

Conception d'objets invisibles

Sujet proposé par Lucas Chesnel

Lucas.Chesnel@inria.fr¹

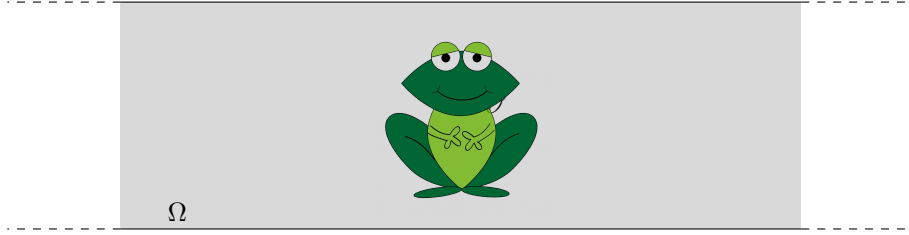


FIGURE 1 – Guide d'ondes comportant un défaut.

Dans ce projet, nous nous intéressons à la propagation d'ondes acoustiques dans un conduit $\Omega = \{z = (x, y) \in \mathbb{R} \times (0; 1)\}$ comportant un objet \mathcal{O} (voir Figure 1) et gouvernée par l'équation

$$\frac{\rho}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \Delta U = F.$$

Ici, U correspond à la pression acoustique, ρ est un paramètre adimensionalisé caractéristique du milieu de propagation, c est la célérité des ondes égale à un dans la suite et F désigne un terme source. Nous supposons que $\rho = 1$ dans $\Omega \setminus \overline{\mathcal{O}}$ avec $\rho \neq 1$ dans Ω . Notre objectif est de trouver des fonctions ρ telles que les ondes se propagent dans Ω comme s'il n'y avait pas de défaut, autrement dit comme si on avait $\rho \equiv 1$.

Lorsque F est de la forme $F(z, t) = \Re e(f(z)e^{-i\omega t})$, on peut chercher U sous la forme $U(z, t) = \Re e(u(z)e^{-i\omega t})$ (régime harmonique en temps). Nous faisons l'hypothèse que les parois du guide sont rigides, ce qui conduit à étudier le problème avec condition de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u - \omega^2 \rho u &= f & \text{dans } \Omega \\ \partial_y u &= 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

1 Problème de diffraction dans un guide d'ondes

Pour compléter le problème (1), il est nécessaire de prescrire des conditions sur le comportement de la solution u en $x = \pm\infty$, comme si l'on imposait des conditions aux limites à l'infini.

Question 1. Supposons $\omega \neq n\pi$, $n \in \mathbb{N}$, et considérons le cas $\rho \equiv 1$, $f \equiv 0$ dans Ω . Montrer qu'à un facteur multiplicatif près, les solutions de (1) de la forme $v(x, y) = \alpha(x)\varphi(y)$ (à variables séparées) sont égales à

$$v_n^\pm(x, y) = \begin{cases} e^{\pm i\sqrt{\omega^2 - (n\pi)^2}x} \cos(n\pi y) & \text{pour } n \in \mathbb{N}, n < \omega/\pi \\ e^{\mp i\sqrt{(n\pi)^2 - \omega^2}x} \cos(n\pi y) & \text{pour } n \in \mathbb{N}, n > \omega/\pi. \end{cases}$$

Revenons à la situation $\rho \neq 1$. Nous faisons l'hypothèse que $\rho \in L^\infty(\Omega)$ est une fonction à valeurs réelles telle que $\rho \geq 0$ dans Ω et $\rho = 1$ pour $|x| \geq L$, $L > 0$ étant une constante donnée. De plus,

1. N'hésitez pas à me contacter si vous avez des questions.

nous supposons $0 < \omega < \pi$. Dans ce cas, $v_0^+ = e^{i\omega x}$ (resp. $v_0^- = e^{-i\omega x}$) est une onde se propageant de $-\infty$ (resp. $+\infty$) vers $+\infty$ (resp. $-\infty$)². Nous nous intéressons au problème de diffraction de l'onde incidente $u_i := e^{i\omega x}$ par l'objet \mathcal{O} . Nous acceptons le fait que toute solution de (1) se décompose sur les v_n^\pm pour $|x| > L$. En outre, nous prescrivons le comportement de u en $x = \pm\infty$, en imposant au champ diffracté³ $u_s = u - u_i$ d'être sortant, autrement dit de se décomposer uniquement sur les v_n^\pm pour $\pm x > L$. Finalement, cela nous amène à étudier le problème

