Coloração de Vértices

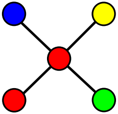
Eduardo Queiroga, Luan Teylo

09 Junho de 2017

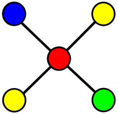
Coloração de Vértices

Definição

- Uma *k-coloração de vértices* de G é uma atribuição de k cores $(1, 2, \ldots, k)$ em V. A coloração é **própria** quando vértices adjacentes recebem **cores distintas**.



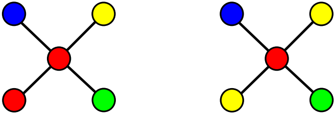
4-coloração



4-coloração própria

Coloração de Vértices
Definição

- Uma *k-coloração de vértices* de G é uma atribuição de k cores $(1, 2, \ldots, k)$ em V. A coloração é **própria** quando vértices adjacentes recebem **cores distintas**.



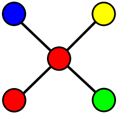
4-coloração   4-coloração própria

- Uma *k-coloração própria* de vértices de um grafo sem *loops* é um particionamento $(V_1, V_2, \ldots, V_k)$ de V em k conjuntos independentes.

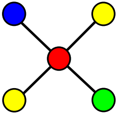
Coloração de Vértices

Definição

- Uma *k-coloração de vértices* de G é uma atribuição de k cores $(1, 2, \ldots, k)$ em V. A coloração é **própria** quando vértices adjacentes recebem **cores distintas**.



4-coloração



4-coloração própria

- Uma *k-coloração própria* de vértices de um grafo sem *loops* é um particionamento $(V_1, V_2, \ldots, V_k)$ de V em k conjuntos independentes.
- G é dito *k-colorível* se admitir uma *k-coloração própria*.

Coloção de Vértices

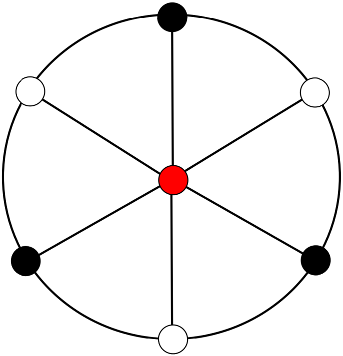
Definição

- Claramente, um grafo é *k-colorível* se e somente se o seu grafo simples subjacente for *k-colorível*. Portanto, apenas grafos simples serão considerados.
- Um grafo simples é *1-colorível* se e somente se ele for vazio e *2-colorível* se e somente se for bipartido.

Coloração de Vértices

Definição

- O **número cromático** de G, $\chi(G)$, é o menor k tal que G seja k-colorível.
  - Se $\chi(G) = k$, então G é dito *k-cromático.*

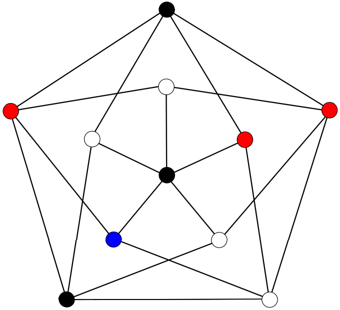


Grafo *3-cromático*

Coloração de Vértices

Definição

- Dizemos que um grafo G é **crítico** se para todo *subgrafo próprio* H de G, $\chi(H) < \chi(G)$
  - Um grafo *k-crítico* é aquele que é *k-cromático* e crítico; todo grafo *k-cromático* tem um subgrafo *k-crítico*.



O grafo 4-crítico de Grötzsch e um subgrafo qualquer.

Teorema 8.1

Teorema

Se G é k-crítico, então $\delta \geq k - 1$

Prova:

Por contradição. Se possível, seja G um grafo *k-crítico* com $\delta < k - 1$, e seja v um vértice de grau δ em G. Uma vez que G é *k-crítico*, $G - v$ é *$(k-1)$-colorível*.

Seja $(V_1, V_2, \ldots, V_{k-1})$ uma *$(k-1)$-coloração* de $G - v$. Por definição, v é adjacente em G a $\delta < k - 1$ vértices e, portanto, v precisa ser **não adjacente** em G a todo vértice de algum V_j.

