

# APPROSSIMAZIONE ALGEBRICA COL METODO DEI POLINOMI DI LAGRANGE

LUCA BRESSAN

## INDICE

1	Aspetti teorici del problema	2
1.1	Considerazioni preliminari, convergenza . . . . .	2
1.2	Nodi equispaziati, sistemi di nodi ottimali . . . . .	4
2	Prove numeriche	6
2.1	Le costanti di Lebesgue, il fenomeno di Runge . . . . .	6
2.2	Punti angolosi, cuspidi e forti variazioni . . . . .	7

## ELENCO DELLE FIGURE

Figura 1	Grafici di alcune funzioni di Lebesgue. . . . .	7
Figura 2	Il fenomeno di Runge . . . . .	7
Figura 3	Errore di approssimazione per funzioni regolari a tratti . . . . .	8

## ELENCO DELLE TABELLE

Tabella 1	Costanti di Lebesgue ed errore nell'approssimare $f_{\text{Runge}}$ . . . . .	6
Tabella 2	Un altro esempio del fenomeno di Runge. . . . .	7
Tabella 3	Valori ottenuti nello studio di un <i>worst case scenario</i> . . . . .	8

## ABSTRACT

Questo testo tratta brevemente il problema dell'approssimazione algebrica col metodo dei polinomi di Lagrange, coprendo aspetti quali la scelta dei nodi, la stima dell'errore commesso e alcune proprietà di convergenza. Gli aspetti teorici sono poi verificati con test numerici effettuati con il software MATLAB.

## 1 ASPETTI TEORICI DEL PROBLEMA

### 1.1 Condsiderazioni preliminari, convergenza

**I TRATTI GENERALI DEL PROBLEMA** Il problema dell'approssimazione algebrica emerge quando si decide di approssimare una funzione con un polinomio.

L'idea sorge naturalmente se si pensa allo sviluppo in serie di Taylor di una funzione analitica: si tronca la serie al termine  $n$ -esimo, e il teorema di resto di Lagrange ci consente di stimare l'errore commesso. Purtroppo questo metodo ha dei limiti pratici non indifferenti: le derivate della funzione possono non essere note a priori o essere computazionalmente molto costose, il teorema di Cauchy-Hadamard stabilisce che la convergenza uniforme della serie non è un fatto scontato, ma soprattutto il polinomio di Taylor richiede un grado di regolarità della funzione da approssimare molto elevato. Il seguente teorema ci garantisce l'esistenza di un polinomio che possa approssimare una funzione continua con errore piccolo a piacere:

**Teorema 1. Teorema di Weierstrass.** Sia  $f \in C^0([a, b])$ . Per ogni  $\epsilon > 0$  esiste  $n \in \mathbb{N}$  e  $P_n \in \mathbb{P}_n$  tale che

$$\|f - P_n\|_\infty < \epsilon$$

**LA SCELTA DELLA BASE PER LO SPAZIO DEI POLINOMI** È necessario trovare un metodo per realizzare l'approssimazione algebrica laddove troncata la serie di Taylor non sia una scelta ottimale. A questo fine consideriamo  $\mathbb{P}_n$ , lo spazio dei polinomi di grado al più  $n$ , dotato della struttura vettoriale usuale. Si pone il problema di trovare le coordinate del polinomio approssimante fissata la base, e l'approccio alla soluzione di questo problema determina poi i tratti algoritmici del metodo risolutivo. Possiamo scegliere la base canonica, in modo che la complessità del problema venga scaricata sul calcolo delle coordinate, o scegliere una base più strutturata, in modo da semplificare il calcolo delle coordinate. Il metodo di Lagrange appartiene alla famiglia di metodi che scaturisce dal secondo modo di ragionare.

**LA BASE DEI POLINOMI DI LAGRANGE, IL POLINOMIO INTERPOLANTE DI LAGRANGE** Nel 1795 J-L. Lagrange definì la seguente base di  $\mathbb{P}_{n-1}$

$$\left\{ l_k(x) = \prod_{j=1, j \neq k}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \right\} \quad (1)$$

dove gli  $x_k$  (detti **nodi di interpolazione**) sono i punti in cui il valore della funzione è noto. Si osservi che

$$l_k(x_j) = \delta_{ij} \quad (2)$$

dove  $\delta$  è il delta di Kronecker. Indicando con  $\pi_n = \prod_{k=1}^n (x - x_k)$ , la base si può anche esprimere come

