Questao 1

a) $n + (\log n) = \Theta(n)$

$0 \leq c1 \,.\, g(n) \leq f(n) \leq c2.\, g(n)$

$= 0 \leq c1 \,.n \leq n + (\log n) \leq c2 \,.\, n$ $\quad$ $n = 2,\ c1 = \frac{1}{2},\ c2 = 2$

$= 0 \leq \frac{1}{2} \,.\, 2 \leq 2 + (\log n) \leq 2 \,.\, 2$

$= 0 \leq 2/2 \leq 2 + 1 \leq 4$

$= 0 \leq 1 \leq 3 \leq 4$ $\quad$ verdadeira

b) $n^2 = o(n^3)$

$0 \leq f(n) < c \,.\, g(n)$

$=0 \leq n^2 < c \,.\, n^3$ $\quad$ $n = 2,\ c = 1$

$=0 \leq 2^2 < 1 \,.\, 2^3$

$=0 \leq 4 < 8$ $\quad$ verdadeira

c) $(n + 1)^2 = O(2n^2)$
$0 \leq f(n) \leq c.\, g(n)$
$=0 \leq (n + 1)^2 \leq c \,.\, 2n^2$ $\quad$ $n = 2,\ c = 3$
$=0 \leq 2^2 + 2.2 + 1 \leq 3.\, 2.2^2$
$=0 \leq 4 + 4 + 1 \leq 3 \,.8$
$=0 \leq 9 \leq 24$ $\quad$ verdadeira

d) Se $f(n) = n - 300$ então $f(n)$ é $\Omega(300n)$ e $f(n)$ é $O(300n)$
$0 \leq c1 \,.\, g(n) \leq f(n) \leq c2.\, g(n)$

$= 0 \leq c1.\, 300n \leq n - 300 \leq c2.\, 300n$

$=0 \leq c1 \,.\, g(n) \leq f(n) \leq c2.\, g(n)$ $\quad$ $n = 301,\ c1 = 1/90300,\ c2 = 1/300$

$=0 \leq 1/90300 \,.\, 300.301 \leq 301 - 300 \leq c2.\, g(n)$

$= 0 \leq 90300/90300 \leq 301 - 300 \leq 1/300.\, 300.301$

$0 \leq 1 \leq 1 \leq 301$ $\quad$ verdadeira

Questão 2

Problema da ordenação é rearranjar um vetor A[ ] de n elementos de modo que ele fique em ordem crescente.

Instância: ordenar $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ de forma crescente.

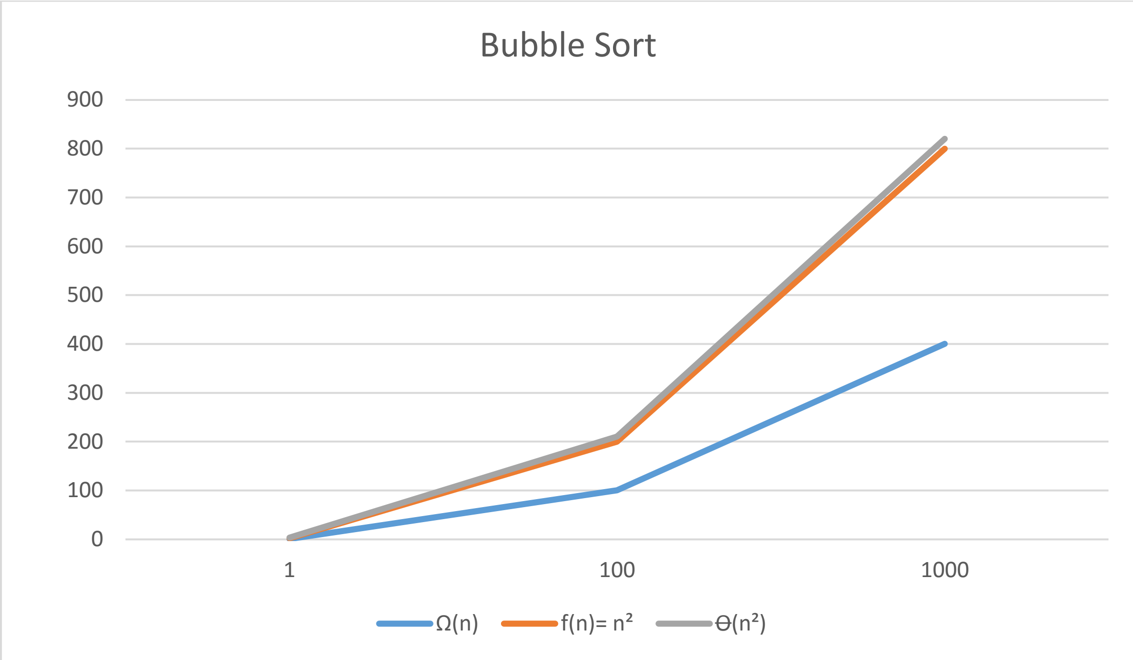
Entrada: A sequência $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$.

