Homework 3 - Risk Management

Università: Politecnico di Torino

Corso: Metodi quantitativi per la gestione del rischio

A.A. 2020/2021

Prof.: Paolo Brandimarte

Autori: Luca Bajardi e Francesca Collini

Indice

Sommario

Si suppone di conoscere una distribuzione di probabilità per i rendimenti di un portafoglio, tuttavia in generale, non si è in grado di conoscere i parametri esatti della distribuzione. Una possibile strategia è quella di andare a stimare, tramite simulazioni Monte Carlo, questi parametri, consapevoli del fatto che si commetteranno degli errori. Lo scopo principale di questo progetto è verificare l'impatto degli errori su un portafoglio, andando a confrontare i rendimenti che si otterrebbero se si potessero conoscere i valori veri, che caratterizzano la distribuzione, e quello che si ottiene andando a stimare questi parametri. È importante notare come nella stima entrino in gioco numerosi fattori come il numero di campioni che estraiamo dalla nostra distribuzione, il valore del coefficiente di avversione al rischio e il vincolo sulla vendita allo scoperto. Inoltre, si è confrontato il rendimento del portafoglio ottimo che otteniamo andando a stimare i parametri con quello del portafoglio con i pesi uguali in ogni asset e con quello a minima varianza. Si analizza anche nel dettaglio quale sia l'impatto degli errori sui premi per il rischio di un portafoglio. Infine, per osservare più nel dettaglio quale sia l'effetto degli errori sulla distribuzione della ricchezza terminale, si è si è analizzato anche cosa accade quando è possibile aggiornare i pesi al termine di ogni settimana.

Introduzione

L'obiettivo principale di questo progetto è quello di generare dei dataset di rendimenti a partire da una distribuzione nota e verificare l'impatto degli errori di stima sulla ricchezza terminale di un investimento.
Per farlo, andremo a confrontare il portafoglio teoricamente ottimo, con quello ricavato dopo aver stimato i parametri. Prima di tutto, andiamo ad importare dei dati reali relativi ad alcuni stock di discreta rilevanza in finanza. Così facendo, il nostro portafoglio avrà dei pesi in stock reali e potremmo avere un'idea verosimile di

quello che accade quando si va ad investire in questi ultimi. I valori dei titoli azionari sono stati estratti dal sito ufficiale del Nasdaq, selezionando le *Most Popular Historical Data Pages*. Nello specifico il nostro portafoglio sarà costituito al più da dieci diversi asset, ciascuno relativo ad una compagnia. Le compagnie che abbiamo scelto sono (con i rispettivi simboli):

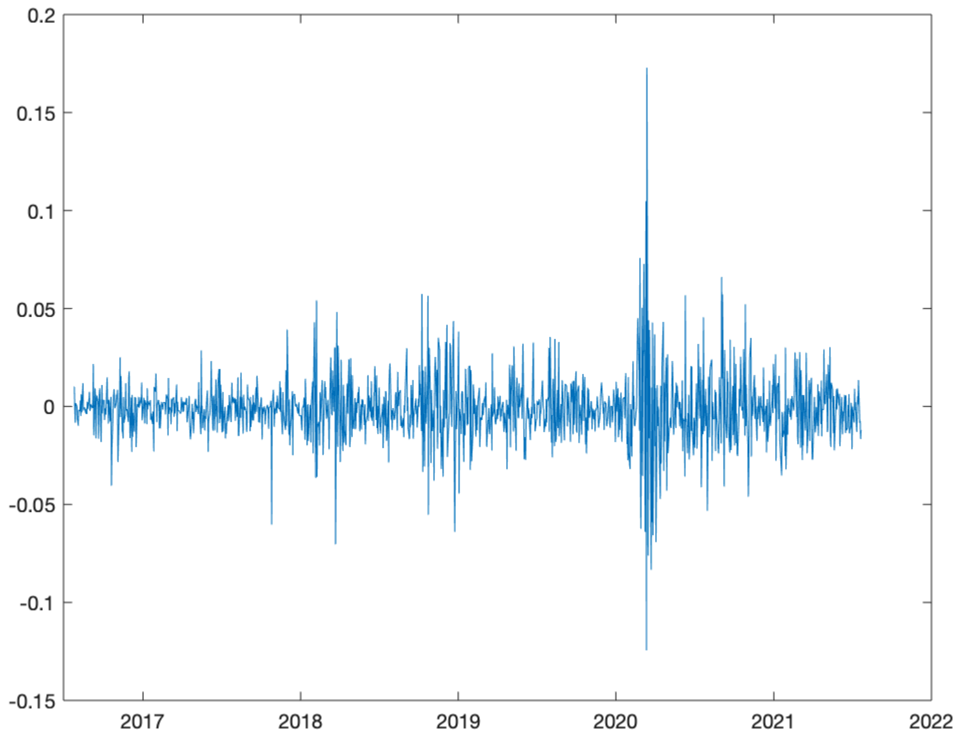
Simbol	Company
AAPL	*Apple, Inc.*
SBUX	*Starbucks, Inc.*
MSFT	*Microsoft, Inc.*
CSCO	*Cisco Systems, Inc.*
QCOM	*QUALCOMM Incorporated*
FB	*Facebook, Inc.*
AMZN	*Amazon.com, Inc.*
TSLA	*Tesla, Inc.*
AMD	*Advanced Micro Devices, Inc.*
ZNGA	*ZyngaInc.*

I dati sono relativi all’indice di chiusura delle diverse compagnie negli ultimi 5 anni per tutti i giorni lavorativi, che per ciascun anno corrispondono a circa 250. Ad esempio, possiamo osservare il comportamento dell'indice per la compagnia Microsoft, negli ultimi 5 anni, con la variazione giornaliera. Dal grafico possiamo notare un periodo di alta volatilità nella prima metà del 2020 causato dalla pandemia.

```
clc
clear all
close all
list_stock= ["AAPL","SBUX","MSFT","CSCO","QCOM","FB","AMZN","TSLA","AMD","ZNGA"];
num_asset = length(list_stock);

%per eliminare warning nella creazione delle table
warning('OFF', 'MATLAB:table:ModifiedAndSavedVarnames')

T = readtable(strcat('stock/',list_stock(3),".csv"),'PreserveVariableNames',0);
values = str2double(strrep(string(T.Close_Last),'$',''));
date = datetime(T.Date);
var = (values(2:end)-values(1:end-1))./values(1:end-1);
figure
plot(date(2:end),var)
```



Nelle due figure successive possiamo osservare l'andamento giornaliero per ciascuna azienda, prima per gli ultimi 5 anni, e poi solamente per un sottointervallo (di due anni) che sarà il periodo che considereremo, nello specifico questo va dal 3 Ottobre 2017 al 3 Ottobre del 2019 così da escludere le variazioni dovute al periodo di incertezza causato dalla pandemia.

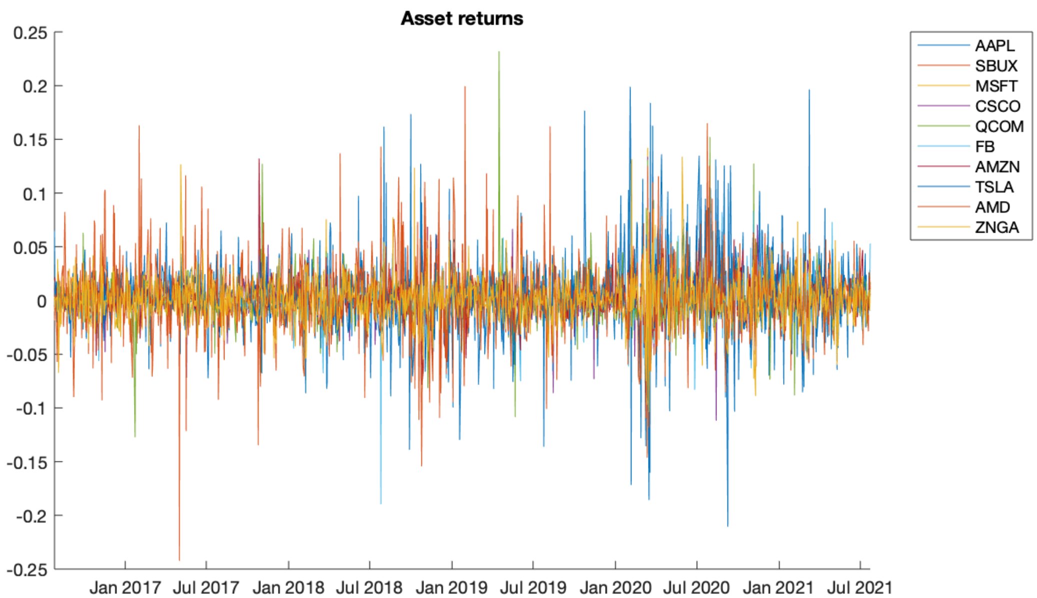
```
figure('Position', [0, 0, 800, 1000])
subplot(2, 1, 1)
returns = zeros(num_asset,1257);
for i = 1:length(list_stock)
    T = readtable(strcat('stock/',list_stock(i),".csv"));
    date = flip(datetime(T.Date));
    date(1) = [];
    values = flip(str2double(strrep(string(T.Close_Last),'$','')));
    returns(i,:) = (values(2:end)-values(1:end-1))./values(1:end-1);
    hold on
    plot(date,returns(i,:))
end
title('Asset returns');
legend(list_stock,'Location','NorthEastOutside');
xlim([min(date) max(date)])
startDate = date(300)
```

