# PROBLEMAS DE CONEXÃO:ÁRVORES, CAMINHOS E EMPARELHAMENTO

Pesquisa Operacional

Lucas Carvalho da Luz Moura

Ciência da Computação | 02/07/2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS

# Tema Principal

O Capítulo 6 explora alguns conceitos fundamentais da Teoria dos Grafos relacionados a **árvores**, **caminhos** e **emparelhamento**, mostrando como funciona cada um e mostrando exemplos de seus usos na prática. Adicionalmente, o capítulo detalha alguns problemas para serem respondidos. Neste trabalho será feito utilizando **GLPK** e **MathProg**, e baseado em problemas citados nos subcapítulos.

# Algoritmos citados e usados no Capítulo

**1. Árvores:** Quando o foco está na continuidade da conexão e no estabelecimento de uma espinha dorsal sobre um conjunto de pontos demandantes.

**Árvores Geradoras Mínimas (AGM):**

- **Definição**: Uma árvore que conecta todos os vértices de um grafo com o menor custo total de arestas.
- **Algoritmo de Kruskal**: Encontra a AGM ordenando as arestas por peso crescente e adicionando-as sem formar ciclos.
- **Algoritmo de Prim:** Constrói a AGM a partir de um vértice inicial, adicionando a aresta de menor peso que conecta um vértice na árvore a um fora dela.

**2. Caminhos:** Quando o foco está em uma trajetória.

- **Caminho Mínimo:** O caminho de menor peso entre dois vértices em um grafo.
- **Algoritmo de Dijkstra:** Encontra o caminho mais curto de um vértice de origem para todos os outros, aplicável a grafos com pesos não negativos.
- **Algoritmo de Bellman-Ford:** Resolve o problema do caminho mínimo em grafos com pesos negativos, verificando ciclos negativos.

**3. Emparelhamento:** Quando o problema da conexão envolve pequenos grupamentos.
**Definição e Aplicações:**

- **Emparelhamento em grafos bipartidos:** Encontrar o maior conjunto de arestas que não compartilham vértices.
- Aplicações em diversas áreas, como alocação de recursos e logística.
- **Algoritmos de Emparelhamento Máximo:** Algoritmo Húngaro, que é um método eficiente para encontrar o emparelhamento máximo em grafos bipartidos.

# Complexidade dos Algoritmos

Abaixo é apresentado a complexidade dos algoritmos utilizados no capítulo ou citados.

| Algoritmo | Complexidade de Tempo | Observações |
|---|---|---|
| Kruskal | O(E log E) | Ordenação das arestas |
| Prim | O(V^2) ou O(E + V log V) | Fila de prioridade |
| Dijkstra | O(V^2) ou O(E + V log V) | Fila de prioridade |
| Bellman-Ford | O(VE) | |
| Húngaro | O(V^3) | |
| Gale-Shapley | O(n^2) | n é o número de elementos a serem emparelhados |

# Questão 1

- **Problema 1: O Problema das Obras de Saneamento**

Tipo de Problema: Árvore Geradora Mínima (Minimum Spanning Tree)

Encontrar o melhor trajeto para as redes de água e esgoto em um quarteirão, minimizando custos de escavação.

**Requisitos:**

- Rede de água em pelo menos 3 lados e rede de esgoto em todos os lados.
- Canos de esgoto seguem a declividade.
- Canos de água podem ter qualquer trajeto (até 10 lados).
- Minimizar escavações horizontais (mais caras).

O objetivo é encontrar a árvore geradora mínima que conecta todos os nós com o menor custo possível.

- **Problema 2: O Problema do Caminho mais Curto na Cidade Destra**

Tipo de Problema: Problema Caminho Mínimo (Shortest Path Problem)

**Objetivo:** Desenvolver um software para auxiliar motoristas de táxi a encontrarem o caminho mais curto entre sua posição e as chamadas de atendimento em uma cidade com trânsito peculiar:

- **Sem curvas à esquerda:** Os motoristas só podem fazer curvas à direita.
- **Mão dupla:** Todas as ruas são de mão dupla.

**Problema:** Encontrar a rota mais curta entre dois pontos em um grafo com restrições de movimento.

O objetivo é encontrar o caminho mais curto entre dois pontos em uma rede, minimizando a distância total percorrida.

# Questão 3

- **Problema 3: Problema de Reabastecimento de Carros Elétricos:**

Tipo de Problema: Problema do Caixeiro Viajante (Travelling Salesman Problem - TSP)

**Objetivo:** Encontrar a rota ideal para um carro elétrico, considerando a necessidade de recarga em eletropostos, minimizando tempo e distância percorrida.

**Cenário:**

- Cidade com novo sistema de transporte pessoal composto por carros elétricos.
- Carros com autonomia limitada (recarga a cada 2 horas).
- Vários eletropostos disponíveis no centro e cercanias.
- Software no carro para auxiliar na escolha da rota.

**Problema:**

- Encontrar a rota que atenda aos pontos de visita desejados, considerando as paradas para recarga nos eletropostos.
- Minimizar o tempo total de viagem (incluindo tempo de recarga).
- Minimizar a distância total percorrida.

# Questão 4

- **Problema 4: O Problema do Labirinto Bifurcado**

Tipo de Problema: Caminho Mínimo com Janelas de Tempo (Restrições de tempo)

Este problema envolve encontrar o caminho mais curto em um labirinto que possui bifurcações e outras restrições específicas.

