

# Численное интегрирование

27 апреля 2021 г.

## Аннотация

Численное интегрирование: методы прямоугольников, трапеций и Симпсона. Формула Ньютона-Котеса. Оценка погрешности. Интегрирование с помощью формул Гаусса.

## 1 Введение

Если функция  $f(x)$  задана аналитически (формулой) и ее первообразная  $F(x)$  является элементарной функцией, то определенный интеграл  $\int_a^b f(x)dx$  вычисляется по формуле Ньютона – Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

Существуют ситуации, когда этой формулой невозможно или затруднительно воспользоваться:

1. подынтегральная функция  $f(x)$  задана графически или таблично; тогда первообразная  $F(x)$  не существует;
2. подынтегральная функция  $f(x)$  задана аналитически, но интеграл  $\int f(x)dx$  *небериющийся*, т. е. не выражается в конечном виде через элементарные функции (известно, что многие важные интегралы, часто встречающиеся в практических приложениях, таковы, в качестве примера приведем  $\int e^{-x^2}dx$ ,  $\int \frac{\sin x}{x}dx$ ;
3. подынтегральная функция  $f(x)$  задана аналитически и интеграл  $\int f(x)dx$  *бериющийся*, но первообразная  $F(x)$  слишком громоздка (см. стр. 2 Лекции 3 по Интерполяции).

Во всех этих случаях приходится прибегать к приближенному, численному нахождению определенного интеграла. Для этого подынтегральную функцию  $f(x)$  заменяют другой, «близкой» к ней функцией, которая легко интегрируется.

## 2 Формула Ньютона-Котеса

В качестве функции, «близкой» к  $f(x)$ , возьмем интерполяционный полином Лагранжа  $L_m(x)$ , совпадающий с  $f(x)$  в узлах интерполяции  $x_0, x_1, \dots, x_m$ , лежащих на отрезке интегрирования  $[a, b]$ . Полином Лагранжа имеет вид

$$L_m(x) = \sum_{i=0}^m f(x_i) L_m^i(x), \quad m = 0, 1, \dots,$$

где  $L_m^i(x)$  — коэффициенты Лагранжа (полиномы степени  $m$ )

$$L_0^0(x) \equiv 1,$$

$$L_m^i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x - x_m)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdot \dots \cdot (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x_i - x_m)}.$$

Если полином Лагранжа «близок» к функции  $f(x)$ , то и интегралы от них тоже должны быть близки:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b L_m(x) dx = \sum_{i=0}^m f(x_i) \int_a^b L_m^i(x) dx.$$

**Замечание.** В случае численного дифференцирования, как мы знаем, такое рассуждение оказалось рискованным, но здесь оно вполне оправданно. Причина в том, что дифференцирование *ухудшает* свойства функции (производная дифференцируемой всюду функции может стать недифференцируемой в данной точке, производная непрерывной функции — разрывной функцией), а интегрирование, как обратная к дифференцированию операция, *улучшает* свойства функции.

Вводя так называемые коэффициенты Котеса (1682–1716)

$$c_m^i = \int_a^b L_m^i(x) dx.$$

получаем формулу Ньютона – Котеса порядка  $m$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_m(x)dx = \sum_{i=0}^m c_m^i f(x_i).$$

Она позволяет приближенно представить значение определенного интеграла в виде линейной комбинации значений подынтегральной функции в узлах интерполяции.

**Пример.** Вычислить коэффициенты Котеса  $c_1^0$  и  $c_1^1$ . **Решение.** Пусть значения функции  $f(x)$  заданы в двух узлах:  $x_0 = a$  и  $x_1 = b$ . В таком случае функцию можно аппроксимировать полиномом Лагранжа первой степени

$$\begin{aligned} f(x) &\approx L_1(x) = f(x_0)L_1^0(x) + f(x_1)L_1^1(x) = \\ &= f(x_0)\frac{x-x_1}{x_0-x_1} + f(x_1)\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = f(a)\frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{b-a}. \end{aligned}$$

Интеграл от аппроксимируемой функции

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx &\approx \frac{f(a)}{a-b} \int_a^b (x-b)dx + \frac{f(b)}{b-a} \int_a^b (x-a)dx = \\ &= f(a)\frac{b-a}{2} + f(b)\frac{b-a}{2} = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]. \end{aligned}$$

