Dispensa TDN+identità algebriche

A.Fenu / Spano

December 1, 2019

Identità algebriche

Id1. La somma degli interi da 1 a n vale $\frac{n(n+1)}{2}$.
Id2. La somma dei quadrati da 1 a n vale $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
Id3. La somma dei cubi da 1 a n vale $(\frac{n(n+1)}{2})^2$.
Id4. La somma dei primi n dispari vale n^2.
Id5. Data una progressione aritmetica, ossia una successione di elementi con differenza costante (e.g. $a, a+b, a+2b, a+3b, ...$), la somma di termini consecutivi vale $(primoterminescelto+ultimoterminescelto)*(numeroditermini)/2$.
Id6. Data una progressione geometrica (della forma $a, ar, ar^2, ar^3, ...$), la somma dei primi n termini è $a \cdot \frac{1-r^n}{1-r}$. Se $r = 1$ la somma è banale in quanto composta da termini uguali. Se $|r| < 1$, la somma di infiniti termini della progressione è finita, e vale semplicemente $a \cdot \frac{1}{1-r}$.
Id7. Vale la seguente fattorizzazione: $x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + ... + xy^{n-2} + y^{n-1})$.
Id8. Per n dispari vale la seguente fattorizzazione: $x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - ... - xy^{n-2} + y^{n-1})$.
Id9. Vale la seguente fattorizzazione: $a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2 - 2ab)(a^2 + 2b^2 + 2ab)$.
Esempio: è $2015^4 + 4^{2015}$ primo? No.

Teoria dei Numeri

1.Teorema fondamentale dell'aritmetica. Ogni interno n può essere scritto come prodotto di potenze di primi distinti in un unico modo (a meno dell'ordine). Tale scrittura si chiama fattorizzazione in primi ed è solitamente indicata con la notazione $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$.
2.Divisione euclidea. Siano a, b due interi. Allora esistono interi q, r tali che $b = a \cdot q + r$, dove q ed r sono unici e sono chiamati rispettivamente *quoziente, resto.* Se $r = 0$ si dice che $a|b$ (a divide b).
3.MCD, mcm. L'MCD e l'mcm di n interi, sono rispettivamente il più grande divisore positivo di tutti gli n interi ed il più piccolo multiplo. Esempio: $\text{MCD}(6, 12, 21) = 3$ mentre $\text{mcm}(6, 12, 21) = 84$.L'MCD è indicato come (a, b) mentre l'mcm con $[a, b]$.

