

**Breve introduzione
all'elaborazione digitale dei
segnali su unità di misura
inerziali**

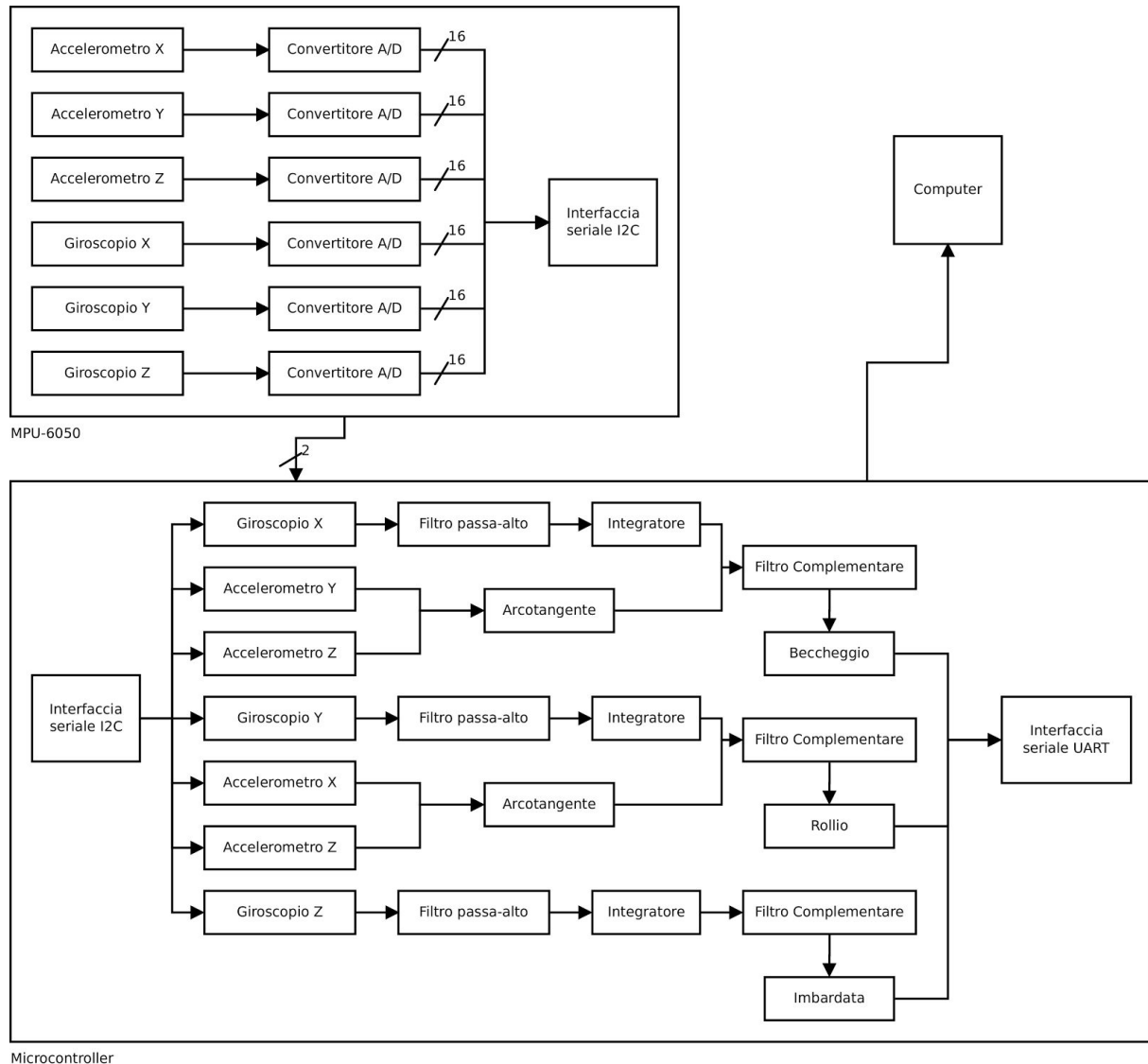
A cura di

Luca Anastasio e Ottorino Colantoni

1. Introduzione:

L'elaborazione digitale dei segnali (DSP) si rende necessaria sulle unità di misura inerziale (IMU) per ottenere una buona stima della posizione angolare. Un noto problema di questi sensori è la qualità dei dati provenienti da accelerometro e giroscopio: l'accelerometro fornisce una stima dell'accelerazione gravitazionale, ma è estremamente sensibile alle vibrazioni e restituisce sempre un segnale rumoroso, perciò risulta affidabile soltanto nel lungo termine; il giroscopio fornisce una stima della velocità angolare, ma restituisce sempre una misura diversa da zero (deriva) anche dopo il termine della sollecitazione e perciò risulta affidabile solo nel breve termine.

