BAYES & DISTRIBUSI PROBABILITAS

Haniah Mahmudah

- POKOK BAHASAN
  A. Dalil bayes
  B. Distribusi probabilitas

- A. Dalil Bayes
  1. Probabilitas Bersyarat

  - Probabilitas B bersyarat A ditulis P(B|A)

  - Kita mencari di syarat A untuk menemukan berapa probabilitas B di situ

  Kita lihat suatu contoh

	Mahasiswa (M)	Siswa (S)	Jumlah
Pria (P)	460	40	500
Wanita (W)	140	260	400
Jumlah	600	300	900

  - Probabilitas wanita bersyarat mahasiswa P(W|M). Kita lihat ke syarat mahasiswa (prob 600 / 900) dan melihat berapa wanita di situ (prob 140 / 900) sehingga

$$P(W|M) = (140 / 900) / (600 / 900) = 0,77$$

$$P(W \mid M) = \frac{probabilitas\ (wanita - mahasiswa)}{probabilitas\ (mahasiswa)}$$

$$= \frac{\frac{140}{900}}{\frac{600}{900}} = \frac{460}{900} = 0{,}77$$

$$P(W \mid M) = \frac{P(W \cap M)}{P(M)}$$

Rumus umum probabilitas bersyarat

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

$$P(B \cap A) = P(B \mid A) \bullet P(A)$$

Contoh 33

Diketahui probabilitas suami menonton TV adalah 0,4, probabilitas istri menonton TV adalah 0,5, serta probabilitas suami menontoh TV bersyarat istri menonton TV adalah 0,7

Dari data ini, jika suami adalah S dan istri adalah I maka

$P(S) = 0,4 \qquad P(I) = 0,5 \qquad P(S|I) = 0,7$

- Probabilitas istri bersama suami menonton TV adalah

$P(S \cap I) = P(I).P(S|I) = (0,5)(0,7) = 0,35$

- Probabilitas istri menonton TV bersyarat suami menonton TV

$P(I|S) = P(S \cap I) / P(S) = 0,35 / 0,4 = 0,875$

Contoh 34

Pemilihan gubernur diikuti oleh tiga calon B_1, B_2, dan B_3. Setiap calon mungkin menaikkan pajak penjualan A.

- Probabilitas B_1 terpilih adalah 0,60 dan probabilitas untuk menaikkan pajak penjualan A adalah 0,90
- Probabilitas B_2 terpilih adalah 0,20 dan probabilitas untuk menaikkan pajak penjualan adalah 0,50
- Probabilitas B_3 terpilih adalah 0,20 dan probabilitas untuk menaikkan pajak penjualan adalah 0,05

Probabilitas pajak penjualan dinaikkan adalah apabila B_1 terpilih atau B_2 terpilih atau B_3 terpilih

- $P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3)$
  $=$

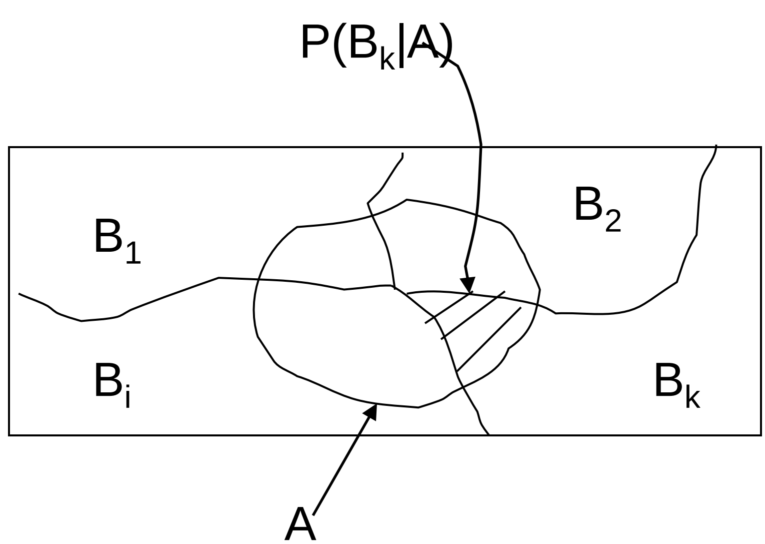
2. Dalil Bayes

Dalil Bayes berkaitan dengan banyak komponen, misalnya, komponen

B_1, $B_{2,}$, B_3, . . .

