# Fisica
Appunti universitari

Luca Casadei

2 marzo 2024

# Indice

# Capitolo 1

# Cinematica

Questo capitolo parla del moto dei corpi.
**Punto**: Se consideriamo un punto, ci interessano le sue coordinate $X, Y, Z$ nello spazia, ciascuna coordinata è una funzione nel tempo: $X(t), Y(t), Z(t)$ per ogni istante t il punto si troverà in una certa posizione. Questo è rappresentabile anche attraverso un vettore, che ha anch'esso 3 dimensioni.
**Misura**: Le coordinate rappresentano una distanza da un'origine nello spazio. Nel sistema di riferimento viene rappresentata una curva in forma parametrica.

## 1.1 Moto rettilineo

Nel moto rettilineo ho una retta che ha un verso (orientata) e il punto si muove su questa retta, determiniamo con $x(t)$ la posizione del punto sulla retta, definito da una sola coordinata spaziale. Questa funzione è detta **legge oraria**.

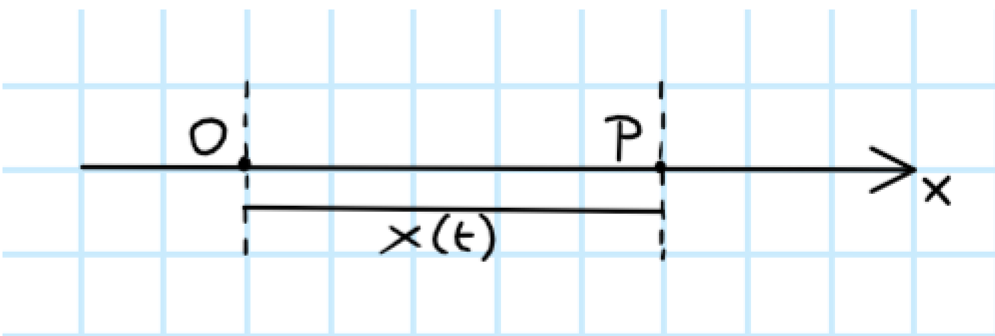


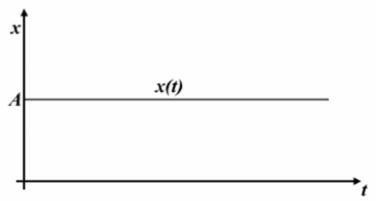

Figura 1.1: Rappresentazione del moto rettilineo

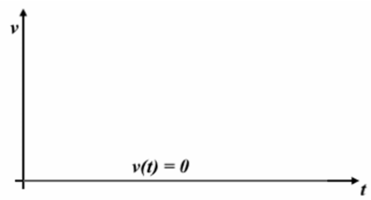
### 1.1.1 Velocità

Se il corpo si sta spostando per come lo osservo, prendendo due istanti diversi $t_1, t_2$ il corpo è in posizioni diverse $x_1, x_2$, possiamo definire la velocità media come: $v_m = \frac{\Delta_x}{\Delta_t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$.
Questa si basa su dei $\Delta$ macroscopici, se $t_2$ si avvicina a $t_1$, il $\Delta$ diventa sempre minore e il limite rappresenta effettivamente la derivata.
Inoltre essa è la pendenza della retta secante a quella che rappresenta il movimento, se riduco $t_2$ fino ad arrivare a $t_1$ ottengo la **velocità istantanea**.
Vediamo quindi come arrivare a questa velocità: se consideriamo il coefficiente angolare $m_{sec} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} \Rightarrow \frac{(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ come si può notare questo è il rapporto incrementale che dobbiamo utilizzare per ottenere questa volta la velocità istantanea (quindi in un istante), che è rappresentata dal coefficiente angolare della retta tangente al punto dell'istante di nostro interesse, procediamo quindi con: $m_{tg} = \lim_{h \to 0} (\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}) = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{\Delta t \to 0} (\frac{\Delta x}{\Delta t}) = v_{\text{ist}}$ come si può vedere ho ottenuto la derivata, con la quale posso calcolare la velocità in un certo istante.

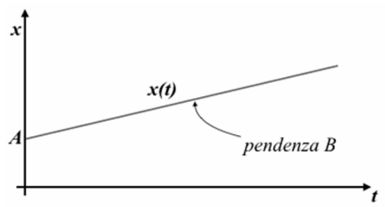
#### Classificazione delle velocità in base al grafico della funzione

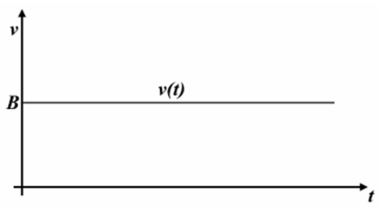
- **Nessun moto**: Se la funzione è costante, la retta è parallela all'asse delle ascisse e non abbiamo quindi alcun movimento.