Di seguito lo schema a blocchi sintetizza il percorso dei segnali e dei dati:



I sistemi IMU, nello specifico i sistemi MEMS (micro electro-mechanical system), utilizzano sensori piezoelettrici che come è noto generano una differenza di potenziale se sollecitati meccanicamente. L'integrato MPU-6050 della InvenSense che è stato utilizzato nell'esperimento contiene 3 giroscopi e 3 accelerometri, uno per ogni asse, ciascuno corredato da relativo convertitore A/D a 16 bit. I dati vengono raccolti dall'interfaccia seriale I²C (Inter Integrated Circuit) che comunica con il microcontrollore (Arduino Nano con Atmel ATmega328) attraverso un bus a 2 fili. Il microcontrollore richiede ed elabora tali dati e li invia al PC tramite porta seriale UART (universal asynchronous receiver transmitter) dove possono essere visualizzati su un grafico real-time (Plotter seriale dell'IDE Arduino) oppure su un'interfaccia tridimensionale realizzata in Java con l'IDE Processing.

2. Scelte progettuali

Quando è possibile far uso di un algoritmo ottimo, in questi casi spesso la scelta ricade sul filtro di Kalman, che con un attento (e complesso) settaggio è in grado di ricavare una stima precisa dello stato del sistema a partire da misure rumorose ma correlate. Data la scelta di un hardware molto semplice (CPU con architettura AVR a 8 bit, frequenza di clock 16 MHz, 2 KB di RAM, senza unità floating-point (FPU)) non è sempre possibile implementare l'algoritmo ottimo, poiché oltre al filtraggio dei dati spesso si demanda al microcontrollore di svolgere anche altre attività (in questo caso la comunicazione seriale, ma potrebbe essere ad esempio la stabilizzazione di un drone); si ricade perciò su scelte computazionalmente meno impegnative. Si potrebbe considerare l'utilizzo di un filtro ideale a risposta impulsiva finita (paragrafo successivo) ma, a seconda dell'ordine, il calcolo della risposta richiede tempo e quantità di memoria relativamente elevati per l'elaborazione dei campioni. Per mantenere un tempo di risposta che si possa considerare real-time e un utilizzo molto basso della memoria l'esperimento prevede l'utilizzo di un filtro a risposta impulsiva infinita, il filtro esponenziale complementare e di aritmetica fixed-point.

3. Cenni teorici sui filtri digitali

Nella Teoria dei Segnali un filtro digitale è un filtro che permette l'elaborazione di campioni di segnali a tempo discreto. Si possono considerare come casi particolari di sistemi LTI causali. Per spiegare i vantaggi dei filtri digitali possiamo partire da un esempio pratico:

In un canale di trasmissione digitale, se si vuole trasmettere un segnale analogico, questo deve essere prima campionato con un convertitore A/D e trasmesso, poi in fase di ricezione deve essere riconvertito e interpolato. Per evitare artefatti quale l'aliasing deve essere rispettata la condizione imposta dal teorema del campionamento, inoltre, per una corretta ricostruzione del segnale originale il filtro interpolatore deve avere una frequenza di taglio pari alla metà della frequenza di campionamento e una banda di transizione molto stretta. Per ottenere tale effetto con un filtro analogico bisogna ricorrere ad un filtro di ordine elevato con conseguente aumento del costo e della complessità, mentre un filtro digitale dello stesso ordine risulterebbe di più facile implementazione e minor costo. Inoltre i filtri digitali possono essere riprogrammati via software (mentre per cambiare la risposta di un filtro analogico bisogna intervenire sull'hardware) anche in tempo reale.

Un altro esempio molto importante sono le finestre da applicare ai segnali campionati prima di eseguirne la FFT.

Le due categorie di filtri digitali sono:

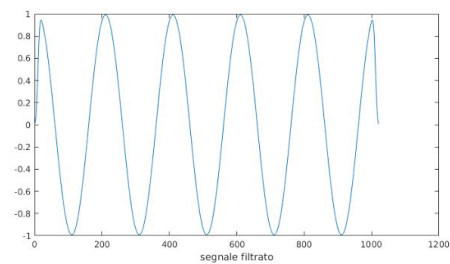
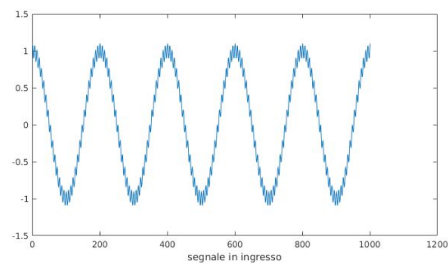
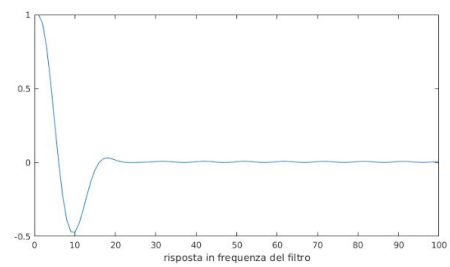
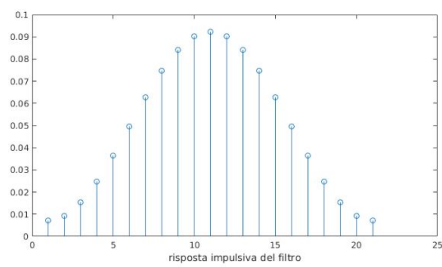
- I. I filtri FIR (Finite Impulse Response), in cui l'uscita è la somma pesata degli ultimi campioni, dove il numero di campioni corrisponde all'ordine del filtro. Hanno risposta in fase lineare.
- II. I filtri IIR (Infinite Impulse Response), in cui l'uscita è la combinazione lineare di precedenti uscite e ingressi. Non hanno risposta in fase lineare e possono presentare problemi di instabilità se non progettati correttamente.

Dove è necessaria una risposta in fase lineare è preferibile l'impiego di un filtro FIR, mentre dove si può tollerare una distorsione di fase è preferibile l'impiego di un filtro IIR considerando che richiedono una complessità computazionale minore rispetto ad un filtro FIR con performance simili.

- Esempio FIR: Filtro passa-basso

Utilizzando il comando `fir1(n, f)` di MATLAB è possibile ottenere un vettore contenente la risposta impulsiva di un filtro FIR secondo le specifiche: n è l'ordine del filtro e f è la frequenza di taglio normalizzata (frequenza di taglio diviso frequenza di Nyquist, compresa tra 0 e 1), la finestra predefinita che viene applicata al filtro è la Hamming.

Nell'esempio viene visualizzata l'azione del filtro su un segnale composto da una sinusoide a cui viene sommata una seconda sinusoide a frequenza più alta della frequenza di taglio, tale segnale viene posto a convoluzione con la risposta impulsiva del filtro.



- Esempio IIR: Filtro esponenziale

Il filtro esponenziale è il più semplice filtro IIR, la caratteristica di trasferimento ingresso-uscita è data da:

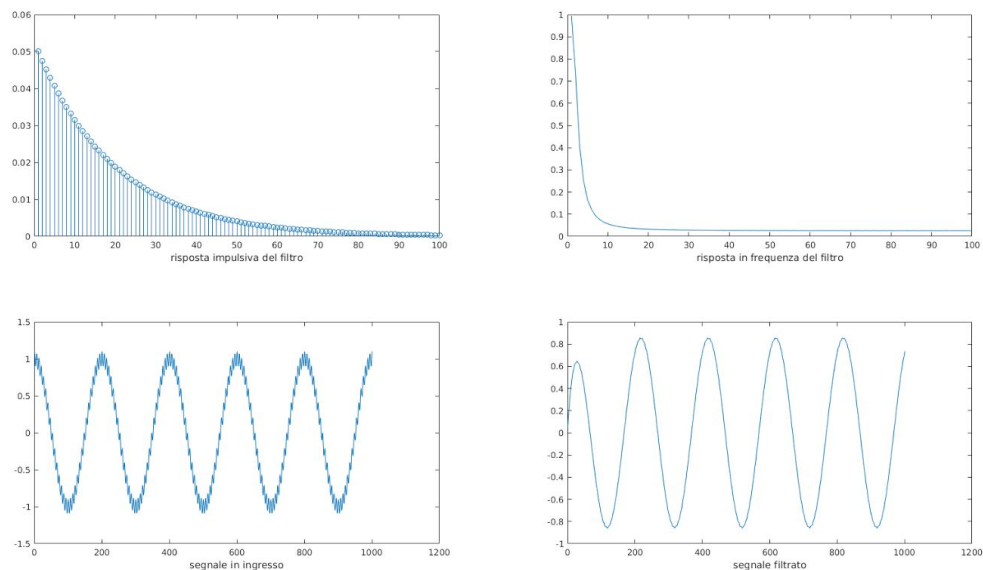
$$y(k) = a * y(k-1) + (1-a) * x(k)$$

Dove:

- $y(k)$ è l'uscita filtrata al passo k ;
- $y(k-1)$ è l'uscita filtrata al passo precedente;
- $x(k)$ è l'ultimo ingresso ricevuto;
- a è la costante di smorzamento compresa tra 0 e 1, i valori comuni variano tra 0,8 e 0,99;

La costante a è data da: $a = e^{-T/\tau}$ dove T è l'intervallo di campionamento, e τ è la costante di tempo del filtro.