Komponen ini mengalami peristiwa A

Dalil Bayes berkenaan dengan berapa besar probabilitas suatu komponen B (misalnya B_k) bersyarat A yakni berapa besar $P(B_k|A)$



Dalil Bayes

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(B_k \cap A)}{\sum P(B_i \cap A)}$$

$$= \frac{P(B_k)P(A \mid B_k)}{\sum P(B_i)P(A \mid B_i)}$$

Contoh 35

Bola merah, putih, dan biru di dalam kotak 1, 2, dan 3

	kotak			jumlah
	1	2	3	
merah	2	4	3	9
putih	3	1	4	8
biru	5	3	3	11
jumlah	10	8	10	28

Berapa probabilitas bola merah dari kotak 3

Di sini B_k = bola merah

A = kotak 3

P(bola merah) = 9 / 28

P(bola putih) = 8 / 28

P(bola biru) = 11 / 28

P(kotak 3|bola merah) = 3 / 28

P(kotak 3|bola putih) = 4 / 28

P(kotak 3|bola biru) = 3 / 28

$P(B_k)\ P(A|B_k)$ = P(bola merah) P(kotak 3|bola merah)

= (9 / 28) (3 / 28) = 27 / (28)(28)

$\Sigma\ P(B_i)\ P(A|B_i)$ = (9 / 28)(3 / 28) + (8 / 28)(4 / 28)

+ (11 / 28)(3 / 28)

= 92 / (28)(28)

$P(B_k|A)$ = P(bola merah|kotak 3)

= (27 / (28)(28))/ (92 / (28)(28)) = 0,29

Contoh 36

Produksi semacam barang

- berasal dari mesin I (B_1) sebesar 50% dengan probabilitas cacat (A) 0,4%
- Berasal dari mesin II (B_2) sebesar 30% dengan probabilitas cacat (A) 0,6%
- Berasal dari mesin III (B_3) sebesar 20% dengan probabilitas cacat (A) 1,2%

Probabilitas satu barang cacat berasal dari mesin I adalah

- $P(B_1|A) =$

B. Distribusi Probabilitas

1. Jumlah Probabilitas

- Semua probabilitas dari semua peristiwa dijumlahkan

$$\begin{aligned} P(X_1)+P(X_2)+P(X_3)+\ldots &= \frac{n_1}{N}+\frac{n_2}{N}+\frac{n_3}{N}+\ldots \\ &= \frac{n_1+n_2+n_3+\ldots}{N} \\ &= \frac{N}{N} \\ &= 1 \end{aligned}$$

- Ini berarti bahwa 1 itu dibagi-bagikan atau didistribusikan ke semua X sehingga terjadilah distribusi probabilitas

Contoh 37

Lemparan 2 koin untuk probabilitas banyaknya sisi muka yang keluar

Dari contoh 12

P(0 muka)	=	0,25
P(1 muka)	=	0,50
P(2 muka)	=	0,25
Jumlah		1,00

Contoh 38

Lemparan 3 koin pada contoh diagram pohon

Probabilitas 0 kali muka	P(0) = 0,125
Probabilitas 1 kali muka	P(1) = 0,375
Probabilitas 2 kali muka	P(2) = 0,375
Probabilitas 3 kali muka	P(3) = 0,125
Jumlah	1,000

Contoh 39

Hasil ujian menghasilkan nilai ujian (hasil cobaan) berbentuk distribusi probabilitas sebagai berikut

