3.2.5 (4.б). Свободные и вынужденные колебания в электрическом контуре.

Толстикова М.С.
Группа Б04-205

14 сентября 2023 г.

Цель работы: исследования свободных и вынужденных колебаний в колебательном контуре.

В работе используются: осциллограф АКТАКОМ ADS-6142H, генератор сигналов специальной формы АКИП-3409/4, магазин сопротивления МСР-60, магазин ёмкости Р5025, магазин индуктивности Р567 типа МИСП, соединительная коробка с шунтирующей емкостью, соединительные одножильные и коаксиальные провода.

1. Теоритические сведения.

Рассмотрим электрический контур, состоящий из последовательно соединённых конденсатора C, катушки индуктивности L и резистора R. Обозначим разность потенциалов на конденсаторе U_C, а ток, текущий в контуре, через I. Второе правило Кирхгофа:

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0. \tag{1}$$

Вводя обозначения $\gamma = \dfrac{R}{2L}$, $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$, получим уравнение

$$\ddot{I} + 2\gamma\dot{I} + \omega_0^2 I = 0. \tag{2}$$

Его решение в общем виде:

$$I = -\frac{U_0}{L\kappa}e^{-\gamma t}\mathrm{sh}(\kappa t), \tag{3}$$

где $\kappa = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$, $U_0 = U_C$ – начальное напряжение на конденсаторе.

В случае, когда $\gamma < \omega_0$, имеем $\kappa = i\omega$, где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ – *частоты свободных (собственных) колебаний*. Тогда ток

$$I = -\frac{U_0}{L\omega}e^{-\gamma t}\sin(\omega t) \tag{4}$$

затухает и имеет колебательный характер. Величина γ определяет затухание колебаний: $\gamma = \dfrac{1}{\tau}$, где τ – время затухание амплитуды в e раз.

Формулы для напряжения на кондесаторе и тока в цепи можно переписать иначе:

$$U_C = U_0 \frac{\omega_0}{\omega} e^{-\gamma t} \cos(\omega t - \theta),$$
$$I = -\frac{U_0}{L} e^{-\gamma t} \cos(\omega t - \theta). \tag{5}$$

В случае $\gamma > \omega_0$, формулы для тока и напряжения на конденсаторе имеют следующий вид:

$$I = -\frac{U_0}{L\kappa} e^{-\gamma t} \mathrm{sh}(\kappa t),$$

$$U_C = U_0 e^{-\gamma t} \left(\frac{\gamma}{\kappa} \mathrm{sh}(\kappa t) + \mathrm{ch}(\kappa t) \right).$$

Процесс в этом случае не является колебательным, его называют апериодическим. Режим, соответствующий $\gamma = \omega_0$, называются *критическим*. В этом случае предельный переход $\omega \to 0$ в (5) даст

$$I = -\frac{U_0}{L} t e^{-\gamma t},$$

$$U_C = U_0 e^{-\gamma t} (1 + \gamma t).$$

Сопротивление в этом случае

$$R_{\text{кр}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{6}$$

называется *критическим сопротивлением* контура.
Добротность контура по определению

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W},$$

где W – запасённая энергия, ΔW – потери за период. Тогда

$$Q = 2\pi \frac{CU_0^2/2 \cdot e^{-2\gamma t}}{CU_0^2/2 \cdot \left(e^{-2\gamma t} - e^{-2\gamma(T+t)}\right)} = \frac{\pi}{\gamma T} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}. \tag{7}$$

Логарифмическим декрементом затухания называются число

$$\Theta = \ln \frac{U_k}{U_{k+1}} = \ln e^{\gamma T} = \gamma T. \tag{8}$$

или

$$\Theta = \frac{1}{n} \ln \frac{U_k}{U_{k+n}}. \tag{9}$$

2. Экспериментальная установка.

Колебательный контур состоит из постоянной индуктивности L с активным сопротивлением RL, переменной емкости C и сопротивления R. Картина колебаний напряжения на емкости наблюдается на экране двухканального осциллографа. Для возбуждения затухающих колебаний используется генератор сигналов специальной формы. Сигнал с генератора поступает через конденсатор C1 на вход колебательного контура. Данная емкость необходима чтобы выходной импеданс генератора был много меньше импеданса колебательного контура и не влиял на процессы, проходящие в контуре.

