

Devoir 3

BLAIS REGOUT, Lucien - 18073291

SAVOIE, Olivier - 18114274

IFT436 - Algorithmes et structures de données

Faculté des Sciences
Université de Sherbrooke

Présenté à Pr BLONDIN, Michael

Jeudi, 10 octobre 2019

Question 1

a)

V = Les bassins du manège aquatique (sommets).

E = Les corridors entre les bassins, potentiellement des glissades(arêtes).

\mathcal{G} = Manège aquatique est dirigé.

b)

\mathcal{G} ne peut pas être un cycle dû aux contraintes stipulées. Cette contrainte, ci-dessous, en témoigne.

| Il n'y a *pas* de corridor passant d'un bassin vers lui-même.

Il est impossible qu'un cycle soit établi avec un seul bassin considérant qu'il y a aucun corridor qui part d'un dit bassin en arrivant dans ce même bassin.

Finalement, cette seconde contrainte, implique que, dû à l'inclinaison, l'un ne peut pas revenir au bassin précédent. Cela implique qu'il y a aucun cycle possible et que de ce fait, le manège aquatique \mathcal{G} est acyclique et dirigé.

| Puisque les bassins sont situés de plus en plus bas, le long d'une colline, si on peut atteindre un bassin j à partir d'un bassin i , alors on ne peut pas atteindre le bassin i à partir du bassin j .

c)

Si le graphe \mathcal{G} est considéré non dirigé, il y a plusieurs arrangements d'arêtes qui rendrait \mathcal{G} cyclique et pour lesquels $|E| > |V| - 1$. Ainsi, dans la majorité des cas, \mathcal{G} n'est pas un arbre, car il ne respecte pas les propriétés essentielles pour en être un. Toutefois, il y a toujours la possibilité qu'aucun cycle, simple ou non, ne s'y retrouve et que le nombre d'arête soit équivalent au nombre de sommet -1 . De sorte que les propriétés suivantes soit respectées.

— \mathcal{G} est *connexe* et $|E| = |V| - 1$

d)

$$\min = n - 1, \quad \forall n \geq 1$$

Dans le cas minimal, les arêtes placées représenteront un graphe \mathcal{G} qui sera forcément un arbre, respectant les contraintes, ainsi que l'explication élaborée à la lettre précédente, c).

$$\max = \sum_{i=1}^n n - i = \sum_{i=1}^n n - \sum_{i=1}^n i = n^2 - \frac{n}{2}(n + 1) = \frac{n^2 - n}{2}$$

Advenant que chacun des bassins présents se voient attribués un corridor vers chacun des bassins soudjacentes, l'équation maximal reflètera la composition du chemin le plus long.

e)

Bassin départ : De toutes les paires de sommets composants les arêtes, le sommet qui se retrouvera uniquement en index 0 de la paire, à la gauche, qui est donc toujours le sommet de départ, sera donc considéré comme sommet de départ.

Bassin d'arrivée : Suivre le même raisonnement, mais pour le sommet qui se retrouve toujours en index 1 de la paire et qui est donc toujours le bassin d'arrivée dans toutes les paires, sera donc considéré comme sommet d'arrivée.

f)

Algorithme 1 : Calcul de la séquence au temps maximal passé dans une attraction \mathcal{G}

Entrées : Manège \mathcal{G} tel que $\mathcal{G} = (V, E)$ et sommet initial u tel que u appartient à V .

Résultat : Une séquence S de bassins de temps maximal dans le manège \mathcal{G} .

```
1  $S \leftarrow []$ 
2  $T_{tot} \leftarrow 0$ 
3  $Parent \leftarrow u$ 
4 parcours ( $x$ ) :
5    $SPrime \leftarrow S$ 
6    $Temps \leftarrow T_{tot}$ 
7   si  $x$  non marquée alors
8      $Temps \leftarrow Temps + c[Parent, x]$ 
9     marquer  $x$ 
10    ajouter  $x$  à  $SPrime$ 
11    si  $Temps > T_{tot}$  alors
12       $T_{tot} \leftarrow Temps$ 
13       $S \leftarrow SPrime$ 
14    pour  $u \in V : x \rightarrow y$  faire
15       $Parent \leftarrow x$ 
16      parcours ( $y$ )
17 parcours ( $u$ )
18 retourner  $S$ 
```