Saída: A sequência $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ de forma que $(a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq ..., \leq a_n)$.

Objetivo: ordenar n elementos de forma eficiente.

Exemplo:

Algoritmo Bubble Sort



Questão 3

a) $\sum_{l=1}^{10000} \sum_{i=1}^{n-5} \sum_{j=i+2}^{n/2} \sum_{k=i}^{n} 1$

$= \sum_{l=1}^{10000} \sum_{i=1}^{n-5} \sum_{j=i+2}^{n/2} (n-1+1)$

$= \sum_{l=1}^{10000} \sum_{i=1}^{n-5} \sum_{j=i+2}^{n/2} n$

$=\sum_{l=1}^{10000} \sum_{i=1}^{n-5} n \sum_{j=i+2}^{n/2}$

$=\sum_{l=1}^{10000} \sum_{i=1}^{n-5} n(\frac{n}{2} - (i+2) + 1)$

$=\sum_{l=1}^{10000} \sum_{i=1}^{n-5} n(\frac{n}{2} - i - 2 + 1)$

$= \sum_{l=1}^{10000} \sum_{i=1}^{n-5} n(\frac{n}{2} - i - 1)$

$= \sum_{l=1}^{10000} \sum_{i=1}^{n-5} (\frac{n^2}{2} - in - n)$

$=\sum_{l=1}^{10000} \frac{n^2}{2} \sum_{i=1}^{n-5} - n \sum_{i=1}^{n-5} i - n \sum_{i=1}^{n-5}$

$=\sum_{l=1}^{10000} \frac{n^2}{2}(n-5-1+1) - n(n-5)(n-4)/2 - n(n-5-1+1)$

$=\sum_{l=1}^{10000} * (n^3 - 5n^2)/2 - (n^3 - 9n^2 + 20n)/2 - n^2 + 5n$

$=\sum_{l=1}^{10000} * (4n^2 - 20n)/2 - n^2 + 5n$

$=\sum_{l=1}^{10000} * (4n^2 - 20n - 2n^2 + 10n)/2$

$=\sum_{l=1}^{10000} * (2n^2 - 10n)/2$

$=\sum_{l=1}^{10000} * (n^2 - 5n)$

$=(n^2 - 5n) \sum_{l=1}^{10000}$

$=(n^2 - 5n)(10000 - 1 + 1)$

$=(n^2 - 5n)10000$

$=10000n^2 - 50000n$

Ɵ = (n^2)

b) T(n) = $\begin{cases} 1\,, se\ n = 1 \\ 3T\left(\frac{n}{3}\right) + \left(\frac{5n}{3}\right) - 2 \end{cases}$