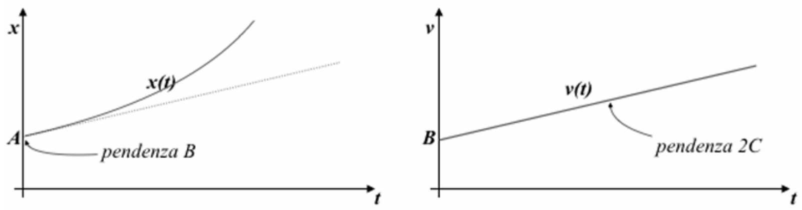




- **Velocità costante**: Se il diagramma orario è una retta e non presenta curve, la sua derivata (velocità) è semplicemente la retta tangente di tutti i suoi punti, la cui pendenza è 0. In questo caso:
  $x(t) = A + Bt$; $v(t) = B = \frac{\Delta x}{\Delta t}$



- **Velocità non costante**: Nel caso in cui la velocità cambia nel tempo (ad esempio se cresce sempre all'aumentare del tempo), allora si avrà una curva e non una retta nel diagramma orario.




Possiamo notare che matematicamente per arrivare alla velocità considerando le 3 coordinate di un punto è che: $X = A + B(t) + C(t^2) \Rightarrow v = B + C(t)$.

### Ricavare la legge oraria dalla velocità

Ovviamente si può ricavare $x(t)$ facendo l'integrale di $v(t)$, che è il contrario della derivata, con qualche accorgimento. Devo infatti prestare particolarmente attenzione al fatto che l'integrale da fare è quello definito, quindi descritto da un intervallo.

Possiamo effettuare la seguente trasformazione:

$\frac{dx}{dt} = v(t) \Rightarrow$
$dx = v(t)dt \Rightarrow$
$\int_{x_0}^{x}(dx') = \int_{t_0}^{t}(v(t')dt') \Rightarrow$
$x - x_0 = \int_{t_0}^{t}(v(t')dt') \Rightarrow$
$x = x_0 + \int_{t_0}^{t}(v_0(dt')) \Rightarrow$
$x(t) = x_0 + v(t - t_0) \Rightarrow x(t) = x_0 + vt$

Quando abbiamo un movimento di un corpo e dobbiamo sapere la sua posizione a seguito di una certa velocità, dobbiamo sapere da dov'è partito, quindi un'istante di tempo che ci dica dove sia all'inizio, per questo nella formula compare $x_0$, dato che l'integrale è definito questo è il punto come consideriamo come quello di partenza, che tipicamente prendiamo come 0. Passare invece dalla legge oraria alla velocità non richiede nessun parametro aggiuntivo.
*Attenzione*: Se la funzione della velocità è discontinua (ad esempio quando si torna indietro), la funzione non è derivabile, quindi si devono considerare due leggi del moto differenti, prima dell'urto e dopo l'urto.

### 1.1.2 Accelerazione

Possiamo distinguere accelerazione media e accelerazione istantanea come nella velocità.

$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$
$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$
$a = 0 \iff v$ è costante.
$dv = a(t)dt \implies \Delta v = \int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a(t)dt$
$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t}(a(t))dt$

Se $a$ è costante ho un **moto rettilineo uniforme** definibile con: $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t}(v(t'))dt = X_0 \int_{t_0}^{t}[v_0 + a(t-t_0)]dt = x_0 + \int_{t_0}^{t} v_0 dt + \int_{t_0}^{t} a(t-t_0)dt \implies$
$x(t) = x_0 + v_0(t-t_0) + \frac{1}{2}a(t-t_0)^2$

Se però non abbiamo informazioni sul tempo, e vogliamo considerare la velocità in funzione della distanza invece che il tempo ($v(x)$ invece che $v(t)$), elaboro le informazioni nel seguente modo:
$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v(\frac{dv}{dx}) \Rightarrow$
$adx = vdv$ passo poi all'integrale $\int_{x_0}^{x}(a)dx' = \int_{v_0}^{v}(v)dv = \int_{x_0}^{x}(a(x))dx' = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 \implies$
$v^2 = v_0^2 + 2a(x-x_0)$