Отсюда получаем коэффициенты Котеса — весовые коэффициенты при значениях аппроксимируемой функции  $f(a)$  и  $f(b)$

$$c_1^0 = c_1^1 = \frac{b-a}{2}.$$

Отметим очевидный смысл последней формулы: определенный интеграл (геометрически равный площади криволинейной трапеции) в самом грубом приближении подсчитывается как площадь трапеции (рис. 1)

Итак, принципиально вычисление коэффициентов Котеса  $c_m^i$  несложно, но при больших  $m$  оно становится трудоемким. Впрочем, значения этих коэффициентов и не нужно вычислять, поскольку они табулированы. Пусть узлы интерполяции являются равноотстоящими с шагом  $h$

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + h, \quad x_2 = a + 2h, \quad \dots, \quad x_m = a + mh = b.$$

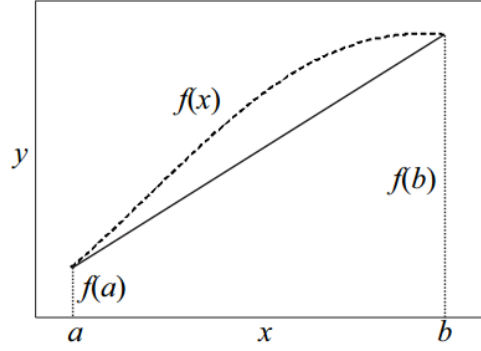


Рис. 1: Геометрическая иллюстрация простейшей формулы Ньютона – Котеса, основания трапеции — отрезки длиной  $f(a)$  и  $f(b)$ , высота трапеции ( $b-a$ )

$m$	Коэффициенты Котеса $c_m^i$			
1	$c_1^0 = c_1^1 = \frac{b-a}{2}$			
2	$c_2^0 = c_2^2 = \frac{b-a}{6}, \quad c_2^1 = \frac{4(b-a)}{6}$			
3	$c_3^0 = c_3^3 = \frac{b-a}{8}, \quad c_3^1 = c_3^2 = \frac{3(b-a)}{8}$			
4	$c_4^0 = c_4^4 = \frac{7(b-a)}{90}, \quad c_4^1 = c_4^3 = \frac{16(b-a)}{45}, \quad c_4^2 = \frac{2(b-a)}{15}$			
5	$c_5^0 = c_5^5 = \frac{19(b-a)}{288}, \quad c_5^1 = c_5^4 = \frac{25(b-a)}{96}, \quad c_5^2 = c_5^3 = \frac{25(b-a)}{144}$			
6	$c_6^0 = c_6^6 = \frac{41(b-a)}{840}, \quad c_6^1 = c_6^5 = \frac{9(b-a)}{35}, \quad c_6^2 = c_6^4 = \frac{9(b-a)}{280}, \quad c_6^3 = \frac{34(b-a)}{105}$			

Рис. 2: Коэффициенты Котеса  $c_m^i$  в случае равноотстоящих узлов

Приведем фрагмент таблицы коэффициентов Котеса  $c_m^i$  при  $m = 1, 2, \dots, 6$ .

Покажем, как пользоваться этой таблицей. Пусть функция  $f(x)$  задана в **трех** точках:  $a, b$  и в точке  $m = \frac{a+b}{2}$  — середине отрезка  $[a, b]$ . В таком случае, выбирая из строки  $m = 2$  коэффициенты Котеса  $c_2^0, c_2^1, c_2^2$ , запишем определенный интеграл в виде

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\approx c_2^0 f(a) + c_2^1 f(m) + c_2^2 f(b) = \\ &= \frac{b-a}{6} f(a) + \frac{4(b-a)}{6} f(m) + \frac{b-a}{6} f(b). \end{aligned}$$

По формуле Ньютона – Котеса, которая является приближенным способом интегрирования, вычисляют определенный интеграл с некоторой *погрешностью* (кроме очевидного случая, когда подынтегральная функция является полиномом степени меньшей, чем порядок формулы Ньютона – Котеса, но тогда эта формула не нужна). Погрешность  $R$  формулы Ньютона–Котеса — это модуль разности между точным значением интеграла и приближенным значением, получающимся при замене подынтегральной функции полиномом Лагранжа,

$$R_m = \left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b L_m(x)dx \right|.$$