$$l_k(x) = \frac{\pi_n(x)}{\pi'_n(x_k)(x - x_k)} \quad (3)$$

Alla base così costruita si dà il nome di **base dei polinomi fondamentali di Lagrange**. In base alla (2) è naturale definire il **polinomio interpolante di Lagrange**:

$$L_n(f, x) = \sum_{k=1}^n l_k(x) f(x_k) \quad (4)$$

il quale ha grado  $n - 1$  e interpola  $f$  sui nodi  $x_k$ , ovvero  $L_n(f, x_k) = f(x_k)$ . Se poi si considera  $L_n$  come un'operatore da  $C^0([a, b])$  in  $\mathbb{P}_{n-1}$ , è facile vedere come  $L_n$  sia una proiezione lineare. In effetti si può vedere che se  $f$  è un polinomio di grado al più  $n - 1$ , allora  $L_n(f, x) \equiv f(x)$ . Dal punto di vista computazionale è possibile verificare che la valutazione del polinomio interpolante di Lagrange in un punto ha ordine di complessità pari a  $\mathcal{O}(n^2)$ .

**LA MATRICE DI INTERPOLAZIONE** Nel problema dell'approssimazione algebrica riveste una certa importanza il criterio con cui si scelgono i nodi. Supponiamo di avere una successione  $(q_n)$  di polinomi monici privi di radici multiple, dove l'indice indica anche il grado del termine. Si supponga, inoltre, che le radici appartengano tutte a un certo intervallo  $[a, b]$ . Ordiniamo e indicizziamo le radici di  $q_n$ , ovvero

$$a < x_{n,1} < \dots < x_{n,k} < b \quad (5)$$

con  $q_n(x_{n,k}) = 0 \forall k \in 1, \dots, n \forall n \in \mathbb{N}$  Possiamo allora costruire la matrice

$$X = \begin{bmatrix} x_{1,1} & & & \\ x_{2,1} & x_{2,2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ x_{n,1} & \dots & & x_{n,k} \end{bmatrix} \quad (6)$$

che prende il nome di **matrice di interpolazione**. Fissata una matrice di interpolazione è possibile associare una successione di polinomi interpolanti di Lagrange come segue

$$L_n(X, f, x) = \sum_{k=1}^n l_{n,k}(x) f(x_{n,k}) \quad (7)$$

Quando consideriamo questa successione come una successione di operatori, essa prende il nome di **processo interpolatorio di Lagrange**.

**IL PROBLEMA DELLA CONVERGENZA** Alla luce delle costruzioni appena svolte, possiamo affrontare la questione della convergenza.

Prima di addentrarci negli aspetti quantitativi del problema diamo due importanti risultati:

**Teorema 2.** *Teorema di Faber. Per ogni matrice di interpolazione esiste una funzione continua tale per cui l'errore di interpolazione commesso sull'intervallo  $[a, b]$  non converge a zero all'aumentare del numero di nodi.*

Il seguente corollario è conseguenza di (Teorema 1)

**Corollario 1.** *Per ogni funzione continua su  $[a, b]$  esiste una matrice di interpolazione tale per cui l'errore di interpolazione tende a zero all'aumentare del numero di nodi.*

Quindi sulla base di quanto asserito, "non esiste un sistema di nodi universalmente valido per ogni applicazione". Possiamo comunque costruire algoritmi per la selezione dei nodi sufficientemente generali. Ci serviranno in seguito le seguenti definizioni:

**Definizione 1.** Errore di miglior approssimazione polinomiale e polinomio di miglior approssimazione. Si definisce **errore di miglior approssimazione polinomiale** commesso nell'approssimare una funzione  $f$  per mezzo di grado al più  $n$  la quantità

$$E_n(f) := \inf_{P_n \in \mathbb{P}} \|f - P_n\|_\infty = \|f - P_n^*\|_\infty \quad (8)$$

dove  $P_n^*$  è detto **polinomio di miglior approssimazione** di grado  $n$ .

Introduciamo le **costanti di Lebesgue**:

**Teorema 3.** *Sia  $f \in C^0([a, b])$  e sia  $X$  una matrice di interpolazione. Allora si ha*

$$\|f - L_n(X, f)\| \leq (1 + \Lambda_n(X)) E_{n-1}(f) \quad (9)$$

dove

$$\Lambda_n(X) = \|\lambda_n(x)\|_\infty \quad (10)$$

sono dette **costanti di Lebesgue** e

$$\lambda_n(X) = \sum_{k=1}^n |l_{n,k}(x)| \quad (11)$$

sono dette **funzioni di Lebesgue**.

