数学

清华大学 任舍予

前言

- **数学是与** OI 紧密相关的基础学科，在 OI **中有着极**为广泛的应用
- **在学**习数学专题前，建议同学掌握高中数学的大部分内容，并能够在实际中进行应用
- **在学**习数学专题时，
  - **首先要熟悉相关知**识点
  - **然后在做**题的过程中不断学习如何应用数学思维与数学方法
  - **最后**总结出一套面对数学问题的处理方式

OI 中的数学

- 组合数学
- 概率期望
- 数论
- 线性代数
- 群论入门
- 计算几何
- 博弈论

计数原理

- 计数原理
  - **加法原理** 分类
  - **乘法原理** 分步
- 计数角度
  - **拆**贡献
  - **增**量计算

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "3"] \arrow[r, bend right, "4"'] & B \end{tikzcd}$$

$3+4=7$

$A \xrightarrow{3} B \xrightarrow{4} C$

$3\times4=12$

ans[x]

ans[x+1]

洛谷 P8557 炼金术（Alchemy）

铃是一个爱玩游戏的女孩子。

$1 \le n, k \le 10^9$

她在游戏中想要炼制一种稀有合金 —— 这需要 n 种金属来合成。

她准备好矿石后建造了 k 个不同的熔炉，当熔炉启动时，会随机炼出这 n 种金属中的一些（也可能什么都没有）。

如果把每个熔炉炼出的金属收集起来，有了全部 n 种金属，就能造出合金了。澪对此很好奇，对铃说：「我考考你，有多少种情况可以炼出合金呢？」这个简单的问题铃很快就会做了，你能求出结果吗？

答案可能很大，请对 998244353 取模（即除以 998244353 的余数）后输出。

$(2^k-1)^n$

洛谷 P5303 [GXOI/GZOI2019] 逼死强迫症

$f_i = f_{i-1} + f_{i-2}$

ITX351 要铺一条 $2 \times N$ 的路，为此他购买了 N 块 2×1 的方砖。可是其中一块砖在运送的过程中从中间裂开了，变成了两块 1×1 的砖块！

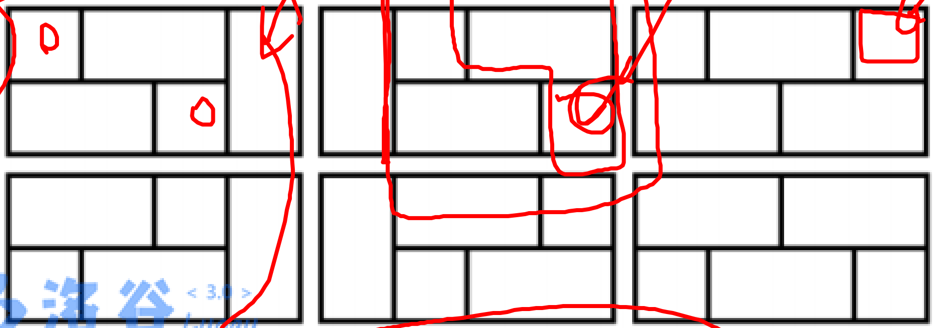
ITX351 由此产生了一个邪恶的想法：他想要在这条路上故意把两块 1×1 的砖块分开铺，**不让两块砖有相邻的边**，其他砖块可以随意铺，直到整条路铺满。这样一定可以逼死自身强迫症 sea5！