Преобразуем это выражение и воспользуемся формулами оценки погрешности интерполяции

$$\begin{aligned} R_m &= \left| \int_a^b [f(x) - L_m(x)]dx \right| = \left| \int_a^b \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} (x-x_0) \cdot \dots \cdot (x-x_m) dx \right| \leq \\ &\leq \frac{M_{m+1}}{(m+1)!} \int_a^b |(x-x_0)(x-x_1) \cdot \dots \cdot (x-x_m)| dx. \end{aligned} \tag{1}$$

Напомним, что  $\xi \in [a, b]$ , — некоторая (неизвестная) точка отрезка интегрирования,  $M_{m+1} = \max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(\xi)|$ . Поскольку найти ее нелегко, практическое значение оценки (2) ограничено. Иногда применяют двойной пересчет интеграла с шагами  $h$  и  $h/2$  и *условно* считают, что совпадающие десятичные знаки двух результатов являются верными цифрами.

Формула (2) непрактична, но из нее можно получить полезные выводы. Огрубим формулу (2) еще больше, учитывая, что каждый из сомножителей вида  $|x - x_i|$  не превосходит  $(b - a)$  — длины отрезка интегрирования

$$R_m \leq \frac{M_{m+1}}{(m+1)!} \int_a^b (b-a)^{m+1} dx = \frac{M_{m+1}(b-a)^{m+2}}{(m+1)!}.$$

Отсюда видно, что уменьшения погрешности формулы Ньютона – Котеса можно достичь двояко: увеличением ее порядка  $m$  и (или) сужением отрезка интегрирования (если  $M_{m+1}$  изменяется с ростом  $m$  незначительно). Но первый путь малопривлекателен: формула Ньютона–Котеса при большом  $m$  становится громоздкой и неудобна для использования. Удобнее воспользоваться второй возможностью: отрезок интегрирования разбить на узкие участки, на каждом из которых даже формула Ньютона–Котеса небольшого порядка  $m$  обеспечит достаточную точность. Таким путем мы придем к известным формулам численного интегрирования — формулам прямоугольников, трапеций и Симпсона.

### 3 Формула прямоугольников

Разобьем отрезок интегрирования  $[a, b]$ , на  $n$  равных элементарных отрезков с шагом  $h = \frac{b-a}{n}$  точками  $a_0 = a, a_1 = a + h, a_2 = a + 2h, \dots, a_n = a + nh = b$ . На каждом элементарном отрезке  $[a_{k-1}, a_k]$ ,  $k = \overline{1, n}$ , аппроксимируем функцию  $f(x)$  полиномом Лагранжа *нулевой* степени по значению  $f(a_{k-1})$  на левом конце элементарного отрезка:

$$L_0(x) = f(a_{k-1}) = y_{k-1}.$$

Геометрически это означает замену криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком  $f(x)$ , ступенчатой фигурой (рис. 3). Эта фигура состоит из *прямоугольников* с основанием  $h$  и высотами  $y_i = f(a_i)$ ,  $i = \overline{0, n-1}$ . В таком случае интеграл  $\int_a^b f(x)dx$ , численно равный площади криволинейной трапеции, приближенно получается как сумма площадей прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx \approx y_0h + y_1h + \dots + y_{n-1}h = h(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}) = h \sum_{i=0}^{n-1} y_i. \quad (2)$$

