Repaso Teórico - Análisis Matemático I

1. a) Detallar las nueve propiedades que hacen de $\mathbb{R}$ un cuerpo.
   b) Demostrar a partir de las mismas que $a \cdot 0 = 0$ y $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Las nueve propiedades de un cuerpo son

1. **Propiedad Conmutativa.** Si $a, b \in \mathbb{R}$se cumple $a + b = b + a$ y $ab = ba$.
2. **Propiedad Asociativa.** Si $a, b \in \mathbb{R}$ se cumple $a + (b + c) = (a + b) + c$ y $a(bc) = (ab)c$.
3. **Propiedad del Neutro de la suma.** Si $a \in \mathbb{R}$ existe un número $0 \in \mathbb{R}$ tal que $a + 0 = a$.
4. **Propiedad del opuesto de la suma.** Si $a \in \mathbb{R}$ existe un número $-a \in \mathbb{R}$ tal que $a + (-a) = 0$.
5. **Propiedad del Neutro de la multiplicación.** Si $a \in \mathbb{R}$ existe un número $1 \in \mathbb{R}$ tal que cumpla $a \cdot 1 = a$.
6. **Propiedad del inverso multiplicativo.** Si $a \in \mathbb{R}$ existe un número $a^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $a \cdot (a^{-1})$.
7. **Propiedad Distributiva.** Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ se cumple que $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

(b) Queremos demostrar que $a \cdot 0 = 0$. Veamos que por la propiedad (4) se cumple que existe un número $-(a \cdot 0) \in \mathbb{R}$ tal que $a \cdot 0 + (-(a \cdot 0)) = 0$. Luego, $0 = 0 + 0$ por la propiedad (3) por lo que $a \cdot (0 + 0) + (-(a \cdot 0)) = 0$ y por la propiedad (7) tenemos que $a \cdot 0 + \underbrace{a \cdot 0 + (-a \cdot 0)}_{=0} = 0$ y nos queda $a \cdot 0 = 0$.

■

Queremos demostrar que $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$. Notemos que $b + (-b) = 0$ por la propiedad (4) por lo que $a \cdot (b + (-b)) = a \cdot 0$ que ya vimos que $a \cdot 0 = 0$. Usando esto y la propiedad (7) nos queda que $a \cdot b + a \cdot (-b) = 0$ y luego por la propiedad uniforme de la igualdad podemos sumar de ambos lados por $-(a \cdot b)$ tal que nos quede $\underbrace{(a \cdot b) + (-(a \cdot b))}_{=0} + (a \cdot (-b)) = -(a \cdot b)$ por lo tanto $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$. ■

2. a) Detallar las cuatro propiedades que, agregadas a las de cuerpo, hacen de $\mathbb{R}$ un cuerpo ordenado.
   b) Demostrar a partir de las mismas que $1 > 0$.

(a) Las 4 propiedades son: sean $a, b, c \in \mathbb{R}$

1. **(Propiedad de Tricotomía)** Pueden ocurrir 3 situaciones: $a < b$, $a = b$ o $a > b$.
2. **(Propiedad de transitividad)** Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$
3. **(Propiedad de la Cerradura)** Si $a < b$ entonces $a + c < b + c$ y con $c > 0$ se cumple $ac < bc$.

(b) Queremos probar que $1 > 0$. Notemos que pueden haber 3 situaciones por la propiedad de orden (1), $1 > 0$, $1 < 0$ y $1 = 0$. Es obvio que $1 \neq 0$, para probar que $1 > 0$ supongamos por el absurdo que $1 < 0$. Si $1 < 0$ entonces podemos usar la propiedad de orden (3) tal que $1 + (-1) < 0 + (-1)$. Pero luego tenemos que $0 < -1$ nos están diciendo entonces que -1 es un número positivo, por lo que podemos usar la propiedad de orden (3) de nuevo en $1 < 0$ tal que $(-1) \cdot 1 < (-1) \cdot 0$ pero luego por la segunda propiedad prbada en el ejercicio 1(b) tenemos que -(1 \cdot 1) < 0$ y por la propiedad (5) $1 \cdot 1 = 1$ por lo que $-1 < 0$ y llegamos a un absurdo porque antes habiamos obtenido que $0 < -1$. Por lo que no queda otra opción que $1 > 0$. ■

3. a) Escribir la definición de $|x|$ para un número real x.
   b) Demostrar que $|x + y| \leq |x| + |y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) Sea $x \in \mathbb{R}$ definimos al **valor absoluto** de x a