4.Calcolare MCD.L'MCD tra 2 o più interi è il prodotto di tutti i fattori primi comuni con esponente minore. Esempio: $18 = 2 \cdot 3^2$, $540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$. Gli unici primi in comune sono $2, 3$ con esponente minore rispettivamente $1, 2$; l'MCD varrà pertanto $2 \cdot 3^2$.
5.Calcolare mcm.L'mcm tra 2 o più interi è il prodotto di tutti i primi, comuni e non comuni, con esponente maggiore. Esempio: $36 = 2^2 \cdot 3^2$, $270 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5$. I primi comuni e non comuni sono $2, 3, 5$ con esponente maggiore rispettivamentw $2, 3, 1$, dunque l'mcm sarà $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 = 540$.
6.Prodotto MCD ed mcm. Vale la seguente relazione: $(a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b$.
7.Primalità. La condizione di primalità (o coprimalità) è soddisfatta se $(a, b) = 1$.
8.Teorema di Bezout. Siano a, b due interi e d il loro MCD. Allora esistono m, n interi tali che $ma + nb = d$. Tali soluzioni (anche soluzioni della *diofantea* associata) si possono trovare utilizzando l'algoritmo di Euclide.
9.Algoritmo di EuclideL'algoritmo di Euclide afferma che $(a, b) = (a - b, b)$. Questo ci permette di calcolare agilmente l'MCD tra 2 interi grandi. Esempio: $(22, 7) = (15, 7) = (8, 7) = (1, 7) = 1$, $(44, 17) = (10, 17) = (10, 7) = (7, 3) = (3, 1) = 1$.
10.Soluzione diofantee lineari. Determinare i coefficienti visti nel punto 8. significa risolvere l'equazione diofantea associata. Vediamo un'esempio di risoluzione utilizzando l'algoritmo di *Euclide*. Scriviamo ordinatamente tutte le relazioni dell'ultimo esempio 9.: $44 = 17 * 2 + 10$, $17 = 10 * 1 + 7$, $10 = 7 * 1 + 3$, $7 = 3 * 2 + 1$ (notare che sono tutte scritte nella forma $b = a \cdot q + r$). Cominciamo ora dall'ultimo resto ottenuto, ed ogni volta sostituiamo - nell'espressione - il resto precedente. In questo caso dovremmo prima esprimere il resto 1 come $1 = 7 - 3 * 2$. Ora sostituiamo il resto 3, ottenendo $1 = 7 - (10 - 7 * 1) * 2 = 7 * 3 - 10 * 2$. Ora sostituiamo il 7: $1 = 7 * 3 - 10 * 2 = (17 - 10 * 1) * 3 - 10 * 2 = 17 * 3 - 10 * 5$. Ora 10 ottenendo così $1 = 17 * 3 - 10 * 5 = 17 * 3 - (44 - 17 * 2) * 5 = 17 * 13 - 44 * 5$. I coefficienti 13 e -5 saranno dunque le soluzioni della diofantea $17a + 44b = 1$. Tutte le soluzioni saranno perciò $a = 13 + 44k$, $b = -5 - 44k$ per k naturale.
11.Definizione Congruenza. Si dice $m \equiv n \pmod{k}$ se m, n danno lo stesso resto nella divisione per k. Varrà dunque $k|(m - n)$. Esempio: $44 \equiv 3 \pmod{4}1$, $10 \equiv 1 \pmod{3}$.
12.Condizioni di congruenza note. Modulo $2^k, 5^k, 10^k$: un intero è congruo alla sue ultime k cifre. Modulo $3, 9$: un intero è congruo alla somma delle sue cifre.Modulo 11: un intero è congruo alla somma a segni alterne delle sue cifre, comincianod dalla cifra delle unità con segno positivo.
13.Residui importanti. Tutti i quadrati modulo $3o4$ danno resto 0 o 1. Modulo 5 invece $0, 1, -1$. Modulo 8, resti $0, 1, 4$. Le quinte potenze modulo 11 hanno resto solo $0, 1, -1$. Le quarte potenze modulo 16 sono solo $0, 1$.
14.Funzione φ di Eulero.$\varphi(n)$ (si legge 'FI di enne'), per n intero, è definito come "il numero di interi coprimi con n minori di questo". Si calcola così: sia $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, allora $\varphi(n) = (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}) \cdot (p_2^{\alpha_2} - p_2^{\alpha_2 - 1}) \cdot \ldots \cdot (p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k - 1})$.
14.Teorema di Wilson. Vale la relazione $(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}$.
15.Piccolo teorema di Fermat. Vale la relazione $a^p \equiv a \pmod{p}$. In particolare, se $(a, p) = 1$, vale $a^(p - 1) \equiv 1 \pmod{p}$. Questo è dato dal fatto che se $(a, p) = 1$ allora esiste $\frac{1}{a} \pmod{p}$ (si può trovare con una diofantea vista nei punti precedenti).

