ALJABAR SET & AKSIOMA PROBABILITAS

Pokok Bahasan

- Sample Space
- Event
- Aljabar Set
- Prinsip dan Aksioma Probabilitas
- Equally Likely Event
- Conditional Probability
- Independent Event

Sample Space dan Event

- Eksperimen Random:
  - Dlm studi probabilitas, sembarang proses observasi dikatakan sbg suatu *eksperimen*
  - Hasil suatu observasi disebut *outcome* dari eksperimen
  - Suatu eksperimen disebut *eksperimen random* jika outcome-nya tidak dapat diprediksi
  - Contoh tipikal dari eksperimen random adalah melempar dadu, toss coin, mengambil kartu dari tumpukan kartu, dll.

- Sample Space:
  - Set dari semua outcome yg mungkin dari suatu eksperimen random disebut *sample space* (atau set universal), dinyatakan dg ***S***
  - Suatu elemen pd ***S*** disebut *sample point*
  - Tiap outcome dari suatu eksperimen random berkorespondensi dg satu sample point

Sample Space dan Event

- Contoh 1

Cari *sample space* utk eksperimen tossing coin

(a) satu kali (b) dua kali

Jawab:

(a) Ada dua kemungkinan outcomes, *head(H)* atau *tail(T)*

$$\boldsymbol{S} = \{H, T)$$

(b) Ada empat kemungkinan *outcome*, merupakan pasangan *head* dan *tail*

$$\boldsymbol{S} = (HH, HT, TH, TT)$$

Sample Space dan Event

- Contoh 2

  Cari *sample space* utk eksperimen tossing coin secara berulang dan menghitung jumlah toss diperlukan sd pertama kali *head* muncul

  Semua kemungkinan dari *outcome*: 1,2,3, ...

  $\boldsymbol{S} = (1, 2, 3, . . .)$

  → Jumlah outcomes tak hingga (*infinite*)

- Contoh 3

  Cari *sample space* dari eksperimen mengukur (dlm jam) umur suatu transistor

  Semua kemungkinan dari *outcome*: semua bil real non-negative

  $\boldsymbol{S} = (\tau : 0 \leq \tau \leq \infty \}$

  dimana τ merepresentasikan umur transistor dlm jam

Sample Space dan Event

- Suatu eksperimen tertentu dapat mempunyai banyak *sample space* berbeda tergantung pd observasi yg menjadi perhatian
- Suatu *sample space* ***S*** dikatakan diskrit jika berisi sejumlah terbatas *sample point* atau *sample point* tak hingga yg dp dihitung (*countable*)
- Satu set dikatakan *countable* jika elemen-elemennya dp ditempatkan dlm korespondensi satu-satu dg integer positif
- Suatu *sample space* ***S*** dikatakan kontinyu jika sample point kotinyu

Event

- Jika ξ adalah suatu elemen dari ***S***, maka ditulis

$$\zeta \in S$$

- Jika ***S*** bukan elemen dari ***S***, maka ditulis

$$\zeta \notin S$$

- Satu set ***A*** disebut subset dari ***B***, dinyatakan dg

$$A \subset B$$

  jika setiap elemen dari ***A*** juga elemen dari ***B***

- Sembarang subset dari *sample space* ***S*** disebut event
- Satu *sample point* dari ***S*** disebut *elementary event*
- Cat. *sample space* ***S*** adalah subset dari dirinya sendiri, yaitu ***S*** ⊂ ***S***
- Krn ***S*** adalah set dari semua *outcome* yg mungkin, biasa disebut: *certain event*

Event

- Contoh 4

  Perhatikan contoh 2. Mis. ***A*** adalah event jumlah toss diperlukan sampai *head* pertama muncul adalah genap.

  Mis. ***B*** adalah event jumlah toss diperlukan sampai *head* pertama muncul adalah ganjil.