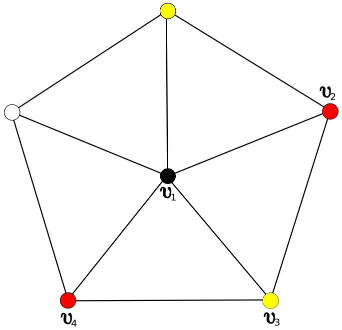
Mais então, $(V_1, V_2, \ldots, V_j \cup \{v\}, \ldots, V_{k-1})$ é uma *$(k-1)$-coloração* de G. Contradição, portanto $\delta \geq k - 1$.

$\square$

Corolário 8.1.1

Corolário

Todo grafo *k-cromático* tem pelo menos k vértices com grau $\geq k-1$



Um Grafo *4-cromático*

Corolário 8.1.1

Prova:

Seja G um grafo *k-cromático*, e seja H um subgrafo *k-crítico* de G.

Pelo teorema 8.1, todo vértice $v \in V$ têm grau de pelo menos $k-1$ em H e, portanto, também em G. Segue então que H, sendo *k-cromático*, claramente tem ao menos k vértices.

$\square$

Corolário 8.1.2

Corolário

Para qualquer grafo G, $\chi \leq \Delta + 1$

Prova:

Suponha que a afirmação não seja verdadeira. Portanto, existe um grafo G com *número cromático* $\Delta + 2$.

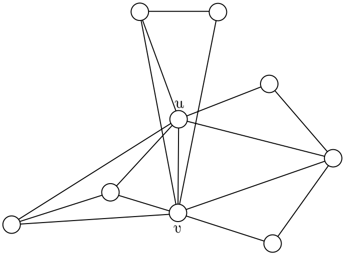
Pelo teorema 8.1, deve existir pelo menos $\Delta + 2$ vértices com grau maior ou igual que $\Delta + 1$. Isso é impossível.

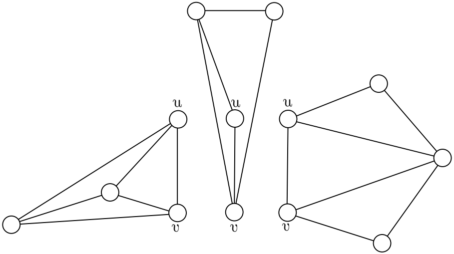
$\square$

Definição

S-Componentes

- Seja S um *corte por vértice* de um grafo conexo G, sendo que os componentes de $G - S$ apresentam os seguintes conjuntos de vértices $V_1, V_2, \ldots, V_n$.
  - Os subgrafos $G_i = G[V_i \cup S]$ são chamados de **S-componentes** de G.



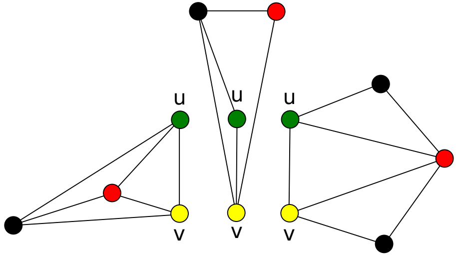


G e as suas $\{u, v\}$-componentes.

Definição

S-Componentes

- Dizemos que as colorações de $G_1, G_2, \ldots, G_n$ **concordam** em S, se e somente se $\forall v \in S$ a atribuição de cores for igual em qualquer uma das colorações.



Teorema 8.2

Teorema

Em um grafo *k-crítico*, nenhum corte por vértice é uma clique.

Teorema 8.2

Prova:

Por contradição. Seja G um grafo *k-crítico*, e suponha que G possui um corte por vértice S que é uma clique.

Denote as S-*componentes* de G por $G_1, G_2, \ldots, G_n$. Uma vez que G é *k-crítico*, cada G_i é $(k-1)$-*colorível*. Além disso, como S é uma clique, os vértices em S precisam receber cores distintas em qualquer $(k-1)$-*coloração* de G_i.

Segue então, que existem $(k-1)$-*colorações* de $G_1, G_2, \ldots, G_n$ que concordam em S. Porém, essas colorações juntas produzem uma $(k-1)$-coloração de G, que é uma contradição, pois G é *k-crítico*.