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

(b) Para demostrar que $|x+y| \leq |x| + |y|$ consideremos los 4 casos:

$$\begin{array}{ll} x \geq 0 \text{ y } y \geq 0 & (1) \\ x < 0 \text{ y } y \geq 0 & (2) \\ x \geq 0 \text{ y } y < 0 & (3) \\ x < 0 \text{ y } y < 0 & (4) \end{array}$$

- Consideremos el caso (1) es obvio que entonces $|x+y| = x+y = |x|+|y|$, luego llegamos a lo que queríamos.
- En el caso (2) $|x|+|y| = -x+y = y-x$ queríamos demostrar entonces que $|x+y| \leq y-x$. Lo cual se puede dividir en dos subcasos:
  - $x+y \geq 0$, entonces $x+y \leq y-x$. Nos basta probar que $x \leq -x$ lo cual es verdad pues $x < 0$ y $-x > 0$.
  - $x+y \leq 0$, entonces $-x-y \leq y-x$. Nos basta probar que $-y \leq y$ lo cual es verdad pues $y > 0$ y $-y < 0$.
- En el caso (3) $|x|+|y| = x-y$ de vuelta para probar $|x+y| \leq x-y$ podemos dividirlo en dos subcasos:
  - $x+y \geq 0$, entonces $x+y \leq x-y$. Nos basta probar que $y \leq -y$ lo cual es verdad pues $y < 0$ y $-y > 0$.
  - $x+y \leq 0$, entonces $-x-y \leq x-y$. Nos basta probar que $-x \leq x$ lo cual es verdad pues $x > 0$ y $-x < 0$.
- Por último, el caso (4) es obvio pues $|x+y| = -x-y = |x|+|y|$. ■

4. a) Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$. Escribir la definición de que un número M sea una cota superior de A. Escribir la definición de que A esté acotado superiormente y la definición de sup A.

   b) Mostrar que $\mathbb{R}$ no está acotado superiormente.

   c) Enunciar la propiedad del supremo, que junto con las 13 propiedades de cuerpo ordenado, hacen de $\mathbb{R}$ un cuerpo ordenado completo.

   d) Mostrar que sup $[0,6) = 6$.

(a) Si $A \subset \mathbb{R}$. Decimos que este conjunto está **acotado superiormente** si existe un número $M \in \mathbb{R}$ (llamado **cota superior**) tal que para todo $a \in A$ tenemos que $a \leq M$. Por otro lado, por el Axioma del supremo y el ínfimo sabemos que todo conjunto acotado superiormente tiene **supremo** que se define como la *menor cota superior*. Decimos que $\alpha = \sup A$ si:

- α es una cota superior.
- Sea M una cota superior, $\alpha \leq M$.

(b) Probemos esto por el absurdo. Supongamos que existe una cota superior M de $\mathbb{R}$, entonces tiene supremo que le llamamos $\alpha = \sup \mathbb{R}$ por lo que cumple que $\alpha \geq r$ para todo $r \in \mathbb{R}$ pero luego sabemos que $M \in \mathbb{R}$ (por definición de la cota) por lo tanto $M \leq \alpha \leq r$ por lo que se genera un absurdo, α no puede ser el supremo. Y $\mathbb{R}$ no está acotado superiormente. ■

(c) **Propiedad del supremo.** Sea $A \subset \mathbb{R}$ tenemos que si existe una cota superior $M \in \mathbb{R}$ entonces existe un supremo del conjunto A.

(d) Queremos probar que $\sup[0,6) = 6$. Es obvio que 6 es una cota superior, entonces el conjunto $[0,6)$ tiene supremo. Sabemos que $0 \geq x < 6$ entonces $0 < 6-x$, luego por la propiedad arquimediana existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n_0} < 6-x$. Podemos reordenar esto, $x < 6 - \frac{1}{n_0} < 6$ por último por el lema útil sabemos que $6 - \frac{1}{n_0} \in [0,6)$ entonces 6 es el supremo del conjunto.

5. a) Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$. Escribir la definición de que un número M sea una cota inferior de A. Escribir la definición de que A esté acotado inferiormente y la definición de $\inf A$.

   b) Dar la idea de la demostración de que todo subconjunto de $\mathbb{R}$ no vacío acotado inferiormente tiene ínfimo.

   c) Mostrar que $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente.

   d) Probar que para todo $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

   e) Escribir la definición de que un subconjunto A de $\mathbb{R}$ sea denso en $\mathbb{R}$.