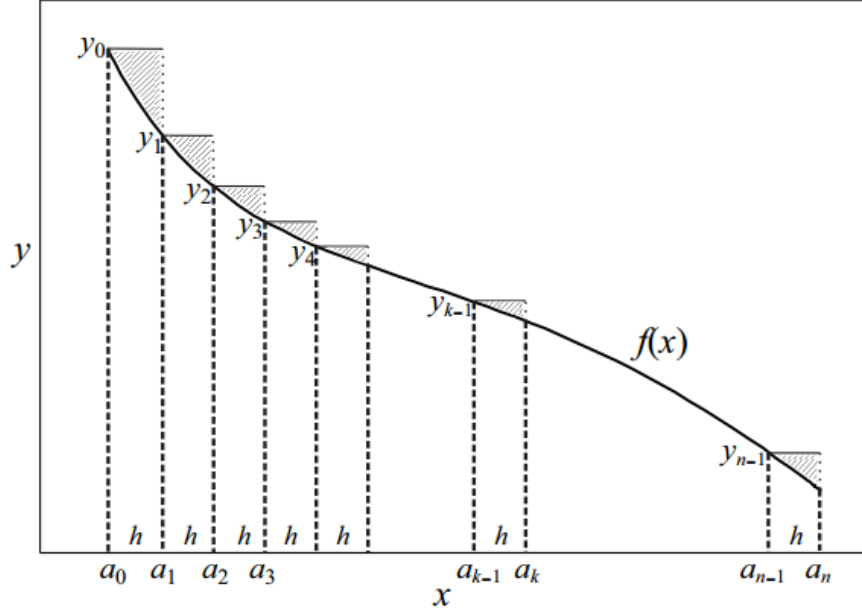


Рис. 3: Приближенное вычисление интеграла по формуле прямоугольников

Получена **формула прямоугольников** приближенного вычисления интегралов.

Из рис. 3 видно, что погрешность этой формулы должна быть велика (она определяется суммарной площадью заштрихованных фигур). Для оценки погрешности воспользуемся формулой (2). На одном элементарном отрезке  $[a_{k-1}, a_k]$

$$\begin{aligned} \left| \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x) dx - \int_{a_{k-1}}^{a_k} L_0(x) dx \right| &\leq \frac{M_1}{1!} \int_{a_{k-1}}^{a_k} |x - a_{k-1}| dx = \\ &= M_1 \frac{(x - a_{k-1})^2}{2} \Big|_{a_{k-1}}^{a_k} = \frac{M_1 h^2}{2}, \end{aligned}$$

где  $M_1 = \max_{[a,b]} |f'(\xi)|$ . Область интегрирования  $[a, b]$ , содержит  $n$  элементарных отрезков, поэтому результирующая погрешность формулы прямоугольников

$$R_0 \leq \frac{M_1 h^2}{2} n = \frac{M_1 h}{2} (b - a) = O(h), \quad (3)$$

где мы учли, что  $h = \frac{b-a}{n}$ . Итак, погрешность *линейно* зависит от шага  $h$

разбиения области интегрирования на элементарные отрезки. Заметим, что при *табличном* задании  $f(x)$  применить формулу (3), скорее всего, не удастся, поскольку значение  $M_1$  взять неоткуда.

## 4 Формула трапеций

По-прежнему будем делить отрезок интегрирования  $[a, b]$ , на  $n$  элементарных отрезков точками  $a_k = a + kh$ ,  $k = \overline{1, n}$  с шагом  $h = \frac{b-a}{n}$ . На каждом элементарном отрезке  $[a_{k-1}, a_k]$ , аппроксимируем функцию  $f(x)$  полиномом Лагранжа  $L_1(x)$  первой степени с узлами на концах отрезка в **двух** точках  $x_0 = a_{k-1}$ ,  $x_1 = a_k$ . Поскольку графиком полинома первой степени является прямая, геометрическое значение этой аппроксимации заключается в замене каждой дуги кривой  $[y_{k-1}, y_k]$  *хордой* (прямолинейным отрезком), стягивающей концы дуги. Уже здесь, не говоря о нижеследующей более точной формуле Симпсона, расхождение между графиком  $f(x)$  и аппроксимирующей линией (здесь это ломаная, состоящая из прямолинейных звеньев) столь мало, что построить наглядную иллюстрацию, подобную рис. 3, затруднительно. Рассмотрим только один элементарный отрезок, преувеличивая расхождение между линиями (рис. 4).

На элементарном отрезке  $[a_{k-1}, a_k]$ , построена трапеция площадью  $\frac{y_{k-1} + y_k}{2}h$ , и из таких трапеций складывается фигура, приближающая исходную криволинейную трапецию. В результате интеграл  $\int_a^b f(x)dx$  численно равен площади криволинейной трапеции, приближенно получается как сумма площадей трапеций:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\approx \frac{y_0 + y_1}{2}h + \frac{y_1 + y_2}{2}h + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2}h = \\ &= \frac{h}{2}(y_0 + 2(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}) + y_n). \end{aligned} \quad (4)$$

Получена **формула трапеций** приближенного вычисления интегралов.