也许下面的剧情你已经猜到了——他为此兴奋不已，以至于无法敲键盘。于是，他请你帮忙计算一下，有多少种方案可以让自己的阴谋得逞。

$N \le 2 \times 10^9$ | $T \le 500$

枚举 1×1 块 位置

$l < r$



$l \sim r = 2$ 种

$$g_n = \sum_{1 \le l < r \le n} 2 \cdot f_{l-1} \cdot f_{n-r}$$

最后一列

f_n 列，已经出现

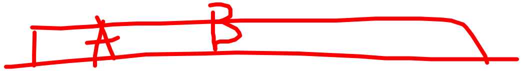
g_n 还没有

$$f_n = f_{n-1} + 2\sum g_i$$

洛谷 P8321 『JROI-4』沈阳大街 2

给定两个长度为 n 的序列 A, B，满足：

- $\forall 1 \le i < n, A_i \ge A_{i+1}$
- $A_n \ge \min_{i=1}^{n}(B_i)$



$1 \le n \le 5000$，$1 \le A_i, B_i \le 10^9$

π 是一个长度为 n 的排列，定义价值函数 $f(\pi)$：

$$f(\pi) = \prod_{i=1}^{n} \min(A_i, B_{\pi(i)})$$

每种排列出现的概率相等，求 $f(\pi)$ 的期望对 998244353 取模的结果。

即求：

$$\left(\frac{1}{n!}\sum_{\pi} f(\pi)\right) \bmod 998244353$$

组合数/二项式系数

- 组合数求值
  - 递推
  - 阶乘
  - **取模**：Lucas 定理
  - 组合恒等式：吸收恒等式 & **上指**标求和 & **下指**标求和 & **范德蒙德卷积**
- 组合数应用
  - **隔板法**
  - **格路**计数

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$$

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}.$$

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n^{\underline{m}}}{m!}$$

$n(n-1)\cdots$

$\binom{n}{m} \bmod p.$

$n = \overline{n_1 n_2 \cdots n_k}_{(p)}$

$m = \overline{m_1 m_2 \cdots m_k}_{(p)}$

$$\binom{n}{m} = \prod \binom{n_i}{m_i}.$$

洛谷 P2822 [NOIP2016 提高组] 组合数问题

组合数 $\binom{n}{m}$ 表示的是从 n 个物品中选出 m 个物品的方案数。举个例子，从 $(1,2,3)$ 三个物品中选择两个物品可以有 $(1,2),(1,3),(2,3)$ 这三种选择方法。根据组合数的定义，我们可以给出计算组合数 $\binom{n}{m}$ 的一般公式：

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

其中 $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$；特别地，定义 $0! = 1$。

小葱想知道如果给定 n, m 和 k，对于所有的 $0 \le i \le n, 0 \le j \le \min(i, m)$ 有多少对 (i, j) 满足 $k \mid \binom{i}{j}$。

$0 \le n, m \le 2 \times 10^3$，$1 \le t \le 10^4$

例题

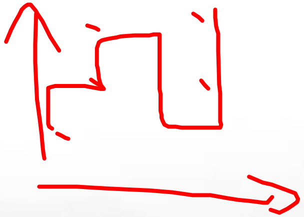
- 题意：q 次询问，每次询问给定 n, m，求 $\left(\sum_{i=0}^{m}\binom{n}{i}\right) \bmod (10^9+7)$
- 数据范围：$n, m, q \le 10^5$

$$F_{n,m} = \sum_{i=0}^{m}\binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{m}\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}$$

$$2F_{n-1,m} - \binom{n-1}{m}.$$

f_{iB} jB

莫队.



$(l,r) \to (l\pm1, r\pm1)$

分块 . n $\sqrt{n}$ 种

$F_{n,B}$, $F_{n,2B}$ $F_{n,3B}$.

洛谷 P3223 [HNOI2012] 排队

某中学有 n 名男同学，m 名女同学和两名老师要排队参加体检。他们排成一条直线，并且任意两名女同学不能相邻，两名老师也不能相邻，那么一共有多少种排法呢？（注意：任意两个人都是不同的）

$$n \le 2000,\ m \le 2000.$$

一女　$n+1$　$m-1$

很多人 在男　男 ← 老师　← 女

$\binom{n+1}{2} \cdot \binom{n+3}{m} \cdot n! \cdot m! \cdot 2! \cdot \ldots$

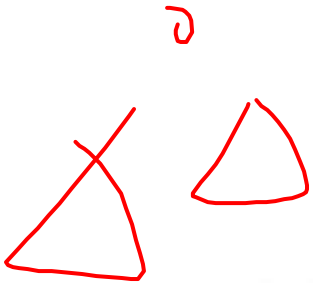
洛谷 P2606 [ZJOI2010] 排列计数

称一个 $1 \sim n$ 的排列 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ 是 Magic 的，当且仅当