#### Unità di misura

$[L] \longrightarrow m \rightarrow Km$
$[T] \longrightarrow s \rightarrow h$ (hours), $d$ (days), $y$ (years)
$[v] = [LT^{-1}] \longrightarrow \frac{m}{s} \rightarrow \frac{Km}{h}$
$[a] = [LT^{-2}] \longrightarrow \frac{m}{s^2}$

### 1.1.3 Caduta di corpi gravi

Consideriamo uno spazio bidimensionale (la caduta è considerata completamente in verticale).
Dobbiamo considerare in questo caso l'accelerazione di gravità sulla terra, definita generalmente come: $g = 9,81\frac{m}{s^2}$, questo è un moto uniformemente accelerato caratteristica di qualsiasi gravo sulla terra se verso il basso, verso l'alto sarà la sua controparte negativa $-g$. Si possono presentare diversi casi:

- Un corpo cade da un'altezza h con $v_0 = 0 \quad x_0 = h \quad t_0 = 0$
  Valgono quindi le seguenti funzioni a partire da quelle precedentemente

ottenute (vedi 1.1.2).

$$\begin{cases} v(t) = -gt \\ x(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \tag{1.1}$$

Queste sono espresse in funzione del tempo, ma come abbiamo fatto in precedenza, possiamo ricavarle anche in funzione dello spazio:

$$\begin{cases} v(x) = \sqrt{2g(h-x)} \\ t(x) = \sqrt{\frac{2(h-x)}{g}} \end{cases} \tag{1.2}$$

Se vogliamo ottenere il tempo o la velocità partendo dallo spazio, considerando $x = 0$ possiamo ottenere dalle ultime due formule:

- Tempo di caduta: $t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$
- Velocità al suolo: $v_c = \sqrt{2gh}$

• Un corpo cade da altezza $h$ con $v_0 < 0$ (verso il basso): Qui abbiamo le condizioni iniziali $x_0 = h$; $v_0 = -v_i$ se $(v_i > 0)$; $t_0 = 0$, sono quindi valide le seguenti espressioni:

$$\text{In funzione del tempo:} \begin{cases} v(t) = -v_1 - gt \\ x(t) = h - v_1 t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \tag{1.3}$$

$$\textit{In funzione dello spazio:} \begin{cases} v(x) = \sqrt{v_1^2 + 2g(h-x)} \\ t(x) = -\frac{v_1}{g} + \sqrt{\frac{v_1^2}{g^2} + \frac{2(h-x)}{g}} \end{cases} \tag{1.4}$$

Anche in questo caso ricaviamo il tempo e la velocità di arrivo al suolo.

- Tempo di caduta: $t_c = -\frac{v_1}{g} + \sqrt{\frac{v_1^2}{g^2} + \frac{2h}{g}} \rightarrow$ in questo caso abbiamo scartato la soluzione negativa, perché il tempo non può essere negativo.
- Velocità al suolo: $v_c = \sqrt{v_1^2 + 2gh}$

• Un corpo viene lanciato verso l'alto $(v_0 > 0)$, partendo dal suolo. In questo caso le condizioni iniziali sono: $x_0 = 0$; $v_0 = v_2 > 0$; $t_0 = 0$;

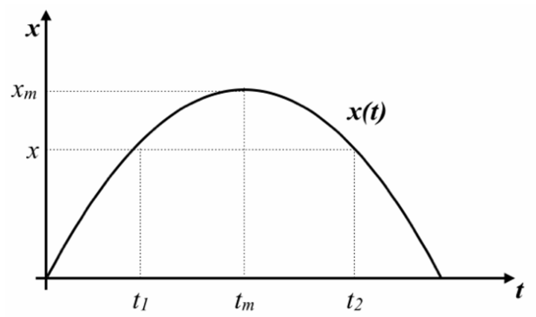
$$\text{In funzione del tempo:} \begin{cases} v(t) = v_2 - gt \\ x(t) = v_2 t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \tag{1.5}$$

$$\text{In funzione dello spazio: } \begin{cases} v(x) = \pm\sqrt{v_2^2 - 2g(x)} \\ t(x) = \frac{v_2}{g} \pm \sqrt{\frac{v_2^2}{g^2} - \frac{2x}{g}} \end{cases} \tag{1.6}$$

Si presenta in questo caso un più o meno, deriva dal fatto che il corpo passa due volte nella stessa posizione, una volta mentre sta salendo e la seconda volta mentre sta scendendo.