(a) Decimos que $m \in \mathbb{R}$ es una **cota inferior** del conjunto A si para todo $a \in A$ ocurre que $m \leq a$.
Decimos que $\beta \in \mathbb{R}$ es un **ínfimo o la mayor cota inferior** del conjunto A si:

- β es una cota inferior.
- Si m es otra cota inferior se cumple que $\beta \geq m$.

(b) Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío acotado inferiormente, queremos demostrar que tiene ínfimo. Creemos el conjunto $-A = \{-a | a \in A\}$ que contiene todos los opuestos de los valores de A, este es no vacío también pues A es no vacío. El conjunto $-A$ está acotado superiormente pues si m es una cota inferior de A tenemos que $-m$ va a ser una cota superior de $-A$. Luego, por la propiedad del supremo existe el $\sup(-A)$. Nos faltaría probar que

$$\inf(A) = -\sup(-A)$$

Como existe $\alpha = \sup(-A)$ entonces $\alpha \geq -a$ para todo $a \in A$, luego multiplicando por -1 de ambos lados $-\alpha \leq a$ tal que tenemos que $-\alpha$ es una cota inferior de A. Siguiendo si $-m$ es una cota superior de $-A$ se cumple que $-m \geq \alpha$, entonces $m \leq -\alpha$ y como $-\alpha$ es una cota inferior de A, m es una cota inferior. Como podemos hacer esto con todas las cotas superiores de $-A$ tenemos que $\inf(A) = -\alpha = -\sup(-A)$. ■

(c) Queremos probar que $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente. Empecemos suponiendo que sí lo está, en ese caso existe un supremo $\alpha = \sup \mathbb{N}$
luego como α es una cota superior, entonces $\alpha \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pero luego, $\alpha \geq n + 1$ también se cumple, entonces $\alpha - 1 \geq n$ tal que $\alpha - 1$ es una cota superior, pero acá llegamos a un absurdo pues α es la menor cota superior. ■

(d) **Propiedad Arquimediana.** Queremos probar que para todo $\epsilon > 0$ existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \epsilon$. Podemos obtener esto como un colorario de la proposición anterior. Si $\frac{1}{\epsilon} > 0$ entonces como los números naturales no están acotados superiormente $\frac{1}{\epsilon}$ no es una cota superior por lo que debe existir un número natural que supere este número $n > \frac{1}{\epsilon} \to \frac{1}{n} < \epsilon$. ■

(e) Decimos que un conjunto A es **denso en** $\mathbb{R}$ cuando dado un intervalo (a, b) de los reales existe un $x \in A$ que a su vez $x \in (a, b)$. O de otra manera, dados $a < b$ existe un $x \in A$ tal que $a < x < b$.

6. a) Escribir la definición de que la función $f : A \to B$ sea inyectiva.

   b) Escribir la definición de la imagen de la función $f : A \to B$.

   c) Escribir la definición de que la función $f : A \to B$ sea suryeciva.

(a) Una función $f : A \to B$ es **inyectiva** cuando para todo $a, b \in A$, si $f(a) = f(b)$ se cumple que $a = b$.
(b) la **imagen** de la función $f : A \to B$ es un subconjunto de B tal que $\mathrm{Im}(f) = \{f(t) : t \in A\}$.
(c) Una función $f : A \to B$ es **sobreyectiva** cuando la $\mathrm{Im}(f) = B$.

7. a) Sean $f : A \to B$ y $g : C \to D$ dos funciones, donde $B \subset C$. Escribir la definición de la función $g \circ f : A \to D$.

b) Escribir la definición de que la función $f : A \to B$ sea biyectiva. Si ese es el caso, escribir la definición de la función $f^{-1} : B \to A$.

c) Sea $f : A \to B$ una función biyectiva, donde A y B son intervalos de $\mathbb{R}$. Describir geométricamente el gráfico de $f^{-1} : B \to A$ en términos del gráfico de f.

d) Escribir las definiciones de $\operatorname{sen}^{-1} = \operatorname{arcsen}$ y $\cos^{-1} = \operatorname{arccos}$ (incluyendo sus dominios e imágenes) y dibujar los respectivos gráficos.

