Sucesiones Divergentes

No todas las sucesiones (Sucesión) convegen, existen algunas que no lo hacen por ejemplo $a_n = (-1)^n$ es obvio que diverge pero *¿Cómo lo demostramos?* Existen diversos límites de divergen uno de ellos es el límite al infinito positivo:

> #Definición *Diremos que $\{a_n\}$ definida en R tiene a* ***infinito****, y lo denotaremos por*
>
> $$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$
>
> *Si para todo $M > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > M$ para todo $n > N$.*

Pero a diferencia de una sucesión arbitraria divergente, al menos podemos hacer una referencia del "comportamiento" de una sucesión que tiene límite infinito. En este caso, podemos decir de manera informal que *a medida que el índice n se hace cada vez más grande, entonces a_n también se hace cada vez más grande*.
Podemos presentar la misma definición para cuando la sucesión hace más grande y negativa. Cambiando que ahora $a_n < -M$ para todo $n > N$.
Es obvio que la sucesión $a_n = n$ tiene al infinito pues como vimos en Axiomas (Básicos) de los números reales los naturales no están acotados superiormente.
Por ejemplo la sucesión $\lim_{n\to\infty} \frac{n^4+3n^2}{3n^3-n^2-1} = +\infty$, analizandolo lógicamente es obvio que esto ocurre pues el polinomio del numerador $n^4 + 3n^2$ crece más rápido que el polinomio denominador pues es de grado mayor.

El Lema del Sandwitch

Sería útil disponer de una herramienta que facilite encontrar la convergencia o divergencia de sucesiones más complicadas como $a_n = \frac{n}{2^n}$. Intuitivamente, veamos que las sucesiones divergen, pero 2^n crece mucho más rápido que n (por ejemplo para $n = 20$ tenemos $\frac{20}{1048576}$). Podemos preguntarnos *¿En que momento se supera 2^n a n?* se puede verificar por el Principio de la inducción que, $2^n > n^2$ para todo $n > 3$, por lo cual $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{n^2}$ y tenemos que podemos acotar:

$$0 \leq \frac{n}{2^n} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \qquad (\forall n > 3)$$

Entonces, para que nos quede para todo $n \in \mathbb{N}$ podemos hacer

$$0 \leq \frac{n}{2^n} \leq \frac{n+3}{2^{n+3}} \leq \frac{1}{n+3}$$

Notemos que tenemos una sucesión que está acotada entre otras dos que a medida que $n \to \infty$ se acercan cada vez más a 0, entonces queda claro que para que se siga cumpliendo la desigualdad $a_n = n/2^n$ también tiene que estar acercandose a 0. De aquí sale un lema muy importante:

> ***Lema del sandwich (o de las sucesiones encajadas).*** *Si $a_n \leq b_n \leq c_n$ para todo n y*
>
> $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \ell,$$
>
> *entonces $\lim_{n\to\infty} b_n = l$.*

Demostración. Sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \ell,$$

o sea,

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \exists N_1 \text{ tal que } (n \geq N_1 \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon_1). \tag{4}$$
$$\forall \varepsilon_2 > 0 \exists N_2 \text{ tal que } (n \geq N_2 \Rightarrow |c_n - \ell| < \varepsilon_2). \tag{5}$$

Dado $\varepsilon > 0$, buscamos $N = N(\varepsilon)$ tal que

$$n \geq N \Rightarrow |b_n - \ell| < \varepsilon.$$

Pero

$$\begin{aligned} |a_n - \ell| < \varepsilon_1 \text{ si y solo si } \quad & \varepsilon_1 < a_n - \ell < \varepsilon_1, \\ |c_n - \ell| < \varepsilon_2 \text{ si y solo si } \quad & \varepsilon_2 < c_n - \ell < \varepsilon_2. \end{aligned}$$

Por hipótesis, $a_n \leq b_n \leq c_n$. Restamos miembro a miembro ℓ y usamos (4) y (5), obteniendo

$$-\varepsilon_1 < a_n - \ell \leq b_n - \ell \leq c_n - \ell < \varepsilon_2. \quad (6)$$

Podemos tomar $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ y $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$. En efecto, si $n > N$, entonces $n > N_1$ y $n > N_2$. Luego valen la primera desigualdad y la última desigualdad en (6), y en particular,

$$\varepsilon = \varepsilon_1 < b_n - \ell < \varepsilon_2 = \varepsilon,$$

o equivalentemente,

$$|b_n - \ell| < \varepsilon,$$

como queríamos. ■

¿Cómo encontramos si una sucesión es divergente?