$$\forall i \in [2, n], p_i > p_{\lfloor i/2 \rfloor}$$

计算 $1 \sim n$ 的排列中有多少是 Magic 的，答案可能很大，只能输出模 m 以后的值。

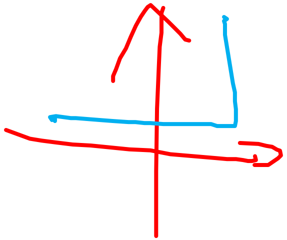
$$1 \leq n \leq 10^6, 1 \leq m \leq 10^9，m \text{ 是一个质数}$$

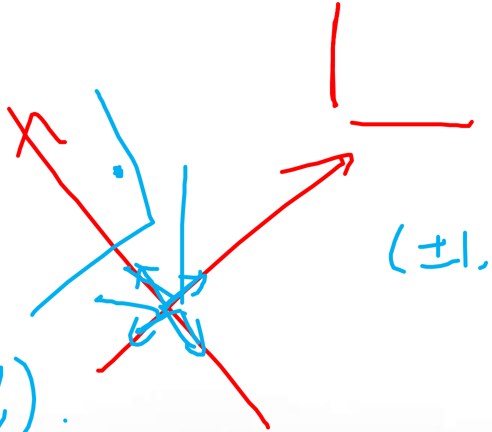


$$f_u = f_l \cdot f_r \cdot \binom{siz_u - 1}{siz_l}$$

例题

- 题意：**求** $(0,0)$ **出**发，每步恰好向上/**下**/**左**/**右**移动一个单位长度，k **步到达** (n,m) **的方案数**
- **数据范围**：$n,m,k \le 10^5$





$(\pm 1, \pm 1)$.

$(x, y) \longrightarrow (x-y, x+y)$.

$|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \longrightarrow \max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|)$.

容斥原理/反演

- 容斥原理
- 代数形式：反演
  - 子集反演
  - 二项式反演
- 计数角度：计算方案的权值和

$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cdots| = |A_1| + \cdots |A|$

$- |A \cap A| - \cdots$

$+ |A \cap A \cap A| + \cdots$

$S_i = \sum_{j \le i} a_j$

$a_i = S_i - S_{i-1}$.

n 选 k 个 $\quad \min = x$.

$1 \sim W$.

$a_1 \sim a_n$

f_x: $\min = x$

g_x: $\min \ge x$.

$\#\{\min \ge x\} - \#\{ > x\}$.

$f_x = g_x - g_{x+1}$

$f_x = g_x - f_{x+1} - f_{x+2} \cdots$

$\binom{suf_x}{k} - \binom{suf_{x+1}}{k}$.

例题

- 题意：
  - 求 $(0,0)$ 到 (n,m)，每一步只能向右或向上的方案数
  - 有 k 个点 (x_i,y_i) 不能经过
- 数据范围：$n,m \le 10^5$，$k \le 1000$

f_i : $(0,0) \to (x_i, y_i)$

$$f_i = \binom{x_i+y_i}{x_i} - \sum_j f_j \cdot \binom{x_i-x_j+y_i-y_j}{x_i-x_j}$$

Δ

洛谷 P3813 [FJOI2017] 矩阵填数

给定一个 $h \times w$ 的矩阵，矩阵的行编号从上到下依次为 $1 \sim h$，列编号从左到右依次 $1 \sim w$。

在这个矩阵中你需要在每个格子中填入 $1 \sim m$ 中的某个数。

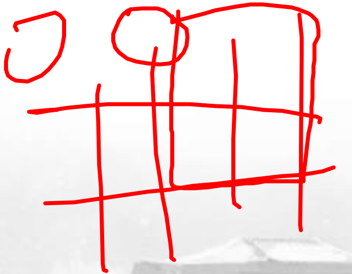
给这个矩阵填数的时候有一些限制，给定 n 个该矩阵的子矩阵，以及该子矩阵的最大值 v，要求你所填的方案满足该子矩阵的最大值为 v。