Совокупность сегментов, подобных заштрихованному на рис. 4, определяет погрешность формулы трапеций. Для оценки погрешности вос-



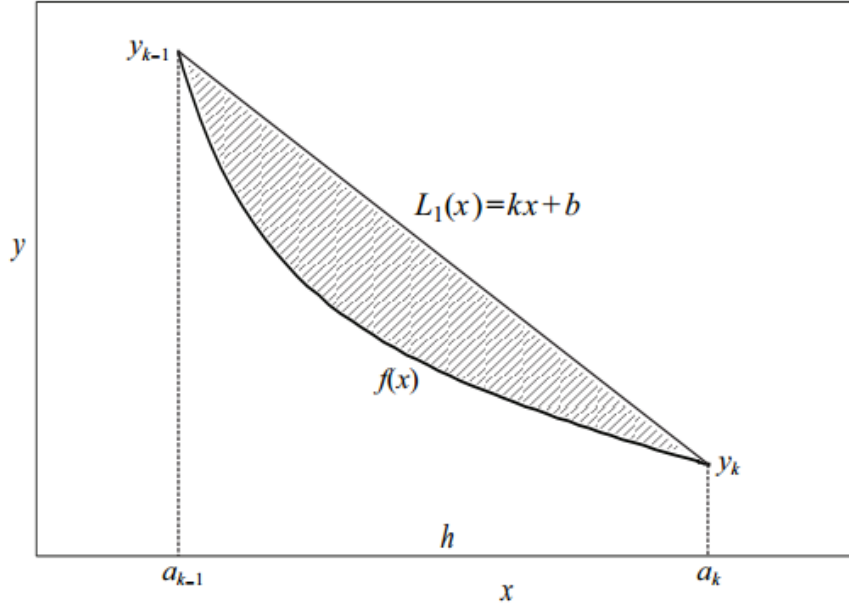


Рис. 4: Приближенное вычисление интеграла по формуле трапеций

пользуемся формулой (2). На одном элементарном отрезке  $[a_{k-1}, a_k]$

$$\begin{aligned} \left| \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)dx - \int_{a_{k-1}}^{a_k} L_1(x)dx \right| &\leq \frac{M_2}{2!} \int_{a_{k-1}}^{a_k} |(x - a_{k-1})(x - a_k)|dx = \\ &= \frac{M_2}{2!} \int_{a_{k-1}}^{a_k} |x^2 - x(a_{k-1} + a_k) + a_{k-1}a_k|dx = \frac{M_2 h^3}{12}, \end{aligned}$$

где  $M_2 = \max_{[a,b]} |f''(\xi)|$ . Область интегрирования  $[a, b]$ , содержит  $n$  элементарных отрезков, поэтому результирующая погрешность формулы трапеций

$$R_1 \leq \frac{M_2 h^3}{12} n = \frac{M_2 h^2}{12} (b - a) = O(h^2). \quad (5)$$

Итак, погрешность квадратично зависит от шага  $h$  разбиения области интегрирования на элементарные отрезки, а поскольку при возведении малого числа в квадрат оно уменьшается, то для формулы трапеций погрешность будет *меньше*, чем для формулы прямоугольников (сравните с формулой (3)).