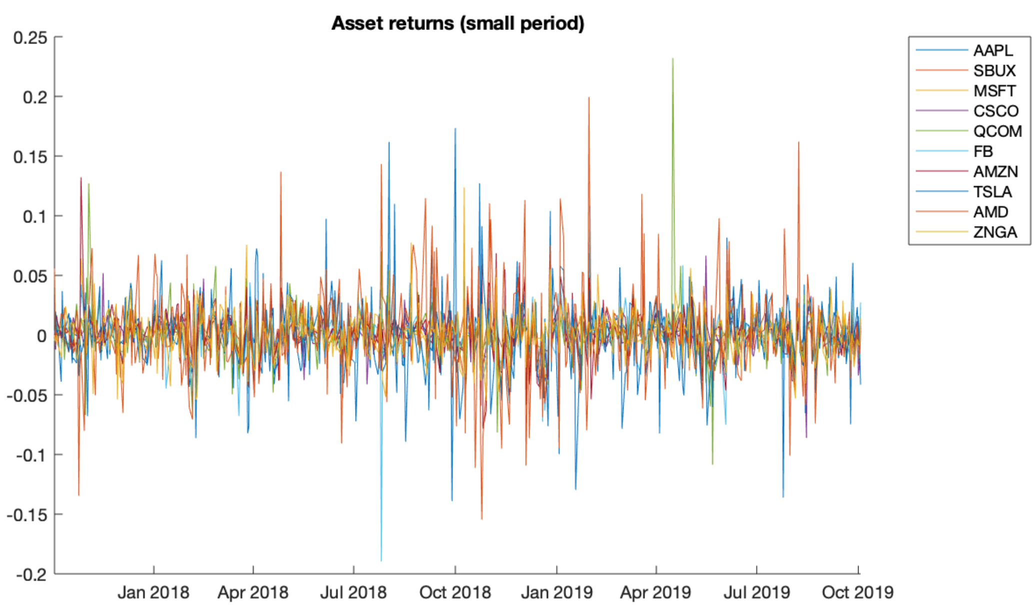
```
startDate = datetime
   10/03/2017
```

```
finishDate = date(803)
```

```
finishDate = datetime
```

```
date = date(300:803);
returns = returns(:,300:803);
subplot(2, 1, 2)
for i = 1:num_asset
    hold on
    plot(date,returns(i,:))
end
title('Asset returns (small period)');
legend(list_stock,'Location','NorthEastOutside');
xlim([min(date) max(date)])
hold off
```

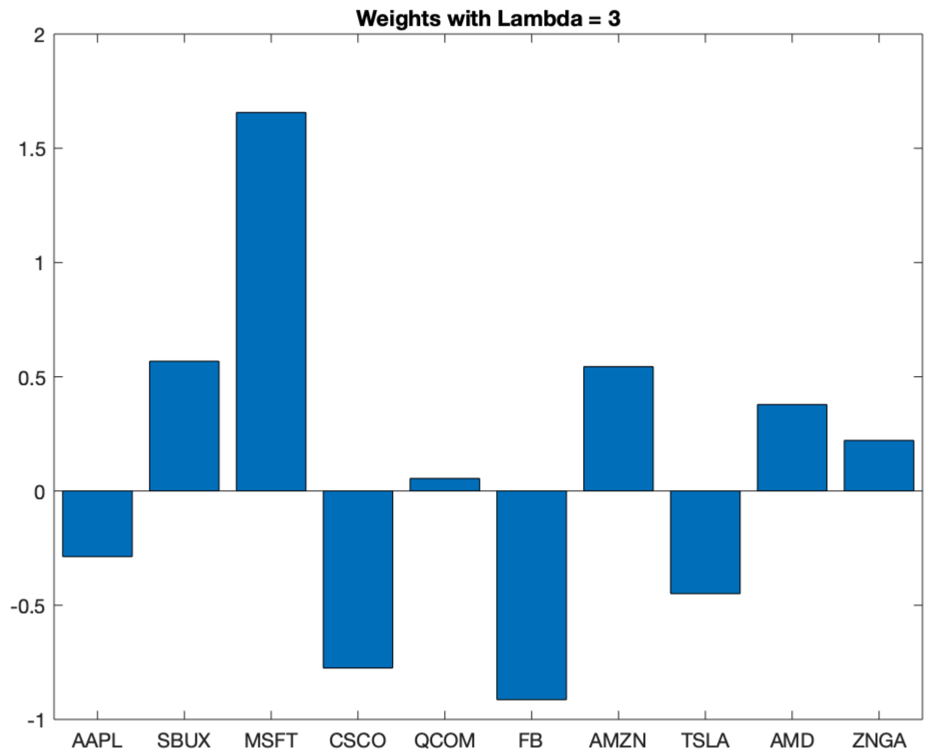




A questo punto, dopo aver importato i dati, siamo in grado di calcolare il valore atteso e la matrice di varianza-covarianza VERE tra i diversi stock. Andando ad utilizzare questi dati, possiamo calcolare i pesi ***veri*** del portafoglio a media varianza ottimo che poi andremo a confrontare con il portafoglio che si ottiene dopo la stima dei parametri. Un ultimo ingrediente necessario per calcolare un portafoglio a media varianza, è il *coefficiente di avversione al rischio* che indichiamo con *lamdba*, infatti, mentre la Capital Allocation Line definisce l'universo dei portafogli ammissibili, è proprio questo coefficiente che ci dà informazioni relative alla posizione lungo la retta, nella quale fermarci, quindi quale portafoglio deve essere scelto. Nello specifico, valori ragionevoli di *lambda* sono quelli compresi nell'intervallo $[2, 4]$, quindi almeno per il momento, utilizzeremo un coefficiente di avversione al rischio pari a 3. Tuttavia, al variare di *lambda* in $[0, \infty]$ riusciamo a tracciare tutta la frontiera dei portafogli efficienti. Per calcolare il portafoglio ottimo, è necessario risolvere un problema di massimizzazione, dove la funzione obiettivo è una sorta di funzione di utilità data da una combinazione lineare dei due scopi che vogliamo raggiungere (valore atteso del mio portafoglio più grande possibile e variabilità del portafoglio più bassa possibile) che però sono in contrasto. Quando l'unico vincolo che imponiamo sui pesi del portafoglio è che la loro somma sia pari ad 1 (e quindi richiediamo effettivamente che i *w* siano dei pesi), abbiamo a disposizione una formula chiusa per il calcolo dei pesi e possiamo quindi utilizzare la funzione `QuadFolio`. Dalla soluzione, osserviamo che il portafoglio ottimo contiene alcuni pesi negativi (come ad esempio per l'asset della Apple o per quello di Facebok), questo vuol dire che stiamo assumendo che sia possibile fare vendita allo scoperto. Ovvero stiamo permettendo all'investitore di vendere un asset finanziario che non si possiede e poi ricomprarlo, cercando di venderlo ad un prezzo più alto di quello al quale verrà riacquistato, in modo da generare un profitto.

```
trueMu = mean(returns,2);
trueSigma = cov(returns');
lambda = 3;
%Non impongo vincoli sulla vendita allo scoperto
[truewp,~,~] = QuadFolio(trueMu, trueSigma, lambda);
Weights = zeros(num_asset,3);
Weights(:,2) = truewp;

figure
stockCat = categorical(list_stock);
stockCat = reordercats(stockCat,list_stock);
bar(stockCat,truewp)
title('Weights with Lambda = 3')
```



In alternativa, è possibile utilizzare la funzione `quadprog`, già implementata in Matlab che però non sfrutta la soluzione analitica, ma ci permetterebbe di risolvere il problema anche in presenza di vincoli lineari sulla composizione del portafoglio, compreso il vincolo che proibisce vendite allo scoperto. Verifichiamo innanzitutto che le due soluzioni relative ai singoli pesi coincidano nel caso in cui non ci siano ulteriori vincoli.

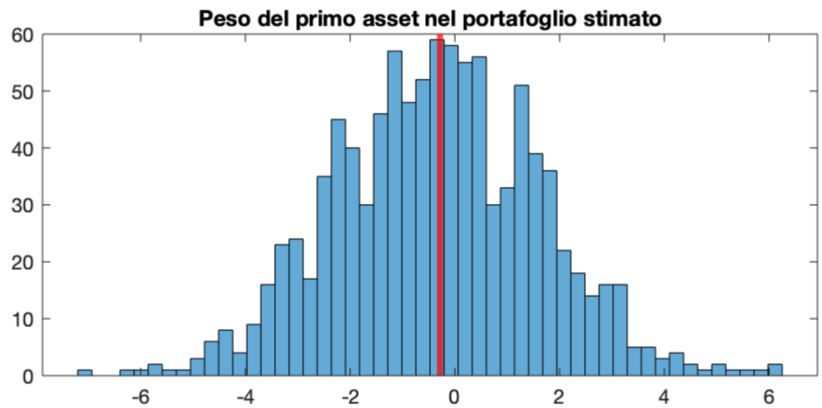
```
options = optimoptions('quadprog','Display','none');
x = quadprog(lambda*trueSigma,-trueMu,[],[],ones(1,num_asset),1,[],[],[],options);
%check stesso risultato
max(abs(truewp-x))<1.0e-4
```

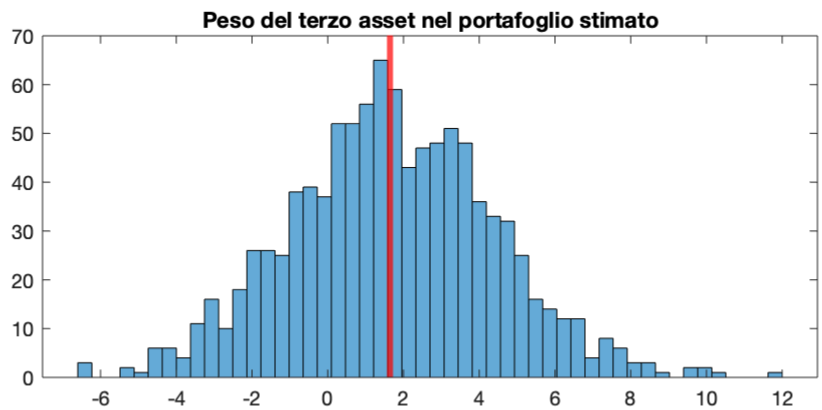
```
ans = logical
   1
```

Impatto degli errori di stima sui pesi dei singoli asset

Per capire quale sia l'impatto degli errori sulla stima del portafoglio ottimale, assumiamo di non conoscere il vettore dei valori attesi e della matrice di covarianza veri da passare alla funzione `QuadFolio`. Prima di chiamare la funzione, settiamo il seme per una questione di riproducibilità, quindi utilizziamo la funzione `estimated_portfolio` che fa 1000 replicazioni ciascuna estraendo un campione di 250 elementi, ad indicare un'analisi relativa all'anno precedente, da una distribuzione normale con media e matrice di covarianza quelle vere che abbiamo calcolato dai dati. Infine, la funzione restituisce, in questo caso, solamente i pesi del portafoglio ottimale che viene calcolato con la funzione `QuadFolio` a cui andiamo a passare il valore atteso e la matrice di covarianza campionarie e lo stesso coefficiente di avversione al rischio del caso precedente, per poter confrontare i risultati. Ovviamente, i valori stimati non saranno perfettamente uguali a quelli veri, ma dovrebbero avvicinarsi molto. Tuttavia, com'è possibile osservare dall'istogramma, ad esempio del peso del primo asset (stock Apple, che nel portafoglio ottimale ha un peso negativo) o del terzo asset (associato allo stock Microsoft, che nel portafoglio ottimale ha un peso positivo) c'è un'estrema variabilità nei pesi e ci allontaniamo anche di molto dal peso ottimale che si ottiene nel portafoglio con i parametri veri.

```
rng('default'); % ripetibilità
[~,w] = estimated_portfolio(1000, trueMu, trueSigma, lambda, 0, 'estimated', false, 250);
figure('Position', [50, 50, 500, 500])
subplot(2,1,1)
histogram(w(:,1),50); %peso del primo asset nel portafoglio
xline(truewp(1),'r','LineWidth',3); %valore ottimo vero
title('Peso del primo asset nel portafoglio stimato');
subplot(2,1,2)
histogram(w(:,3),50); %peso del terzo asset nel portafoglio
xline(truewp(3),'r','LineWidth',3); %valore ottimo vero
title('Peso del terzo asset nel portafoglio stimato');
```