Hagamos antes unos ejemplos por definición.

Ejemplo. Verificar que $\text{lím}_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$.
Dado $M > 0$, buscamos $N = N(M)$ tal que

$$n > N \Longrightarrow \sqrt{n} > M.$$

Despejando n, vemos que podemos tomar $N = M^2$. En efecto, si $n > N = M^2$, tomando raíz cuadrada miembro a miembro, y usando que $0 < x < y \Longrightarrow \sqrt{x} < \sqrt{y}$ (conocemos la implicación equivalente $a, b > 0, a^2 < b^2 \Longrightarrow a < b$) llegamos a que $\sqrt{n} > M$, como queríamos.

Ejemplo. Verificar por definición que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + n}{3n + 1} = \infty.$$

Dado $M > 0$, buscamos $N = N(M)$ tal que

$$n > N \Longrightarrow \frac{n^3 + n}{3n + 1} > M.$$

Planteamos

$$\frac{n^3 + n}{3n + 1} \underset{(\leq)}{\geq} \frac{n^3}{3n + n} = \frac{n^3}{4n} = \frac{n^2}{4} > M.$$

Despejando n, observamos que podemos tomar $N = \sqrt{4M} = 2\sqrt{M}$.
Por ejemplo, si $M = 10^4$, para $n > 200$ tendremos

$$\frac{n^3 + n}{3n + 1} > 10^4$$

Podemos definir de la misma manera al límite de $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ que dado un número muy grande $M > 0$ entonces la sucesión se hace cada vez más negativa tal que $a_n < -M$.

Al igual que con los límites finitos si tenemos **dos sucesiones que divergen operar con ellas nos va a dar (casi siempre) otra sucesión divergente**. Es obvio que $n^3 + n$ diverge, para no tener que demostrarlo por definición si podemos probar que n^3 diverge, n también diverge y que la suma de dos sucesiones divergentes diverge entonces listo. De esta manera nacen las siguientes proposiciones que nos enseñan como lidear con las sucesiones que tienden al infinito:

Proposición 1. (Criterios de Comparación para sucesiones) *Si $a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$:*

1. *Si $\lim a_n = +\infty$, entonces $\lim b_n = +\infty$*
2. *Si $\lim b_n = -\infty$, entonces $\lim a_n = -\infty$.*

Este criterio nos ayuda a encontrar la divergencia de sucesiones usando otras como por ejemplo $n < 2^n$ y como sabemos que $\lim n = +\infty$ entonces $\lim 2^n = +\infty$.

Demostración. Como $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, para $M > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N$ entonces $a_n > M$. A su vez $b_n \geq a_n$, entonces $b_n \geq a_n > M$ para todo $n > N$. Entonces, $b_n > M$ para todo $n > N$. Pero esto es la definición de $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$. La demostración para $-\infty$ es parecida ■

Proposición 2. *Si*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} c_n = \ell \neq 0,$$

entonces

1. $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = \infty$,
2. $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$,
3. $\lim_{n\to\infty} a_n + c_n = \infty$,
4. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$,
5. $\lim_{n\to\infty} a_n c_n = \infty, \quad$ *si* $\ell > 0$
6. $\lim_{n\to\infty} a_n c_n = -\infty$, *si* $\ell < 0$.

Demostración.

1. Por definición tenemos que

$$\begin{aligned} &\forall M_1 > 0 \exists N_1 \text{ tal que } (n > N_1 \implies a_n > M_1), \qquad (1)\\ &\forall M_2 > 0 \exists N_2 \text{ tal que } (n > N_2 \implies b_n > M_2). \qquad (2)\end{aligned}$$

Debemos mostrar que

$$\forall M > 0,\ \exists N \text{ tal que } (n > N \implies a_n + b_n > M).$$

Supongamos que nos dan un M_1 y un M_2 tal que se cumple (1) y (2) para algún N_1 y N_2, entonces $a_n + b_n > M_1 + M_2$. Si elegimos tomar $M_1 = M_2 = \frac{M}{2}$ nos queda $a_n + b_n > \frac{M}{2} + \frac{M}{2} = M$ eligiendo $N = \frac{M}{2}\text{máx}\{N_1, N_2\}$, lo que queriamos.