**Cenário:**

- Teseu, o herói que escapou do labirinto do Minotauro, está preso em um novo labirinto.
- O labirinto é composto por caminhos que sempre se bifurcam (duas opções a cada passo).
- O rei desafia Teseu a sair do labirinto sem usar um fio de lã ou marcar as paredes.
- A recompensa: a mão da princesa Bela em casamento.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS

# Questão 5

- **Problema 5: O Problema da Rota mais Barata sujeita a Pedágio**

Tipo de Problema: Emparelhamento Máximo (Maximum Matching)

O objetivo é encontrar o maior número de pares (emparelhamentos) possíveis em um grafo bipartido.

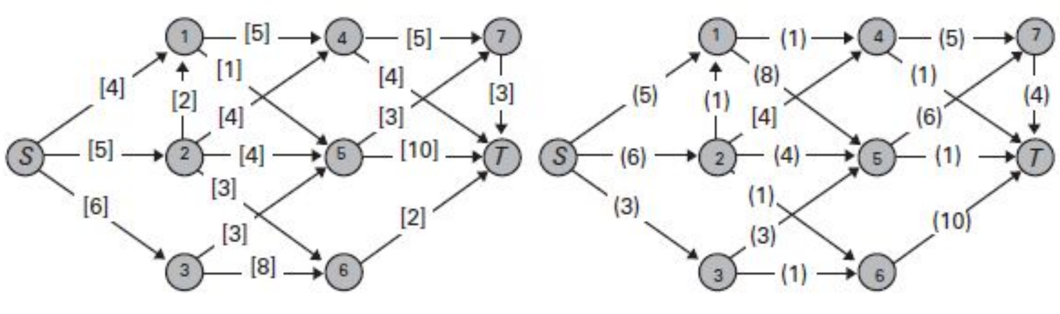
**Cenário:**

- Um carro precisa viajar da cidade S para a cidade T.
- As estradas entre as cidades são pagas por pedágio.
- O custo do pedágio depende do trecho percorrido.
- O objetivo é encontrar o caminho que minimize o custo total de viagem, incluindo o pedágio.

**Problema:**

- Encontrar a rota com a menor soma de distâncias percorridas e tarifas de pedágio.
- Considerar as diferentes tarifas de pedágio para cada trecho da estrada.
- Levar em conta a regra de pedágio: o veículo paga a tarifa do trecho percorrido, descontado o valor pago anteriormente em qualquer trecho administrado pela mesma empresa.

**Exemplo:** A figura na imagem mostra um exemplo de problema. As distâncias entre as cidades e as tarifas de pedágio para cada trecho estão indicadas. O objetivo é encontrar o caminho que vai de S a T com o menor custo total.




(a) Distâncias entre as cidades

(b) Tarifas de pedágio por trechos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS

# Questão 6

- **Problema 6: O Problema da Rede de Comunicação**

Tipo de Problema: Fluxo Máximo (Maximum Flow)

O objetivo é encontrar o fluxo máximo possível de uma origem a um destino em uma rede com restrições de capacidade nos arcos.

- As redes de água devem passar por pelo menos três lados do quarteirão.
- As redes de esgoto devem passar por todos os lados do quarteirão.
- As escavações horizontais são quatro vezes mais caras que as verticais.
- A praça só precisa ser abastecida por água em um lado e não precisa de rede de esgoto.
- Evitar perda de carga na rede de água: ramais com no máximo 10 lados de comprimento (considerando quarteirões retangulares ou oblíquos como dois quarteirões menores).

**Requisitos adicionais:**

- Projetos independentes para água e esgoto.
- Minimizar o uso de escavações, aproveitando as mesmas sempre que possível.
- Os tubos de esgoto devem seguir a declividade do terreno.
- Os tubos de água podem seguir qualquer trajetória (trabalham sob pressão).

**Problema:** Encontrar a configuração de tubulação que atenda a todos os requisitos e minimize o custo total de escavação, considerando os diferentes custos para escavações horizontais e verticais.

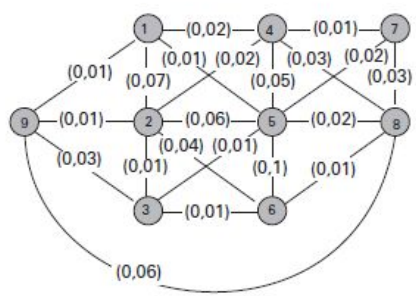



**FIGURA 6.33** *Rede de computadores.*

# Questões 7 e 8

- **Problemas 7 e 8: Rede PERT/CPM**

**Tipo de Problema: Programação de Projeto (Project Scheduling)**

Estes problemas envolvem a utilização das técnicas PERT (Técnica de Avaliação e Revisão de Programa) e CPM (Método do Caminho Crítico) para encontrar o caminho crítico e otimizar o cronograma de um projeto.

**PERT (Project Evaluation and Review Technique):** Estimar o tempo total de um projeto e identificar as atividades críticas (caminho crítico).

**CPM (Critical Path Method):** Otimizar o cronograma do projeto, considerando as dependências entre as atividades e os recursos disponíveis.

**Cenário:**

- Um projeto é composto por diversas atividades inter-relacionadas.
- Cada atividade possui um tempo estimado de duração.
- O objetivo é determinar:
  - O tempo mínimo necessário para concluir o projeto.
  - As atividades que impactam diretamente o tempo total do projeto (caminho crítico).
  - A folga de tempo das atividades não críticas (tempo que podem atrasar sem afetar o projeto).

| Atividade | Duração Otimista | Duração Pessimista | Duração Mais Provável |
|---|---|---|---|
| A (fundação) | 2 dias | 5 dias | 3 dias |
| B (estrutura) | 4 dias | 7 dias | 5 dias |
| C (cobertura) | 3 dias | 6 dias | 4 dias |
| D (acabamentos) | 2 dias | 4 dias | 3 dias |

UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS UFT

# FIM