bem como uma distribuição de probabilidade que melhor "imita" a distribuição dos resíduos, podemos estimar todas as combinações para $m = 1, .., M$ e $n = 0, ..., N$ para a variância condicional juntamente com a especificação ARMA(p,q) escolhida no passo 1. Como é possível observar na tabela abaixo o modelo com menor AIC e BIC é o $ARMA(0,0) - GARCH(1,1)$.

Obs: Abaixo adotamos uma distribuição t de Student para os resíduos. Eu não fiz os testes devidos neste exemplo.

	especificacao	ln_verossimilhanca	quant_paramentros	tamanho_amostra	aic	bic
1	~arma(0,0)-garch10	-2582.505	4	1213	-4.251	-4.235
2	~arma(0,0)-garch20	-2605.135	5	1213	-4.287	-4.266
3	~arma(0,0)-garch30	-2612.810	6	1213	-4.298	-4.273
4	~arma(0,0)-garch11	-2651.004	5	1213	-4.363	-4.342
5	~arma(0,0)-garch21	-2651.444	6	1213	-4.362	-4.337
6	~arma(0,0)-garch31	-2650.535	7	1213	-4.359	-4.329
7	~arma(0,0)-garch12	-2649.880	6	1213	-4.359	-4.334
8	~arma(0,0)-garch22	-2651.744	7	1213	-4.361	-4.331
9	~arma(0,0)-garch32	-2651.072	8	1213	-4.358	-4.324
10	~arma(0,0)-garch13	-2649.933	7	1213	-4.358	-4.328
11	~arma(0,0)-garch23	-2651.100	8	1213	-4.358	-4.324
12	~arma(0,0)-garch33	-2651.590	9	1213	-4.357	-4.319

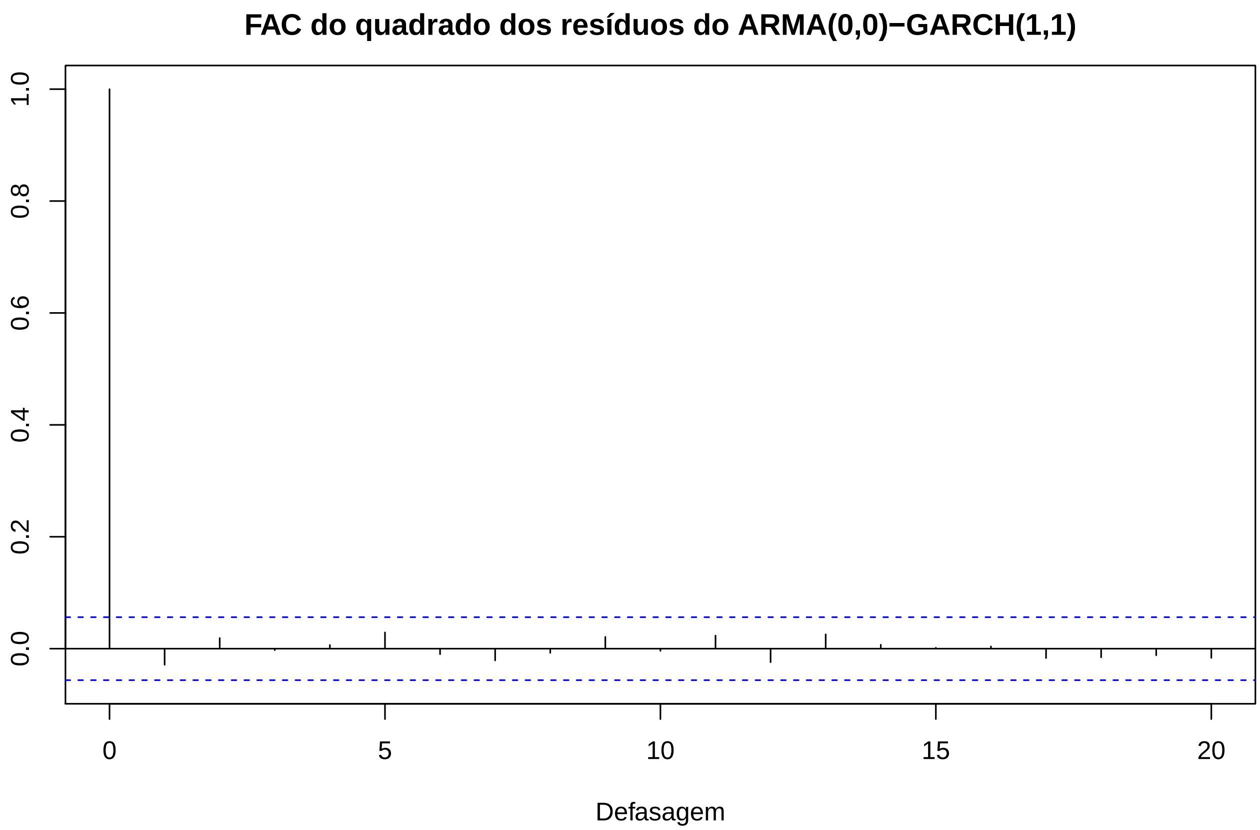
Na tabela 2 temos os resultados dos parâmetros estimados para o modelo escolhido. Observe que temos uma estimativa para a curtose da distribuição assumida (parâmetro `shape`). Tal estimativa está bem próxima do valor obtido quando calculamos a curtose da série temporal dos resíduos obtidos na estimação da média condicional apenas.