H= $\left(\frac{5n}{3}\right)$

=$3T\left(\frac{n}{3}\right) + H$ -2

1ª = $3T[3T(\frac{\frac{n}{3}}{3}) + H - 2]$+H-2

= $3T^2(n/3^2)$ + H +H -2-2

2ª= $3T^2\left[3T\left(\frac{\frac{n}{3^2}}{3}\right) + H - 2\right] + H + H - 2 - 2$

= $3T^3(n/3^3) + (5^3n/3^3)$ +H+H+H -2-2-2

3ª = $3T^3\left[3T\left(\frac{\frac{n}{3^3}}{3}\right) + H - 2\right] + H - 2 + H - 2 + H - 2$

= $3T^4(n/3^4)$ + H + H + H + H -2-2-2-2

H = $(5^k n/3^k)$

H = $(5^{\log n} 3^k /3^k)$

H= n

$3^k (n/3^k)$ + k*H -2k

n = 3^k, log n = k, H = n

= $3^{\log n}(3^k/3^k)$ +(log n * H) – 2logn

= n +(H *log n) – 2(log n)

= n +n*log n – 2 log n

Θ(n log n)

c)$\sum_{i=1}^{n-1} \quad \sum_{j=i+1}^{n} \quad \sum_{k=1}^{j}$

=$\sum_{i=1}^{n-1} \quad \sum_{j=i+1}^{n} \quad (j - 1 + 1)$

=$\sum_{i=1}^{n-1} \quad \sum_{j=i+1}^{n} j$

=$\sum_{i=1}^{n-1} \quad [\frac{n(n+i+1)}{2}]$

=$\sum_{i=1}^{n-1} \quad [\frac{n^2+in+n}{2}]$

=$n^{2\sum_{i=1}^{n-1}} \quad + n\sum_{i=1}^{n-1} i + n\sum_{i=1}^{n-1}$

=$n^2(n-2+1) + n[(n-1)(n+1-1)/2 + n(n-2+1)$

=$n^3-2n^2+n^2 + n(n^2-n)/2 + n^2-n$

=$n^3 - n + (n^3-n^2)/2$

= $(2n^3 + n^3 - n^2 - 2n)/2$

= $(3n^3-n^2)/2 - n$

$\Theta(n^3)$

d) T(n) = $\begin{cases} 1, se\ n = 0 \\ 2T(n-1)+1 \end{cases}$

$2T(n-1)+1$

1ª =2T[2T(n-1) -1 +1]+1

=2^2T(n-1)-1 +1+1

2ª= 2^2T[2T(n-1)-1-1]+1+1

=2^3(n-1)-1-1+1+1+1

3ª= 2^3T[2T(n-1)-1-1-1+1]+1+1+1

=2^4(n +4(-1)) +4(1)

=2^k(n- k)+ k $\qquad$ 2^k=n, k =log n

= n(n – log n) + k

= n^2 - n *log n + log n

$\Theta(n^2)$

Questão 4

A técnica de divisão e conquista consiste em dividir o problema inicial em problemas menores, depois resolver os problemas menores, logo depois de resolvê-los combinar as soluções.

Questão 6

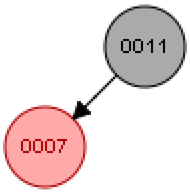
Primeiro o algoritmo escolhe um elemento que denomina pivô. Logo depois coloca os elementos menores que o pivô para a esquerda e os maiores para a direita. Recusivamente ordena a sublista dos valores menores e a sublista dos valores maiores.

Questão 7

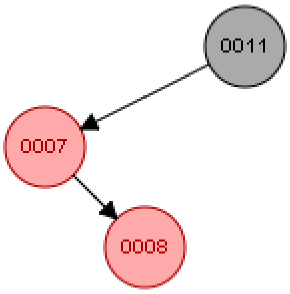
1- A raiz tem que ser preta;
2- Se um nó é vermelho, seus filhos têm que ser pretos;
3- Todo nó é vermelho ou preto;
4- Para cada nó, todos os caminhos do nó para folhas descendentes contém o mesmo número de nós pretos;
5- Toda folha é preta.