Se il filtro è inizializzato a 0 la risposta all'impulso ha il seguente andamento:



Come si può notare è esattamente un andamento esponenziale decrescente, il vantaggio di questo filtro è che ha un solo parametro di configurazione e l'occupazione di memoria è pari alla dimensione di una sola variabile.

4. Implementazione

Per combinare i segnali ricevuti da accelerometro e giroscopio si utilizza una particolare versione (che esegue contemporaneamente un filtraggio passa-alto del segnale del giroscopio e un filtraggio passa-basso del segnale dell'accelerometro) del filtro esponenziale, chiamata appunto filtro complementare. L'espressione di tale filtro è la seguente:

$$y(k) = a * (y(k-1) + x(k) * \Delta t) + (1-a) * z(k)$$

Dove:

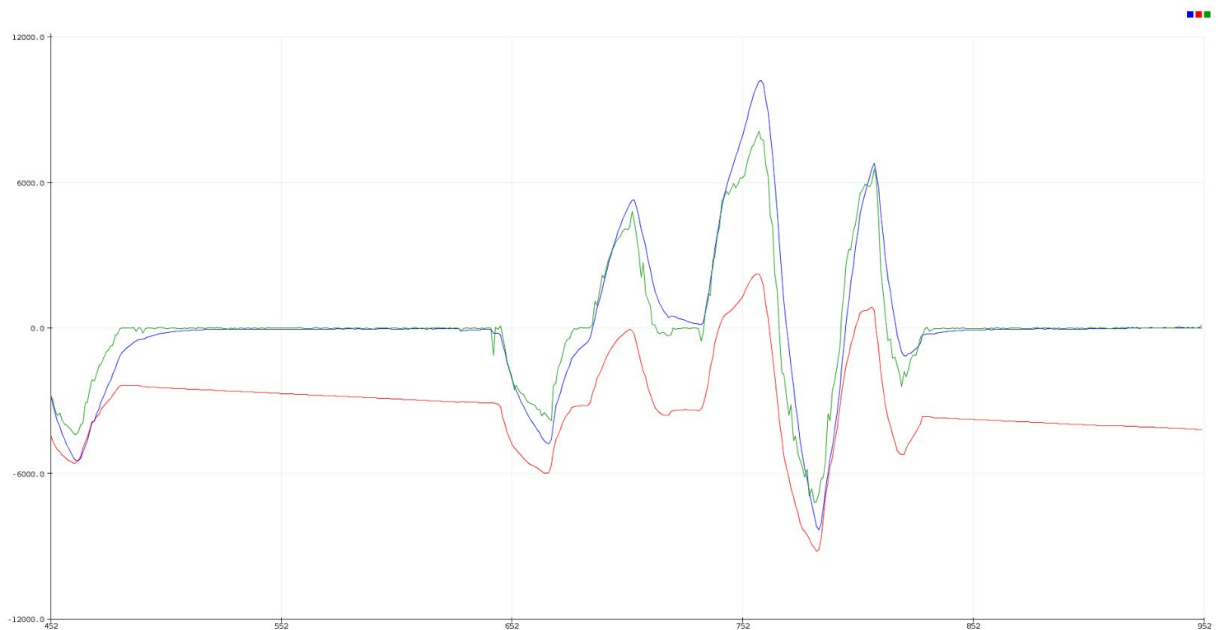
- $y(k)$ è l'uscita filtrata al passo k ;
- a è il fattore di smorzamento;
- $y(k-1)$ è l'ultima uscita calcolata;
- $x(k)$ è l'ultimo valore letto da uno degli assi del giroscopio;
- Δt è l'intervallo di tempo che intercorre tra k e $k-1$;
- $z(k)$ è l'angolo calcolato dai restanti due assi dell'accelerometro, dato da $\tan^{-1}(\frac{b(k)}{c(k)})$

Nonostante l'azione filtrante del filtro complementare, è stato aggiunto un filtro passa-alto selettivo al segnale proveniente dal giroscopio per rimuovere l'offset causato dalla deriva.

5. Risultato

Nel seguente grafico è possibile distinguere la stima dell'angolo ricavata attraverso tre differenti tecniche:

- in **blu** usando il filtro complementare;
- in **rosso** usando solo il giroscopio;
- in **verde** usando solo l'accelerometro.



Come è possibile notare, la stima dell'angolo ottenuta con l'uso del solo accelerometro è corretta ma contiene rumore ed eventuali vibrazioni, mentre quella ottenuta con l'uso del solo giroscopio ha una consistente deriva (che dipende dalla temperatura e dalle sollecitazioni) ma non contiene rumore. Grazie ad una costante di tempo e ad un periodo di campionamento relativamente elevati è possibile visualizzare: l'azione dell'integrazione, più rapida poiché moltiplicata per una costante tendente all'unità; l'azione correttiva dell'accelerometro, più lenta poiché moltiplicata per una costante molto più piccola dell'unità.