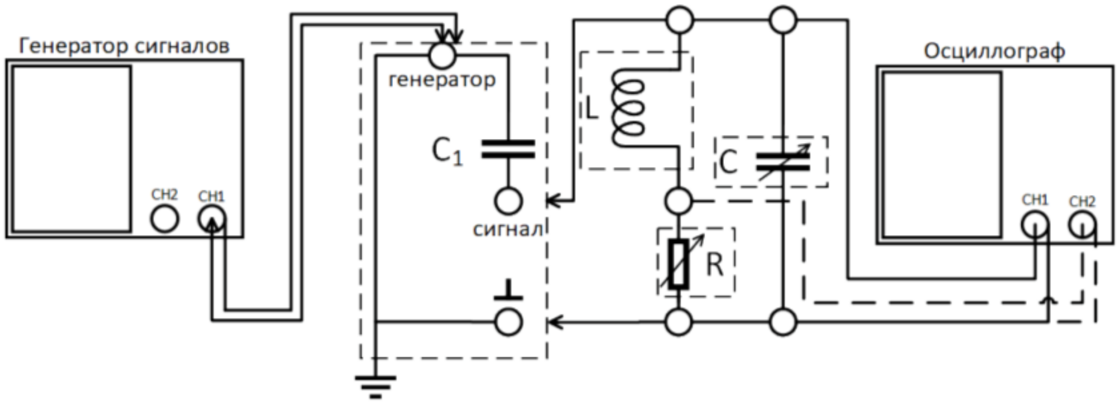

Рис. 1: Схема установки для исследования вынужденных колебаний

При изучении свободно затухающих колебаний генератор специальных сигналов на вход колебательного контура подает периодические короткие импульсы, которые заряжают конденсатор C. За время между последовательными импульсами происходит разрядка конденсатора через резистор и катушку индуктивности. Напряжение на конденсаторе U_C поступает на вход канала 1(X) электронного осциллографа. Для наблюдения фазовой картины затухающих колебаний на канал 2(Y) подается напряжение с резистора R (пунктирная линия на схеме установки), которое пропорционально току I ($I \propto dU_C/dt$). При изучении возбужденных колебаний на вход колебательного контура подается синусоидальный сигнал. С помощью осциллографа возможно измерить зависимость амплитуды возбужденных колебаний в зависимости от частоты внешнего сигнала, из которого возможно определить добротность колебательного контура. Альтернативным способом расчета добротности контура является определение декремента затухания по картине установления возбужденных колебаний. В этом случае генератор сигналов используется для подачи цугов синусоидальной формы.

3. Ход работы

3.1. Измерение свободных колебаний.

Устанавливаем на магазине сопротивлений величину $R = 0$ Ом,на магазине индуктивностей $L = 100$ мГн (это значение остается постоянным), на магазине емкостей величину $C = 0$ мкФ.

Найдем минимальное значение емкости контура C_0, благодаря которому в контуре реализуются свободные колебания. При этом затухание обеспечивается наличием активного

сопротивления в магазине индуктивностей R_L.
Период колебаний: $T = 66,4$ мкс

$$C_0 = \frac{T^2}{4\pi^2 L} = 1\text{нФ}$$

С, мкф	T_{theor}, мкс	T_{exp}, мкс
0,002	89	93
0,003	109	112
0,005	140	143
0,007	166	168
0,009	188	191
0,01	199	200

Таблица 1: Теоритически и экспериментально полученные значения периодов.