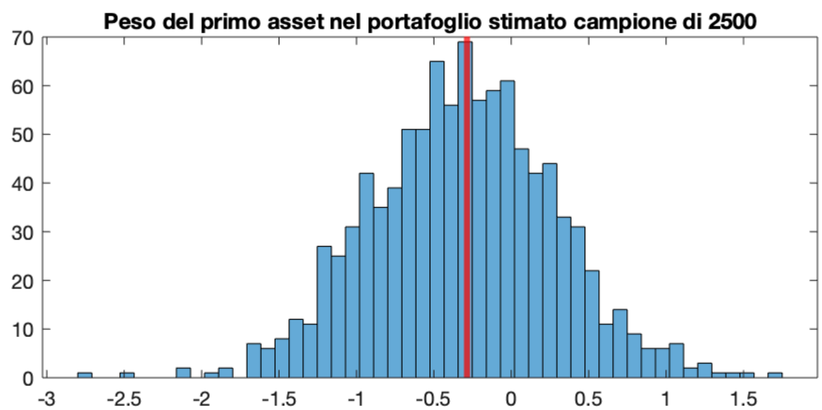


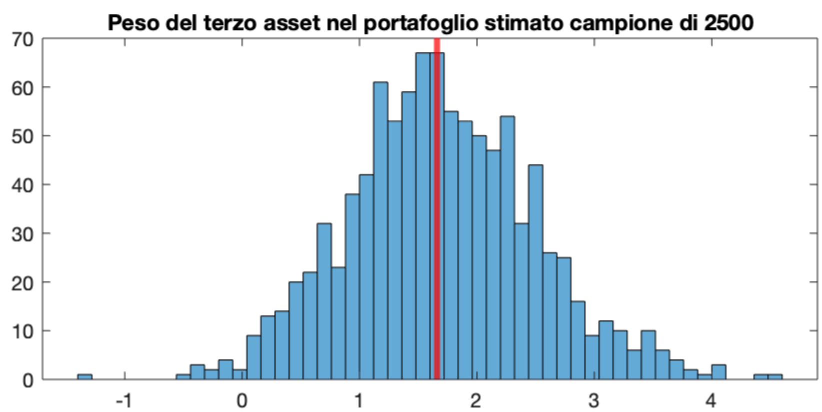


Dimensione del campione

Proviamo a vedere se la situazione migliora, andando a ripetere esattamente gli stessi passaggi del caso precedente, andando però questa volta, a passare un numero di campioni più alto, pari a 2500, per ogni replicazione, che corrispondono quindi a circa 10 anni di dati storici giornalieri. Per entrambi gli asset, osserviamo che la variabilità si riduce notevolmente, tuttavia non sempre avremo a disposizione un numero così elevato di dati per poter campionare da una distribuzione normale, quindi sicuramente il caso precedente risulta più realistico.

```
rng('default'); % ripetibilità
[~,w1] = estimated_portfolio(1000,trueMu,trueSigma,lambda,0,'estimated',false,2500);
figure('Position',[0, 0, 500, 500])
subplot(2, 1, 1)
histogram(w1(:, 1),50);
xline(truewp(1),'r','LineWidth',3);
title('Peso del primo asset nel portafoglio stimato campione di 2500')
subplot(2, 1, 2)
histogram(w1(:, 3),50);
xline(truewp(3),'r','LineWidth',3);
title('Peso del terzo asset nel portafoglio stimato campione di 2500')
```



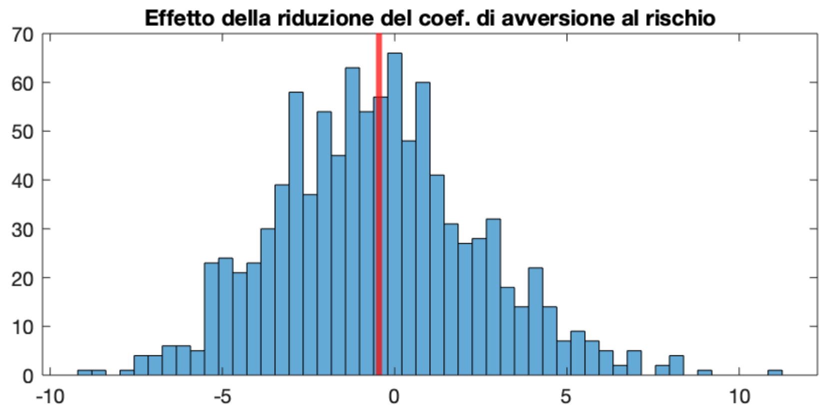


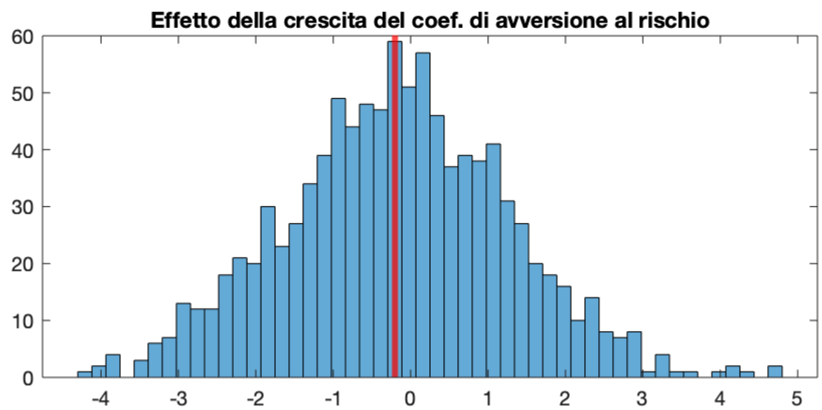
Coefficiente di avversione al rischio

Un altro parametro che potrebbe migliorare la situazione relativa all'estrema variabilità dei pesi nel nostro portafoglio è il coefficiente di avversione al rischio. Infatti, è possibile andare a penalizzare maggiormente nella funzione obiettivo la variabilità del nostro portafoglio con un coefficiente di avversione più alto. In questo caso otterremo dei valori dei pesi molto più vicini al peso ottimale che si ottiene con i valori veri di Mu e Sigma, come è possibile osservare nella seconda figura. Infine, nell'ultima figura è possibile confrontare immediatamente i pesi per ciascun asset, che si ottengono al variare del coefficiente di avversione al rischio.

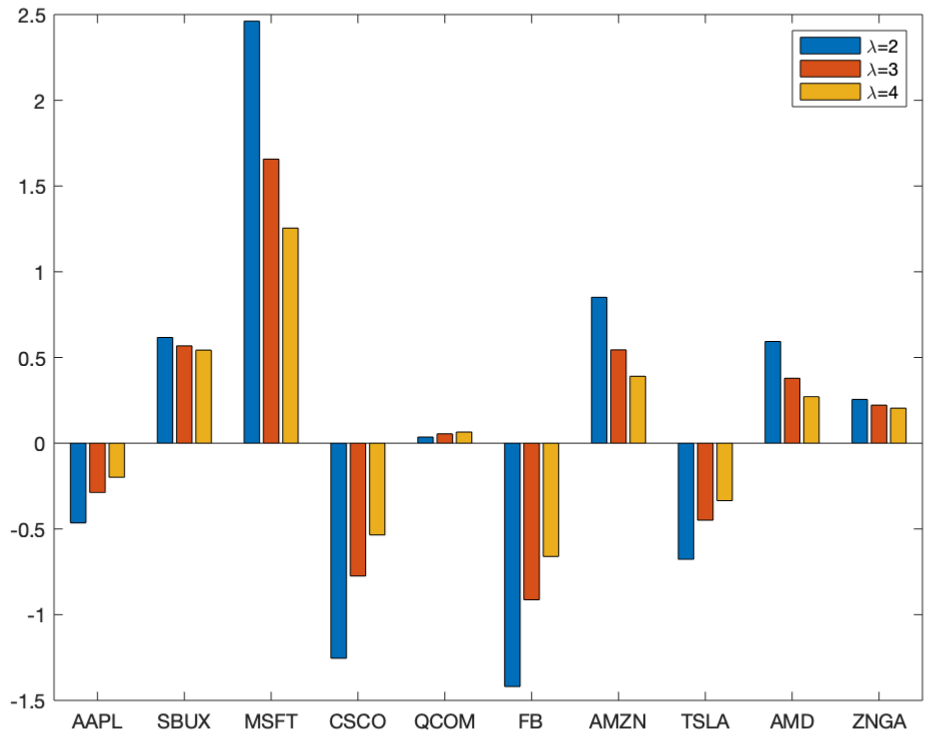
```
lambda2=2;
[truewp,~,~] = QuadFolio(trueMu, trueSigma, lambda2);
Weights(:,1) = truewp;
[~,w_lambda]=estimated_portfolio(1000,trueMu,trueSigma,lambda2,0,'estimated',false,250);
figure('Position',[0, 0, 500, 500])
subplot(2, 1, 1)
histogram(w_lambda(:,1),50); %peso del primo asset nel portafoglio
xline(truewp(1),'r','LineWidth',3); %valore ottimo vero
title('Effetto della riduzione del coef. di avversione al rischio');

lambda3=4;
[truewp,~,~] = QuadFolio(trueMu, trueSigma, lambda3);
Weights(:,3) = truewp;
[~,w_lambda]=estimated_portfolio(1000,trueMu,trueSigma,lambda3,0,'estimated',false,250);
subplot(2, 1, 2)
histogram(w_lambda(:,1),50); %peso del primo asset nel portafoglio
xline(truewp(1),'r','LineWidth',3); %valore ottimo vero
title('Effetto della crescita del coef. di avversione al rischio');
```






```
figure
bar(stockCat,Weights)
legend('\lambda=2', '\lambda=3', '\lambda=4');
```

