RANDOM VARIABEL

Haniah Mahmudah

Pendahuluan

Pada saat melakukan suatu percobaan acak biasanya orang tertarik untuk mengkuantifikasi hasil percobaan.

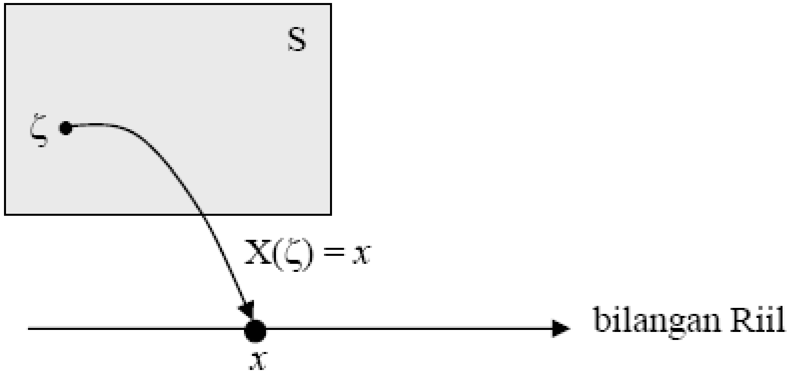
Contoh :

- Saat melakukan sampling populasi, kita ingin mengetahui berat (seseorang)
- Saat menguji kinerja dua komputer, kita ingin tahu kecepatan masing-masing komputer
- Saat mengenali pesawat musuh, kita ingin mengukur parameter yang berhubungan dengan bentuknya atau penampang lintang radar (RCS-Radar Cross Section).

Random Variables

Random Variabel X (RV) atau **Peubah acak X** :

suatu fungsi yang memetakan setiap hasil eksperimen ζ didalam ruang probabilitas (sampel space) ke suatu bilangan riil x=X(ζ) secara deterministik.



Contoh Random Variables

- Contoh: Mis *X*, bilangan jumlah dari *Muka (M)* pd pelemparan dua koin. Sample space *S* dari eksperimen adalah:

  $S = \{(BB),(BM),(MB),(MM)\}$

dimana *B* menunjukkan Belakang dan *M* menunjukan *Muka maka*

$$X \in \{0,1,2\}$$

Random Variables

- Suatu random variable *X* dikarakteristikan oleh salah satu:
  - probability density function (pdf): $f(x)$
  - cumulative density function (cdf): $F(x) = P\{X \le x\}$

Contoh: perhatikan random variable *X, yg* merupakan jumlah Muka (M) pd pelemparan dua coin

Ruang probabilitas S;{BB,BM,MB,MM}

Probabilitas density function (pdf):

- $f(x)$ diberikan dg $P[X = 0] = 0.25; P[X=1] = 0.5 ; P[X=2] = 0.25$

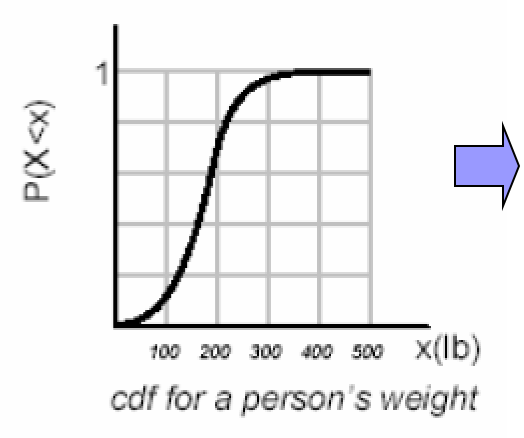
Cumulative density functin (cdf):

- $F(x)$ diberikan dg $F(x)=0 \quad x<0;$ $\quad F(x)=.25 \quad 0\le x<1;$ $\quad F(x)=.75 \quad 1\le x<2;$ $\quad F(x)=1 \quad x\ge 2;$

Cumulative Distribution Function (cdf)

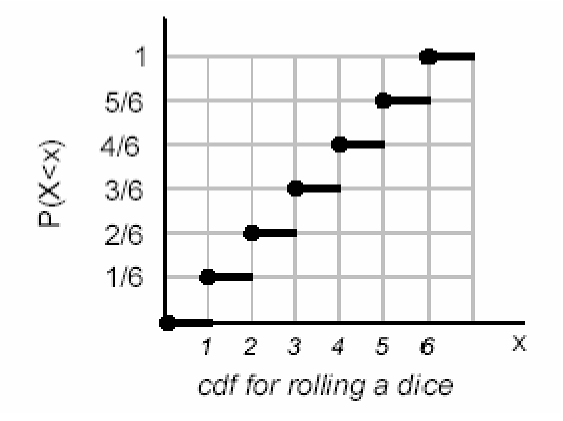
Fungsi distribusi kumulatif (cdf) FX(x) dari peubah acak X didefinisikan sebagai peluang dari kejadian {X≤x}

$$F_X(x) = P(X \leq x) \text{ untuk } -\infty < X < +\infty$$



Kontinyu

Diskrit



Cumulative Distribution Function (cdf)