*Dimostrazione.* Sia  $P_{n-1}$  il polinomio di miglior approssimazione. Si ha

$$|f(x) - L_n(X, f, x)| \leq |f(x) - P_{n-1}(x)| + |P_{n-1}(x) - L_n(X, f, x)| \quad (12)$$

Riscrivendo opportunamente il secondo termine della secondo membro si ha, per la linearità di  $L_n$ , ed essendo  $L_n(P_{n-1}(x), x) = P_{n-1}(x)$

$$|P_{n-1}(x) - L_n(X, f, x)| = |L_n(X, P_{n-1} - f, x)| = \left| \sum_{k=0}^n (P_{n-1}(x_{n,k}) - f(x_{n,k})) l_{n,k}(x) \right| \quad (13)$$

da cui si deduce

$$\left| \sum_{k=0}^n (P_{n-1}(x_{n,k}) - f(x_{n,k})) l_{n,k}(x) \right| \leq \sum_{k=0}^n |(P_{n-1}(x_{n,k}) - f(x_{n,k})) l_{n,k}(x)| \quad (14)$$

Assumendo il massimo si ha

$$\sum_{k=0}^n |(P_{n-1}(x_{n,k}) - f(x_{n,k})) l_{n,k}(x)| \leq \|P_{n-1} - f\|_{\infty} \sum_{k=1}^n |l_{n,k}(x)| \quad (15)$$

cioè

$$\|P_{n-1} - f\|_{\infty} \sum_{k=1}^n |l_{n,k}(x)| \leq \|P_{n-1} - f\|_{\infty} \Lambda_n(X) \quad (16)$$

Combinando le informazioni ottenute in (12) e in (16) segue la tesi.  $\square$

La bontà di un sistema di nodi quindi è legata alle costanti di Lebesgue che ne scaturiscono. Il seguente risultato ci dice che qualsiasi sia la scelta di nodi, l'intervallo d'errore cresce in ampiezza con velocità almeno logaritmica al crescere del numero di nodi. Quando la velocità è esattamente logaritmica, si parlerà di un **sistema di nodi ottimale**.

**Teorema 4.** *Secondo teorema di Faber. Per ogni sistema di nodi, per ogni  $n \geq 1$ , vale la seguente disuguaglianza:*

$$\|\Lambda_n(X)\| \geq \frac{1}{12} \log n \quad (17)$$

Ci si pone allora l'obiettivo di ricercare sistemi di nodi che abbiano costanti di Lebesgue ottimali, cioè tali che  $\|\Lambda_n(X)\| \leq C \log n$ . Il seguente risultato ci consente di stimare l'errore di interpolazione per un sistema di nodi ottimale:

**Teorema 5.** *Sia  $f \in C^k([a, b])$ . Vale allora la seguente stima dell'errore di miglior approssimazione:*

$$E_n(f) \leq \frac{C}{n^k} \quad (18)$$

dove  $C$  non dipende da  $n$  e  $k$ .

Combinando questa informazione con la condizione di ottimalità otteniamo la stima

$$\|f - L_n(X, f)\| \leq C \frac{\log n}{n^k} \quad (19)$$

applicabile quando la funzione è derivabile  $k$  volte con continuità.

## 1.2 Nodi equispaziati, sistemi di nodi ottimali

**NODI EQUISPAZIATI** Runge, Bernstein e Tureckii hanno verificato in più riprese all'inizio del secolo scorso che discretizzare l'intervallo di interpolazione con nodi equispaziati non è una scelta ottimale. In particolare Tureckii dimostrò che

$$\|\Lambda_n(X)\| \sim \frac{2^n}{e n \log n} \quad (20)$$

. Questo risultato ci dice che l'utilizzo di nodi equispaziati rischia di esacerbare l'errore dovuto a perturbazione dei dati. Infatti dalla linearità di  $L_n$  si ha la seguente disuguaglianza:

$$\|(f - L_n(X, f + \eta, x))\| \leq \|f - L_n(x)\| + \|\Lambda_n(X)\| \max_{1 \leq k \leq n} |\eta(x_{n,k})| \quad (21)$$

dove  $\eta$  è una generica perturbazione. Se si considera che l'uso di un'aritmetica di macchina induce inevitabilmente una perturbazione sui dati, si capisce perchè molti autori prescrivono l'uso di nodi equispaziati solo se si approssima con polinomi di grado sufficientemente basso ( $n < 9$ ).