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_{\text{loc}}^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \Delta u + \omega^2 \rho u = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \partial_y u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (2)$$

avec
$$u_s = u - u_i = \begin{cases} s^- e^{-i\omega x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n^- e^{+\sqrt{(n\pi)^2 - \omega^2} x} \cos(n\pi y) & \text{pour } x < -L \\ s^+ e^{+i\omega x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n^+ e^{-\sqrt{(n\pi)^2 - \omega^2} x} \cos(n\pi y) & \text{pour } x > L, \end{cases}$$

où s^\pm , α_n^\pm sont des constantes de \mathbb{C} . Ici $H_{\text{loc}}^1(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions qui appartiennent à $H^1(D)$ pour tout domaine borné $D \subset \Omega$. Dans la littérature, on appelle *coefficient de réflexion* et *coefficient de transmission* les quantités $R = s^-$, $T = 1 + s_+$.

Question 2. En multipliant par \bar{u} l'équation volumique de (2) et en intégrant par parties sur le domaine $\Omega_L := \{(x, y) \in \Omega \mid |x| < L\}$, établir la relation

$$|R|^2 + |T|^2 = 1 \quad (\text{conservation d'énergie}). \quad (3)$$

Question 3. Montrer que l'on a

$$R = \int_{\{-L\} \times (0;1)} u_s(z) e^{-i\omega L} dy, \quad T = \int_{\{L\} \times (0;1)} u(z) e^{-i\omega L} dy. \quad (4)$$

Ces formules permettront de calculer R , T numériquement.

Question 4. Définissons $\Sigma_L = \{-L\} \times (0;1) \cup \{+L\} \times (0;1)$. Calculer les quantités

$$I^\pm = \int_{\Sigma_L} \frac{\partial u_s(z)}{\partial n} \overline{e^{\pm i\omega x}} - u_s(z) \frac{\overline{\partial e^{\pm i\omega x}}}{\partial n} dy$$

où $\partial_n = \pm \partial_x$ en $x = \pm L$. En déduire que l'on a aussi

$$R = \frac{i\omega}{2} \int_{\mathcal{O}} (\rho(z) - 1) u(z) e^{+i\omega x} dz. \quad (5)$$

Le caractère non borné du domaine Ω ne permet pas d'appliquer directement les méthodes éléments finis vues en cours pour calculer une approximation numérique de u solution de (2). Dans la suite, nous allons expliquer comment approcher $u|_{\Omega_L}$. Pour cela, il faut déterminer des conditions aux limites bien choisies sur Σ_L .

Question 5. Montrer qu'on a $\frac{\partial u_s}{\partial n} = T^\pm u_s$ sur $\{\pm L\} \times (0;1)$ où T^\pm désignent les opérateurs de Dirichlet-to-Neumann défini par

$$T^\pm u_s = \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n \int_{\{\pm L\} \times (0;1)} u_s(z) \cos(n\pi y) dy \cos(n\pi y).$$

Dans ces expressions, $\beta_n \in \mathbb{C}$ désignent des constantes dont on donnera la valeur.

2. Pour comprendre cette phrase, il faut revenir en temps et étudier le comportement de $(z, t) \mapsto v_0^\pm(z) e^{-i\omega t}$.

3. « Diffracté » se dit « scattered » en anglais, d'où l'indice $_s$.

Question 6. Établir que si u vérifie (2) alors $u_s = u - u_i$ est solution d'un problème variationnel

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u_s \in H^1(\Omega_L) \text{ tel que} \\ a(u_s, v) = \ell(v), \quad \text{pour tout } v \in H^1(\Omega_L). \end{array} \right. \quad (6)$$

On donnera l'expression des formes a et ℓ . Réciproquement, montrer que si u_s vérifie (6) alors $u = u_s + u_i$ se prolonge en une solution de (2).