Table 2: Resultado Estimação modelo ARMA(0,0)-GARCH(1,1)

	Dependent variable:
	log_day_return
mu	0.001**
	(0.001)
omega	0.00001*
	(0.00001)
alpha1	0.074***
	(0.020)
beta1	0.917***
	(0.023)
shape	6.066***
	(1.024)
Observations	1,213
Log Likelihood	−2,651.004
Akaike Inf. Crit.	−4.363
Bayesian Inf. Crit.	−4.342
Note:	*p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01

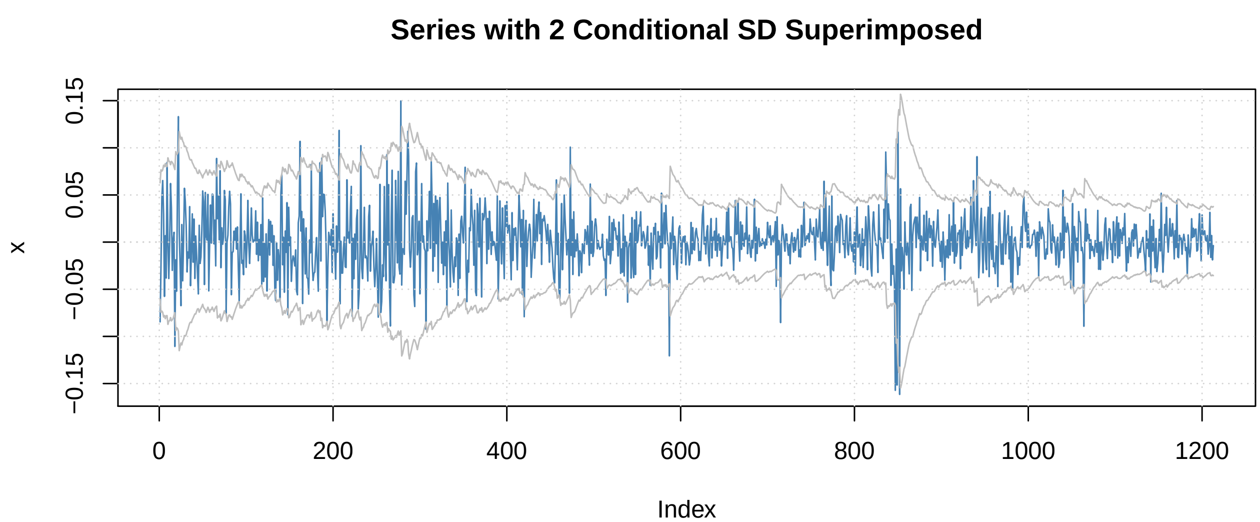
3. Verificar o modelo estimado

- Uma vez estimado o modelo, vamos avaliar se ele continua com "heterocedasticidade condicional". Se nosso modelo realmente captou a heterocedasticidade condicional, não deveríamos ter defasagens no gráfico da FAC dos resíduos ao quadrado ultrapassando a linha pontilhada (faça também o teste de Ljung-Box). O gráfico abaixo confima que não há mais evidências de heterocedasticidade condicional nos resíduos do modelo $ARMA(0,0) - GARCH(1,1)$.



- Como é possível observar nos resultados obtidos para os parâmetros do modelo. As restrições sobre os mesmos são mantidas, pois os valores obtidos para α_0, α_1 e β_1 condizem com as restrições.

4. Visualizar os resultados



5. Obter as previsões (veja a função predict da library fGarch, por exemplo). Queremos também saber qual a acurácia da previsão estimada para o seu modelo (avaliada no conjunto de validação). Procure pela função accuracy do R. Veja exemplos aqui e aqui.

Obs: Por medidas de acurácia eu estou me referindo as medidas ME, RMSE, MAE, MPE, MAPE, MASE, ACF1 e Theil's U. Elas não foram calculadas no exemplo acima.

Table 3:

	meanForecast	meanError	standardDeviation
1	0.001	0.018	0.018
2	0.001	0.018	0.018
3	0.001	0.018	0.018

Obs 2: Nós queremos um modelo que faça boas previsões fora da amostra (out of sample). Ou no conjunto de teste como se diz em Machine Learning. Um modelo que explica a variação nos dados dentro da amostra (in sample, no conjunto de treinamento), mas não obtém bons resultados para dados externos é um modelo referido na literatura como sobreajustado (overfitted).