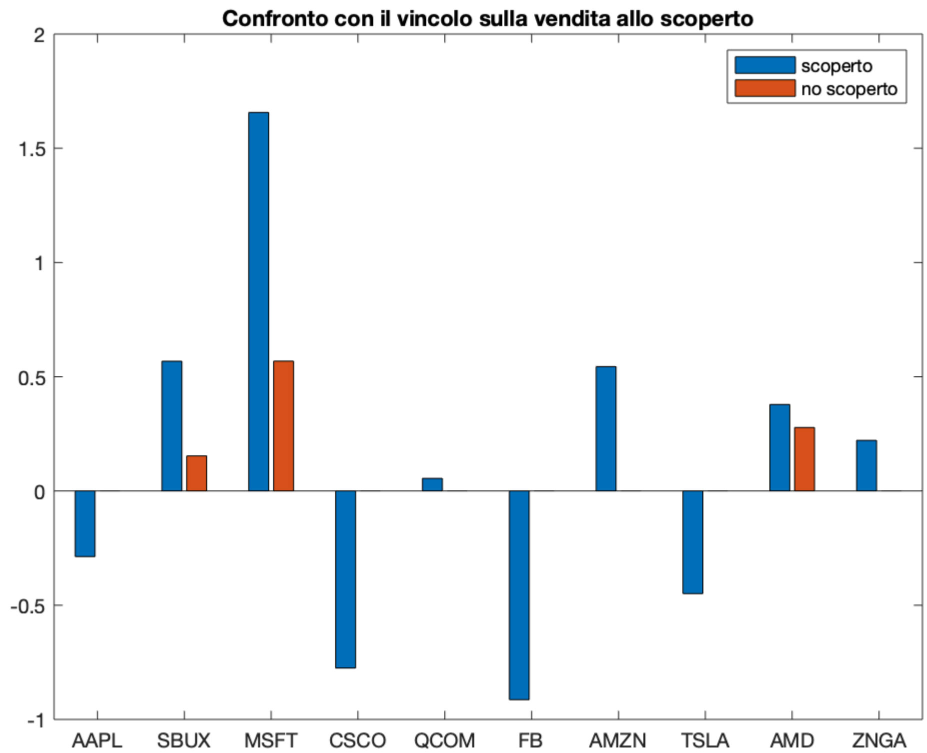


Scegliamo quindi di utilizzare il valore intermedio $\lambda = 3$ così da non penalizzare né troppo né troppo poco la variabilità del profitto/perdita.

Vincolo sulla vendita allo scoperto

Come già anticipato precedentemente, assumere che sia possibile fare vendita allo scoperto potrebbe essere abbastanza irrealistico e sarebbe opportuno imporre l'ulteriore vincolo che tutti i pesi debbano essere non negativi. Per risolvere il problema di ottimizzazione, andremo ad utilizzare nuovamente la funzione `estimated_portfolio` scegliendo questa volta l'ottimizzazione per *'optimalNoShort'* per vedere cosa accade quando è presente questo ulteriore vincolo. Il portafoglio ottimo in questo caso è concentrato solamente su tre asset ed i loro pesi ovviamente sono positivi.

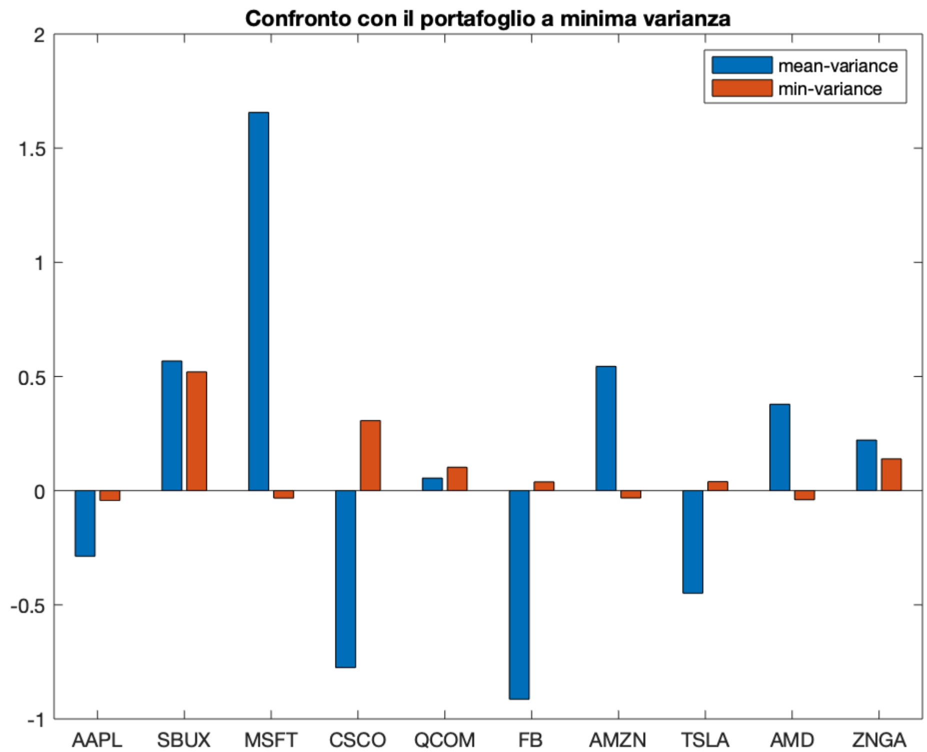
```
rng('default');
[~,x_no_scoperto] = estimated_portfolio(1, trueMu, trueSigma, lambda, 0, ...
                                        'optimalNoShort', false, 0);
v=zeros(10, 2);
v(:,1)=Weights(:, 2);
v(:,2)=x_no_scoperto;
figure
bar(stockCat,v)
title('Confronto con il vincolo sulla vendita allo scoperto');
legend('scoperto', 'no scoperto');
```



Portafoglio di minima varianza

Una possibile alternativa al portafoglio a media-varianza è considerare il portafoglio di minima varianza, quindi non facendo entrare in gioco il vettore dei rendimenti attesi. Nella pratica questo portafoglio può essere visto anche come il limite di un portafoglio a media-varianza, dove però il coefficiente di avversione al rischio tende ad infinito.

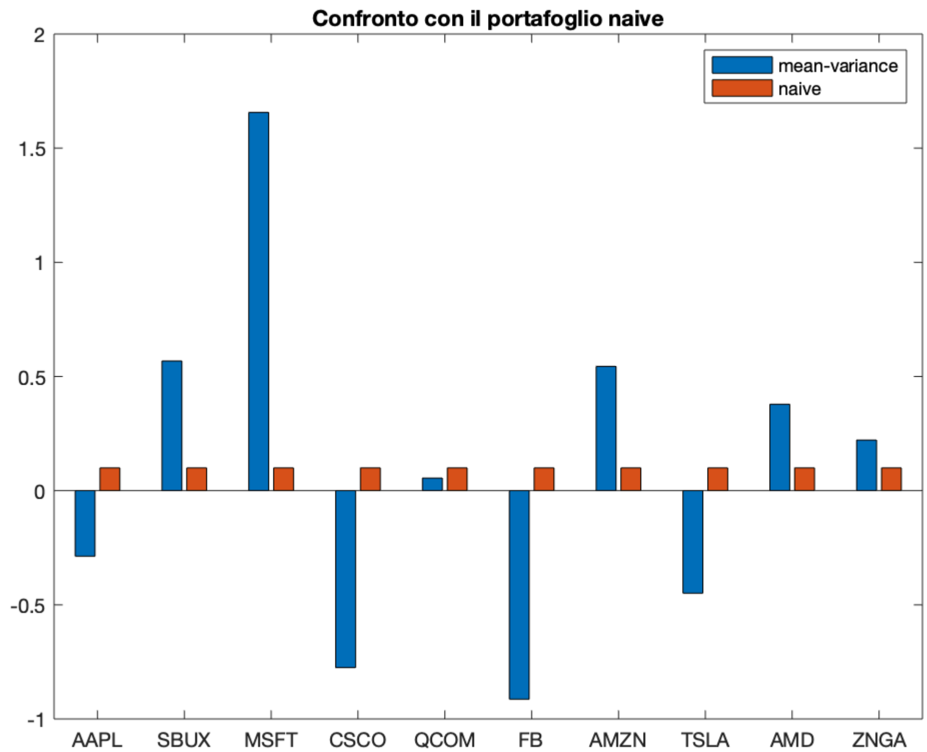
```
rng('default'); % ripetibilità
[~,xmv] = estimated_portfolio(1,trueMu,trueSigma,lambda,0,'minvariance',false,250);
v=zeros(10, 2);
v(:,1)=Weights(:, 2);
v(:, 2)=xmv;
figure
bar(stockCat,v)
title('Confronto con il portafoglio a minima varianza')
legend('mean-variance', 'min-variance')
```



Portafoglio naive

Una ulteriore alternativa possibile è il portafoglio naive, dove la ricchezza iniziale viene divisa equamente tra i diversi asset. Questa strategia potrebbe sembrare molto semplice e banale, ma non è detto che sia necessariamente sbagliata. Infatti il vantaggio in questo caso è che non stiamo facendo nessuna assunzione relativamente alla distribuzione seguita dagli scenari, semplicemente scegliamo i pesi in base al numero di asset che abbiamo a disposizione e che vogliamo includere nel portafoglio.

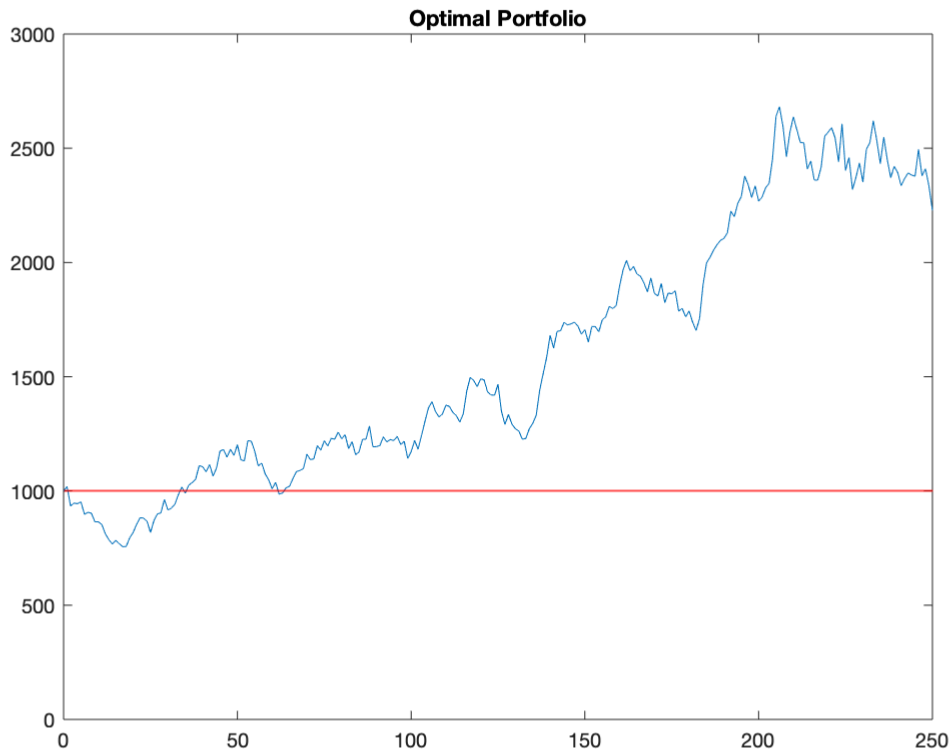
```
w_naive=1/length(trueMu)*ones(length(trueMu), 1);
v=zeros(10, 2);
v(:,1)=Weights(:, 2);
v(:, 2)=w_naive;
figure
bar(stockCat,v)
title('Confronto con il portafoglio naive')
legend('mean-variance', 'naive')
```