□

Corolário 8.2

Corolário

Todo grafo crítico é um bloco.

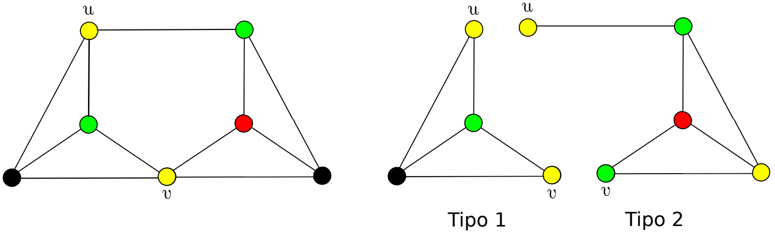
Prova:

Se v é um vértice de corte, então $\{v\}$ é um corte por vértice que também é uma clique. Portanto, segue do teorema 8.2 que nenhum grafo crítico tem um vértice de corte. $\square$

Consequência do Teorema 8.2

Uma consequência do teorema 8.2 é que se um grafo G *k-crítico* tem um 2-*corte por vértice* $\{u, v\}$, então u e v **não** podem ser adjacentes.

- Veremos que um $\{u, v\}$-*componente* G_i de G é do **tipo 1**, se toda *(k-1)-coloração* de G_i atribui as mesmas cores para u e v. E é do **tipo 2**, se toda *(k-1)-coloração* de G_i atribui cores diferentes para u e v.



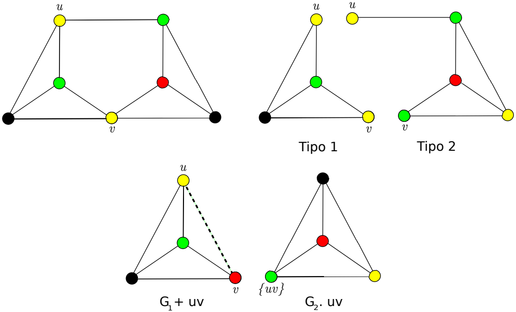
Teorema 8.3

(Dirac, 1953)

Teorema 8.3

Seja G um grafo *k-crítico* com um *2-corte por vértices* $\{u, v\}$. Então:

1. $G = G_1 \cup G_2$, onde G_i é um $\{u, v\}$-*componente* do tipo tipo i $(i = \{1, 2\})$ e,
2. Ambos $G_1 + uv$ e $G_2 \cdot uv$ são *k-crítico* (onde $G_2 \cdot uv$ denota o grafo obtido a partir da contração dos vértices u e v).



Teorema 8.3

(Dirac, 1953)

Prova:

1. Como G é crítico, cada $\{u, v\}$*-componente* de G é *(k-1)-colorível*. Portanto, não pode existir *(k-1)-colorações* em todos estes $\{u, v\}$*-componentes* que *concordam* em $\{u, v\}$, já que tais colorações iriam juntos produzir uma *(k-1)-coloração* em G.

Logo, há dois $\{u, v\}$*-componentes* G_1 e G_2 tal que nenhuma *(k-1)-coloração* de G_1 concorda com alguma *(k-1)-coloração* de G_2.

Claramente um, digamos G_1, deve ser do tipo 1 e outro, $G2$, do tipo 2. Como $G1$ e $G2$ são de tipos diferentes, o subgrafo $G_1 \cup G_2$ de G **não é** *(k-1)-colorível*. Assim, como G é crítico, temos que ter $G = G_1 \cup G_2$.

Teorema 8.3

(Dirac, 1953)

Prova:

2. Faça $H_1 = G_1 + uv$. Como G_1 é do tipo 1, H_1 é *k-cromático*. Iremos provar que H_1 é crítico, mostrando que para cada aresta **e** de H_1, $H_1 - e$ é *(k-1)-colorível*.

Isso claramente é verdade se $e = uv$, pois $H_1 - e = G_1$.