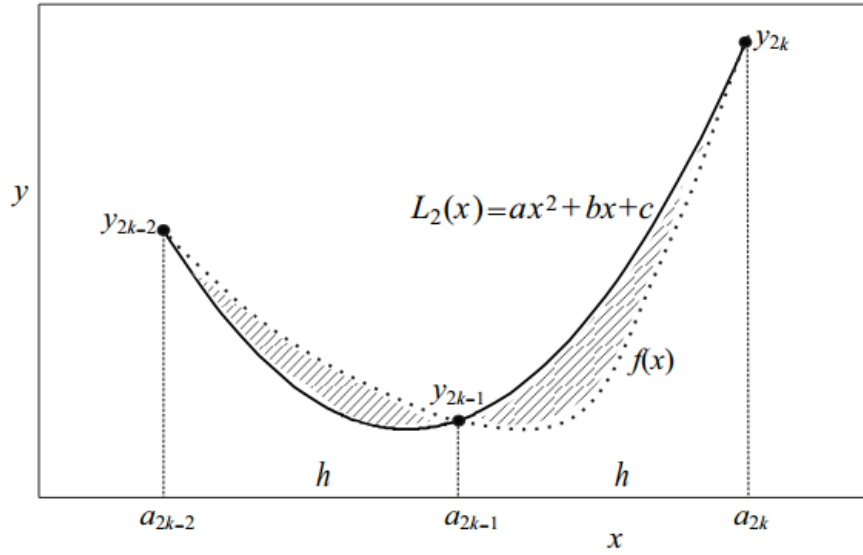


Рис. 5: Приближенное вычисление интеграла по формуле Симпсона

## 5 Формула Симпсона

Продолжим разбивать отрезок интегрирования  $[a, b]$  на  $n$  элементарных отрезков точками  $a_k = a + kh$ ,  $k = \overline{1, n}$  с шагом  $h = \frac{b-a}{n}$ , но теперь количество разбиений пусть будет *четным*:  $n = 2s$ , где  $s$  — целое число. Рассмотрим два смежных элементарных отрезка с тремя узлами  $a_{2k-2}, a_{2k-1}, a_{2k}$  (рис. 5). По значениям в трех узлах функция  $f(x)$  аппроксимируется полиномом Лагранжа второй степени  $L_2(x) = ax^2 + bx + c$ , графиком которого является парабола. Дуги парабол очень близки к графику  $f(x)$ , поэтому расхождение между ними (штрихованные области) на рис. 5 преувеличено. По формуле Ньютона — Котеса для отрезка  $[a_{2k-2}, a_{2k}]$ , беря коэффициенты Котеса из таблицы рис. 2 при  $m = 2$ , получим

$$\begin{aligned} \int_{a_{2k-2}}^{a_{2k}} f(x) dx &\approx \int_{a_{2k-2}}^{a_{2k}} L_2(x) dx = c_2^0 f(a_{2k-2}) + c_2^1 f(a_{2k-1}) + c_2^2 f(a_{2k}) = \quad (6) \\ &= \frac{2h}{6} y_{2k-2} + 4 \frac{2h}{6} y_{2k-1} + \frac{2h}{6} y_{2k} = \frac{h}{3} (y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}). \end{aligned}$$

Применяя формулу (5) к каждому отрезку  $[a_{2k-2}, a_{2k}]$ ,  $k = \overline{1, s}$ , полу-

чим

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_{a_0}^{a_2} f(x)dx + \int_{a_2}^{a_4} f(x)dx + \dots + \int_{a_{2s-2}}^{a_{2s}} f(x)dx \approx \\ &\approx \frac{h}{3}[(y_0 + 4y_1 + y_2) + (y_2 + 4y_3 + y_4) + \dots + (y_{2s-2} + 4y_{2s-1} + y_{2s})].\end{aligned}$$

Итак,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[(y_0 + y_{2s}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2s-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2s-1})]. \quad (7)$$

Получена **формула Симпсона** (1710–1761) приближенного вычисления определенного интеграла.

Оценим погрешность с помощью формулы (2). Для одного сдвоенного элементарного отрезка  $[a_{2k-2}, a_{2k}]$

$$\begin{aligned}&\left| \int_{a_{2k-2}}^{a_{2k}} f(x)dx - \int_{a_{2k-2}}^{a_{2k}} L_2(x)dx \right| \leq \\ &\leq \frac{M_3}{3!} \int_{a_{2k-2}}^{a_{2k}} |(x - a_{2k-2})(x - a_{2k-1})(x - a_{2k})|dx = \frac{M_3 h^4}{96},\end{aligned}$$

где  $M_3 = \max_{[a,b]} |f'''(\xi)|$ . Область интегрирования  $[a, b]$ , содержит  $n/2$  сдвоенных элементарных отрезков, поэтому результирующая погрешность формулы Симпсона

$$R_2 \leq \frac{M_3 h^4}{96} \frac{n}{2} = \frac{M_3 h^3}{192} (b - a) = O(h^3). \quad (8)$$

Формула Симпсона оказывается точнее формулы трапеций, не говоря уже о формуле прямоугольников. Понятно, что при табличном задании подынтегральной функции воспользоваться формулой (29) для оценки погрешности численного интегрирования практически нереально, поскольку значение  $M_3$  взять неоткуда.