**POLINOMI ORTOGONALI E PESO DI JACOBI** Un metodo per ottenere un sistema di nodi ottimale è quello di considerare gli zeri degli elementi di una successione  $(q_n)$  di polinomi che sono a due a due ortonormali rispetto a un certo peso  $w$ , dove  $w$  è una funzione positiva e integrabile. In simboli si ha

$$\int_{-1}^1 q_i(x) q_j(x) w(x) dx = \delta_{ij} \quad (22)$$

. Tra i vari pesi che possono portare a realizzare la condizione di ottimalità con questo metodo, abbiamo la famiglia dei pesi di Jacobi data da

$$w^{\alpha, \beta}(x) = (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta} \quad (23)$$

Dal momento che i pesi determinano completamente il sistema di nodi, nella notazione sostituiamo  $X$  con  $w^{\alpha, \beta}$ , e indicheremo con  $P_n(w^{\alpha, \beta})$  l' $n$ -esimo termine della successione costruita come sopra. Il seguente risultato ci dà delle condizioni per  $\alpha$  e  $\beta$  che conducono a un sistema di nodi ottimale:

**Teorema 6.** *Teorema di Szegő. Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  si ha*

$$\|\Lambda(w^{\alpha, \beta})\| \sim \begin{cases} \log n & \text{se } \{\alpha, \beta\} \subset (-1, -\frac{1}{2}] \\ n^{\max\{\alpha, \beta\} + \frac{1}{2}} & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (24)$$

dove i termini costanti non dipendono da  $n$ .

**NODI DI ČEBYŠEV, NODI DI LEGENDRE** Tramite il peso di Jacobi è possibile definire due sistemi di nodi molto utilizzati in questa categoria di problemi: ci riferiamo ai nodi di Čebyšev di seconda specie (da P. L. Čebyšev, matematico e statistico russo) e ai nodi di Legendre (da A-M. Legendre, matematico francese), ottenuti rispettivamente ponendo  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$  e  $\alpha = \beta = 0$ . Esistono anche i nodi di Čebyšev di prima specie ( $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ ), per i quali si ha questo notevole risultato:

**Teorema 7.** *Se  $f \in C^1([a, b])$  e se si usa il sistema di nodi dato dagli zeri del polinomio di Čebyšev di prima specie di grado  $n+1$ , allora l'errore di interpolazione tende a zero per  $n \rightarrow \infty$ .*

La dimostrazione è basata sulla soluzione di un problema di *minimax*. Tornando ai nodi di Čebyšev di seconda specie e ai nodi di Legendre, la seguente costruzione consente di enunciare un risultato che estende gli intervalli definiti dal teorema di Szegő. Vogliamo definire due successioni di polinomi  $Z_{n,r}$  e  $Y_{n,s}$  i cui zeri possano estendere opportunamente il sistema di nodi di partenza, dove  $r$  e  $s$  indicano i rispettivi gradi. Indichiamo con  $(x_i)$  gli zeri ordinati e indicizzati di  $P_n(w^{\alpha, \beta})$  come in (5), e definiamo

$$y_j = -1 + (j-1) \frac{1+x_1}{s} \quad j = 1, \dots, s \quad (25)$$

$$z_k = x_n + k \frac{1-x_n}{r} \quad k = 1, \dots, r \quad (26)$$

A questo punto definiamo  $Y_{n,s} = \prod_{j=1}^s (x - y_j)$  e  $Z_{n,r} = \prod_{k=1}^r (x - z_k)$ . Possiamo costruire allora  $Q_{n+r+s}(x) = Y_{n,s}(x) Z_{n,r}(x) P_n(w^{\alpha, \beta})$  i cui zeri danno il sistema di nodi necessario per costruire il polinomio interpolante  $L_{n,r,s}(w^{\alpha, \beta}, f, x)$ . Un'espressione alternativa di  $L_{n,r,s}(w^{\alpha, \beta}, f, x)$  è la seguente:

$$L_{n,r,s}(w^{\alpha, \beta}, f, x) = \sum_{h=1}^{n+r+s} l_h(x) f(t_h) \quad (27)$$

dove i  $t_h$  sono elementi di  $\{y_j\}_{j=1}^s \cup \{z_k\}_{k=1}^r \cup \{x_i\}_{i=1}^n$ . Il seguente risultato fornisce informazioni sul comportamento di  $\|\Lambda_{n,r,s}(w^{\alpha, \beta})\|$ :