(a) Una función $f : A \to B$ y otra función $g : C \to D$ tal que $B \subset C$. Se define una nueva función

$$g \circ f : A \to D \qquad (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

(b) Una función $f : A \to B$ sobreyectiva e inyectiva. Definimos la función $f^{-1} : B \to A$ como aquella función

Repaso Teórico - Análisis Matemático I

1. a) Detallar las nueve propiedades que hacen de $\mathbb{R}$ un cuerpo.

b) Demostrar a partir de las mismas que $a \cdot 0 = 0$ y $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Las nueve propiedades de un cuerpo son

1. **Propiedad Conmutativa.** Si $a, b \in \mathbb{R}$se cumple $a + b = b + a$ y $ab = ba$.
2. **Propiedad Asociativa.** Si $a, b \in \mathbb{R}$ se cumple $a + (b + c) = (a + b) + c$ y $a(bc) = (ab)c$.
3. **Propiedad del Neutro de la suma.** Si $a \in \mathbb{R}$ existe un número $0 \in \mathbb{R}$ tal que $a + 0 = a$.
4. **Propiedad del opuesto de la suma.** Si $a \in \mathbb{R}$ existe un número $-a \in \mathbb{R}$ tal que $a + (-a) = 0$.
5. **Propiedad del Neutro de la multiplicación.** Si $a \in \mathbb{R}$ existe un número $1 \in \mathbb{R}$ tal que cumpla $a \cdot 1 = a$.
6. **Propiedad del inverso multiplicativo.** Si $a \in \mathbb{R}$ existe un número $a^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $a \cdot (a^{-1})$.
7. **Propiedad Distributiva.** Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ se cumple que $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

(b) Queremos demostrar que $a \cdot 0 = 0$. Veamos que por la propiedad (4) se cumple que existe un número $-(a \cdot 0) \in \mathbb{R}$ tal que $a \cdot 0 + (-(a \cdot 0)) = 0$. Luego, $0 = 0 + 0$ por la propiedad (3) por lo que $a \cdot (0 + 0) + (-(a \cdot 0)) = 0$ y por la propiedad (7) tenemos que $a \cdot 0 + \underbrace{a \cdot 0 + (-a \cdot 0)}_{=0} = 0$ y nos queda $a \cdot 0 = 0$.

$\blacksquare$

Queremos demostrar que $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$. Notemos que $b + (-b) = 0$ por la propiedad (4) por lo que $a \cdot (b + (-b)) = a \cdot 0$ que ya vimos que $a \cdot 0 = 0$. Usando esto y la propiedad (7) nos queda que $a \cdot b + a \cdot (-b) = 0$ y luego por la propiedad uniforme de la igualdad podemos sumar de ambos lados por $-(a \cdot b)$ tal que nos quede $\underbrace{(a \cdot b) + (-(a \cdot b))}_{=0} + (a \cdot (-b)) = -(a \cdot b)$ por lo tanto $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$. $\blacksquare$

2. a) Detallar las cuatro propiedades que, agregadas a las de cuerpo, hacen de $\mathbb{R}$ un cuerpo ordenado.

b) Demostrar a partir de las mismas que $1 > 0$.

(a) Las 4 propiedades son: sean $a, b, c \in \mathbb{R}$

1. **(Propiedad de Tricotomía)** Pueden ocurrir 3 situaciones: $a < b$, $a = b$ o $a > b$.
2. **(Propiedad de transitividad)** Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$
3. **(Propiedad de la Cerradura)** Si $a < b$ entonces $a + c < b + c$ y con $c > 0$ se cumple $ac < bc$.

(b) Queremos probar que $1 > 0$. Notemos que pueden haber 3 situaciones por la propiedad de orden (1), $1 > 0$, $1 < 0$ y $1 = 0$. Es obvio que $1 \neq 0$, para probar que $1 > 0$ supongamos por el absurdo que $1 < 0$. Si $1 < 0$ entonces podemos usar la propiedad de orden (3) tal que $1 + (-1) < 0 + (-1)$. Pero luego tenemos que $0 < -1$ nos están diciendo entonces que -1 es un número positivo, por lo que podemos usar la propiedad de orden (3) de nuevo en $1 < 0$ tal que $(-1) \cdot 1 < (-1) \cdot 0$ pero luego por la segunda propiedad prbada en el ejercicio 1(b) tenemos que -(1 \cdot 1) < 0$ y por la propiedad (5) $1 \cdot 1 = 1$ por lo que $-1 < 0$ y llegamos a un absurdo porque antes habiamos obtenido que $0 < -1$. Por lo que no queda otra opción que $1 > 0$. ■

3. a) Escribir la definición de $|x|$ para un número real x.
   b) Demostrar que $|x + y| \leq |x| + |y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) Sea $x \in \mathbb{R}$ definimos al **valor absoluto** de x a