## 6 Правило Рунге

Правило Рунге — правило оценки погрешности численных методов, было предложено К. Рунге в начале 20 века. Как следует из оценочных

формул погрешностей интегрирования (5) и (8), вычисление  $R_n$  возможно лишь тогда, когда подынтегральная функция задана аналитически, что не всегда известно. На практике широко применяется следующий эмпирический прием.

Искомый интеграл вычисляется дважды при делении отрезка  $[a, b]$  на  $n$  и на  $2n$  частей. Затем полученные значения интеграла (обозначим  $I(n)$  и  $I(2n)$ ) сравниваются и совпадающие первые десятичные знаки считаются верными. Можно получить выражения, позволяющие хотя бы грубо контролировать точность численного интегрирования на основе двойного счета с шагом  $h$  и  $2h$ :

$$\Delta_{2n} = I - I(2h) \approx \Theta |I(2h) - I(h)|,$$

где для формул прямоугольников и трапеций  $\Theta = \frac{1}{3}$  а для формулы Симпсона  $\Theta = \frac{1}{15}$ ;  $I = \int_a^b f(x)dx$  - точное значение интеграла,  $I(2h)$  - значение интеграла, посчитанного любым численным методом. Таким образом, интеграл вычисляется для последовательных значений числа шагов  $N = n_0, 2n_0, 4n_0, \dots$ , где  $n_0$  — начальное число шагов. Процесс вычислений заканчивается, когда для очередного значения  $N$  будет выполнено условие  $\Delta_{2n} < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — заданная точность.

## Задание к лабораторной работе №4

Функция  $y = f(x)$  задана аналитически по вариантам, заданы концы промежутка  $[a, b]$ .

- 0\* Найдите шаг интегрирования  $h$  для вычисления интеграла  $\int_a^b f(x)dx$  по формуле трапеций с точностью  $\epsilon = 0.001$ .
- 1 Вычислите интеграл по формуле прямоугольников с шагами  $2h$  и  $h$ . Если не выполнялся пункт 0 и шаг интегрирования не был найден, то использовать правило Рунге, задав начальное количество шагов  $n_0 = 10$ , необходимо достигнуть точность  $\epsilon = 0.001$  (аналогично для формулы трапеций и Симпсона).
- 2 Вычислите интеграл по формуле трапеций с шагами  $2h$  и  $h$ .
- 3 Вычислите интеграл по формуле Симпсона с шагами  $2h$  и  $h$ .

4\* Вычислите определенный интеграл аналитически (или с использованием онлайн-калькулятора). Сравните приближенные значения интеграла с точными. Какая формула численного интегрирования дала более точный результат?

*Доп. задание* Для функции  $f(x)$ , заданной таблично в пяти узлах  $x_i, i = 0, 1, 2, 3, 4$ , приближенно вычислить определенный интеграл на отрезке  $[x_0; x_4]$ , используя формулы Ньютона–Котеса, прямоугольников, трапеций и Симпсона.