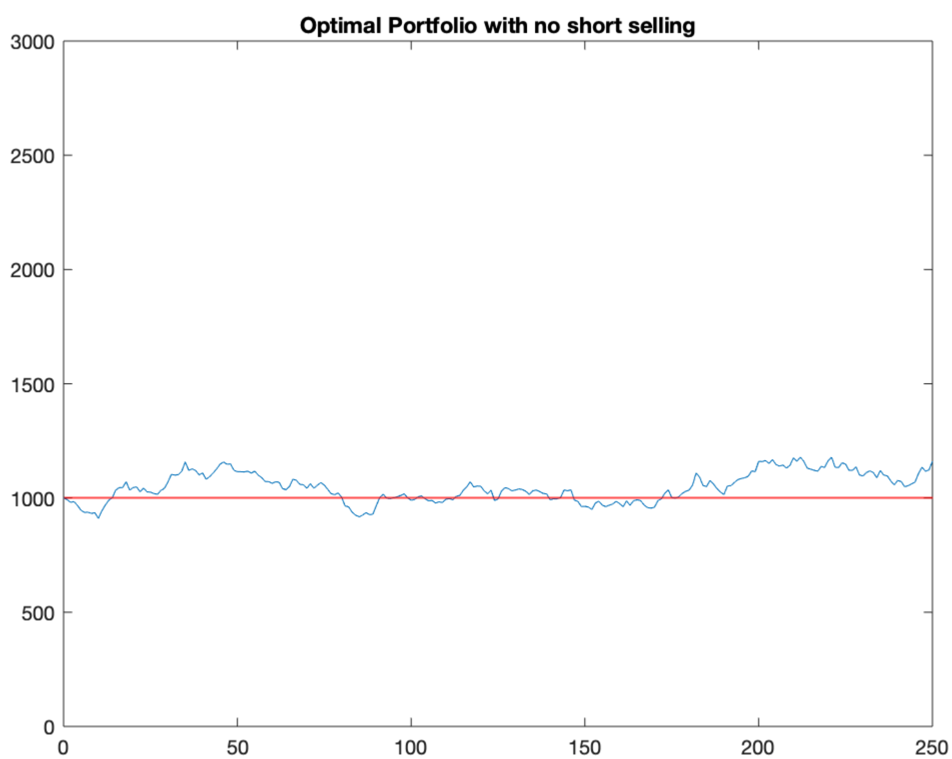


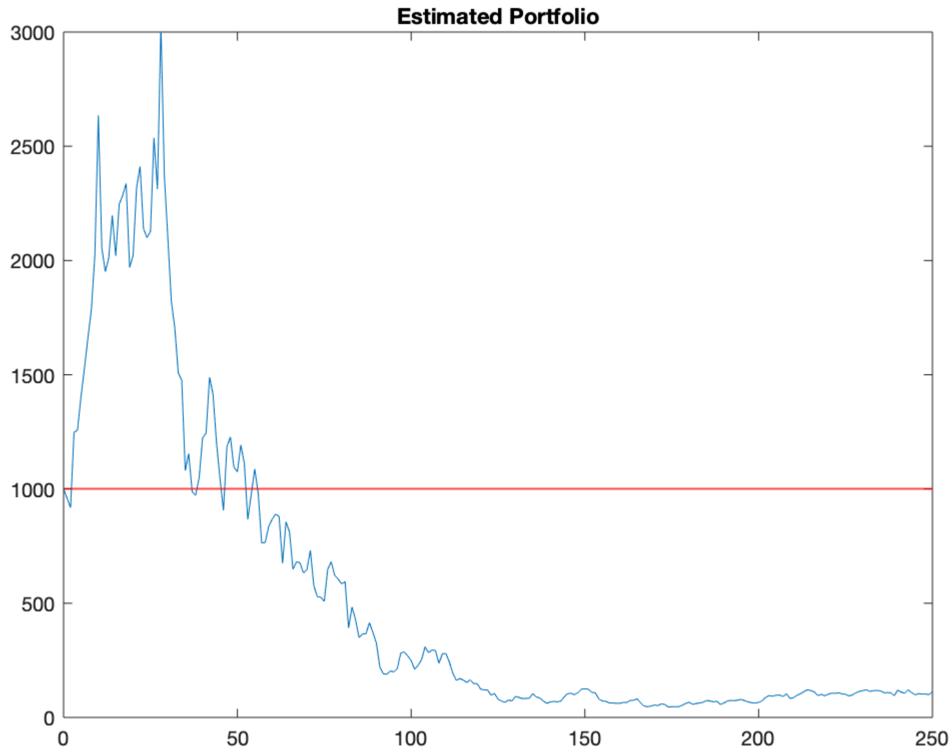
Impatto degli errori di stima sui rendimenti

A questo punto, per ciascuno dei portafogli introdotti precedentemente, andiamo a calcolare i rendimenti per vedere come entrano gli errori di stima nella scelta del portafoglio ottimo quando non abbiamo a disposizione i dati reali.

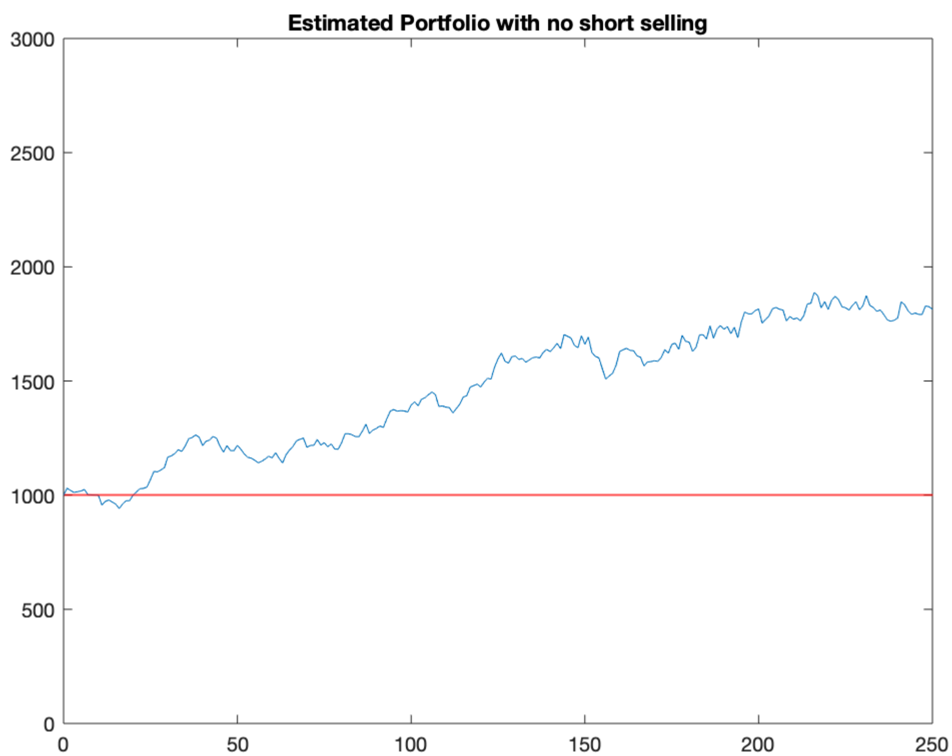
```
rng(2019); % ripetibilità
numRepl = 1;
plotWealth = true;
num_days = 250;
numPastDays = 250;
types = ["optimal","optimalNoShort","estimated","estimatedNoShort","minvariance","naive"];
for type = 1:length(types)
    figure
    estimated_portfolio(numRepl, trueMu, trueSigma, lambda, num_days, types(type), ...
                        plotWealth, numPastDays);
end
```


Optimal Portfolio
3000
2500
2000
1500
1000
500
0
0
50
100
150
200
250

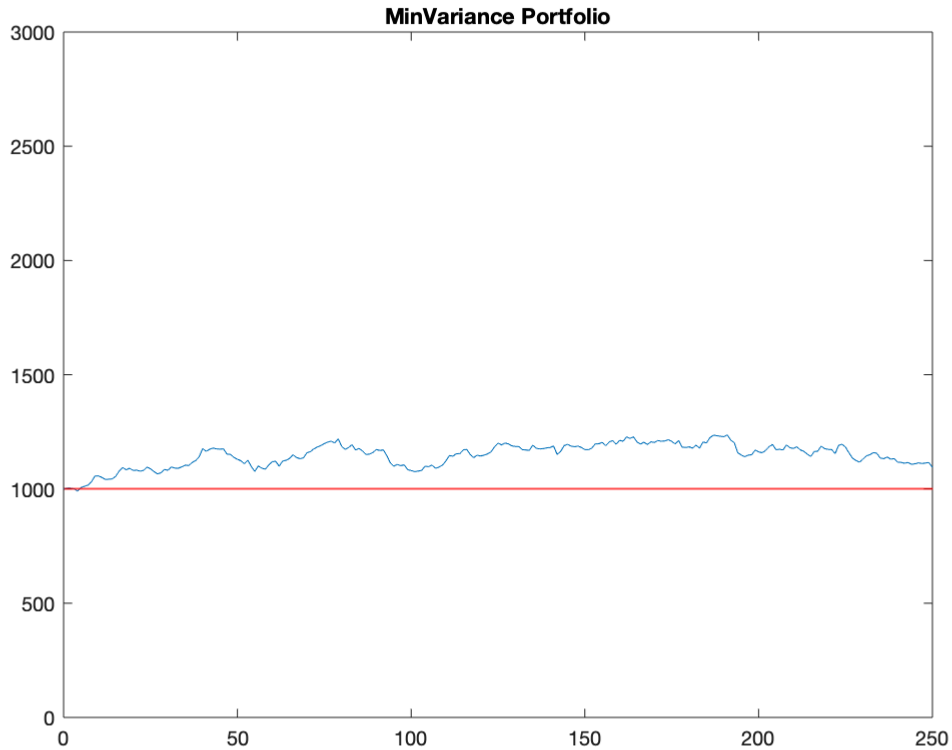

Optimal Portfolio with no short selling
3000
2500
2000
1500
1000
500
0
0
50
100
150
200
250