16.Teorema di Eulero Fermat. Sia a, m interi tali che $(a, m) = 1$, allora vale $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.
17.Inverso modulo. Dati due interi a, b coprimi, si dice "inverso di a modulo b" (indicato con a^{-1}) un qualsiasi valore di m per il quale la diofantea $am + bn = 1$ ha soluzione.
18.Teorema Cinese del Resto. Esiste una (unica modulo $k_1 * k_2 * ... * k_h$) soluzione al sistema $x \equiv a_1 \pmod{k}_1$, $x \equiv a_2 \pmod{k}_2$, $x \equiv a_3 \pmod{k}_3$, ..., $x \equiv a_h \pmod{k}_h$ se tutti gli $k_1, k_2, ..., k_h$ sono coprimi. Tale soluzione, scomoda da trovare, si costruisce così: sia P_i il prodotto di tutti i k con indice diverso da i; sia Q_i l'inverso di P_i modulo k_i. Allore la soluzione al sistema è $x \equiv a_1 * P_1 * Q_1 + a_2 * P_2 * Q_2 + ... + a_h * P_h * Q_h$ modulo $k_1 * k_2 * ... * k_h$.
19.Definizione valutazione p-adica. La valutazione p-adica di n è l'esponente di p nella fattorizzazione in primi di n. Alternativamente è quell'intero k tale che $p^k | n$ e $p^{k+1} \nmid n$. E' indicata con $v_p(n)$ e vale $v_p(a * b) = v_p(a) + v_p(b)$. Esempio: $v_2(48) = 4$,$v_7(12) = 0$.
20.Lemma LTE dispari. Sia p un primo dispari e x, y degli interi positivi tali che $p \nmid x, y$ ma $p | x - y$. Allora per ogni n intero vale $v_p(x^n - y^n) = v_p(x - y) + v_p(n)$. Esempio: $v_3(10^9 - 7^9) = v_3(10 - 7) + v_3(9) = 1 + 2 = 3$. Per n dispari vale anche il segno $+$.
21.Fromula di Legendre. Afferma che $v_p(n!) = \sum_{i=1}^{+\infty} \lfloor \frac{n}{p^i} \rfloor$. Esempio: quanti fattori 3 ci sono in 11!? Risposta: $\lfloor \frac{11}{3} \rfloor + \lfloor \frac{11}{9} \rfloor + \lfloor \frac{11}{27} \rfloor + \lfloor \frac{11}{81} \rfloor + \lfloor \frac{11}{243} \rfloor + ... = 3 + 1 + 0 + 0 + .. = 4$.

Problemi

1

Determinare la somma dei numeri da 1 a 2019 e fornirne le ultime 4 cifre.

2

Ogni giorno carico nella mia carta un numero di soldi pari a 5 euro in più rispetto al totale già presente: il primo giorno metto 1 euro, il secondo aggiungo 6 euro, il terzo ne aggiungo 11.. e così via. Quanti soldi avrò nella carta alla fine del 15esimo giorno?

3

Giulia48 pensa ad una serie di numeri particolari: ogni numero, partendo da uno, viene seguito da un numero dispari e poi da un quadrato, in questo modo:1, 3, 2^2, 5, 3^2, 7, 4^2, 9, e così via. Quanto vale la somma dei primi 100 numeri della successione? e dei primi 103?

4

Salmo gioca un po' coi lego e dopo un po' con l'ego. Sapendo che è solito costruire piramidi con base quadrata utilizzando dei cubetti da costruzione, quanti pezzi dovrà usare per costruire una piramide alta 7?

5 **

In quanti modi posso scrivere 2005 come somma di interi consecutivi?

6 *

I fondi della scuola seguono una bella proprietà: ogni giorno vengono divisi in 3 (non per forza con risultato intero) mucchietti e di questi, 1 viene buttato via. Se i fondi della scuola oggi sono 7842, quale sarà la somma dei fondi giornalieri partendo da oggi e arrivando al 10 ottobre?

7 *

Ho 100 cerchi concentrici. Cominciando dal cerchio interno (colorato rosso) coloro alternativamente le regioni delimitate da 2 circonferenze, usando il rosso e il verde. Qual è il rapporto tra l'area rossa e quella verde?