Question 7. En utilisant le théorème de représentation de Riesz, introduisons l'opérateur borné $A : H^1(\Omega_L) \rightarrow H^1(\Omega_L)$ tel que $(A\varphi, \varphi')_{H^1(\Omega_L)} = a(\varphi, \varphi')$ pour tout $\varphi, \varphi' \in H^1(\Omega_L)$. Montrer que A se décompose sous la forme $A = \mathcal{J} + K$, où $\mathcal{J} : H^1(\Omega_L) \rightarrow H^1(\Omega_L)$ est un isomorphisme et $K : H^1(\Omega_L) \rightarrow H^1(\Omega_L)$ un opérateur compact. On pourra s'aider du début de l'annexe ci-dessous. Les curieux pourront essayer de déduire de cette décomposition que A a un noyau de dimension finie.

Avec l'alternative de Fredholm, ce résultat permet de prouver que (6) possède une unique solution dès lors que A est injectif (comme en dimension finie). Par ailleurs, on peut établir, cela demande un peu plus de travail, que A est injectif pour tout $k \in (0; \pi) \setminus \mathcal{E}$ où \mathcal{E} est un ensemble discret sans point d'accumulation. Dorénavant, nous supposons que $k \notin \mathcal{E}$ de sorte que (6), et donc (2) admet une unique solution.

2 Invisibilité

Dans la suite, notre objectif est de construire une fonction ρ telle que $\rho - 1$ soit à support dans $\overline{\mathcal{O}}$ et telle que $R = 0$. Dans une telle situation, l'amplitude du champ diffracté par l'objet est exponentiellement décroissante en $-\infty$ et pour un observateur situé en $x = -\infty$ produisant l'onde incidente $u_i = e^{i\omega x}$, tout se passe comme s'il n'y avait pas d'objet dans le guide d'ondes.

Nous allons chercher un matériau de l'objet tel que ρ soit une petite perturbation du milieu de référence. Plus précisément, nous allons chercher ρ sous la forme $\rho = \rho^\varepsilon = 1 + \varepsilon\mu$ où ε est un petit paramètre et où μ est une fonction à support dans $\overline{\mathcal{O}}$ à déterminer. Nous noterons $u^\varepsilon, R^\varepsilon$ les quantités définies en (2), (5) avec ρ remplacé par ρ^ε .

Question 8. En décomposant u^ε sous la forme $u^\varepsilon = u_i + u_s^\varepsilon$ et en utilisant (5), montrer que

$$R^\varepsilon = \varepsilon dR^\varepsilon(0)(\mu) + \varepsilon \tilde{R}^\varepsilon \quad \text{avec} \quad dR^\varepsilon(0)(\mu) = \frac{i\omega}{2} \int_{\mathcal{O}} \mu(z) e^{+2i\omega x} dz,$$

où \tilde{R}^ε désigne un reste dont on donnera l'expression. On peut prouver que lorsqu'on effectue une perturbation d'ordre ε du milieu, $\|u_s^\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})}$ est en $O(\varepsilon)$. Cela permet de montrer que $\tilde{R}^\varepsilon = O(\varepsilon)$ et justifie le fait que \tilde{R}^ε est bien un « reste » dans ce développement de Taylor.

Pour fixer les idées, prenons $\mathcal{O} = (-1; 1) \times (1/4; 3/4)$ et divisons ce domaine en quatre briques (voir Figure 2)

$$\begin{array}{ll} \mathcal{O}_1 = (-1; -1/2) \times (1/4; 3/4) & \mathcal{O}_3 = (0; 1/2) \times (1/4; 3/4) \\ \mathcal{O}_2 = (-1/2; 0) \times (1/4; 3/4) & \mathcal{O}_4 = (1/2; 1) \times (1/4; 3/4). \end{array} \quad (7)$$

De plus, nous imposons à μ (et donc à ρ) de prendre des valeurs constantes réelles μ_i sur $\mathcal{O}_i, i = 1, \dots, 4$. Cela nous conduit à définir l'espace $X := \{\varphi \in L^\infty(\Omega) \mid \varphi|_{\mathcal{O}_i} = \text{cste réel et } \varphi = 0 \text{ dans } \Omega \setminus \overline{\mathcal{O}}\}$