Você pode pensar de que esse é motivo pelo qual nós dividimos a amostra em dados de treinamento e dados de teste. Correto, mas não é uma boa ideia avaliar repetidamente o nosso conjunto de teste, pois o modelo pode se tornar sobreajustado apenas para aquele pedaço. Para resolver isto costuma-se usar "data splitting" em mais partes. Um método utilizado para tal é conhecido por validação cruzada (cross validation). Ele testa o modelo usando os próprios dados de treinamento.

Seja, por exemplo, K = 5, isto é, imagine que iremos dividir os dados de treinamento em cinco porções iguais. Um dos cinco pedaços é colocado de lado (como um conjunto de dados de mini-teste) e, em seguida, o modelo é treinado usando as outras 4 porções. Depois disso, as previsões são feitas para o pedaço retido, e na sequência o processo é repetido para cada uma das 5 porções e a média das previsões produzidas a partir das iterações do modelo é calculada. Isto nos dá uma compreensão de quão bem o modelo prevê dados externos!

Amostragem é possivelmente o aspecto mais importante de qualquer projeto quantitativo financeiro. Devemos usar prioritariamente dados históricos para prever o futuro. Aqui preciso fazer uma observação: amostragem via backtesting (ou seja, usando parte dos dados para treinar um modelo e outra parte para testá-lo) é insuficiente! A validação cruzada também é! Por favor, veja aqui e aqui para um tratamento mais aprofundado dessa questão!

REFERÊNCIAS

Bueno, Rodrigo De Losso da Silveira. 2012. *Econometria de Séries Temporais.* Cengage Learning.

Dickey, David A, and Wayne A Fuller. 1979. "Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root" 74 (366a). Journal of the American statistical association: 427–31.

Engle, Robert F. 1982. "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation." Econometrica Journal of the Econometric Society.

Hafner, C. M. 1998. "Estimating High-Frequency Foreign Exchange Rate Volatility with Nonparametric ARCH Models." Journal of Statistical Planning and Inference.

Pfaff, Benhard. 2016. *Financial Risk Modelling and Portfolio Optimization with R.* John Wiley & Sons.