Sifat-sifat cdf :

- $0 \le F_X(X) \le 1$
- $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$
- $\lim_{x\to 0} F_X(x) = 0$
- $F_X(a) \le F_X(b)$ jika $a \le b$
- $F_X(b) = \lim_{h\to 0} F_X(b+h) = F_X(b^+)$

$$P(a < X \le b) = F_x(b) - F_x(a)$$

$$P(X > a) \quad = 1 - F_x(a)$$

$$P(X < b) \quad = F_x(b^-) \qquad b^- = \lim_{0<\varepsilon\to 0} b - \varepsilon$$

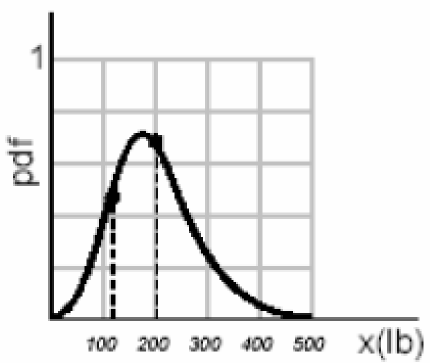
Probability Density Function

Probabilty density function (pdf) →fungsi kerapatan peluang dari peubah acak kontinyu X, jika ada, didefinisikan sebagai turunan dari fungsi distribusi peluang FX(x).

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \qquad (1)$$

Untuk peubah acak diskrit, fungsi yang ekivalen dengan pdf adalah probability mass function (pmf) fungsi distribusi massa

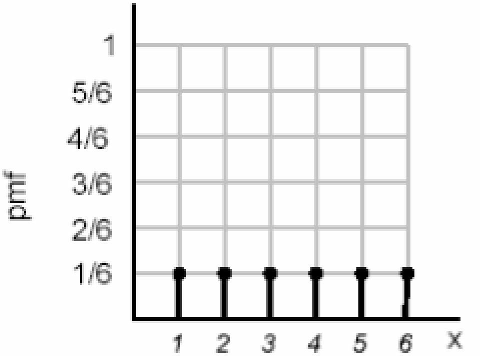
$$f_X(x) = \frac{\Delta F_X(x)}{\Delta x} \qquad (2)$$



pdf for a person's weight

Kontinyu

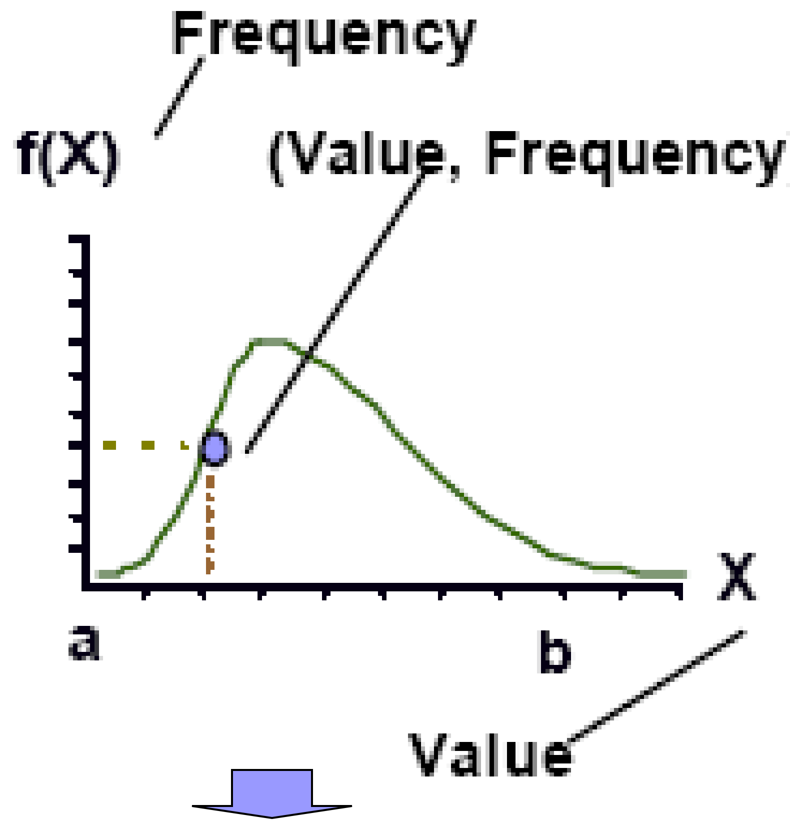
Diskrit



pmf for rolling a (fair) dice

Probability Density Function

- Memperlihatkan semua harga, *X*, & frekuensi, *f(X)*
  - *f(X)* adalah probability density function (pdf)
- Properties
  - Area di bawah kurva = 1
  - Mean (μ)
  - Standard Deviation (σ)