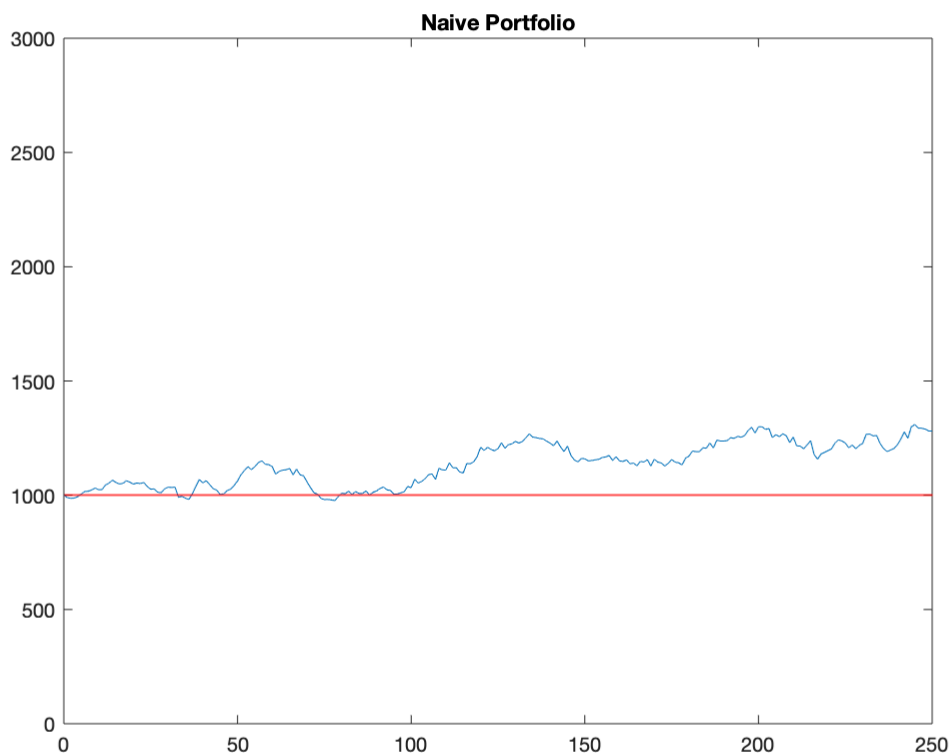


Estimated Portfolio
3000
2500
2000
1500
1000
500
0
0
50
100
150
200
250



Estimated Portfolio with no short selling
3000
2500
2000
1500
1000
500
0
0
50
100
150
200
250





Dai grafici è possibile osservare che il portafoglio ottimale ottenuto dai valori reali di Mu e Sigma riesce a raggiungere una buona performance che in un anno fa più che duplicare il valore della ricchezza posseduta. In tutti i portafogli infatti, partiamo da una ricchezza iniziale di 1000 euro ed in questo caso riusciamo a raggiungere un valore leggeremente inferiore a 2500. L'osservazione critica da fare è che il portafoglio ottimo stimato, ottenuto dalle stime campionarie dei rendimenti dei 250 giorni precedenti (all'incirca un anno), dopo iniziali forti fluttuazioni si annulla.

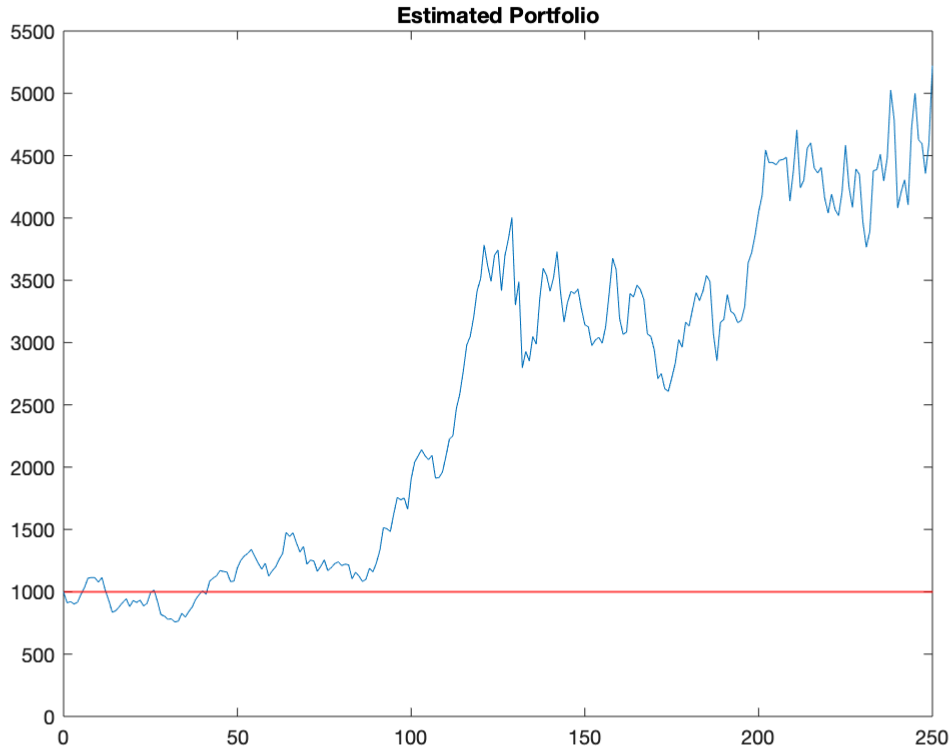
Consideriamo ora i portafogli ottimi senza vendita allo scoperto. Questi hanno una variabilità notevolmente più bassa rispetto a quelli senza vincoli sulla vendita e a seconda delle situazioni mantengono costante la ricchezza o hanno un leggero aumento.

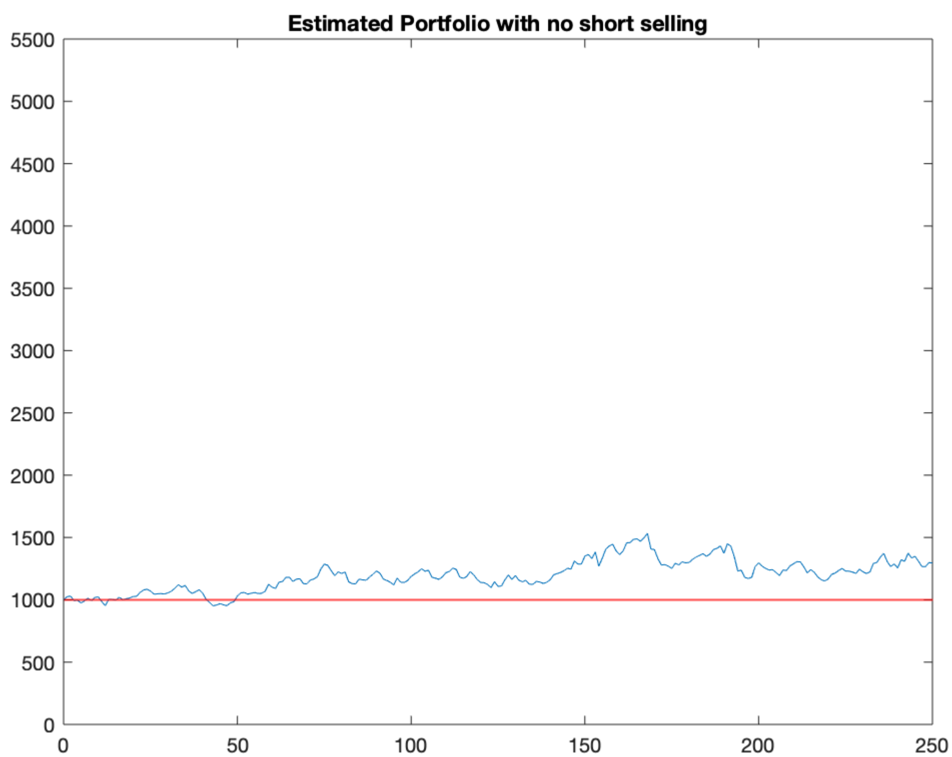
Infine, i portafogli a minima varianza e quello naive hanno andamenti abbastanza costanti, con bassi guadagni dovuti al poco rischio preso nel primo caso e al rischio distribuito nel secondo.

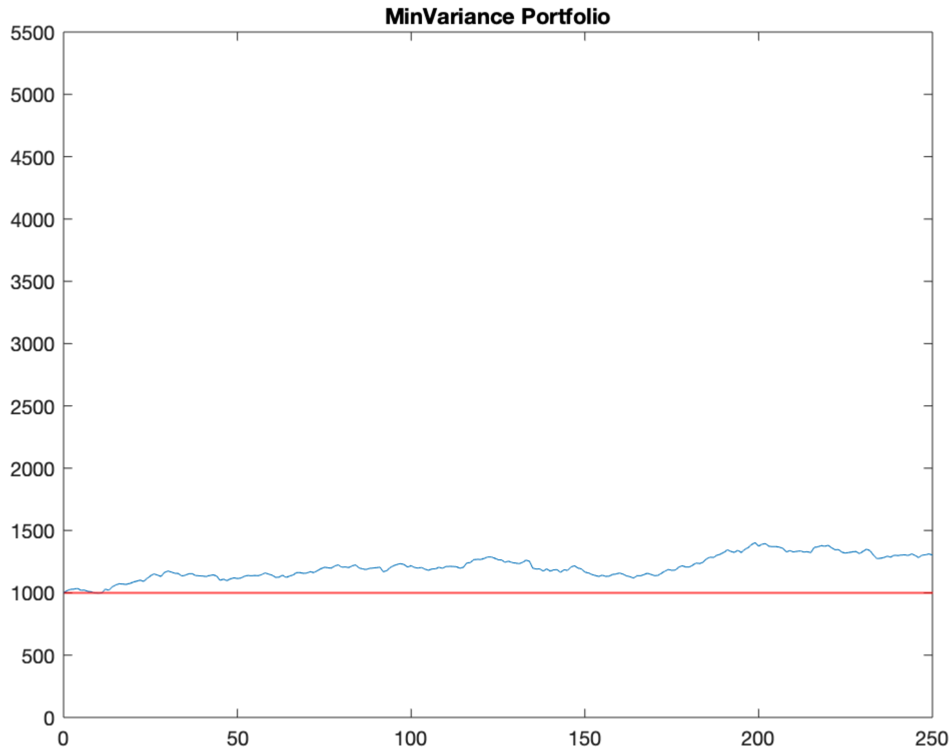
Stima rendimenti con aggiornamento pesi ogni settimana

Considerando nulli i costi di transazione, supponiamo che sia possibile aggiornare i pesi dei vari asset nel portafoglio settimanalmente in base ai rendimenti del mercato. Vediamo come cambia la situazione dei rendimenti:

```
rng(2020); % ripetibilità
plotWealth = true;
num_days = 250;
num_days_update = 5;
types = ["estimated","estimatedNoShort","minvariance"];
for type = 1:length(types)
    %rng(2021);
    figure
    estimated_portfolio(numRepl, trueMu, trueSigma, lambda, num_days, types(type), ...
                        plotWealth, numPastDays, num_days_update);
    ylim([0 5500]);
end
```


Estimated Portfolio
5500
5000
4500
4000
3500
3000
2500
2000
1500
1000
500
0
0
50
100
150
200
250


Estimated Portfolio with no short selling
5500
5000
4500
4000
3500
3000
2500
2000
1500
1000
500
0
0
50
100
150
200
250



Dai grafici, possiamo notare che il portafoglio ottimo stimato con le vendite allo scoperto ha ottenuto un grande guadagno visto che, dopo un periodo con basso rendimento, il proprietario del portafoglio ha aggiornato i pesi degli asset in linea con gli andamenti del mercato. Mentre i portafogli senza vendite allo scoperto o con minima varianza mantengono un guadagno basso ma costante per le stesse motivazioni della situazione in cui non si aggiornano i pesi. Anche in questo il rendimento del portafoglio stimato con vendite allo scoperto è sufficientemente lontano da quello del portafoglio ottimale vero.