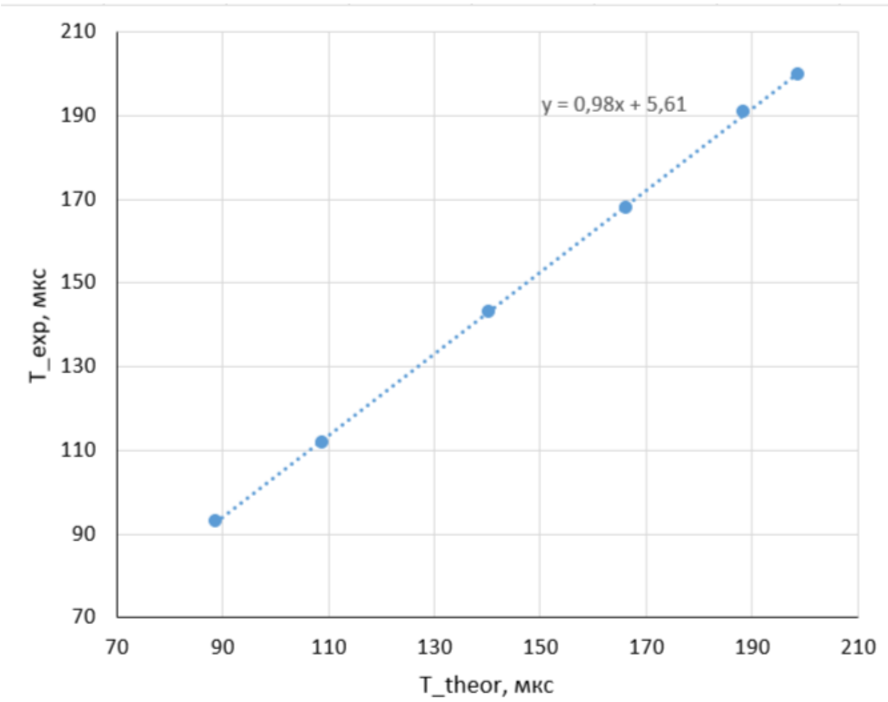

Рис. 2: График $T_{exp} = f(T_{theor})$

3.2. Логарифмический декремент затухания и сопротивление контура.

$L = 100$ мГн, рассчитаем емкость C^* при которой собственная частота колебаний $\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ составляет 6.5 кГц.

$$R_{cr} = 2\sqrt{L/C^*} = 8 \text{ кОм}$$

В эксперименте получилось $R_{cr} = 5,8$ кОм

R/R_{cr}	R, Ом	n	U_m, В	U_{m+n}, В	Θ
0,05	290	4	8,92	2,96	0,28
0,086	500	4	8,56	1,56	0,43
0,12	700	4	8,24	0,84	0,57
0,155	900	4	8	0,52	0,68
0,19	1100	3	7,8	0,6	0,85
0,22	1300	2	7,64	0,96	1,04
0,25	1450	2	7,32	0,8	1,11

Таблица 2: Расчет декремента затухания

$\Theta_{min} = 0,28,\ Q = 11,21$
$\Theta_{max} = 1,11,\ Q = 2,83$
$1/\Theta^2 = X, 1/R_\Sigma^2 = Y$
$k = \Delta Y/\Delta X = (14,6 \pm 0,2) * 10^5$

$$R_{cr} = 2\pi\sqrt{\Delta Y/\Delta X} = 7,59 \pm 0,05\text{кОм}$$

3.3. Декремент затухания на фазовой плоскости.

На фазовой плоскости:
1) При $R_1 = 290$ Ом

$$\Theta_1 = \frac{1}{n}\ln x_m/x_{m+n} = 0,29, Q_1 = \pi/\Theta = 10,83$$

2) При $R_2 = 1450$ Ом

$$\Theta_2 = \frac{1}{n}\ln x_m/x_{m+n} = 1,1, Q_2 = \pi/\Theta = 2,85$$

3.4. Теоритический расчет.

Рассчитаем добротность теоритически через R, L, C.

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

1) При R = 290 Ом

$$Q_1 = 12,01$$

2) При R = 1450 Ом

$$Q_2 = 2,72$$

3.5. Добротность через АЧХ.