Question 9. Trouver des fonctions $\mu^0, \mu^1, \mu^2 \in X \setminus \{0\}$ telles que

$$dR^\varepsilon(0)(\mu^0) = 0, \quad dR^\varepsilon(0)(\mu^1) = 1, \quad dR^\varepsilon(0)(\mu^2) = i. \quad (8)$$

Nous supposons à présent que les fonctions $\mu^0, \mu^1, \mu^2 \in X \setminus \{0\}$ sont fixées satisfaisant (8). On cherche μ sous la forme

$$\mu = \mu^0 + \tau^1 \mu^1 + \tau^2 \mu^2 \quad (9)$$

où τ_1, τ_2 sont des nombres réels à déterminer.

Question 10. Prouver que $R^\varepsilon = 0$ si et seulement si $\vec{\tau} = (\tau^1, \tau^2)^T$ vérifie un problème de la forme

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } \vec{\tau} \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que} \\ \vec{\tau} = G^\varepsilon(\vec{\tau}), \end{array} \right. \quad (10)$$

où l'on donnera l'expression de G^ε , application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 , en fonction de \tilde{R}^ε . On admettra dans la suite que pour tout $R > 0$ donné, l'application $\vec{\tau} \mapsto G^\varepsilon(\vec{\tau})$ est une contraction de $\overline{B(O, R)}$ dans $\overline{B(O, R)}$ pour ε suffisamment petit. Cela permet de montrer avec le théorème de point fixe de Banach que (10) admet une unique solution dans $\overline{B(O, R)}$.

Question 11. Montrer que le μ ainsi construit est non identiquement nul, de sorte que $\rho \neq 1$ (on a bien construit une brique invisible qui n'est pas la brique nulle).

Question 12. Quelle est la dimension de l'espace des $\rho \in L^\infty(\Omega)$ tels que $R = 0$ et tels que $\rho - 1$ soit à support dans $\overline{\mathcal{O}}$?

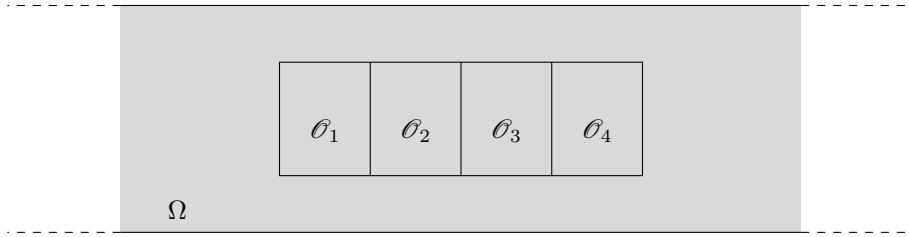


FIGURE 2 – Représentation de l'obstacle dans le guide d'ondes.

3 Mise en œuvre numérique

Question 13. Écrire un code de calcul *Freefem++* permettant d'approcher la solution du problème de diffraction (6). On prendra $\rho = 2$ dans l'obstacle \mathcal{O} défini en (7). On utilisera la base de code donnée à la fin de ce document. Calculer numériquement les coefficients R, T à l'aide des formules (4) et vérifier que la conservation d'énergie (3) est satisfaite (à une erreur d'approximation près).

Pour résoudre le problème de point fixe (10), on va procéder par récurrence. Posons $\vec{\tau}_0 = (0, 0)^T$ et, pour $n \geq 0$, définissons $\vec{\tau}_{n+1} = G^\varepsilon(\vec{\tau}_n)$. Lorsque $|\vec{\tau}_{n+1} - \vec{\tau}_n| \leq \eta$, où η est un critère donné (et petit), le point fixe a convergé et nous avons obtenu une bonne approximation de la solution de $\vec{\tau} = G^\varepsilon(\vec{\tau})$. Dans la suite, nous notons $R_n^\varepsilon, u_n^\varepsilon, \rho_n^\varepsilon$ les quantités introduites précédemment avec μ remplacé par $\mu_n = \mu^0 + \tau_n^1 \mu^1 + \tau_n^2 \mu^2$ (formule (9)). Observer qu'à chaque étape de l'itération, il faut calculer R_n^ε , ce qui nécessite de résoudre numériquement (6).