Seja e outra aresta de H_1. Em Qualquer *(k-1)-coloração* de $G - e$, os vértices u e v devem receber cores diferentes, já que G_2 é um subgrafo de $G - e$. A restrição de tal coloração nos vértices de G_1 é uma *(k-1)-coloração* de $H_1 - e$. Portanto, $G_1 + uv$ é crítico. Um argumento análogo mostra que $G_2 \cdot uv$ é *k-crítico* $\square$

Corolário 8.3

Corolário

Seja G um grafo *k-crítico* com um *2-corte por vértice* $\{u, v\}$. Então:

$$d(u) + d(v) \geq 3k - 5 \tag{1}$$

Prova:

Seja G_1 o $\{u, v\}$-*componente* do tipo 1 e G_2 o $\{u, v\}$-*componente* do tipo 2. Faça $H_1 = G_1 + uv$ e $H_2 = G_2 \cdot uv$. Pelos teoremas 8.3 e 8.1, temos:

$$d_{H_1}(u) + d_{H_1}(v) \geq 2k - 2 \ \text{ e } \ d_{H_2}(w) \geq k - 1$$

onde w é o novo vértice obtido por identificar (contrair) u e v.

Segue que:

$$d_{G_1}(u) + d_{G_1}(v) \geq 2k - 4 \ \text{ e } \ d_{G_2}(u) + d_{G_2}(v) \geq k - 1$$

Essas duas inequações produzem (8.1) □

Teorema de Brooks

Teorema 8.4

- O teorema de Vizing ($\chi' = \Delta$ ou $\chi' = \Delta + 1$) é um resultado consideravelmente mais forte do que o *upper bound* dado no corolário 8.1.2 ($\chi \leq \Delta + 1$).

Teorema 8.4

Se G é um grafo simples conexo e não é um ciclo ímpar e também não é um grafo completo, então $\chi \leq \Delta$

Prova:

Seja G um grafo *k-cromático* que satisfaz a hipótese do teorema. Sem perda de generalidade, podemos assumir que G é *k-crítico*. Pelo corolário 8.2, G é um bloco. Além disso, uma vez que grafos 1-*crítico* e 2-*crítico* são completos e grafos 3-*crítico* são ciclos ímpares, temos que $k \geq 4$.

Teorema de Brooks

Teorema 8.4

Prova (cont.):

Se G tem um *2-corte por vértice* $\{u, v\}$, usando o corolário 8.3, temos que:

$$2\Delta \geq d(u) + d(v) \geq 3k - 5 \geq 2k - 1$$

Isso implica que $\chi = k \leq \Delta$, uma vez que 2Δ é par.

Teorema de Brooks

Teorema 8.4

Prova (cont.):

Assuma que G é *3-conexo*. Uma vez que G não é completo, existem três vértices u, v e w em G tal que $uv, vw \in E$ e $uw \notin E$.

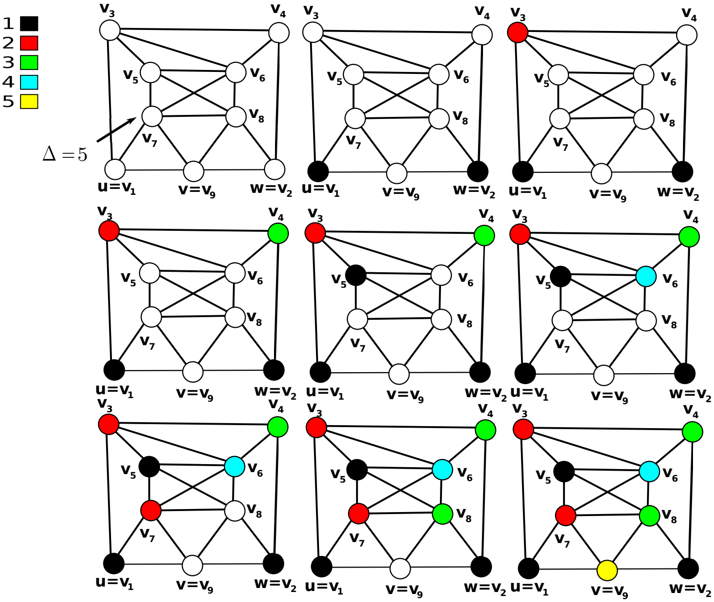
Faça $u = v_1$ e $w = v_2$ e seja $v_3, v_4, \ldots, v_\nu = v$ qualquer ordem dos vértices de $G - \{u, w\}$ tal que cada v_i é adjacente a algum v_j com $j > i$. (Isso pode ser alcançado por arranjar os vértices em ordem não crescente de sua distância de v).