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

(b) Para demostrar que $|x + y| \leq |x| + |y|$ consideremos los 4 casos:

$$\begin{array}{ll} x \geq 0 \text{ y } y \geq 0 & (1) \\ x < 0 \text{ y } y \geq 0 & (2) \\ x \geq 0 \text{ y } y < 0 & (3) \\ x < 0 \text{ y } y < 0 & (4) \end{array}$$

- Consideremos el caso (1) es obvio que entonces $|x + y| = x + y = |x| + |y|$, luego llegamos a lo que queríamos.
- En el caso (2) $|x| + |y| = -x + y = y - x$ queríamos demostrar entonces que $|x + y| \leq y - x$. Lo cual se puede dividir en dos subcasos:
  - $x + y \geq 0$, entonces $x + y \leq y - x$. Nos basta probar que $x \leq -x$ lo cual es verdad pues $x < 0$ y $-x > 0$.
  - $x + y \leq 0$, entonces $-x - y \leq y - x$. Nos basta probar que $-y \leq y$ lo cual es verdad pues $y > 0$ y $-y < 0$.
- En el caso (3) $|x| + |y| = x - y$ de vuelta para probar $|x + y| \leq x - y$ podemos dividirlo en dos subcasos:
  - $x + y \geq 0$, entonces $x + y \leq x - y$. Nos basta probar que $y \leq -y$ lo cual es verdad pues $y < 0$ y $-y > 0$.
  - $x + y \leq 0$, entonces $-x - y \leq x - y$. Nos basta probar que $-x \leq x$ lo cual es verdad pues $x > 0$ y $-x < 0$.
- Por último, el caso (4) es obvio pues $|x + y| = -x - y = |x| + |y|$. ■

4. a) Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$. Escribir la definición de que un número M sea una cota superior de A. Escribir la definición de que A esté acotado superiormente y la definición de $\sup A$.
   b) Mostrar que $\mathbb{R}$ no está acotado superiormente.
   c) Enunciar la propiedad del supremo, que junto con las 13 propiedades de cuerpo ordenado, hacen de $\mathbb{R}$ un cuerpo ordenado completo.
   d) Mostrar que $\sup\,[0, 6) = 6$.

(a) Si $A \subset \mathbb{R}$. Decimos que este conjunto está **acotado superiormente** si existe un número $M \in \mathbb{R}$ (llamado **cota superior**) tal que para todo $a \in A$ tenemos que $a \leq M$. Por otro lado, por el Axioma del supremo y el ínfimo sabemos que todo conjunto acotado superiormente tiene **supremo** que se define como la *menor cota superior*. Decimos que $\alpha = \sup A$ si:

- α es una cota superior.
- Sea M una cota superior, $\alpha \leq M$.

(b) Probemos esto por el absurdo. Supongamos que existe una cota superior M de $\mathbb{R}$, entonces tiene supremo que le llamamos $\alpha = \sup \mathbb{R}$ por lo que cumple que $\alpha \geq r$ para todo $r \in \mathbb{R}$ pero luego sabemos que $M \in \mathbb{R}$ (por definición de la cota) por lo tanto $M \leq \alpha \leq r$ por lo que se genera un absurdo, α no puede ser el supremo. Y $\mathbb{R}$ no está acotado superiormente. ■

(c) **Propiedad del supremo.** Sea $A \subset \mathbb{R}$ tenemos que si existe una cota superior $M \in \mathbb{R}$ entonces existe un supremo del conjunto A.

(d) Queremos probar que $\sup[0,6) = 6$. Es obvio que 6 es una cota superior, entonces el conjunto $[0,6)$ tiene supremo. Sabemos que $0 \geq x < 6$ entonces $0 < 6 - x$, luego por la propiedad arquimediana existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n_0} < 6 - x$. Podemos reordenar esto, $x < 6 - \frac{1}{n_0} < 6$ por último por el lema útil sabemos que $6 - \frac{1}{n_0} \in [0,6)$ entonces 6 es el supremo del conjunto.

5. a) Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$. Escribir la definición de que un número M sea una cota inferior de A. Escribir la definición de que A esté acotado inferiormente y la definición de $\inf A$.

   b) Dar la idea de la demostración de que todo subconjunto de $\mathbb{R}$ no vacío acotado inferiormente tiene ínfimo.

   c) Mostrar que $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente.

   d) Probar que para todo $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

   e) Escribir la definición de que un subconjunto A de $\mathbb{R}$ sea denso en $\mathbb{R}$.