**Teorema 8.** Siano  $\alpha, \beta > -1$  e siano  $r, s$  interi non negativi. Allora vale la seguente disuguaglianza

$$\|L_{n,r,s}(w^{\alpha,\beta}, f)\|_{\infty} \leq C \log n \|f\|_{\infty} \quad (28)$$

se e solo se si ha che

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} \leq r \leq \frac{\alpha}{2} + \frac{5}{4} \quad (29)$$

$$\frac{\beta}{2} + \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{\beta}{2} + \frac{5}{4} \quad (30)$$

In virtù di questo teorema possiamo dire che gli zeri di  $(1-x^2)P_n(w^{0,0})$  e quelli di  $(1-x^2)P_n(w^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}})$  forniscono un sistema di nodi ottimale.

## 2 PROVE NUMERICHE

In questa sezione saranno esposti i risultati di alcune prove numeriche che testano quanto esposto nella sezione introduttiva di questo elaborato. Le prove sono svolte con il software MATLAB.

### 2.1 Le costanti di Lebesgue, il fenomeno di Runge

La funzione di Runge ( $f = f_{\text{Runge}} = \frac{1}{1+x^2}$ ) viene utilizzata come classico esempio di funzione per cui la scelta di nodi equispaziati è particolarmente inefficace anche con gradi di interpolazione relativamente bassi. Quando si sceglie un sistema di nodi non ottimale si hanno dei fenomeni oscillatori marcati agli estremi dell'intervallo di interpolazione  $[-1, 1]$ : queste oscillazioni costituiscono il fenomeno di Runge. La seguente prova mostra la correlazione tra la funzione di Lebesgue e l'intensità di queste oscillazioni.

n	Nodi equispaziati		Nodi di Čebyšëv-II corretti	
	$\Lambda(\mathcal{E})$	$E_{\text{app}}(\mathcal{E}, f)$	$\Lambda(L_{n,1,1}(w^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}))$	$E_{\text{app}}(L_{n,1,1}(w^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}), f)$
8	1.0946e+01	2.258380e-03	2.4209	7.072055e-05
16	9.3453e+02	3.990607e-05	2.8003	6.441497e-08
32	2.4309e+07	2.862085e-08	3.2068	4.907186e-14
64	4.4048e+16	2.423078e+01	3.6295	4.107825e-15
128	3.5358e+35	1.418457e+20	4.0612	7.216450e-15
256	5.3388e+73	2.407580e+58	4.4975	1.310063e-14
n	Nodi di Legendre corretti		Nodi di Čebyšëv-I	
	$\Lambda(L_{1,1,n}(w^{0,0}))$	$E_{\text{app}}(L_{1,1,n}(w^{0,0}), f)$	$\Lambda(L_n(w^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}))$	$E_{\text{app}}(L_n(w^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}), f)$
8	2.9522	8.709934e-05	2.3619	3.589375e-04
16	3.3897	7.530983e-08	2.7663	3.110379e-07
32	3.8367	5.839773e-14	3.1885	2.341460e-13
64	4.2873	4.329870e-15	3.6200	3.441691e-15
128	4.7381	7.549517e-15	4.0564	6.217249e-15
256	5.1875	1.176836e-14	4.4952	1.143530e-14

Tabella 1. Costanti di Lebesgue ed errore nell'approssimare  $f_{\text{Runge}}$

Osservando i dati tabulati possiamo trarre due conclusioni:

- la correttezza della stima asintotica fornita da Tureckii per le costanti di Lebesgue di un sistema di nodi equispaziati emerge anche dai test numerici;
- il numero di nodi da utilizzare va scelto tenendo conto anche delle limitazioni dettate dall'uso di un'aritmetica di macchina: in contrasto con (Teorema 7), l'errore di approssimazione ottenuto

usando il sistema di nodi dato dagli zeri dei polinomi di Čebyšëv non si riduce all'aumentare del numero di nodi, ma una volta raggiunti valori prossimi a  $\epsilon$ -macchina tende a risalire.