Grâce aux marqueurs, l'algorithme ne visite que les éléments qui ne furent pas précédemment visités. De plus, ce dernier se rappelle récursivement sur chacun des enfants sous-jacents. Ainsi, l'on peut en déduire que son temps d'exécution sera, dans le pire cas, $\mathcal{O}(|E| + |V|)$ ce qui respecte la contrainte de $\mathcal{O}(n + m)$.

g)

Algorithme 2 : Calcul de la séquence au temps maximal passé dans une attraction \mathcal{G} , donné

5 remontées

Entrées : Manège \mathcal{G} tel que $\mathcal{G} = (V, E)$, que le sommet initial u tel que $u \in V$, que $v \in V$, ainsi que v est le bassin finale.

Résultat : Une séquence S de bassins, de temps maximal dans le manège \mathcal{G} , considérant que l'utilisateur peut remonter au bassin initial un maximum de 5 fois.

```

1  $S \leftarrow []$ 
2  $T_{tot} \leftarrow 0$ 
3  $Parent \leftarrow u$ 
4  $Ascension \leftarrow 5$ 
5 parcours ( $x$ ) :
6    $SPrime \leftarrow S$ 
7    $Temps \leftarrow T_{tot}$ 
8   si  $x$  non marquée alors
9      $Temps \leftarrow Temps + c[Parent, x]$ 
10    marquer  $x$ 
11    ajouter  $x$  à  $SPrime$ 
12    si  $Temps > T_{tot}$  alors
13       $T_{tot} \leftarrow Temps$ 
14       $S \leftarrow SPrime$ 
15    si prochain voisin de  $x = v$  alors
16       $Ascension \leftarrow Ascension - 1$ 
17      retirer les marqueurs
18       $Parent \leftarrow S[0]$ 
19      parcours ( $Parent$ )
20    sinon
21      pour  $u \in V : x \rightarrow y$  faire
22         $Parent \leftarrow x$ 
23        parcours ( $y$ )
24 parcours ( $u$ )
25 retourner  $S$ 
```

Ici, il fera exactement comme l'algorithme précédent, à l'exception que lorsqu'il se rendra au plus long parcours précédent le bassin final, et se 5 fois. La 5e fois, le sera possiblement différent mais restera cependant couvers par l'algorithme.

Question 2

a)

Algorithme 3 : Tri d'une séquence et calcul des valeurs modales

Entrées : Une séquence S non vide d'éléments comparables.

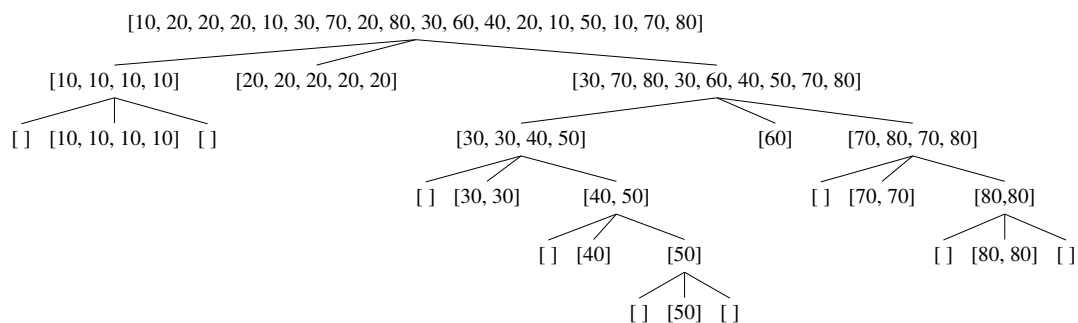
Résultat : Les valeurs modales m trouvées dans la séquence S

```

1   $mode \leftarrow []$ 
2   $modeQty \leftarrow 0$ 
3   $\text{trouverMode}(x)$  :
4      si  $|x| = 0$  alors
5          retourner  $mode$ 
6      sinon
7           $pivot \leftarrow \text{mediane}(x)$ 
8           $gauche \leftarrow [x \in S : x < pivot]$ 
9           $centre \leftarrow [x \in S : x = pivot]$ 
10          $droite \leftarrow [x \in S : x > pivot]$ 
11         si  $|centre| = modeQty$  alors
12             ajouter  $pivot$  à  $mode$ 
13         si  $|centre| > modeQty$  alors
14              $modeQty \leftarrow |centre|$ 
15              $mode \leftarrow [pivot]$ 
16         sinon
17              $\text{trouverMode}(gauche)$ 
18              $\text{trouverMode}(droite)$ 
19 retourner  $\text{trouverMode}(S)$ 