Inserir 11

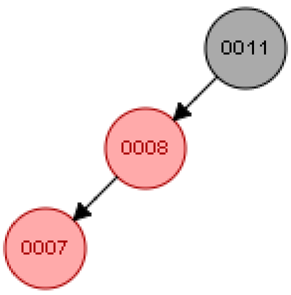
Inserir 7

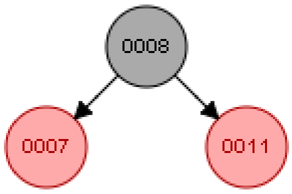


Inserir 8

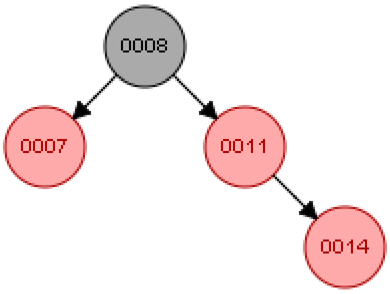


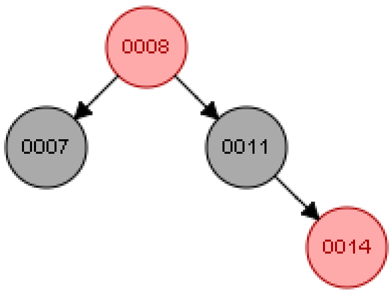
I

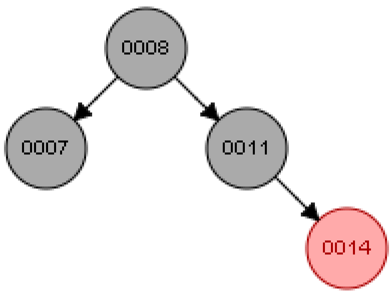




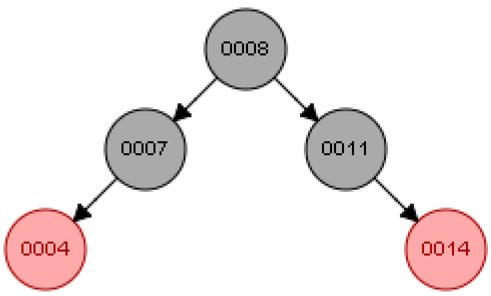
Inserir 14