Nilai ujian X	Frek f	Probabilitas
4	3	0,06
5	5	0,10
6	10	0,20
7	15	0,30
8	11	0,22
9	6	0,12
	50	1,00

2. Fungsi Densitas

- Probabilitas dari semua peristiwa membentuk fungsi dan dikenal sebagai fungsi densitas

- Fungsi densitas adalah densitas (kerapatan) yang diakibatkan pembagian (pendistribusian) probabilitas 1 ke semua peristiwa

- Fungsi densitas dapat disajikan dalam beberapa bentuk

  Bentuk tabel
  Bentuk grafik
  Bentuk rumus

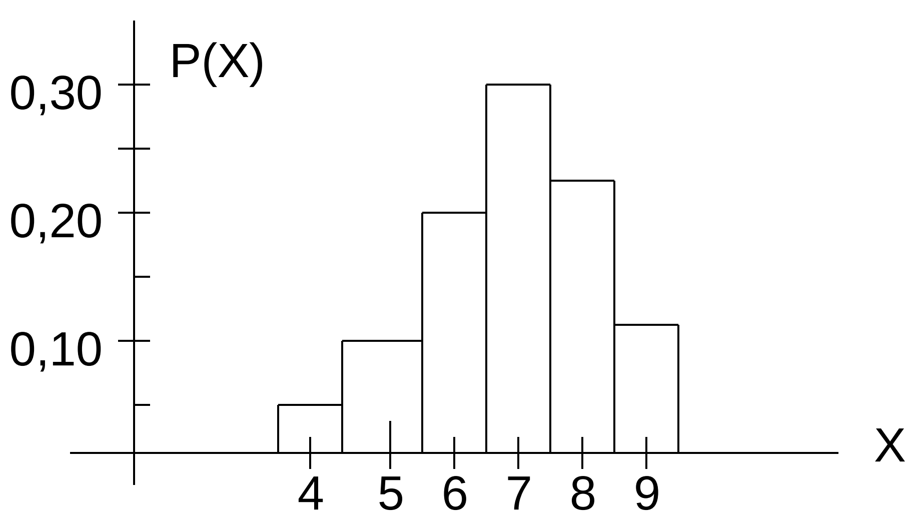
- Bentuk tabel untuk membaca bilangan, bentuk grafik untuk visualisasi, bentuk rumus untuk proses matematik

Contoh 40

Fungsi densitas hasil ujian dalam bentuk tabel

Nilai ujian X	Frek f	Probabilitas
4	3	0,06
5	5	0,10
6	10	0,20
7	15	0,30
8	11	0,22
9	6	0,12
	50	1,00