Podemos agora descrever uma Δ-*coloração* de G:

1. atribua **cor 1** para $v_1 = u$ e $v2 = w$;
2. então, sucessivamente, colore $v_3, v_4, \ldots, v_\nu$ com a primeira cor disponível na lista $1, 2, \ldots, \Delta$.

Teorema de Brooks

Teorema 8.4



Teorema de Brooks

Teorema 8.4

Prova (cont.):

Pela construção da sequência $v_1, v_2, \ldots, v_v$, cada vértice v_i, $1 \leq i \leq v-1$, é adjacente a algum vértice v_j com $j > i$, e a no máximo $\Delta - 1$ vértices v_i com $j < i$.

Segue que, quando v_i for colorido, v_i é adjacente a no máximo $\Delta - 1$ cores, e portanto uma das cores $1, 2, \ldots, \Delta$ estará disponível.

Finalmente, uma vez que v_v é adjacente a dois vértices de cor 1 (v_1 e v_2), v_v é adjacente a no máximo $\Delta - 2$ outras cores e pode receber uma das cores $2, 3, \ldots, \Delta$.

$\square$

Conjectura de Hajó

Conjecture de Hajó

Se G é *k-cromático*, então G contém uma subdivisão de K_k.

Uma subdivisão de um grafo G é um grafo que pode ser obtido a partir de G, por uma sequência de divisões de arestas.

Subdivisões de um K_4.

Note que essa condição não é suficiente; por exemplo, um *4-ciclo* é uma subdivisão de um k_3, mas não é *3-cromático*

Conjectura de Hajó

Conjecture de Hajó

Se G é *k-cromático*, então G contém uma subdivisão de K_k.

Para $k = 1$ e $k = 2$ a validade da conjectura de Hajós é óbvia. A conjectura também é facilmente verificada para $k = 3$, pois um grafo *3-cromático* necessariamente contém um ciclo ímpar, e todo ciclo ímpar é subdivisão do k_3. Dirac (1952) provou o caso de $k = 4$.

Teorema 8.5

Teorema

Se G é *4-cromático*, então G contém uma subdivisão do K_4.

Prova

Seja G um grafo *4-cromático*. Note que se algum subgrafo de G contiver uma subdivisão do K_4, então G também terá.

Sem perda de generalidade, podemos assumir que G é crítico, e portanto que G é um bloco com $\delta \geq 3$ (teorema 8.1). Se $n = 4$, então G é K_4 (caso trivial).

Por indução em n, assuma que o teorema é válido para todo grafo *4-cromático* com menos de n vértices, e seja $n(G) = n > 4$

Teorema 8.5

Prova

Primeiro, suponha que G tem um *2-corte por vértice* $\{u, v\}$. Pelo teorema 8.3, G tem dois $\{u, v\}$-*componentes* G_1 e G_2, onde $G_1 + uv$ é *4-crítico*.

Como $n(G_1 + uv) < n(G)$, podemos aplicar a hipótese de indução e deduzir que $G_1 + uv$ contém uma subdivisão do K_4.

Segue que, como P é um (u, v)-*caminho* em G_2, então $G_1 \cup P$ contém uma subdivisão do K_4. Como $G_1 \cup P \subseteq G$, então G também contém uma subdivisão do K_4

Teorema 8.5

Prova

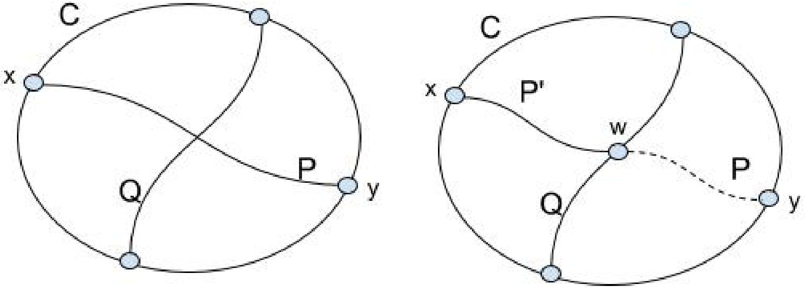
Agora, suponha que G é *3-conexo*. Como $\delta \geq 3$, G tem um ciclo C de tamanho ≥ 4.