$\max = v$

$= \left(\#\{\max \le v\} - \#\{\max < v\}\right)$

现在，你的任务是求出有多少种填数的方案满足 n 个限制。

两种方案是不一样的当且仅当两个方案至少存在一个格子上有不同的数。由于答案可能很大，你只需要输出答案对 $10^9 + 7$ 取模后的结果。



$$T \le 5,\ 1 \le h, w, m \le 10^4,\ 1 \le n \le 10,\ 1 \le v \le m$$

$(n^3 \sim n^4) \cdot 2^n$

洛谷 P6076 [JSOI2015] 染色问题

萌萌家有一个棋盘，这个棋盘是一个 $n \times m$ 的矩形，分成 n 行 m 列共 $n \times m$ 个小方格。
现在萌萌和南南有 C 种不同颜色的颜料，他们希望把棋盘用这些颜料染色，并满足以下规定：

f_c

1. 棋盘的每一个小方格既可以染色（染成 C 种颜色中的一种），也可以不染色。
2. 棋盘的每一行至少有一个小方格被染色。
3. 棋盘的每一列至少有一个小方格被染色。
4. 每种颜色都在棋盘上出现至少一次。

g_c

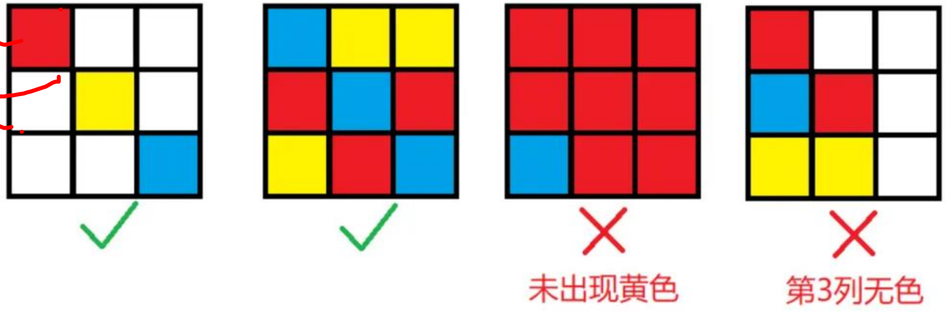
nm^{C+1}

$1 \le n, m, c \le 400$.

请你求出满足要求的不同的染色方案总数。只要存在一个位置的颜色不同，即认为两个染色方案是不同的。

$g_c = \sum_k \binom{c}{k} f_k$

$f_c = \sum_k \binom{c}{k} g_k (-1)^{c-k}$



洛谷 P8329 [ZJOI2022] 树

九条可怜是一个喜欢树的女孩子，她想生成两棵均有 n 个节点的树。

第一棵树的生成方式是：

1. 节点 1 作为树的根。
2. 对于 $i \in [2, n]$，从 $[1, i-1]$ 中选取一个节点作为 i 的父亲。

第二棵树的生成方式是：

$$2 \le N \le 500，10 \le M \le 2^{30}$$

1. 节点 n 作为树的根。
2. 对于 $i \in [1, n-1]$，从 $[i+1, n]$ 中选取一个节点作为 i 的父亲。

九条可怜希望对于任意 $i \in [1, n]$，若第一棵树中的节点 i 为叶子，那么第二棵树中的节点 i 为非叶子；若第一棵树中的节点 i 为非叶子，那么第二棵树中的节点 i 为叶子。一个节点被称为叶子当且仅当没有节点的父亲是它。

九条可怜希望你统计生成两棵树的方案数是多少。具体地，你需要对于所有 $n \in [2, N]$ 都计算方案数。两种方案不同当且仅当存在一棵树中的一个节点 i，两种方案中它的父亲不同。因为答案可能很大，你只需要输出答案对 M 取模后的结果。