  Mis. ***C*** adalah event sampai jumlah toss diperlukan sampai *head* pertama muncul adalah lebih kecil drpd 5

$$A = \{2, 4, 6, \ldots\}$$
$$B = \{1, 3, 5, \ldots\}$$
$$C = \{1, 2, 3, 4\}$$

Aljabar Set

Operasi Set:

1. Equality:

Dua set ***A*** dan ***B*** adalah sama (equal), dinyatakan dg ***A*** = ***B***, jika dan hanya jika ***A*** $\subset$ ***B*** dan ***B*** $\subset$ ***A***

2. Complementation :

Misalkan ***A*** $\subset$ ***S***. Complement dari set ***A***, dinyatakan sbg $\bar{\mathbf{A}}$*, adalah* set berisi semua elemen di ***S*** tetapi tidak di ***A***.

$$\bar{A} = \{\zeta : \zeta \in S \text{ and } \zeta \notin A\}$$

3. Union:

Union dari set ***A*** dan ***B***, dinyatakan sbg ***A*** $\cup$ ***B***, adalah set berisi semua element di ***A*** atau ***B*** atau keduanya

$$A \cup B = \{\zeta : \zeta \in A \text{ or } \zeta \in B\}$$

Aljabar Set

4. Intersection:

Intersection dari set ***A*** dan ***B***, dinyatakan dg ***A*** $\cap$ ***B***, adalah set berisi semua elemen baik di ***A*** dan ***B***

$$A \cap B = \{\zeta : \zeta \in A \text{ and } \zeta \in B\}$$

5. Null Set:

Set yg tidak berisi elemen disebut sbg *null* set, dinyatakan dg $\varnothing$*.* Catat bahwa

$$\varnothing = \bar{S}$$

6. Disjoint Set:

Dua set ***A*** dan ***B*** disebut *disjoint* atau *mutually exclusive* jika mereka tidak memuat common elemen, yaitu jika, ***A*** $\cap$ ***B*** = *0.*

Aljabar Set

- Definisi union dan intersection dari dua set dp diperluas ke sembarang jumlah set sbb:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$
$$= \{\zeta : \zeta \in A_1 \text{ or } \zeta \in A_2 \text{ or } \cdots \zeta \in A_n\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$
$$= \{\zeta : \zeta \in A_1 \text{ and } \zeta \in A_2 \text{ and } \cdots \zeta \in A_n\}$$

Note that these definitions can be extended to an infinite number of sets:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots$$

Aljabar Set

In our definition of event, we state that every subset of S is an event, including S and the null set $\varnothing$. Then

$$S = \text{the certain event}$$
$$\varnothing = \text{the impossible event}$$

If A and B are events in S, then

$$\bar{A} = \text{the event that } A \text{ did not occur}$$
$$A \cup B = \text{the event that either } A \text{ or } B \text{ or both occurred}$$
$$A \cap B = \text{the event that both } A \text{ and } B \text{ occurred}$$

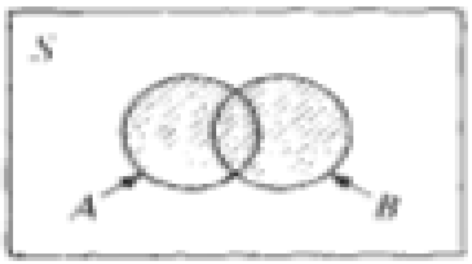
Similarly, if $A_1, A_2, \ldots, A_n$ are a sequence of events in S, then

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \text{the event that at least one of the } A_i \text{ occurred;}$$
$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \text{the event that all of the } A_i \text{ occurred.}$$

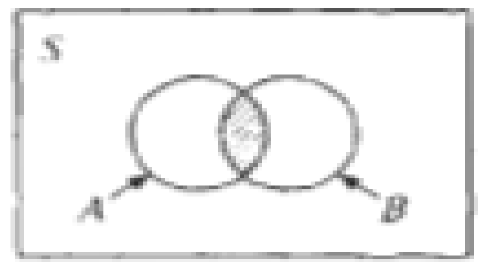
Aljabar Set

- Diagram Venn

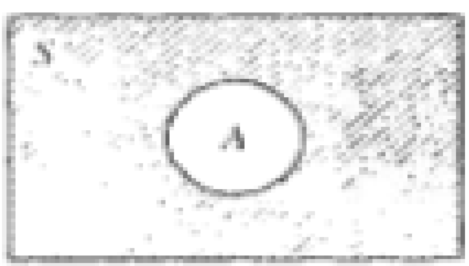
  Representasi grafis yg sangat berguna utk ilustrasi operasi