Fungsi densitas dalam bentuk grafik histogram

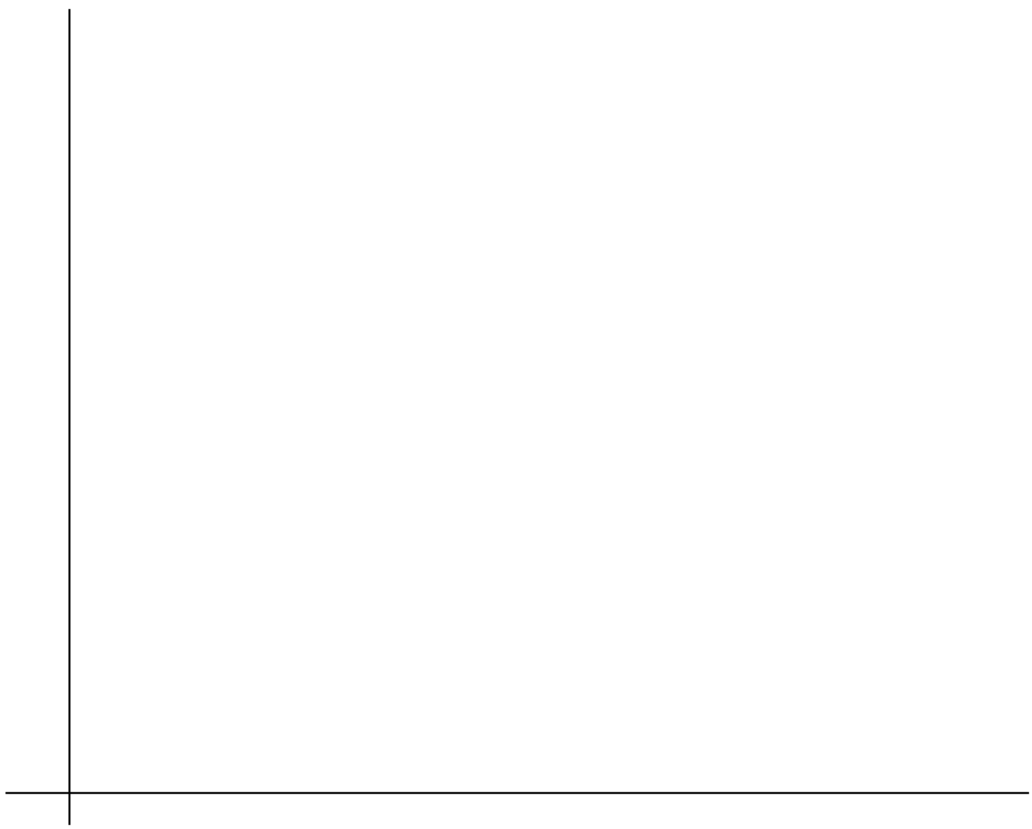


Contoh 41

Fungsi densitas distribusi probabilitas dalam bentuk tabel

Peristiwa X	Frek f	Probabilitas
1	1	0,01
3	5	
4	9	
5	15	
6	23	
7	15	
8	17	
9	9	
10	6	
	100	

Fungsi densitas distribusi probabilitas dalam bentuk grafik histogram



3. Kumulasi Probabilitas

Kumulasi probabilitas

Jumlah probabilitas pada suatu bentangan peristiwa dikenal sebagai kumulasi probabilitas

Contoh 42

Dari contoh 40, kumulasi probabilitas

Dari X = 5 sampai 7

Σ P(X) = 0,10 + 0,20 + 0,30 = 0,60

Dari X = 5 sampai 8

Σ P(X) = 0,10 + 0,20 + 0,30 + 0,22 = 0,82

4. Fungsi Distribusi

Fungsi distribusi bawah

- Kumulasi probabilitas secara bertahap dari peristiwa terkecil sampai peristiwa terbesar dikenal sebagai fungsi distribusi bawah (FDB)

Fungsi distribusi atas

- Kumulasi probabilitas secara bertahap dari peristiwa terbesar sampai peristiwa terkecil dikenal sebagai fungsi distribusi atas (FDA)

Contoh

Nilai ujian X	Frek f	Prob	FDB	FDA
4	3	0,06	0,06	1,00
5	5	0,10	0,16	0,94
6	10	0,20	0,36	0,84
7	15	0,30	0,66	0,64
8	11	0,22	0,88	0,34
9	6	0,12	1,00	0,12

Contoh 43

Fungsi densitas dan fungsi distribusi pada distribusi probabilitas dalam bentuk tabel

Peristiwa X	Frek f	Prob	FDB	FDA
1	1	0,01	0,01	1,00
3	5			
4	9			
5	15			
6	23			
7	15			
8	17			
9	9			
10	6			
	100			

Contoh 44

Fungsi densitas dan fungsi distribusi pada distribusi probabilitas

Kelompok	Nil kel X	Frek	Prob	FDB	FDA
31 – 40	35,5	2			
41 – 50	45,5	3			
51 – 60	55,5	5			
61 – 70	65,5	14			
71 – 80	75,5	25			
81 – 90	85,5	18			
91 – 100	95,5	13			