洛谷 P4491 [HAOI2018] 染色

为了报答小 C 的苹果，小 G 打算送给热爱美术的小 C 一块画布，这块画布可以抽象为一个长度为 N 的序列，每个位置都可以被染成 M 种颜色中的某一种。

然而小 C 只关心序列的 N 个位置中出现次数恰好为 S 的颜色种数，如果恰好出现了 S 次的颜色有 K 种，则小 C 会产生 W_k 的愉悦度。

小 C 希望知道对于所有可能的染色方案，他能获得的愉悦度的和对 1004535809 取模的结果是多少。

$$1 \le N \le 10^7,\ 1 \le M \le 10^5,\ 1 \le S \le 150,\ 0 \le W_i < 1004535809$$

多项式与生成函数

- 多项式
  - **系数表达与点**值表达
    - **拉格朗日插**值
  - 多项式运算
- **生成函数**

例题

- 题意：求 $\left(\sum_{i=1}^{n} i^k\right) \bmod (10^9+7)$
- 数据范围：$n \le 10^9$，$k \le 10^6$

洛谷 P4463 [集训队互测 2012] calc

一个序列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是合法的，当且仅当：

- $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 都是 $[1, k]$ 中的整数。
- $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 互不相等。

一个序列的值定义为它里面所有数的乘积，即 $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$。

求所有不同合法序列的值的和对 p 取模后的结果。两个序列不同当且仅当他们任意一位不同。

$$k \le 10^9，n \le 500，p \le 10^9，保证 p 为素数，保证 n + 1 < k < p$$

洛谷 P8290 [省选联考 2022] 填树

有一棵 n 个节点的无根树，刚开始树上每个节点的权值均为 0。KK 想对这棵树进行一些修改，他会任选一个节点作为初始的当前节点，然后重复以下动作：

1. 将当前节点 i 的权值修改为一个**正整数** x，需满足 $l_i \le x \le r_i$。其中 l_i, r_i 是输入中给出的两个正整数。
2. 结束修改过程，或移动到一个与当前节点相邻的权值为 0 的节点（如果不存在这样的节点，则必须结束修改过程）。

现在 KK 有两个问题：

1. 在修改结束后，可以得到多少棵不同的树，满足树上**非零权值**的最大值和最小值的差小于等于 K？其中 K 是输入中给出的一个正整数。
2. 这些满足条件的树的权值之和为多少？（树的权值定义为这棵树上所有节点的权值之和）

你需要输出这两个问题的答案模 10^9+7。我们认为两棵树不同当且仅当至少存在一个节点的权值不同。

温馨提示：

1. KK 至少会修改一个节点（初始节点）。
2. 实质上 KK 会修改树上的任意一条路径，最后需要满足这条路径上的点的权值最大值和最小值之差小于等于 K。

$$1 \le n \le 200,\ 1 \le l_i \le r_i \le 10^9,\ 1 \le K \le 10^9$$

洛谷 P3746 [六省联考 2017] 组合数问题

小葱在 NOIP 的时候学习了 C_i^j 和 k 的倍数关系，现在他想更进一步，研究更多关于组合数的性质。小葱发现，C_i^j 是否是 k 的倍数，取决于 $C_i^j \bmod k$ 是否等于 0，这个神奇的性质引发了小葱对 mod 运算（取余数运算）的兴趣。现在小葱选择了是四个整数 n, p, k, r，他希望知道

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} C_{nk}^{ik+r}\right) \bmod p,$$

即

$$\left(C_{nk}^{r} + C_{nk}^{k+r} + C_{nk}^{2k+r} + \cdots + C_{nk}^{(n-1)k+r} + C_{nk}^{nk+r} + \cdots\right) \bmod p$$

的值。

$$1 \le n \le 10^9, 0 \le r < k \le 50, 2 \le p \le 2^{30} - 1$$

例题

- 题意：
  - 给定 m **个从左到右的格子**
  - **从最左**侧的格子出发，每次移动不超过一格
  - **求 n 次移**动后恰好回到最左侧格子的方案数
- **数据范**围：$n,m \le 10^7$

集合幂级数

- FMT/高维前缀和
- FWT
- 任意进制 FMT/FWT
- 任意运算表 FWT