Question 14. Exprimer $\vec{\tau}_{n+1}$ en fonction de $\vec{\tau}_n, \varepsilon$ et R_n^ε .

Question 15. Coder en *Freefem++* l'algorithme de point fixe. On pourra débiter avec $\varepsilon = 0.1$ et diminuer la valeur si l'algorithme ne converge pas (on rappelle que G^ε est une contraction pour ε suffisamment petit). Pour le critère d'arrêt η , on prendra $\eta = 10^{-5}$. On veillera en outre à imposer un nombre maximum d'itérations dans la boucle, disons 50. Lorsque l'algorithme aura convergé, on affichera ρ ainsi que $\Re u_s, \Im u_s$ pour vérifier que le champ diffracté en $-\infty$ est exponentiellement décroissant. On pourra également tracer la courbe $n \mapsto R_n^\varepsilon$. Commenter les résultats obtenus.

Question 16 (optionnelle). Proposer une méthode pour construire un ρ tel que $T = 1$. Dans ce cas, l'objet est invisible pour l'observateur générant l'onde incidente $u_i = e^{i\omega x}$ et mesurant le champ diffracté à la fois en $-\infty$ et en $+\infty$.

4 Annexe

4.1 Compléments pour la question 7

i) Définissons l'espace

$$H^{1/2}(\Sigma_L) := \{\varphi \in L^2(\Sigma_L) \mid \sum_{n=0}^{+\infty} (1 + |\lambda_n|^{1/2})^2 (|a_n^+|^2 + |a_n^-|^2) < +\infty\},$$

où $a_n^\pm := \int_{\{\pm L\} \times]0;1[} \varphi(\pm L, y) \cos(n\pi y) dy$ et $\lambda_n = n\pi$. On peut montrer que cet espace est un Hilbert pour le produit scalaire

$$(\varphi, \psi)_{H^{1/2}(\Sigma_L)} := \sum_{n=0}^{+\infty} (1 + |\lambda_n|^{1/2})^2 (a_n^+ \overline{b_n^+} + a_n^- \overline{b_n^-}),$$

où $b_n^\pm := \int_{\{\pm L\} \times]0;1[} \psi(\pm L, y) \cos(n\pi y) dy$.

En procédant comme dans l'exercice sur la trace vu en PC5, on peut établir un résultat de continuité de la trace de $H^1(\Omega_L)$ dans $H^{1/2}(\Sigma_L)$. C'est un résultat plus fin que la continuité de la trace de $H^1(\Omega_L)$ dans $L^2(\Sigma_L)$. En particulier, il existe $C > 0$ telle que

$$\|\varphi\|_{H^{1/2}(\Sigma_L)} \leq C \|\varphi\|_{H^1(\Omega_L)}, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega_L).$$

ii) Le théorème de Lax-Milgram pour une forme sesquilinéaire $c(\cdot, \cdot)$ sur un espace de Hilbert X est encore valable si l'on suppose seulement que $\Re c(\cdot, \cdot)$ est coercive sur $X \times X$, autrement dit, s'il l'on suppose qu'il existe $\alpha > 0$ telle que

$$\Re c(u, u) \geq \alpha \|u\|_X^2, \quad \forall u \in X.$$

On pourra vérifier que si $c(\cdot, \cdot)$ est une forme sesquilinéaire coercive (au sens ci-dessus) continue sur $X \times X$, alors l'opérateur $C : X \rightarrow X$ tel que

$$(C\varphi, \varphi')_X = c(\varphi, \varphi'), \quad \forall \varphi, \varphi' \in X,$$

est un isomorphisme, autrement dit un opérateur linéaire continu bijectif d'inverse continu.

iii) On dit qu'un opérateur linéaire $K : X \rightarrow X$ est compact si de toute suite (u_n) bornée dans X , on peut extraire une sous-suite (v_n) telle que (Kv_n) converge dans X .