$\nu_{res} = 6430$ Гц, при этом $U_0 = 135$ В. Проводим измерения для R_1 и R_2.
Для R_1: $2\Delta\Omega = 0,09$,

$$Q_1 = \frac{\omega_0}{2\Delta\Omega} = 11,11$$

Для R_2 мы не можем точно определить $2\Delta\Omega$ по ширине резонансной кривой, поэтому оценим ее шириной кривой от точки на уровне $1/\sqrt{2}$ до максимума, умноженной на 2.
$2\Delta\Omega = 0,15$,

$$Q_2 = 3,33$$

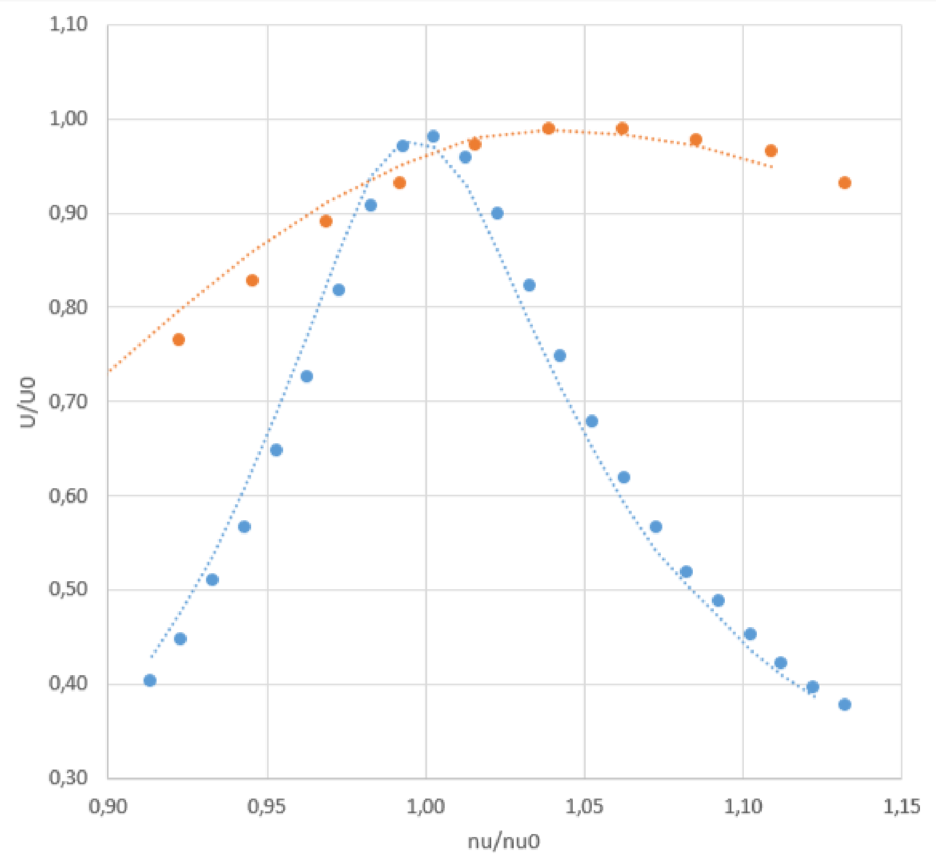

Рис. 3: График резонансных кривых

3.6. Добротность через ФЧХ.

Определим добротность контура по ФЧХ.

Для R_1:

По графику определяем $\Delta\omega = 3700$ Ом,

$$Q_1 = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = 10,9$$

Для R_2 не хватает данных, чтобы найти добротность через ФЧХ.