Bentuk histogram

5. Kumulasi Probabilitas Melalui Fungsi Distribusi

- Kumulasi probabilitas dapat dihitung dari fungsi distribusi

Contoh 45

Nilai ujian X	Frek f	Prob	FDB	FDA
4	3	0,06	0,06	1,00
5	5	0,10	0,16	0,94
6	10	0,20	0,36	0,84
7	15	0,30	0,66	0,64
8	11	0,22	0,88	0,34
9	6	0,12	1,00	0,12

Dengan FDB

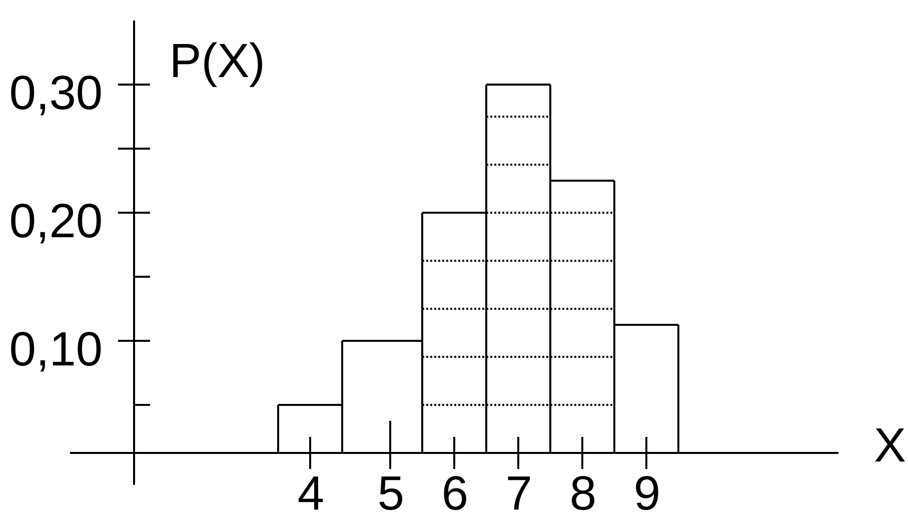
$$
\begin{aligned}
P(6 \le X \le 8) &= P(X \le 8) - P(X \le 5) \\
&= 0{,}88 - 0{,}16 \\
&= 0{,}72
\end{aligned}
$$

Kumulasi distribusi ini dapat dilihat juga pada fungsi densitas berbentuk grafik histogram

Kumulasi distribusi di antara X = 6 sampai X = 8 mencakup histogram dari 6 sampai 8

Kumulasi distribusi X = 6 sampai X = 8 ini merupakan pengurangan fungsi distribusi bawah

dari bawah sampai X = 8 dikurangi
dari bawah sampai X = 6



Contoh 46

Dari contoh 43, kumulasi probabilitas

$P(5 \leq X \leq 9) =$

$P(5 < X \leq 9) =$

$P(5 \leq X < 9) =$

$P(5 < X < 9) =$

Dari contoh 44, kumulasi probabilitas

$P(45{,}5 \leq X \leq 85{,}5) =$

$P(45{,}5 < X \leq 85{,}5) =$

$P(45{,}5 \leq X < 85{,}5) =$

$P(45{,}5 < X < 85{,}6) =$

Dari contoh 45

$P(5 \leq X \leq 8) =$

$P(5 \leq X < 8) =$

$P(5 < X \leq 8) =$

$P(5 < X < 8) =$

G. Harapan Matematik

1. Pengertian

Harapan matematik adalah rerata dari suatu fungsi, misalnya, f(X)