2. De nuevo tenemos (1) y (2) y queremos probar que

$$\forall M > 0,\ \exists N \text{ tal que } (n > N \Longrightarrow a_n b_n > M).$$

Sea $M > 0$. Planteamos

$$a_n b_n > M_1 M_2 = M$$

Luego podemos tomar $M_1 = M_2 = \sqrt{M}$. Si $n > N_1(\sqrt{M})$ y $n > N_2(\sqrt{M})$, entonces

$$a_n b_n > \sqrt{M}\sqrt{M} = M$$

Así $N = \max\left\{N_1(\sqrt{M}), N_2(\sqrt{M})\right\}$.

3. Tenemos ahora como hipótesis (1) y

$$\forall \epsilon_3 > 0, \exists N_3 \text{ tal que } (n > N_3 \implies |c_n - l| < \epsilon \qquad (3)$$

Como $\lim_{n\to\infty} c_n = l$, para $\epsilon = 1$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|c_n - l| < 1$ para todo $n > N$. O bien, $-1 < c_n - l < 1$ para todo $n > N$. Luego, $l - 1 < c_n < l + 1$ para todo $n > N$. Por lo tanto

$$a_n + (l-1) < a_n + c_n \quad \text{ para todo } n > N.$$

Ahora, el límite de una sucesión que tiende al infinito más una constante es infinito, $\lim_{n\to\infty} a_n + (l-1) = \infty$. Pero usando el inciso (1) de la Proposición anterior resulta que $\lim_{n\to\infty} b_n + a_n = \infty$.

4. Como hipótesis sabemos (1), supongamos que existe un $\epsilon > 0$ tal que $M = \frac{1}{\epsilon}$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ entonces $a_n > M = \frac{1}{\epsilon}$. Por lo tanto, para ϵ dado, si $n > N$ se cumple $\frac{1}{a_n} < \epsilon$ siempre que $a_n \neq 0$. Pero esto es la definición de $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.
Las demostraciones de (5) y (6) son parecidas, para (5) si tomamos $\epsilon = \frac{l}{2} > 0$, $|c_n - l| < \epsilon \to l - \epsilon < c_n < l + \epsilon$ entonces $a_n c_n < (l+\epsilon)M$ si $l > 0$, entonces $(l+\epsilon) > 0$ y nos queda que $(l+\epsilon)M > 0$ y se cumple la definici´pon de límite al infinito positivo. ■

Sucesiones Divergentes

No todas las sucesiones (Sucesión) convegen, existen algunas que no lo hacen por ejemplo $a_n = (-1)^n$ es obvio que diverge pero *¿Cómo lo demostramos?* Existen diversos límites de divergen uno de ellos es el límite al infinito positivo:

> **#Definición** *Diremos que $\{a_n\}$ definida en R tiene a **infinito**, y lo denotaremos por*
>
> $$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$
>
> *Si para todo $M > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > M$ para todo $n > N$.*

Pero a diferencia de una sucesión arbitraria divergente, al menos podemos hacer una referencia del "comportamiento" de una sucesión que tiene límite infinito. En este caso, podemos decir de manera informal que *a medida que el índice n se hace cada vez más grande, entonces a_n también se hace cada vez más grande*.
Podemos presentar la misma definición para cuando la sucesión hace más grande y negativa. Cambiando que ahora $a_n < -M$ para todo $n > N$.
Es obvio que la sucesión $a_n = n$ tiene al infinito pues como vimos en Axiomas (Básicos) de los números

reales los naturales no están acotados superiormente.
Por ejemplo la sucesión $\lim_{n\to\infty} \frac{n^4+3n^2}{3n^3-n^2-1} = +\infty$, analizandolo lógicamente es obvio que esto ocurre pues el polinomio del numerador $n^4 + 3n^2$ crece más rápido que el polinomio denominador pues es de grado mayor.

El Lema del Sandwitch

Sería útil disponer de una herramienta que facilite encontrar la convergencia o divergencia de sucesiones más complicadas como $a_n = \frac{n}{2^n}$. Intuitivamente, veamos que las sucesiones divergen, pero 2^n crece mucho más rápido que n (por ejemplo para $n = 20$ tenemos $\frac{20}{1048576}$). Podemos preguntarnos *¿En que momento se supera 2^n a n?* se puede verificar por el Principio de la inducción que, $2^n > n^2$ para todo $n > 3$, por lo cual $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{n^2}$ y tenemos que podemos acotar:

$$0 \leq \frac{n}{2^n} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \qquad (\forall n > 3)$$

Entonces, para que nos quede para todo $n \in \mathbb{N}$ podemos hacer

$$0 \leq \frac{n}{2^n} \leq \frac{n+3}{2^{n+3}} \leq \frac{1}{n+3}$$

Notemos que tenemos una sucesión que está acotada entre otras dos que a medida que $n \to \infty$ se acercan cada vez más a 0, entonces queda claro que para que se siga cumpliendo la desigualdad $a_n = n/2^n$ también tiene que estar acercandose a 0. De aquí sale un lema muy importante:

Lema del sandwich (o de las sucesiones encajadas). *Si $a_n \leq b_n \leq c_n$ para todo n y*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \ell,$$

entonces $\lim_{n\to\infty} b_n = l$.