Impatto degli errori sui premi per il rischio

Vogliamo verificare quale sia l'impatto degli errori sul vettore dei valori attesi (e quindi sui premi per il rischio).

```
numRepl = 1000;
plotWealth = false;
rng(2020);
[wealth,w] = estimated_portfolio(numRepl, trueMu, trueSigma, lambda, num_days, ...
                                'optimal', plotWealth, numPastDays);
```

Applichiamo una piccola variazione sui valori veri, questa variazione potrebbe essere dovuta ad un errore di stima o semplicemente per una vista soggettiva:

```
muVariation = zeros(length(trueMu),1);
muVariation(5) =  0.001;
muVariation(10) = -0.001;
rng(2020);
[wealthVar,wVar] = estimated_portfolio(numRepl, trueMu, trueSigma, lambda, num_days, ...
                                      'estimated', plotWealth, numPastDays, 0, muVariation);
```

Notiamo che il valore medio del portafoglio con variazioni è simile a quello senza, ma esso ha maggiore variabilità, intesa sia come perdita che guadagno.

```
meanOptimal = mean(wealth(:,end))
```

```
meanOptimal = 
       2484.76
```

```
meanVariation = mean(wealthVar(:,end))
```

```
meanVariation = 
       2452.49
```

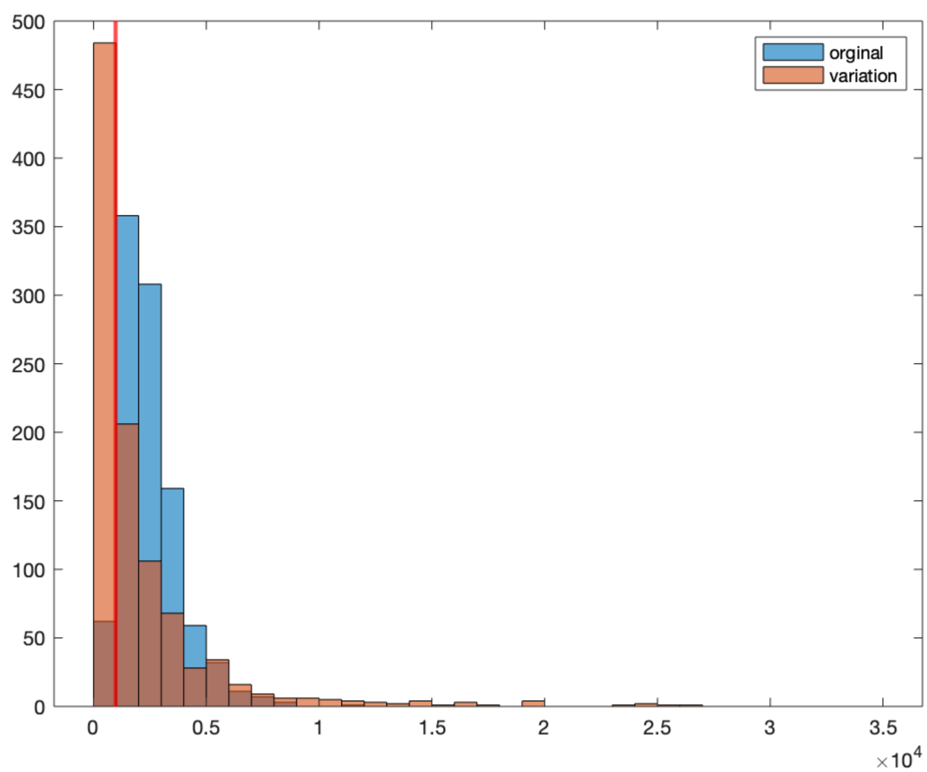
```
stdOptimal = std((wealth(:,end)))
```

```
stdOptimal = 
       1324.96
```

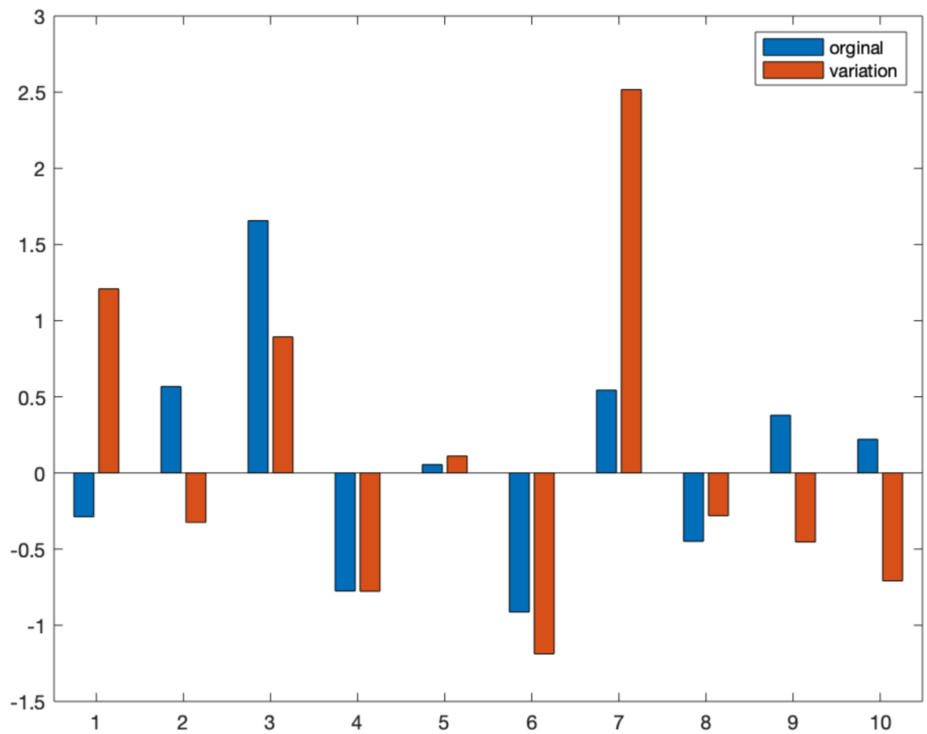
```
stdVariation = std((wealthVar(:,end)))
```

```
stdVariation = 
       6228.28
```

```
figure
histogram(wealth(:,end),35,'BinLimits',[0,35000])
hold on
histogram(wealthVar(:,end),35,'BinLimits',[0,35000])
xline(1000,'r','LineWidth',2);
legend('orginal','variation')
```



```
figure
bar([w(1,:)' wVar(1,:)'])
legend('orginal','variation')
```



Nel caso invece cui aggiorniamo i pesi degli asset settimanalmente vediamo come, nonostante le variazioni, c'è un valore atteso maggiore rispetto alla situazione senza aggiornamento sui pesi e quindi constatiamo il vantaggio di un aggiornamento frequente.

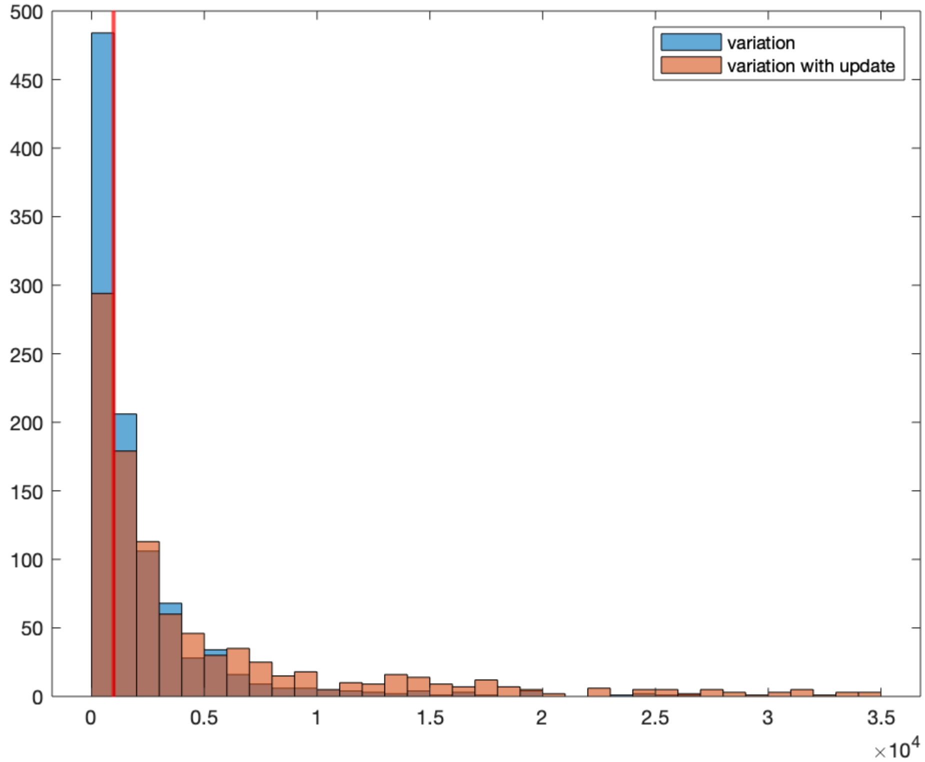
```
num_days_update = 5;
[wealthVarUpdate,wVar] = estimated_portfolio(numRepl, trueMu+muVariation, trueSigma, ...
                                             lambda, num_days, 'estimated', plotWealth, ...
                                             numPastDays, num_days_update, muVariation);
meanVariation
```

```
meanVariation =
      2452.49
```

```
meanVariationUpdate = mean(wealthVarUpdate(:,end))
```

```
meanVariationUpdate =
     10803.81
```

```
figure
histogram(wealthVar(:,end),35,'BinLimits',[0,35000])
hold on
histogram(wealthVarUpdate(:,end),35,'BinLimits',[0,35000])
xline(1000,'r','LineWidth',2);
legend('variation','variation with update')
```



