数学

清华大学 任舍予

数论结构

带余除法

整除 — 因数

模

- 素数与筛法
- 整数与分解
- 整除性
  - 数论分块
  - 裴蜀定理与扩展欧几里得算法
- 数论函数
  - 积性函数
  - 莫比乌斯反演

例题

- 题意：求有多少个正整数 X，满足 $\forall S \in [L, R] \cap \mathbb{N}$，$(S \bmod Q) \bmod X = S \bmod X$
- 数据范围：$L, R, Q \le 10^{12}$

$$S \bmod Q \equiv S \pmod{X}.$$

$$X \mid S - S \bmod Q = \left\lfloor \frac{S}{Q} \right\rfloor \cdot Q.$$

$$\Leftrightarrow \quad X \mid \gcd\left(\left\lfloor \frac{L}{Q} \right\rfloor \cdot Q, \ \cdots, \ \left\lfloor \frac{R}{Q} \right\rfloor \cdot Q\right).$$

洛谷 P3951 [NOIP2017 提高组] 小凯的疑惑 / [蓝桥杯 2013 省] 买不到的数目

- 题意：求最大的正整数 x，**无法表示为** $ma + nb \ (m, n \in \mathbb{N}, a \perp b)$
- 数据范围：$a, b \le 10^9$

$-a + (a-1)b$

$x = na + yb$

$n \in [-b, -1]$

$n \in [0, a)$

exgcd

$a x_0 + b y_0 = 1$

$a(x_0 + b) + b(y_0 - a) = 1$

$+b$ x_0, x_1, x_2

y_1, y_2 $-a$

	x	y	+b
+	x	y	−

洛谷 P8338 [AHOI2022] 排列

- 题意：对于一个长度为 n 的排列 $P=(p_1,p_2,\dots,p_n)$ 和整数 $k\ge 0$，定义 P 的 k 次幂

$$P^{(k)}=\left(p_1^{(k)},p_2^{(k)},\dots,p_n^{(k)}\right),$$

该排列的第 i 项为

$$p_i^{(k)}=\begin{cases} i, & k=0,\\ p_{p_i}^{(k-1)}, & k>0.\end{cases}$$

容易证明任意排列的任意次幂都是一个排列。

定义排列 P 的**循环值** $v(P)$ 为最小的**正整数** k 使得 $P^{(k+1)}=P$。

给出一个长度为 n 的排列 $A=(a_1,a_2,\dots,a_n)$，对于整数 $1\le i,j\le n$，定义 $f(i,j)$：若存在 $k\ge 0$ 使得 $a_i^{(k)}=j$，则 $f(i,j)=0$，否则设排列 A_{ij} 为将排列 A 的第 i 项 a_i 和第 j 项 a_j 交换后得到的排列，则 $f(i,j)=v(A_{ij})$。

求 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(i,j)$ 的值。答案可能很大，你只需要输出其对 (10^9+7) 取模的结果。

- 数据范围：$n\le 5\times 10^5$

$i \to p_i$

$v(p)=\mathrm{lcm}(a_1,a_2,\dots,a_n)$

$\sum\sum \mathrm{lcm}(\{a_1\sim a_n\}-\{a_i,a_j\}+\{a_i+a_j\})$

$a_i \quad a_j \qquad f(a_i)\,f(a_j)$

洛谷 P9135 [THUPC 2023 初赛] 快速 LCM 变换

- 题意：
  - 给定正整数序列 $\{r_n\}$，选择正整数 $1 \le i < j \le n$，删除 r_i, r_j，**加入** $r_i + r_j$
  - **求所有方案的序列中所有数的** lcm **之和**
- **数据范围**：$n \le 5 \times 10^5$，$r_i \le 10^6$

数论定理

- 费马小定理 & **欧拉定理**
- 线性同余方程组
  - **中国剩余定理**
  - 线性同余方程的合并/exCRT

p, $a \not\equiv 0 \ (p)$.

$a^{p-1} \equiv 1$.

m. $(a,m)=1$ $a^{\varphi(m)} \equiv 1$.

例题

- 题意：求 $n!$ 末尾 0 的个数与最后一位非 0 数字
- 数据范围：$n \le 10^{18}$

$n!$ 5的个数.

$1 \times 2 \times \cdots \quad 5 \quad 10 \quad 15 \quad 20$

$1 \quad 2 \quad 3 \quad \cdots \quad \lfloor \frac{n}{5} \rfloor$

$$k = ans1_n = \lfloor \frac{n}{5} \rfloor + ans1_{\lfloor \frac{n}{5} \rfloor}$$

$$\frac{n!}{10^k} \bmod 10 \quad \begin{cases} \bmod 2 \\ \bmod 5 \end{cases}$$

$2^k 5^k$

$$\frac{n!}{5^k} \cdot 3^k \bmod 5$$

0, 2^k

$$ans2_n = \left((-1)^{\lfloor \frac{n}{5} \rfloor} (n \% 5)! \cdot ans2_{\lfloor \frac{n}{5} \rfloor} \right) \bmod 5$$

LOJ #563. 「LibreOJ Round #10」Snakes 的 Naïve Graph

- 题意：
  - 给定 $2m-2$ 个点的二分图 $G(m)$
  - 左侧第 i 个点和右侧第 j 个点有连边当且仅当 $i=j \vee ij\equiv 1 \pmod m$
  - 设 $f(m)$ 表示 $G(m)$ 的本质不同的最大匹配的个数，求 $\left(f(1)\sim f(n)\right) \bmod 311021$
- 数据范围：$n\le 10^7$

$i^{-1}=i$

$x^2\equiv 1 \pmod m$

$g(m)$

$x^2-1\equiv 0 \pmod{p^k}$

$p^k \mid (x-1)(x+1)$

$p>2$

$p^k \mid x-1$

$p^k \mid x+1$

$x^c\equiv 1 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$

$\prod g(p_i^{\alpha_i})$

$g(p^k)$

$x\equiv -1$

$x=2^{k-1}-1$

$x=2^{k-1}+1 \ (p>2)$

$x=1$

$g(2)$ $g(4)$

$g(2^k)$ 4 $k\ge 3$

数列

- 递推与通项
- **模意**义下数列的循环节

$$a_n = p\,a_{n-1} + q$$

$$a_n - t = p(a_{n-1} - t)$$

$$a_n - t = p^n(a_0 - t) + t$$

$$a_n = p\,a_{n-1} + q\,a_{n-2}$$

$$a_n - t\,a_{n-1} = (p-t)\,a_{n-1} + q\,a_{n-2}$$

$$(p-t)\left(a_{n-1} + \frac{q}{p-t}\,a_{n-2}\right)$$

$$= -t$$

洛谷 P3263 [JLOI2015] 有意义的字符串

- 题意：求 $\left\lfloor\left(\frac{b+\sqrt{d}}{2}\right)^n\right\rfloor \bmod 7528443412579576937$
- 数据范围：$n \le 10^{18}$， $0 < b^2 \le d < (b+1)^2 \le 10^{18}$， $b \equiv 1 \pmod 2$， $d \equiv 1 \pmod 4$

$$\left(\frac{b+\sqrt{d}}{2}\right)^n + \left(\frac{b-\sqrt{d}}{2}\right)^n$$

$a_0 = 2$　　$a_1 = b$.　　P' 1:

线性代数

- **矩**阵
  - **高斯消元**
  - 线性方程组
  - **矩**阵求逆
- **行列式**
- 线性基