Demostración. Sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \ell,$$

o sea,

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon_1 > 0 \exists N_1 \text{ tal que } (n \geq N_1 \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon_1). \qquad (4) \\ &\forall \varepsilon_2 > 0 \exists N_2 \text{ tal que } (n \geq N_2 \Rightarrow |c_n - \ell| < \varepsilon_2). \qquad (5) \end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$, buscamos $N = N(\varepsilon)$ tal que

$$n \geq N \Rightarrow |b_n - \ell| < \varepsilon.$$

Pero

$$\begin{aligned} |a_n - \ell| < \varepsilon_1 \text{ si y solo si } \quad & \varepsilon_1 < a_n - \ell < \varepsilon_1, \\ |c_n - \ell| < \varepsilon_2 \text{ si y solo si } \quad & \varepsilon_2 < c_n - \ell < \varepsilon_2. \end{aligned}$$

Por hipótesis, $a_n \leq b_n \leq c_n$. Restamos miembro a miembro ℓ y usamos (4) y (5), obteniendo

$$-\varepsilon_1 < a_n - \ell \leq b_n - \ell \leq c_n - \ell < \varepsilon_2. \qquad (6)$$

Podemos tomar $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ y $N = \max\{N_1, N_2\}$. En efecto, si $n > N$, entonces $n > N_1$ y $n > N_2$. Luego valen la primera desigualdad y la última desigualdad en (6), y en particular,

$$\varepsilon = \varepsilon_1 < b_n - \ell < \varepsilon_2 = \varepsilon,$$

o equivalentemente,

$$|b_n - \ell| < \varepsilon,$$

como queríamos. ■

¿Cómo encontramos si una sucesión es divergente?

Hagamos antes unos ejemplos por definición.

Ejemplo. Verificar que $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$.
Dado $M > 0$, buscamos $N = N(M)$ tal que

$$n > N \Longrightarrow \sqrt{n} > M.$$

Despejando n, vemos que podemos tomar $N = M^2$. En efecto, si $n > N = M^2$, tomando raíz cuadrada miembro a miembro, y usando que $0 < x < y \Longrightarrow \sqrt{x} < \sqrt{y}$ (conocemos la implicación equivalente $a, b > 0, a^2 < b^2 \Longrightarrow a < b$) llegamos a que $\sqrt{n} > M$, como queríamos.

Ejemplo. Verificar por definición que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + n}{3n + 1} = \infty.$$

Dado $M > 0$, buscamos $N = N(M)$ tal que

$$n > N \Longrightarrow \frac{n^3 + n}{3n + 1} > M.$$

Planteamos

$$\frac{n^3 + n}{3n + 1} \underset{(\leq)}{\geq} \frac{n^3}{3n + n} = \frac{n^3}{4n} = \frac{n^2}{4} > M.$$

Despejando n, observamos que podemos tomar $N = \sqrt{4M} = 2\sqrt{M}$.
Por ejemplo, si $M = 10^4$, para $n > 200$ tendremos

$$\frac{n^3 + n}{3n + 1} > 10^4$$

Podemos definir de la misma manera al límite de $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ que dado un número muy grande $M > 0$ entonces la sucesión se hace cada vez más negativa tal que $a_n < -M$.

Al igual que con los límites finitos si tenemos **dos sucesiones que divergen operar con ellas nos va a dar (casi siempre) otra sucesión divergente**. Es obvio que $n^3 + n$ diverge, para no tener que demostrarlo por definición si podemos probar que n^3 diverge, n también diverge y que la suma de dos sucesiones divergentes diverge entonces listo. De esta manera nacen las siguientes proposiciones que nos enseñan como lidear con las sucesiones que tienden al infinito:

Proposición 1. (Criterios de Comparación para sucesiones) *Si $a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$:*

1. *Si $\lim a_n = +\infty$, entonces $\lim b_n = +\infty$*
2. *Si $\lim b_n = -\infty$, entonces $\lim a_n = -\infty$.*

Este criterio nos ayuda a encontrar la divergencia de sucesiones usando otras como por ejemplo $n < 2^n$ y como sabemos que $\lim n = +\infty$ entonces $\lim 2^n = +\infty$.