№	Интеграл
1	$f(x) = x^4(1+x^2)^{-1}, \quad a=1, \quad b=2.$
2	$f(x) = x^2 e^{-2x}, \quad a=0, \quad b=1,6.$
3	$f(x) = x^{-0,5} \ln x, \quad a=1, \quad b=3.$
4	$f(x) = x \sin 3x, \quad a=0, \quad b=1.$
5	$f(x) = \sqrt{x+1} \lg(x+1) \quad a=0,1, \quad b=1,1.$
6	$f(x) = x^2 \ln x, \quad a=1, \quad b=2.$
7	$f(x) = x^2(x+1)^{-2}, \quad a=1, \quad b=4.$
8	$f(x) = x \cos 2x, \quad a=0, \quad b=1.$
9	$f(x) = x^2 \ln x, \quad a=1, \quad b=2.$
10	$f(x) = \sqrt{x} \ln x, \quad a=1, \quad b=4.$
11	$f(x) = x^3 / \sqrt{1-x^2}, \quad a=-0,5, \quad b=0,5.$
12	$f(x) = e^{-x} \cos x, \quad a=0, \quad b=2.$
13	$f(x) = \sqrt{x} / (x+1), \quad a=1, \quad b=4.$
14	$f(x) = e^{-\sqrt{x}}, \quad a=1, \quad b=4.$
15	$f(x) = x \arctg x, \quad a=0, \quad b=1.$
16	$f(x) = x \arccos x, \quad a=-0,5, \quad b=0,5.$
17	$f(x) = x \arcsin x, \quad a=0, \quad b=0,9.$
18	$f(x) = (x^3 + x)^{-1}, \quad a=1, \quad b=2,2.$
19	$f(x) = x 3^{-x}, \quad a=0, \quad b=1,5.$
20	$f(x) = x^2 e^{-x}, \quad a=0, \quad b=1.$
21	$f(x) = x^3 / (1+x^2), \quad a=0, \quad b=2.$
22	$f(x) = (x^2 + x)^{-1}, \quad a=1, \quad b=3.$
23	$f(x) = \sqrt{1+x^2}, \quad a=0, \quad b=1,8.$
24	$f(x) = x^2 \sin x, \quad a=0, \quad b=1.$
25	$f(x) = x \sin x, \quad a=0, \quad b=1,6.$
26	$f(x) = x^3 / \sqrt{x^2+1}, \quad a=-0,4, \quad b=0,8.$
27	$f(x) = x^2 \cos x, \quad a=0, \quad b=1.$
28	$f(x) = x 2^{-x}, \quad a=0, \quad b=2.$
29	$f(x) = e^x \sin x, \quad a=0, \quad b=1,2.$
30	$f(x) = x^2 \arctg x, \quad a=0, \quad b=1.$

Рис. 6: Варианты заданий для п. 0-4

<b>1.</b>	$x_i$	$y_i$	<b>2.</b>	$x_i$	$y_i$	<b>3.</b>	$x_i$	$y_i$
	1.25	4.828 35		13.5	4.905 83		0.145	4.976 74
	1.27	4.844 18		13.7	4.920 07		0.147	4.990 43
	1.29	4.859 89		13.9	4.934 59		0.149	5.003 91
	1.31	4.875 23		14.1	4.948 82		0.151	5.017 30
	1.33	4.863 31		14.3	4.965 71		0.153	5.032 07
<b>4.</b>	$x_i$	$y_i$	<b>5.</b>	$x_i$	$y_i$	<b>6.</b>	$x_i$	$y_i$
	0.451	0.435 87		0.724	0.900 00		0.349	0.341 96
	0.452	0.436 77		0.725	0.899 57		0.350	0.342 90
	0.453	0.437 66		0.726	0.899 14		0.351	0.343 84
	0.454	0.438 56		0.727	0.898 70		0.352	0.344 78
	0.455	0.439 45		0.728	0.898 25		0.353	0.344 88
<b>7.</b>	$x_i$	$y_i$	<b>8.</b>	$x_i$	$y_i$	<b>9.</b>	$x_i$	$y_i$
	0.725	0.663 14		0.251	0.248 37		0.341	2.192 80
	0.727	0.664 63		0.254	0.251 28		0.343	2.202 93
	0.729	0.666 12		0.257	0.254 18		0.345	2.213 09
	0.731	0.667 61		0.260	0.257 08		0.347	2.223 31
	0.733	0.667 69		0.263	0.257 18		0.349	2.233 47
<b>10.</b>	$x_i$	$y_i$	<b>11.</b>	$x_i$	$y_i$	<b>12.</b>	$x_i$	$y_i$
	0.112	1.294 19		0.119	1.315 22		0.441	2.760 58
	0.113	1.297 18		0.121	1.321 30		0.445	2.786 12
	0.114	1.300 17		0.123	1.327 30		0.449	2.811 90
	0.115	1.303 17		0.125	1.333 53		0.453	2.837 92
	0.116	1.306 16		0.127	1.339 70		0.457	2.862 26

Рис. 7: Варианты заданий для дополнительного задания