Transformaciones Lineales

Tranformaciones Lineales

Pasaremos a comprender el objeto de estudio más importante del **algebra lineal** que son las llamadas transformaciones lineales. Que consisten en simplemente, crear una función con Espacios Vectoriales.

> #Definición *(Transformaciones Lineales) Sean $(V, +_V, \cdot_V)$ y $(W, +_W, \cdot_W)$ dos $\mathbb{K}$-Espacios Vectoriales. Una función $f : V \to W$ se le llama transformación lineal (u homomorfismo o simplemente morfismo) de V en W si cumple:*
>
> 1. $f(v +_V v') = f(v) +_W f(v')$
> 2. $f(\lambda \cdot_V v) = \lambda \cdot_W f(v), \ \forall \lambda \in K, \forall v \in V.$

Notemos que el ejemplo más simple de transformación lineal es $0 : V \to W$ o también llamada la transformación trivial, que consiste en tomar cualquier vector v del espacio vectorial V y multiplicarlo escalarmente por $0 \in \mathbb{K}$ lo cual nos da el 0_W (el cero del espacio vectorial W), $0(v) = 0_W$. Sabemos que esta es una transformación lineal porque cumple las dos propiedades:

- $0(v +_V v') = 0_{\mathbb{K}} \cdot (v +_V v') = 0_{\mathbb{K}} \cdot v + 0_{\mathbb{K}} \cdot v' = 0(v) +_W 0(v')$
- $0(\lambda v) = 0_{\mathbb{K}} \cdot \lambda \cdot_V v = \lambda \cdot_V 0_{\mathbb{K}} \cdot v = \lambda \cdot_W 0(v)$
  Luego, está la transformación identidad $I : V \to V$ que es no hacerle ningún afecto al vector. Es decir $I(v) = v$.

Si $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y la definimos como $T(x, y) = (1 + x, y)$ no es una transformación lineal pues $T((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = T((x_1 + x_2, y_1 + y_2)) = (x_1 + x_2 + 1, y_1 + y_2)$ y que no es igual a $T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2) = (x_1 + 1, y_1) + (x_2 + 1, y_2) = (x_1 + x_2 + 2, y_1 + y_2)$. En general, cuando estamos operando con espacios vectoriales $\mathbb{K}^n$, sumar constantes a las coordenadas ya evita que pueda ser una transformación lineal, al igual que multiplicar las coordenadas entre si como $T(x, y) = xy$ tampoco es una tranformación lineal (TL). *Una forma fácil de comprobar que una función no es una transformación lineal es usando* $T(0_V) = 0_W$, en el ejemplo anterior $T(x, y) = (1 + x, y)$ tenemos que $T(0, 0) = (1, 0) \neq (0, 0)$.

Las transformaciones lineales representan la **estructura de un espacio vectorial**. De hecho las tras propiedades que tienen que cumplir las TL son muy parecidas a las tres propiedades que tiene que cumplir un Subespacio Vectorial. De esta manera, podemos decir que estamos generando un subespacio en W al agarrar todos los vectores de V y "transformandolos". La siguiente proposición nos dice que podemos agarrar subespacios de un espacio V y usar la tranformación lineal para obtener subespacios de W y viceversa.

> **Proposición 1.** *Sea $f : V \to W$ una transformación lineal. Entonces,*
>
> 1. *Si S es un subespacio de V, entonces $f(S)$ es un subespacio de W.*
> 2. *Si T es un subespacio de W, entonces $f^{-1}(W)$ es un subespacio de V.*

Gracias a la definición de transformación lineal es obvio que estas son capaces de preservar combinaciones lineales de un espacio a otro. Es decir, teniendo una base de un subespacio $S \subset V$ que es $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ nos permite escribir de manera **única** los vectores del subespacio como una comb. lineal

por una proposición vista en Bases Vectoriales, tal que si $v \in S$ entonces existen a_i's únicos de manera que $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$. Luego, $f(v) = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(v_i)$ por la definición de TL. Por la proposición 1 tenemos que los $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ generan un subespacio en W.
Esto es útil si nos dan una base de un espacio vectorial de salida V y a donde se dirigen en la imagen de la función, se puede obtener una **transformación única** que cumpla esto. Las siguientes dos proposiciones demuestran lo dicho.

> **Proposición 2.** *Sean V y W dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, V de dimensión finita. Sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$una base de V y sean $w_1, \dots, w_n \in W$ vectores arbitrarios. Entonces existe una única transformación lineal $f : V \to W$ tal que $f(v_i) = w_i$ para cada $1 \le i \le n$.*

Se puede generalizar esta proposición para infinitos vectores que sean bases de un espacio vectorial V.

Monomorfismos, Epimorfismos e Isomorfismos

Como las tranformaciones lineales son operaciones entre conjuntos tiene sentido estudiar la validez de las propiedades usuales: inyectividad, suryectividad y biyectividad.

> #Definición **(-ismos 1)** *Sean V y W dos $\mathbb{K}$ espacios vectoriales y sea $f : V \to W$ una TL. Se dice que:*
>
> 1. *f es un **monomorfismo** si f es inyectiva.*
> 2. *f es un **epimorfismo** si f es suryectiva.*
> 3. *f es un **isomorfismo** si f es biyectiva.*

> #Definición **(-ismos 2)** *Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y sea $f : V \to V$ una TL, se llama **endomorfismo** y si además es un isomorfismo se le dice **automorfismo**.*

Una observación que podemos observar de la proposición 1 es que como $\{0\} \subset W$ y es subespacio vectorial de este, entonces $f^{-1}(0)$ también debe ser un subespacio a este lo llamamos núcleo.

> #Definición **(Núcleo de una TL)** *Sean V y W dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, y sea $f : V \to W$ una TL. Se llama núcleo de f al conjunto $\mathrm{Nu}(f) = \{v \in V : f(v) = 0\} = f^{-1}(0_W)$*

El núcleo se puede usar para determinar si tenemos un **monoformismo** o no pues si existen otros valores que nos den 0_W además de $f(0_V) = 0_W$ entonces no va ser un monoformismo.

> **Proposición 3.** *Sea $f : V \to W$ una TL. Entonces, f es un **monoformismo** si y solo si $\mathrm{Nu}(f) = \{0\}$.*