4.2 Compléments pour la partie numérique

Le code ci-dessous, à compléter et à adapter, permet de résoudre le problème de diffraction (6). Le défaut dans le guide est ici un disque dans lequel ρ vaut 2.

```
real R=4;           //domaine [-R;R]x[0;1]
real rho=2; //coefficient physique du defect
border a(t=-R,R)x =t; y = 0; label = 1;
border b(t=0,1)x =R; y = t; label = 2; //reference 2 sur le bord droit
border c(t=-R,R)x =-t; y = 1; label = 1;
border d(t=0,1)x =-R; y = 1-t; label = 3; //reference 3 sur le bord gauche
border Defaut(t=0,2*pi) x=0.3*cos(t); y=0.5+0.3*sin(t); label = 1; //MODIFIER ICI
mesh ThDefaut=buildmesh(Defaut(50));
mesh ThSansDefaut=buildmesh(a(200)+b(20)+c(200)+d(20)+Defaut(-50));
mesh Th = ThDefaut+ThSansDefaut;
plot(Th,wait=1,cmm="Appuyer sur Enter pour poursuivre");
fespace Vh(Th,P2); // espace elements finis
```

```

real w=0.8*pi; // frequence de travail
func uifonc=exp(1i*w*x);

// DEBUT DE LA PARTIE A NE PAS MODIFIER
/*****
Construction des Dirichlet-to-Neumann
*****/
int nbfpro = 15; //troncature dans le Dirichlet-to-Neumann
//fonction de la base de fourier
func complex expin(real x1,real x2, int n)
{
    if (n==0)
        return 1.;
    else
        return (sqrt(2.)*cos(n*pi*x2));
}
/*****
Dirichlet-to-Neumann à gauche
*****/
complex[int,int] vDtNG( Vh.ndof, nbfpro);
matrix<complex> DtNG;
for (int n=0;n<nbfpro;n++)
{
    func f= expin(x,y,n);
    varf FiniFourier(u,v) = int1d(Th,3)(v*f);
    complex[int] temp = FiniFourier(0,Vh);
    vDtNG(:,n)=temp;
}
DtNG=vDtNG;
// Construction de la matrice diagonale pour construire les EFL
matrix<complex> DG;
complex[int] diagofDG(nbfpro);
for (int n =0;n<nbfpro;n++)
{
    if (n==0)
        diagofDG[n] = -1i*w; // moins car dans la formu. varia., il y a un moins
    else
        diagofDG[n] = sqrt((n*pi)^2-w^2); // moins car dans la formu. varia., il y a un moins
}
DG = [diagofDG];
// Assemblage final et réorganisation pour intégration dans la formulation variationnelle
matrix<complex> EFLG ;
EFLG = DtNG*DG;
EFLG= EFLG*DtNG';

/*****
Dirichlet-to-Neumann à droite
*****/
complex[int,int] vDtND( Vh.ndof, nbfpro);
matrix<complex> DtND;
for (int n=0;n<nbfpro;n++)
{
    func f= expin(x,y,n);
    varf FiniFourier(u,v) = int1d(Th,2)(v*f); // integration sur le bord droit
    complex[int] temp = FiniFourier(0,Vh);
    vDtND(:,n)=temp;
}
DtND=vDtND;
matrix<complex> DD;
complex[int] diagofDD(nbfpro);
for (int n =0;n<nbfpro;n++)

```

```

{
    if (n==0)
        diagofDD[n] = -1i*w;
    else
        diagofDD[n] = sqrt((n*pi)^2-w^2);
}
DD = [diagofDD];
matrix<complex> EFLD ;
EFLD = DtND*DD;
EFLD= EFLD*DtND';
// FIN DE LA PARTIE A NE PAS MODIFIER

/*****
On passe à la formulation variationnelle
*****/
Vh<complex> us,u,v,ui=uifonc;
matrix<complex> A,B;
complex[int] F(Vh.ndof);
varf aForme(us,v) = ; //MODIFIER ICI
//Attention, le terme en grad grad doit être précédé d'un signe +
//pour que ce soit cohérent avec le signe des Dirichlet-to-Neumann
varf lForme(us,v) = ; //MODIFIER ICI
A= aForme(Vh,Vh);
B= A+EFLD+EFLG; //on rajoute les Dirichlet-to-Neumann
set(B,solver=UMFPACK);
F= lForme(0,Vh);
us[]=B^-1*F;
Vh uReel=real(us+ui);
plot(uReel,fill=1,dim=2,nbiso=40, value=10,wait=1,cmm="Re u");

```