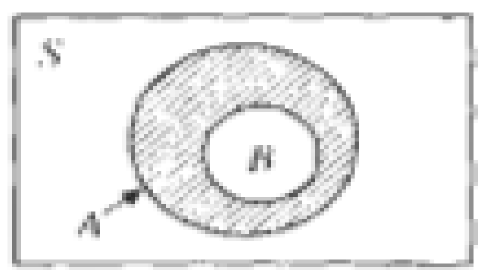
(a) Shaded region: $A \cup B$



(b) Shaded region: $A \cap B$



(c) Shaded region: $\overline{A}$



$B \subset A$

Shaded region: $A \cap \overline{B}$

Aljabar Set

- Identities

  Dari definisi set di atas diperoleh:

$$\bar{S} = \varnothing$$

$$\bar{\varnothing} = S$$

$$\bar{\bar{A}} = A$$

$$S \cup A = S$$

$$S \cap A = A$$

$$A \cup \bar{A} = S$$

$$A \cap \bar{A} = \varnothing$$

Aljabar Set

- Operasi *union* dan *intersection* juga memenuhi hukum berikut:

Commutative Laws:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

Associative Laws:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Aljabar Set

Distributive Laws:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

De Morgan's Laws:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Prinsip dan Aksioma Probabilitas

- Pengalokasian bil real thd event pd sample space ***S*** disebut sbg ukuran probabilitas

- **Definisi Frekuensi Relatif:**

  Misal suatu eksperimen random diulang ***n*** kali. Jika event ***A*** muncul ***n(A)*** kali, maka probabilitas event ***A***, dinyatakan ***P(A),*** didefiniskan sbg

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n}$$

  Dimana ***n(A)/n*** adalah frekuensi relatif dari event ***A***

Prinsip dan Aksioma Probabilitas

- Utk sembarang event ***A,*** frekuensi relatif dari ***A*** memp. sifat:
  1. $0 \leq n(A)/n \leq 1$ **,** dimana $n(A)/n = 0$ jika ***A*** tidak muncul dlm n kali percobaan dan $n(A)/n = 1$ jika ***A*** muncul utk setiap dari n percobaan
  2. Jika ***A*** dan ***B*** event yg mutually exclusive events, maka

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

dan

$$\frac{n(A \cup B)}{n} = \frac{n(A)}{n} + \frac{n(B)}{n}$$

Prinsip dan Aksioma Probabilitas

- **Definisi Axiomatic:**

  Mis. ***S*** adalah *sample space* terbatas (*finite*) dan ***A*** suatu event pd ***S***. maka definisi ***axiomatic:*** probabilitas ***P(A)*** dari event ***A*** adalah suatu bilangan real dialokasikan ke ***A*** yg memenuhi tiga ***axioma*** :

  Axiom 1: $P(A) \geq 0$

  Axiom 2: $P(S) = 1$

  Axiom 3: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \text{if } A \cap B = \varnothing$

  Jika *sample space* **S** tidak *finite*, axioma 3 harus dimodifikasi:

Axiom 3′: If $A_1, A_2, \ldots$ is an infinite sequence of mutually exclusive events in S ($A_i \cap A_j = \varnothing$ for $i \neq j$), then

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Prinsip dan Aksioma Probabilitas

- Elementary Properties dari Probabilitas:

1. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
2. $P(\varnothing) = 0$
3. $P(A) \leq P(B) \qquad \text{if } A \subset B$
4. $P(A) \leq 1$
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
6. If $A_1, A_2, \ldots, A_n$ are n arbitrary events in S, then

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i \neq j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i \neq j \neq k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$$

where the sum of the second term is over all distinct pairs of events, that of the third term is over all distinct triples of events, and so forth.

Prinsip dan Aksioma Probabilitas

7. If $A_1, A_2, \ldots, A_n$ is a finite sequence of mutually exclusive events in S ($A_i \cap A_j = \varnothing$ for $i \neq j$), then

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

and a similar equality holds for any subcollection of the events.