Harapan matematik pada suatu fungsi X adalah

$$E\ [\ f(X)] = \Sigma\ p\ f(X)$$

2. Rerata

Rerata adalah harapan matematik dari suatu variabel, misalnya, X

$$\mu_X = E\ (X) = \Sigma\ pX$$

sama dengan rumus rerata pada statistika deskriptif

3. Variansi

Variansi adalah harapan matematik dari kuadrat simpangan

$$
\begin{aligned}
\sigma^2_X &= E\,(X - \mu_X)^2 \\
&= E\,(X^2) - \mu^2_X \\
&= E\,(X^2) - [\,E\,(X)\,]^2 \\
&= \Sigma\, pX^2 - (\Sigma\, pX)^2
\end{aligned}
$$

sama dengan rumus variansi pada statistika deskriptif

Rerata dan variansi dapat dihitung melalui harapan matematik

Harapan matematik adalah rerata dalam bentuk umum melalui fungsi, misalnya,

$$E(X - 2)$$
$$E(X^2 + 5)$$

Contoh 47

Data X	Frek f	Prob p	X^2	pX	pX^2
4	3	0,06	16	0,24	0,96
5	5	0,10	25	0,50	2,50
6	10	0,20	36	1,20	7,20
7	15	0,30	49	2,10	14,70
8	11	0,22	64	1,76	14,08
9	6	0,12	81	1,08	9,72
	50	1,00		6,88	49,16

$\mu_X = \Sigma\ pX = 6{,}88$

$$\begin{aligned}\sigma^2_X &= \Sigma\ pX^2 - (\Sigma\ pX)^2 \\ &= 49{,}16 - (6{,}88)^2 \\ &= 49{,}16 - 47{,}33 \\ &= 1{,}83\end{aligned}$$

Contoh 48

Data X	Frek f	Prob p	X^2	pX	pX^2
1	1				
3	5				
4	9				
5	15				
6	23				
7	15				
8	17				
9	9				
10	6				

μ_X =

σ^2_X =

4. Kovariansi

Kovariansi adalah harapan matematik dari perkalian simpangan

$$\sigma_{XY} = E\,[\,(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\,]$$
$$= E\,(XY) - [E\,(X)\,E\,(Y)]$$
$$= \Sigma\, pXY - (\Sigma\, pX)(\,\Sigma\, pY)$$

Sama dengan rumus kovariansi pada statistika deskriptif

Contoh 49

X	Y	Frek f	Prob p	XY	pX	pY	pXY
4	5	1	0,2	20	0,8	1,0	4,0
5	7	1	0,2	35	1,0	1,4	7,0
6	5	1	0,2	30	1,2	1,0	6,0
6	8	1	0,2	48	1,2	1,6	9,6
4	3	1	0,2	12	0,8	0,6	2,4
					5,0	5,6	29,0

$$\sigma_{XY} = \Sigma\, pXY - (\Sigma\, pX)(\Sigma\, pY) = 29{,}0 - (5{,}0)(5{,}6)$$
$$= 1$$

Contoh 50

X	Y	f	p	XY	pX	pY	pXY
63	87						
50	74						
55	76						
65	90						
55	85						
70	87						
64	92						
70	98						
58	82						
68	91						

σ_{XY} =

H. Jenis Distribusi Probabilitas

1. Sumber Distribusi

Dari sumber data, distribusi probabilitas mencakup

- Distribusi probabilitas empirik
- Distribusi probabilitas teoretik

2. Jenis Data

Dari jenis data, distribusi probabilitas mencakup

- Distribusi probabilitas diskrit
- Distribusi probabilitas kontinu

3. Banyaknya variabel

Dari banyaknya variabel, distribusi probabilitas mencakup

- Distribusi probabilitas univariat
- Distribusi probabilitas bivariat
- Distribusi probabilitas multivariat

4. Pembahasan

- Tidak semua macam distribusi probabilitas dibahas di sini

- Pembahasan meliputi distribusi probabilitas yang banyak dipakai di dalam statistika terapan

- Pembahasan mencakup beberapa distribusi probabilitas teoretik, diskrit dan kontinu, terutama univariat

Terima Kasih