```

b)



Question 3

a)

Donnez un algorithme qui détermine si un graphe non dirigé est un arbre.

Algorithme 4 : Détermination de la propriété d'arbre d'un graphe.

Entrées : Un graphe \mathcal{G} tel que $\mathcal{G} = (V, E)$ est non dirigé et un sommet $u \in V$

Résultat : Si le graphe est un arbre, ou non.

```
1  $Visites \leftarrow 0$ 
2 visiter( $x$ ) :
3   si  $x$  est marqué alors
4     retourner  $Non\_Arbre$ 
5   marquer  $x$ 
6    $Visites \leftarrow Visites + 1$ 
7   pour tous voisins de  $x \in V : x \rightarrow y$  faire
8     visiter( $y$ )
9 visiter( $u$ )
10 si  $Visites \neq ||$  alors
11   retourner  $Non\_Arbre$ 
12 sinon
13   retourner  $Est\_Arbre$ 
```

Cet algorithme parcourt le graphe au complet. Si un sommet est visité plus d'une fois, c'est cyclique. Cela est uniquement vérifiée lorsqu'on empêche de visiter le noeud précédents en visitant tous les voisins immédiats.

Deplus, tous les sommets peuvent être visiter moins de deux fois et tout de même il pourrait y manquer certains sommets, d'où la vérification si le nombre de visites est bien égale a la somme des sommets dans le graphes !

b)

Démontrez que le graphe complet \mathcal{G}_n possède au moins 2^n arbres couvrants, $\forall n \in \mathbb{N} > 3$.

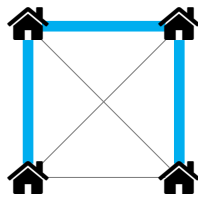
Une façon compréhensive de le démontrer est de représenter chacun des sommets comme une valeurs binaire. Lors d'un compte binaire (ie : l'évaluation de 101_2 qui donne 5) on réalise qu'il y a jusqu'à 8 manières différentes d'agencer 3 valeurs, 3 sommets. Maintenant, si nous retrouvons 4 somets, il y a alors

4 valeurs qui peuvent être agencées jusqu'à 16 façons uniques. Ceci, qui suit cette même relation binaire, est gradué en fonction du nombre d'objets à relier par l'arbre couvrant \mathcal{H} du graphe complet, acyclique et non dirigé \mathcal{G} .

Ainsi, avec n sommets, il y a 2^n manières de les agencer afin de couvrir tous les sommets et d'accomplir la tâche requise !

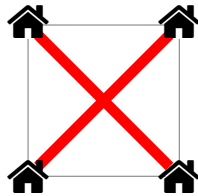
c)

Donnez un exemple de points où un arbre couvrant minimal entre ces points est plus long qu'un arbre couvrant minimal avec un nouveau point ajouté (une halte).



$$3 * 1 = 3u$$

Dans cette image, on retrouve un arbre couvrant minimal qui couvre 4 sommets d'un graphe \mathcal{G} à 4 sommets. Assumant qu'il y a 1 unité (u) de distance entre les coins, du carré formé, adjacents, le graphe aurait une longueur suivant l'équation ci-dessus.



$$4\left(\frac{1}{2}\right)(1^2 + 1^2) = 2^{\frac{1}{2}} = 2.8284 \dots u$$

Maintenant, ces gîtes sont équidistant de cette halte, sont à la même position que le graphe précédent et la distance totale de chacun des gîtes à la halte va comme suit.