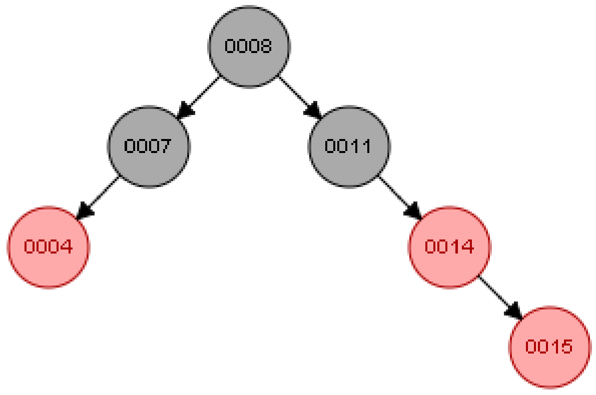


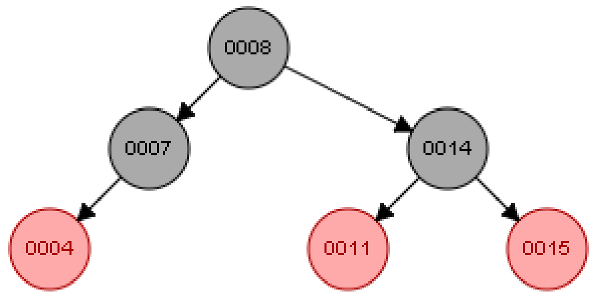


Inserir 4

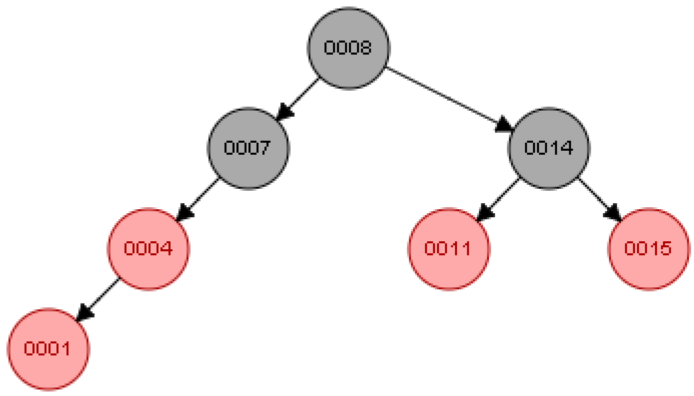


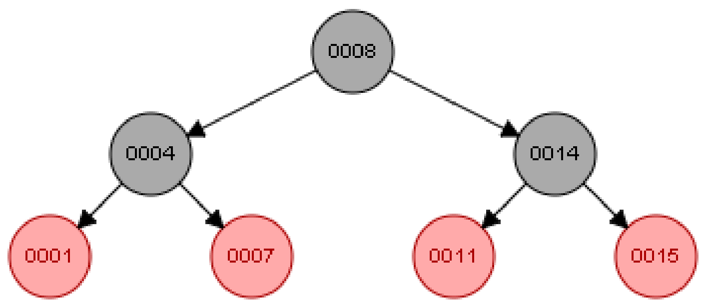
Inserir 15





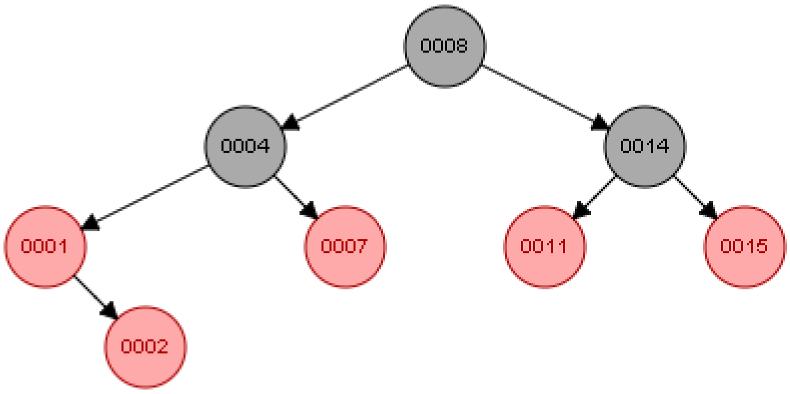
Inserir 1

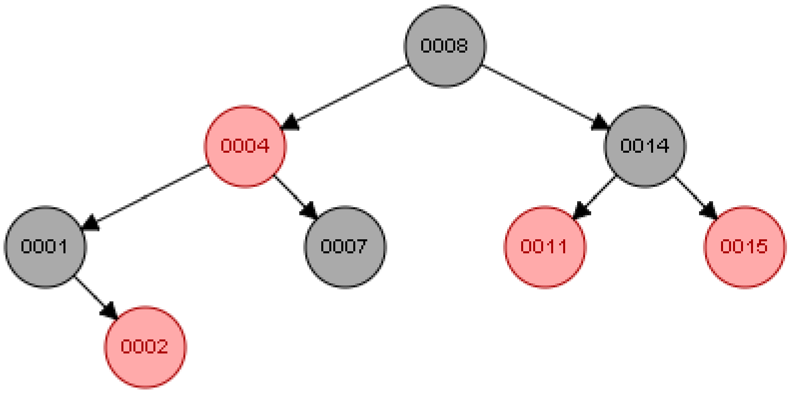




Inserir 2

t





Inserir 5