Appendice

Funzione `QuadFolio`

La funzione riceve in ingresso un vettore di valori attesi, uno per ciascun asset che è possibile inserire nel portafoglio, la matrice di varianza-covarianza tra i diversi asset, ed infine il coefficiente di avversione al rischio che deve essere fissato. Si può dimostrare che andando a risolvere il problema di ottimizzazione questa è la formula corretta per calcolare i pesi ottimali che ci garantiscono la massimizzazione della funzione obiettivo.

```
function [wp,mup,sigmap] = QuadFolio(expRet, covMat, lambda)
n = length(expRet);
iVet = ones(n,1);
mu = expRet(:);
invSigma = inv(covMat);
charII = iVet' * invSigma * iVet;
charIM = iVet' * invSigma * mu;
wp = invSigma*iVet/charII + ...
 1/lambda * (charII*invSigma*mu - charIM*invSigma*iVet)/charII;
mup = wp'*mu;
sigmap = sqrt(wp' * covMat * wp);
end
```

Funzione `estimated_portfolio`

La funzione ha lo scopo di calcolare i pesi in ciascun asset all'interno del portafoglio ottimo e il rendimento finale atteso se si decide di investire proprio in quegli asset. La funzione riceve in ingresso, nell'ordine:

- *numRepl*: il numero di replicazioni da simulare
- *trueMu*: un vettore con i valori attesi
- *trueSigm*a: la matrice di varianza-covarianza
- *lambda*: il coefficiente di avversione al rischio
- *num_days*: indica su quanti giorni siamo interessati a calcolare il rendimento
- *type:* che è una stringa che ci dice quale portafoglio ottimo siamo interessati a considerare
- *plotWealth*: una variabile binaria che ci dice se abbiamo bisogno di disegnare la ricchezza al passare dei giorni
- *numPastDays*: una variabile opzionale che indica eventualmente il numero di campioni da estrarre per ogni simulazione per stimare un valore atteso campionario e una matrice varianza-covarianza campionaria
- *num_days_update*: un parametro opzionale che ci dice ogni quanti giorni viene aggiornato il portafoglio considerando i valori campionati negli iniziali *numPastDays* giorni e in tutti quelli fino al giorno attuale

Supponiamo arbitrariamente di considerare una ricchezza iniziale di 1000 euro. Analizziamo gli specifici casi a seconda della stringa che troviamo nella variabile *type*:

- ***'optimal'*** : stiamo cercando i pesi del portafoglio ottimo, quando abbiamo a disposizione il vettore dei valori attesi e la matrice di varianza-covarianza veri. Quindi questi ultimi e il coefficiente di avversione al rischio vengono passati alla funzione `QuadFolio` che calcola i diversi pesi con il vincolo che la loro somma sia pari ad uno.
- ***'optimalNoShort'*** : stiamo cercando i pesi del portafoglio ottimo quando abbiamo a disposizione il vettore dei valori attesi e la matrice di varianza-covarianza veri. Tuttavia questa volta non è ammessa la vendita allo scoperto. Quindi utilizziamo la funzione `quadprog` già implementata in Matlab per calcolare i pesi che questa volta saranno tutti positivi o nulli.
- ***'estimated'*** : stiamo cercando i pesi del portafoglio ottimo quando NON abbiamo a disposizione il vettore dei valori attesi e la matrice di varianza-covarianza reali. Quindi assumiamo che questi ultimi seguano una distribuzione normale multivariata con media il vettore dei valori attesi e matrice di covarianza uguale a quella reale. Estraiamo quindi da questa distribuzione tanti campioni quanti sono stati passati alla funzione nella variabile *numPastDays* e calcoliamo il valore atteso e la matrice di covarianza campionari e, assieme al coefficiente di avversione al rischio, li passiamo alla funzione `QuadFolio` che calcola i diversi pesi con il vincolo che la loro somma sia pari ad uno.
- ***'estimatedNoShort'*** : esattamente come nel caso precedente, ma questa volta assumiamo che non sia possibile fare vendita allo scoperto, quindi dopo aver stimato il vettore dei valori attesi e la matrice di varianza-covarianza, li passiamo alla funzione *quadprog* con il vincolo che i pesi siano tutti non negativi.
- ***'minvariance'*** : supponiamo ancora di NON avere a disposizione il vettore dei valori attesi e la matrice di varianza-covarianza reali. Questa volta però andiamo a calcolare il portafoglio di minima varianza, quindi dopo aver calcolato solamente la matrice di covarianza campionaria la passiamo alla funzione `quadprog` dove però consideriamo una funzione obiettivo dove non entrano i valori attesi.
- ***'naive'*** : supponiamo di NON avere alcuna informazione sulla distribuzione degli elementi di cui abbiamo bisogno. La scelta più immediata e semplice, che non necessariamente risulta essere sbagliata, è

quella del portafoglio naive. Questa scelta consiste nell'allocare la stessa quantità di ricchezza iniziale in ciascun asset.

Dopo avere calcolato tutti i pesi nei singoli asset andiamo a calcolare i rendimenti complessivi del portafoglio, uno per ciascun giorno fino all'orizzonte di tempo al quale siamo interessati.

Se inoltre alla funzione passiamo anche la variabile *num_days_update* che è un numero positivo e ci troviamo a stimare un portafoglio, vuol dire che siamo interessati a ribilanciare il nostro portafoglio nel weekend dopo le realizzazioni della settimana (*num_days_update* = 5). Quindi il nuovo portafoglio entrerà in vigore dal lunedì mattina. Per farlo, calcoliamo il valore atteso e la matrice di covarianza campionari dalle realizzazioni precedenti e poi li passiamo, insieme al coefficiente di avversione al rischio alla funzione `QuadFolio` (se ci troviamo nel caso *'estimated'*) oppure alla funzione `quadprog` (con il vincolo sulla vendita allo scoperto nel caso di *'estimatedNoShort'* oppure con una diversa funzione obiettivo per ottenere il portafoglio di minima varianza).

Se infine la variabile *plot_wealth* è settata a *true* vuol dire che vorremmo avere anche il grafico della ricchezza giorno per giorno del nostro portafoglio.

```
function [wealth, w] = estimated_portfolio(numRepl, trueMu, trueSigma, lambda, ...
                                           num_days, type, plotWealth, numPastDays, ...
                                           num_days_update, muVariation)

options = optimoptions('quadprog','Display','none');
w = zeros(numRepl,length(trueMu));
wealth = zeros(numRepl,num_days+1);
wealth(:,1) = 1000;

if ~exist('muVariation','var')
    muVariation = zeros(length(trueMu),1);
end

for i=1:numRepl

    switch type
        case 'optimal'
            w(i,:) = QuadFolio(trueMu, trueSigma, lambda);
        case 'optimalNoShort'
            w(i,:) = quadprog(lambda*trueSigma,-trueMu,-eye(length(trueMu)), ...
                              zeros(length(trueMu),1),ones(1,length(trueMu)), ...
                              1,[],[],[],options);
        case 'estimated'
            returnsObs = mvnrnd(trueMu+muVariation,trueSigma,numPastDays);
            hatMu = mean(returnsObs);
            hatSigma = cov(returnsObs);
            w(i,:) = QuadFolio(hatMu, hatSigma, lambda);
        case 'estimatedNoShort'
            returnsObs = mvnrnd(trueMu+muVariation,trueSigma,numPastDays);
            hatMu = mean(returnsObs);
            hatSigma = cov(returnsObs);
            w(i,:) = quadprog(lambda*hatSigma,-hatMu,-eye(length(hatMu)), ...
                              zeros(length(hatMu),1),ones(1,length(hatMu)), ...
                              1,[],[],[],options);
        case 'minvariance'
```

```
            returnsObs = mvnrnd(trueMu+muVariation,trueSigma,numPastDays);
            hatSigma = cov(returnsObs);
            w(i,:) = quadprog(lambda*hatSigma,[],[],[],ones(1,size(hatSigma,1)), ...
                              1,[],[],[],options);
        case 'naive'
            w(i,:) = 1/length(trueMu)*ones(length(trueMu), 1);
        otherwise
            error('Error of the type')
    end

    for day=1:num_days
        returnDay = mvnrnd(trueMu,trueSigma);
        wealth(i,day+1) = wealth(i,day)*(1 + dot(w(i,:),returnDay));

        %se si aggiornano i pesi dopo num_days_update giorni
        if exist('num_days_update','var') && num_days_update > 0 && ...
            (strcmp(type,'estimated') || strcmp(type,'estimatedNoShort') ...
                || strcmp(type,'minvariance'))
            returnsObs(end+1,:) = returnDay;
            if mod(day+1,num_days_update) == 0 && day ~= 1
                hatMu = mean(returnsObs)+muVariation';
                hatSigma = cov(returnsObs);
                switch type
                    case 'estimated'
                        w(i,:) = QuadFolio(hatMu, hatSigma, lambda);
                    case 'estimatedNoShort'
                        w(i,:) = quadprog(lambda*hatSigma,-hatMu,-eye(length(hatMu)), ...
                                          zeros(length(hatMu),1),ones(1,length(hatMu)), ...
                                          1,[],[],[],options);
                    case 'minvariance'
                        w(i,:) = quadprog(lambda*hatSigma,[],[],[],ones(1,size(hatSigma,1)), ..
                                          1,[],[],[],options);
                end
            end
        end
    end

    if plotWealth
        %figure
        switch type
            case 'optimal'
                myTitle = "Optimal Portfolio";
            case 'optimalNoShort'
                myTitle = "Optimal Portfolio with no short selling";
            case 'estimated'
                myTitle = "Estimated Portfolio";
            case 'estimatedNoShort'
                myTitle = "Estimated Portfolio with no short selling";
            case 'minvariance'
                myTitle = "MinVariance Portfolio";
            case 'naive'
                myTitle = "Naive Portfolio";
            otherwise
                error('Error of the type')
```

```
        end
        plot(0:num_days,wealth(i,:))
        ylim([0 3000]);
        yline(wealth(i,1),'r','LineWidth',1);
        title(myTitle);
    end
end
end
```