Note that property 4 can be easily derived from axiom 2 and property 3. Since $A \subset S$, we have

$$P(A) \leq P(S) = 1$$

Thus, combining with axiom 1, we obtain

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Property 5 implies that

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

since $P(A \cap B) \geq 0$ by axiom 1.

Equally Likely Events

- Finite Sample Space:

Perhatikan suatu finite sample space ***S*** dg *n* elemen terbatas

$$S = \{\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n\}$$

dimana ξ_i adalah event elementer. Misalkan $P(\xi_i) = \boldsymbol{p}_i$, maka

1. $0 \le p_i \le 1 \qquad i = 1, 2, \ldots, n$
2. $\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$
3. If $A = \bigcup_{i \in I} \zeta_i$, where I is a collection of subscripts, then

$$P(A) = \sum_{\zeta_i \in A} P(\zeta_i) = \sum_{i \in I} p_i$$

Equally Likely Events

- Equally Likely Events:

  Jika semua event elementer ξ_i adalah (i = 1, 2, 3, … n) adalah equally likely, yaitu:

  $$p_1 = p_2 = \ldots = p_n$$

  maka

  $$p_i = \frac{1}{n} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

  $$P(A) = \frac{n(A)}{n}$$

  dimana *n(A)* jumlah outcomes event ***A*** dan n jumlah *sample points* pd ***S***

Conditional Probability

- Definisi

  Conditional probability dari suatu event ***A*** diberikan event ***B***, dinyatakan dg ***P(A I B)****,* didefiniskan sbg

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad P(B) > 0$$

dimana ***P(A*** $\cap$ ***B)*** adalah *joint probability* dari ***A*** dan ***B***. Serupa,

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \qquad P(A) > 0$$

adalah *conditional probability* dari event ***B*** diberikan event ***A***. dari dua persamaan di atas didapat

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B) = P(B \mid A)P(A)$$

Conditional Probability

- Bayes's Rule

  Dari pers-pers di atas didp Bayes rule

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)}$$

Total Probability

- Event $A_1, A_2, \ldots, A_n$, disebut mutually exclusive dan exhaustive jika

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = S \qquad \text{and} \qquad A_i \cap A_j = \varnothing \qquad i \neq j$$

- Mis. ***B*** sembarang event pd ***S*** maka

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i)P(A_i)$$

- Yg dikenal sbg *total probability* dari event ***B***. Mis. $A = A_i$, maka

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i)P(A_i)}$$

→ Bayes Theorem

Independent Events

- Dua event ***A*** dan ***B*** dikatakan independen (secara statistik) jika dan hanya jika

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

- Jika ***A*** dan ***B*** independen, maka

$$P(A \mid B) = P(A) \qquad \text{and} \qquad P(B \mid A) = P(B)$$

- Jika dua event ***A*** dand ***B*** independen, maka dp diperlihatkan bahwa ***A*** dan $\bar{B}$ juga independen

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A)P(\bar{B})$$

$$P(A \mid \bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = P(A)$$

Jadi, jika ***A*** independen thd ***B***, maka probabilitas ***A*** muncul tdk berubah thd informasi apakah ***B*** telah atau tidak muncul

Independent Events

- Tiga event ***A, B, C*** dikatakan independen jika dan hanya jika

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$
$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$
$$P(A \cap C) = P(A)P(C)$$
$$P(B \cap C) = P(B)P(C)$$

- Dp diperluas utk event $A_1, A_2, \ldots, A_n$ independen jika dan hanya jika utk setiap subset ($A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{ik}$) ($2 \leq k \leq n$) dari event-event ini

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k})$$

- Set tak hingga dari event independent jika dan hanya jika utk setiap subset terbatas dari event-event ini independent

1. Jika $\{\boldsymbol{A_i}, i = 1,2, \ldots, n\}$ adalah deretan event mutual exclusive, maka

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

2. Jika $\{\boldsymbol{A_i}, i = 1,2, \ldots, n\}$ adalah deretan event independen, maka

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Terima Kasih