Sejam u e v vértices não consecutivas em C. Como $G - \{u, v\}$ é conexo, existe um caminho P em $G - \{u, v\}$ conectando as duas componentes de $C - \{u, v\}$; podemos assumir que a origem x e o término y são os únicos vértices de P em C. De forma similar, há um caminho Q em $G - \{x, y\}$.

Se P e Q não têm nenhum vértice em comum, então $C \cup P \cup Q$ é uma subdivisão do K_4. Caso contrário, seja w o primeiro vértice de P em Q, e denote por P' a (x, w)-*seção* de P. Então $C \cup P' \cup Q$ é uma subdivisão do K_4. Logo, em ambos os casos, G contém uma subdivisão do K_4.

□

Teorema 8.5



Teorema

8.7

Teorema 8.7

Para qualquer inteiro k positivo, existe um grafo *k-cromático* que não contém triângulos.

Teorema

Teorema 8.7

Para qualquer inteiro k positivo, existe um grafo *k-cromático* que não contém triângulos.

Prova:

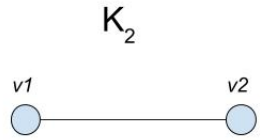
Para $k = 1$ e $k = 2$, os grafos K_1 e K_2 apresentam a propriedade requerida. Prosseguimos por indução em k.

Suponha que tenhamos construído um grafo G_k sem triângulo com um número cromático $k \geq 2$. Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_n$ os vértices de G_k. Forme um novo grafo G_{k+1} a partir de G_k da seguinte forma:

1. Adicione $n + 1$ novos vértices $u_1, u_2, \ldots, u_n, v$,
2. e então, para $1 \leq i \leq n$, una u_i aos vizinhos de v_i e a v.

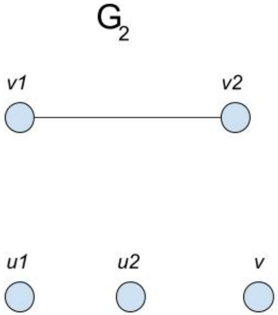
Teorema

8.7



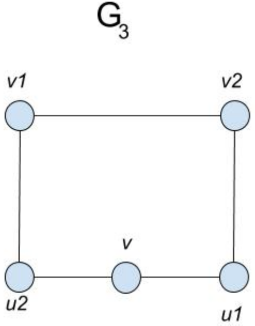
Teorema

8.7



Teorema

8.7



Teorema

8.7

Prova:

Claramente, o grafo G_{k+1} não tem triângulos. Pois, como $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ é um conjunto independente em G_{k+1}, nenhum triângulo pode conter mais que um u_i; e se $u_i v_j v_k u_i$ eram um triângulo em G_{k+1}, então $v_i v_j v_k v_i$ seria um triângulo em G_k, contrariando o pressuposto.

Mostraremos agora que G_{k+1} é *(k+1)-cromático*.

Note que G_{k+1} é certamente (k+1)-colorível, já que qualquer coloração de G_k pode ser estendida para uma (k+1)-coloração em G_{k+1} colorindo u_i do mesmo modo que v_i, $1 \leq i \leq n$, e então atribuindo uma nova cor para v.

Portanto, resta mostrar que G_{k+1} **não** é *k-colorível*.

Teorema

8.7

Prova (cont):

Se possível, considere uma *k-coloração* de G_{k+1} no qual, sem perda de generalidade, v é atribuído a cor k. Claramente, nenhum u_i pode também ter a cor k. Agora, recolora cada vértice v_i, cuja cor é k, com a cor atribuída a u_i.

Isso resulta em uma *(k-1)-coloração* do grafo *k-cromático* G_k. Portanto, G_{k+1} é também *(k+1)-cromático*. O teorema segue pelo princípio da indução.

$\square$

Dúvidas?

Todo os arquivos desta apresentação foram disponibilizados inicialmente em:
`https://github.com/luanteylo/coloracao_vertices`