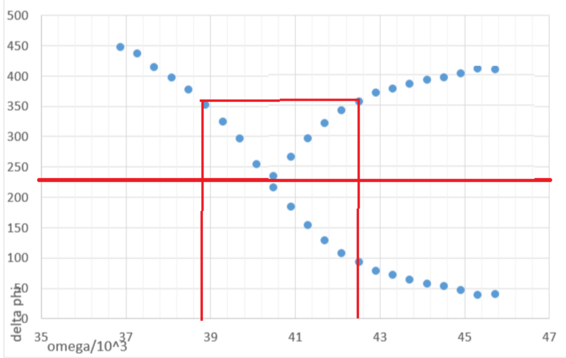

Рис. 4: ФЧХ для R_1

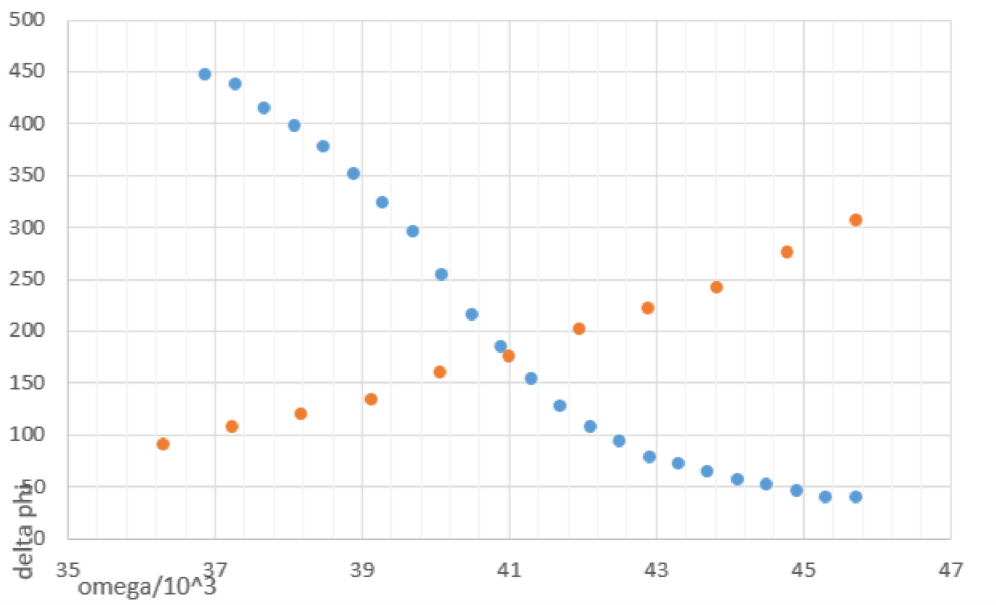

Рис. 5: ФЧХ для R_1 и R_2

3.7. Добротность по скорости нарастания и затухания колебаний.

Для R_1: $U_0 = 256$ В

При нарастании амплитуды декремент затухания считаем по формуле:

$$\Theta = \frac{1}{n} \ln \frac{U_0 - U_k}{U_0 - U_{k+n}}$$

n	U_k	U_k+n	Theta
4	34	99	0,294
3	57	99	0,298
3	34	89	0,293
2	34	76	0,296
2	57	89	0,300

$$\Theta_1 = 0,296 \pm 0,006$$

$$Q_1 = 10,6 \pm 0,$$

При затухании амплитуды декремент затухания считаем по формуле:

$$\Theta_1 = \frac{1}{n} \ln \frac{U_k}{U_{k+n}}$$

n	Uk	Uk+m	Theta
4	94	30	0,286
3	94	40	0,285
3	71	30	0,287
2	71	40	0,287
2	94	53	0,287

$$\Theta_1 = 0,286 \pm 0,006$$

$$Q_1 = 11 \pm 0,2$$

Для R_2: $U_0 = 33,7$ В
При нарастании:

$$\Theta_2 = \frac{1}{n} \ln \frac{U_0 - U_k}{U_0 - U_{k+n}} = \frac{1}{2} \ln \frac{33,7 - 8,8}{33,7 - 30,8} = 1,08 \pm 0,02$$

$$Q_2 = 2,9 \pm 0,1$$

При затухании:

$$\Theta_2 = \frac{1}{2} \ln \frac{31,4}{3} = 1,17 \pm 0,04$$

$$Q_2 = 2,7 \pm 0,1$$

4.Вывод

R	Свободные колебания			Вынужденные колебания			
	$f(L,C,R)$	$f(\Theta)$	Спираль	АЧХ	ФЧХ	Нарастание	Затухание
R1	12 ± 1	$11,2 \pm 0,2$	10 ± 1	11 ± 1	11 ± 1	$10,6 \pm 0,5$	$11 \pm 0,2$
R2	$2,7 \pm 0,2$	$2,83 \pm 0,06$	$2,9 \pm 0,3$	$3,3 \pm 0,4$		$2,9 \pm 0,1$	$2,7 \pm 0,1$

В пределах погрешностей все значения, кроме теоритических, совпадают. Самые точные методы измерения добротности - $f(\Theta)$ в свободных колебаниях и нарастание и затухание в вынужденных.