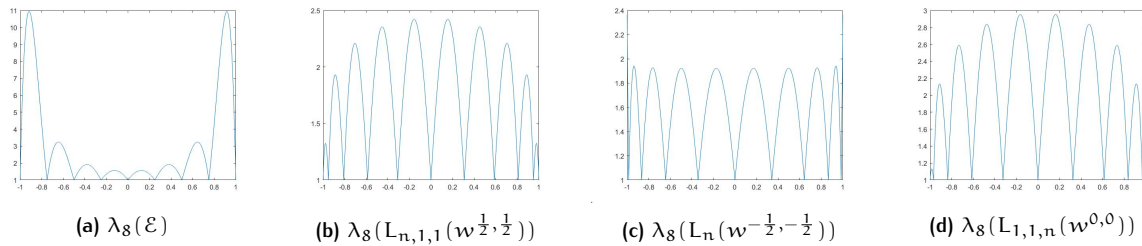


Figura 1. Grafici di alcune funzioni di Lebesgue.

La funzione di Runge non è l'unica dove si manifesta il fenomeno omonimo: consideriamo

$$f(x) = |x|^{\frac{9}{2}} e^{x+5} (x+5)^3$$

e interpoliamo su  $[-1, 1]$  usando nodi equispaziati e nodi di Čebyšëv di prima specie. Si ottengono i seguenti valori tabellati.

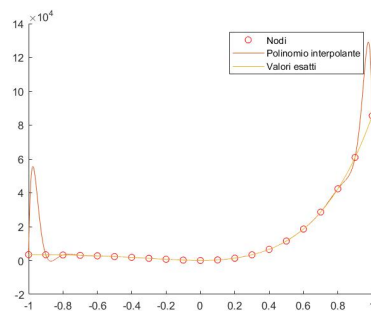


Figura 2. Manifestazione del fenomeno di Runge nell'interpolazione di  $f(x) = |x|^{\frac{9}{2}} e^{x+5} (x+5)^3$  usando un polinomio di grado 20.

n	Nodi equispaziati	Nodi di Čebyšëv-I
	$E_{app}(\mathcal{E}, f)$	$E_{app}(L_n(w^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}), f)$
8	3.883058e+02	8.689302e+01
16	7.393731e+03	2.351097e+01
32	3.898129e+07	6.442526
64	1.422535e+16	1.796716
128	2.306610e+34	5.075004e-01
256	7.052230e+71	1.444592e-01

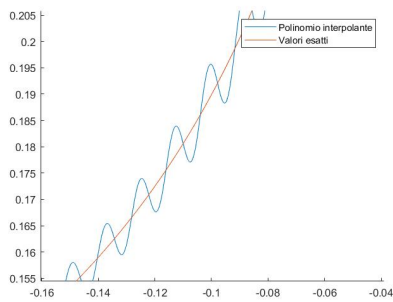
Tabella 2. Un altro esempio del fenomeno di Runge.

## 2.2 Punti angolosi, cuspidi e forti variazioni

La seguente prova mette in evidenza un limite che è proprio dell'approssimazione algebrica in senso più ampio. I polinomi sono funzioni analitiche e hanno grafico *liscio*, e per questo si hanno difficoltà a replicare punti angolosi e cuspidi quando si approssimano funzioni con derivata non continua. Il seguente esempio è tratto da uno dei peggiori scenari in cui ci si può trovare per effettuare un'approssimazione algebrica: funzioni con forte variazione e derivata discontinua. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{1+x^2}{20x^{\frac{2}{3}} + x^2 + 1}$$

da approssimare in  $[-1, 1]$ . Si ottengono i seguenti valori tabellati.



**Figura 3.** Dettaglio del grafico di  $f(x) = \frac{1+x^2}{20x^{\frac{2}{3}}+x^2+1}$ , sovrapposto a quello del polinomio interpolante di grado 512.

I numeri ci dicono che è meglio prendere in considerazione tecniche di approssimazione alternative: nemmeno l'uso di un polinomio di grado elevato (che comporta tempi non indifferenti: lo script ha richiesto circa 3 minuti su un personal computer di fascia media per essere eseguito) ha fornito risultati utilizzabili. In una situazione del genere l'uso di una spline, anche lineare, potrebbe dare risultati migliori.

n	Errore assoluto	Proporzione dell'errore
	$E_{app}(L_n(w^{-\frac{1}{2}}, -\frac{1}{2}), f)$	$\frac{E}{E + \ f\ _\infty}$
8	7.143211e-01	41%
16	6.362958e-01	39%
32	5.440543e-01	35%
64	4.434624e-01	31%
128	3.431945e-01	25%
256	2.523357e-01	20%
512	1.772662e-01	15%

**Tabella 3.** Valori ottenuti nello studio di un *worst case scenario*.