Demostración. Como $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, para $M > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N$ entonces $a_n > M$. A su vez $b_n \geq a_n$, entonces $b_n \geq a_n > M$ para todo $n > N$. Entonces, $b_n > M$ para todo $n > N$. Pero esto es la definición de $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$. La demostración para $-\infty$ es parecida ■

Proposición 2. *Si*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} c_n = \ell \neq 0,$$

entonces

1. $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = \infty$,
2. $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$,
3. $\lim_{n\to\infty} a_n + c_n = \infty$,
4. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$,
5. $\lim_{n\to\infty} a_n c_n = \infty$, *si* $\ell > 0$
6. $\lim_{n\to\infty} a_n c_n = -\infty$, *si* $\ell < 0$.

Demostración.

1. Por definición tenemos que

$$\begin{aligned} &\forall M_1 > 0 \exists N_1 \text{ tal que } (n > N_1 \Longrightarrow a_n > M_1), &(1)\\ &\forall M_2 > 0 \exists N_2 \text{ tal que } (n > N_2 \Longrightarrow b_n > M_2). &(2)\end{aligned}$$

   Debemos mostrar que

$$\forall M > 0, \ \exists N \text{ tal que } (n > N \Longrightarrow a_n + b_n > M).$$

   Supongamos que nos dan un M_1 y un M_2 tal que se cumple (1) y (2) para algún N_1 y N_2, entonces $a_n + b_n > M_1 + M_2$. Si elegimos tomar $M_1 = M_2 = \frac{M}{2}$ nos queda $a_n + b_n > \frac{M}{2} + \frac{M}{2} = M$ eligiendo $N = \frac{M}{2}\text{máx}\{N_1, N_2\}$, lo que queriamos.

2. De nuevo tenemos (1) y (2) y queremos probar que

$$\forall M > 0, \ \exists N \text{ tal que } (n > N \Longrightarrow a_n b_n > M).$$

   Sea $M > 0$. Planteamos

$$a_n b_n > M_1 M_2 = M$$

   Luego podemos tomar $M_1 = M_2 = \sqrt{M}$. Si $n > N_1(\sqrt{M})$ y $n > N_2(\sqrt{M})$, entonces

$$a_n b_n > \sqrt{M}\sqrt{M} = M$$

   Así $N = \text{máx}\left\{N_1(\sqrt{M}), N_2(\sqrt{M})\right\}$.

3. Tenemos ahora como hipótesis (1) y

$$\forall \epsilon_3 > 0, \exists N_3 \text{ tal que } (n > N_3 \implies |c_n - l| < \epsilon \qquad (3)$$

   Como $\lim_{n\to\infty} c_n = l$, para $\epsilon = 1$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|c_n - l| < 1$ para todo $n > N$. O bien, $-1 < c_n - l < 1$ para todo $n > N$. Luego, $l - 1 < c_n < l + 1$ para todo $n > N$. Por lo tanto

$$a_n + (l - 1) < a_n + c_n \quad \text{para todo } n > N.$$

   Ahora, el límite de una sucesión que tiende al infinito más una constante es infinito, $\lim_{n\to\infty} a_n + (l - 1) = \infty$. Pero usando el inciso (1) de la Proposición anterior resulta que $\lim_{n\to\infty} b_n + a_n = \infty$.

4. Como hipótesis sabemos (1), supongamos que existe un $\epsilon > 0$ tal que $M = \frac{1}{\epsilon}$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ entonces $a_n > M = \frac{1}{\epsilon}$. Por lo tanto, para ϵ dado, si $n > N$ se cumple $\frac{1}{a_n} < \epsilon$ siempre que $a_n \neq 0$. Pero esto es la definición de $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.
Las demostraciones de (5) y (6) son parecidas, para (5) si tomamos $\epsilon = \frac{l}{2} > 0$,
$|c_n - l| < \epsilon \to l - \epsilon < c_n < l + \epsilon$ entonces $a_n c_n < (l + \epsilon)M$ si $l > 0$, entonces $(l + \epsilon) > 0$ y nos queda que $(l + \epsilon)M > 0$ y se cumple la defini´pon de límite al infinito positivo. ■