Pdf →Rapat Peluang bukan nilai Peluang

Probability Density Function

Properti Pdf :

$$f_x(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)\,dx = 1$$

$$f_x(x) \quad adalah \quad kontinyu$$

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f_x(x)dx$$

Cdf Fx(x) dari rv kontinyu X :

$$F_x(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(\zeta)\,d\zeta$$

Jika X adalah r.v kontinyu :

$$P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b)$$

$$= \int_a^b f_x(x)dx = F_x(b) - F_x(a)$$

Probability Mass Function (pmf)

Properti Pdf :

$$0 \le p_x(x_k) \le \quad k = 1,2,\ldots$$

$$p_x(x\ ) = 0 \qquad jika \quad x \ne x_k \left(k = 1,2,\ldots\right)$$

$$\sum_k p_x(x_k) = 1$$

Cdf Fx(x) dari rv diskrit X :

$$F_x(x) = P\left(X \le x\right) = \sum_{x_k \le x} p_x(x_k)$$

Tipe-Tipe Random Variables

- Suatu random variable *X* adalah suatu variable dimana harganya tergantung pd outcome dari suatu eksperimen random didefinisikan pd *sample space* S
  - Jika *S* adalah terbatas (finite) atau dp dihitung (countable) → *X* adalah suatu discrete random variable (mis., jumlah *Muka* pd pelemparan dua coin)
  - Jika *S* adalah kontinyu → *X* adalah suatu random variable kontinyu (mis., waktu antar queries ke suatu server database)

Tipe-Tipe Random Variables

- Jika *X* discrete random variables maka

$$f(x_i) = P\{X = x_i\}; \quad \text{and} \quad \sum_{x_i \in S} f(x_i) = 1$$

$$F(x_i) = P\{X \le x_i\} = \sum_{x_j \in S}^{x_i} P\{X = x_j\}$$

- Jika *X* continuous random variables maka

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(v)dv$$

$$P\{a \le X \le b\} = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(v)dv$$

Karakterisasi Random Variables

1. Ekspektasi (mean) : menyatakan pusat massa dari suatu kerapatan

$$\mu_x = E(X) = \begin{cases} \sum_k x_k p_k(x_k) & \text{X : diskrit} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x) dx & \text{X : kontinyu} \end{cases}$$

2. Variance : sebaran disekitar rata-rata

$$VAR(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$$

$$\sigma_x^{\ 2} = \begin{cases} \sum_k \left(x_k - \mu_x\right)^2 p_x(x_k) & \text{X : diskrit} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \mu_x\right)^2 f_x(x) dx & \text{X : kontinyu} \end{cases}$$

Karakterisasi Random Variables

3. Moment

$$E(x^n) = \begin{cases} \sum_k x_k{}^n p_x(x_k) & \text{X : diskrit} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_x(x)dx & \text{X : kontinyu} \end{cases}$$

Contoh Soal

Ekperimen pelemparan 3 koin dengan X adalah r.v. jumlah muka (M) yang keluar.Asumsikan bahwa pelemparan independent dan probabilitas muka (M) adalah p

a. Berapa range dari X ?
b. Berapa probabilitas P(X=0), P(X=1), P(X=2) dan P(X=3)

Solusi :

Ruang probabilitas {MMM, MMB,…,BBB} → 8 (buat dan diagram pohon)

a. Range dari X adalah Rx={0,1,2,3}

b. Jika P(M)=p maka P(B) = 1-p

   maka $P(X=0)= P[BBB] = (1-p)^3$
   $P(X=1)=P[MBB]+P[BMB]+P[BBM] = 3p(1-p)^2$
   $P(X=2)=P[MMB]+P[MBM]+P[BMM] = 3p^2(1-p)$
   $P(X=3)= P[MMM]= p^3$

Contoh Soal

Random variable *X* menyatakan event dari suatu eksperimant dari pelemparan 4 kali koin. A adalah hasil event 2M dan 2B maka probabilitas dari A dinyatakan X=2

P(A) = P(X = 2) = 6/16

Distribusi probabbiltas dari random variable X

x	P(X = x)=p(x)
0	1/16
1	4/16 = 1/4
2	6/16 = 3/8
3	4/16 = 1/4
4	1/16

$$\sum_{x=0}^{4} P(X = x) = 1$$

P(X = x) = 0 untuk $x \neq 0, 1, 2, 3, 4$.

Total probabilitas :
1/16+4/16+6/16+4/16+1/16 = 1

Terimakasih