- Tempo di caduta: $t_c = \frac{v_2}{g} \pm \frac{v_2}{g}$
- Velocità al suolo: $v_c = \pm v_2$

La rappresentazione grafica di quest'ultimo tipo di moto è data dall'interpretazione che inizialmente il corpo si trova al livello del suolo con $t = 0; \quad v = v_2$ e successivamente $t = \frac{2v_2}{g}$ con $v = -v_2$.




## 1.2 Moto nello spazio

Quando non abbiamo un moto rettilineo (in una dimensione) possiamo descrivere il moto in maniera più generale nello spazio attraverso le dimensioni spaziali. La posizione di un elemento nello spazio è individuata da un vettore posizione:

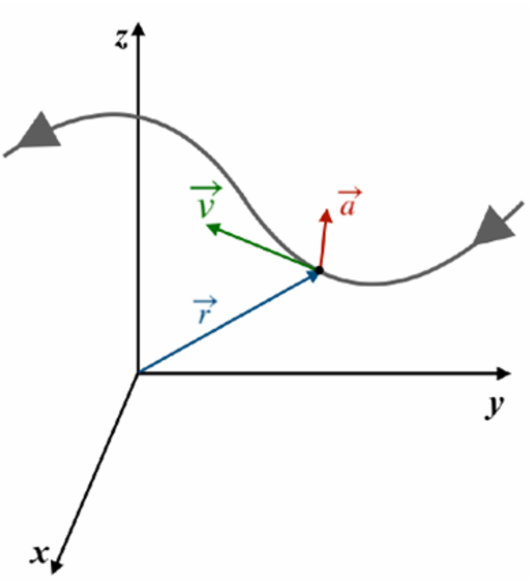



Figura 1.2: $\vec{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\imath} + z(t)\hat{k}$

- **Velocità**: I concetti di velocità media e velocità istantanea sono analoghi a quelli di una dimensione:
  dati $\vec{r_1} = \vec{r_1}(t)$ e $\vec{r_2} = \vec{r_2}(t_2)$ definisco lo spostamento $\Delta\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$ che avviene in un certo intervallo temporale $\Delta t = t_2 - t_1$, quindi (ricordando che $v_m$ è la velocità media e $v$ quella istantanea):
  $\vec{v_m} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$; $\quad \vec{v} = \lim\limits_{\Delta t \to 0}(\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}) = \frac{d\vec{r}}{dt}$
  Se vogliamo rappresentare le componenti cartesiane:
  $\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k} = \frac{d(x\hat{\imath}+y\hat{\jmath}+z\hat{k})}{dt}$ e scomponendo quest'ultima frazione possiamo ottenere: $v_x = \frac{dx}{dt}$; $\quad v_y = \frac{dy}{dt}$; $\quad v_z = \frac{dz}{dt}$

- **Accelerazione**: Procediamo in modo analogo con l'accelerazione:
  $\vec{a_m} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$; $\quad \vec{a} = \lim\limits_{\Delta t \to 0}(\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}) = \frac{d\vec{v}}{dt}$
  $a_x = \frac{dv_x}{dt}$; $\quad a_y = \frac{dv_y}{dt}$; $\quad a_z = \frac{dv_z}{dt}$
  $a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$; $\quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2}$; $\quad a_z = \frac{d^2z}{dt^2}$
  È possibile produrre un'accelerazione che varia soltanto la direzione della velocità $\vec{v}$ e non il modulo $|\vec{v}|$.

# Capitolo 2

# Dinamica

Perché un corpo si muove in un determinato modo?

# Appendice A

# Esercizi

## A.1 Cinematica

### A.1.1 In slide di teoria

- *Guido l'automobile a* $43 Km/h$ *per* $5.2 Km$ *su una strada rettilinea. Resto senza benzina e percorro a piedi* $1.2 Km$ *in* $27$ *minuti, fino al distributore. Qual è stata la mia velocità media? Disegnare anche un grafico di* $x(t)$.

  $v(x) = 43\frac{Km}{h}$
  Spazio percorso è: $x = x_1 + x_2 = (5,2 + 1,2)Km = 6,4Km$
  $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{6400}{t}\frac{m}{s}$ Ci manca da trovare $t = t_1 + t_2$
  $t_1 = (\frac{1}{43} * 5,2)\frac{h}{Km} * Km = 0,1209h = 435,24s$
  $t_2 = 27m = 27 + 60 = 1620s$
  Concludendo: $v_m = \frac{6400}{2055,24}\frac{m}{s} = 3,1139\frac{m}{s}$
  Posso ricavare la legge oraria facendo l'integrale definito della velocità, ottenendo $x(t) = vt$