(a) Decimos que $m \in \mathbb{R}$ es una **cota inferior** del conjunto A si para todo $a \in A$ ocurre que $m \leq a$.
Decimos que $\beta \in \mathbb{R}$ es un **ínfimo o la mayor cota inferior** del conjunto A si:

- β es una cota inferior.
- Si m es otra cota inferior se cumple que $\beta \geq m$.

(b) Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío acotado inferiormente, queremos demostrar que tiene ínfimo. Creemos el conjunto $-A = \{-a | a \in A\}$ que contiene todos los opuestos de los valores de A, este es no vacío también pues A es no vacío. El conjunto $-A$ está acotado superiormente pues si m es una cota inferior de A tenemos que $-m$ va a ser una cota superior de $-A$. Luego, por la propiedad del supremo existe el $\sup(-A)$. Nos faltaría probar que

$$\inf(A) = -\sup(-A)$$

Como existe $\alpha = \sup(-A)$ entonces $\alpha \geq -a$ para todo $a \in A$, luego multiplicando por -1 de ambos lados $-\alpha \leq a$ tal que tenemos que $-\alpha$ es una cota inferior de A. Siguiendo si $-m$ es una cota superior de $-A$ se cumple que $-m \geq \alpha$, entonces $m \leq -\alpha$ y como $-\alpha$ es una cota inferior de A, m es una cota inferior. Como podemos hacer esto con todas las cotas superiores de $-A$ tenemos que $\inf(A) = -\alpha = -\sup(-A)$. ■

(c) Queremos probar que $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente. Empecemos suponiendo que sí lo está, en ese caso existe un supremo $\alpha = \sup \mathbb{N}$
luego como α es una cota superior, entonces $\alpha \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pero luego, $\alpha \geq n + 1$ también se cumple, entonces $\alpha - 1 \geq n$ tal que $\alpha - 1$ es una cota superior, pero acá llegamos a un absurdo pues α es la menor cota superior. ■

(d) **Propiedad Arquimediana.** Queremos probar que para todo $\epsilon > 0$ existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \epsilon$. Podemos obtener esto como un colorario de la proposición anterior. Si $\frac{1}{\epsilon} > 0$ entonces como los números naturales no están acotados superiormente $\frac{1}{\epsilon}$ no es una cota superior por lo que debe existir un número natural que supere este número $n > \frac{1}{\epsilon} \rightarrow \frac{1}{n} < \epsilon$. ■

(e) Decimos que un conjunto A es **denso en** $\mathbb{R}$ cuando dado un intervalo (a,b) de los reales existe un $x \in A$ que a su vez $x \in (a,b)$. O de otra manera, dados $a < b$ existe un $x \in A$ tal que $a < x < b$.

6. a) Escribir la definición de que la función $f : A \to B$ sea inyectiva.

   b) Escribir la definición de la imagen de la función $f : A \to B$.

   c) Escribir la definición de que la función $f : A \to B$ sea suryeciva.

(a) Una función $f : A \to B$ es **inyectiva** cuando para todo $a, b \in A$, si $f(a) = f(b)$ se cumple que $a = b$.
(b) la **imagen** de la función $f : A \to B$ es un subconjunto de B tal que $\mathrm{Im}(f) = \{f(t) : t \in A\}$.
(c) Una función $f : A \to B$ es **sobreyectiva** cuando la $\mathrm{Im}(f) = B$.

7. a) Sean $f : A \to B$ y $g : C \to D$ dos funciones, donde $B \subset C$. Escribir la definición de la función $g \circ f : A \to D$.

   b) Escribir la definición de que la función $f : A \to B$ sea biyectiva. Si ese es el caso, escribir la definición de la función $f^{-1} : B \to A$.

   c) Sea $f : A \to B$ una función biyectiva, donde A y B son intervalos de $\mathbb{R}$. Describir geométricamente el gráfico de $f^{-1} : B \to A$ en términos del gráfico de f.

   d) Escribir las definiciones de $\mathrm{sen}^{-1} = \mathrm{arcsen}$ y $\cos^{-1} = \mathrm{arccos}$ (incluyendo sus dominios e imágenes) y dibujar los respectivos gráficos.

(a) Una función $f : A \to B$ y otra función $g : C \to D$ tal que $B \subset C$. Se define una nueva función

$$g \circ f : A \to D \qquad (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

(b) Una función $f : A \to B$ sobreyectiva e inyectiva. Definimos la función $f^{-1} : B \to A$ como aquella función