8

Possiedo degli anelli da giocoliere con spessore 1 cm. Li ho appesi ad un chiodo ordinandoli dal più grande (in alto) al più piccolo (in basso) in maniera tale che ogni anello sia concatenato con il precedente e successivo. Sapendo che l'anello più grande misura 20 centimetri di diametro e che il diametro (esterno) di ogni anello misura 1 centimetro in meno rispetto al precedente, qual è la distanza tra il chiodo e l'estremità dell'anello più in basso (con diametro 3 cm)?

9

Risolvi il problema 5 con il numero 15 al posto di 2005. Prova piano piano a trovare idee per generalizzare la soluzione.

10

Calcola la somma dei primi 20 cubi pari. Se hai voglia anche dei primi 20 cubi dispari.

11 Dimostrativo a caso**

Dimostrare che per tutti i naturali n vale $40^n * n!|(5n)!$.

12 ISL 2006 N2 ***Provateci a tempo perso

Sia $x \in (0,1)$ un reale e $y \in (0,1)$ un altro reale tale che la sua n-esima cifra decimale corrisponde alla 2^n-esima cifra decimale di x. Dimostrare che se x è razionale, lo è anche y.

13

Determinare $(121, 13486)$.

14

Determinare $(134, 366)$ utilizzando l'algoritmo di Euclide. Determinare in seguito $[134, 366]$.

15 *

Determinare $(2^a - 1, 2^b - 1)$.

16

Determinare la cifra delle decine di 7^{2019}.

17

Determinare le ultime 2 cifre di 2^{20}.

18 *

Dimostrare che per ogni n naturale esistono infinite soluzioni naturali all'equazione $x^2 + y^2 = z^2 + n$.

19

Siano a, b, c interi positivi tali che sia a sia b sia c dividano $a + b + c$ e $(a, b) = 1$, $(b, c) = 1$, $(c, a) = 1$. Determinare tutti i possibili valori di a, b, c.

20

Dimostrare che $\sqrt{2}$ è irrazionale.

21 **

Dimostrare ultimo teorema di Fermat per $n = 4$.

22

Marianna possiede n tazze, dove n corrisponde alle ultime 3 cifre della somma dei primi 45 quadrati dispari. Sapendo che possiede tante monete quanto vale l'mcd tra n e 4074, determinare la ricchezza di Marianna.

23

Quanto vale $[a, b] * (a, b)$?

24 Sophie Germain*

Determinare quando $n^4 + 4^n$ è un primo.

25

Mostrare che $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ non ha soluzioni intere positive.

26

E' vero che se, sia p che $p^2 + 2$ sono numeri primi, allora anche $p^3 + 2$ lo è?

27

Trovare tutti gli interi n tali che $5^n + 4$ sia un quadrato perfetto.

28

Calcolare la cifra delle unità di 2013^{2013}.

29

Calcolare le ultime 2 cifre di 47^{20}, 99^{20}, 33^{20}.

30

Intuire e dimostrare il seguente fatto: le potenze n-esime di un intero k sono sempre periodice modulo h.

31

Provare a dare un senso a questa espressione: $x \equiv \frac{1}{3}(5)$.

32

Trovare le soluzioni positive dell'equazione $x^5 + y^5 = 2019^5 * 11 + 17$.

33

Diciamo che due polinomi a coefficienti interi p e q sono simili se hanno lo stesso grado e gli stessi coefficienti a meno dell'ordine.
(a) Dimostrare che se p e q sono simili, allora $p(2007) - q(2007)$ e' un multiplo di 2.
(b) Esistono degli interi $k > 2$ tali che, comunque siano dati due polinomi simili p e q, $p(2007) - q(2007)$ e' un multiplo di k?

34

Determinare almeno una coppia di interi a, b che rispetti $610a + 377b = 1$.

35

Determinare almeno una coppia di interi a, b che rispetti $5a + 1225b = 1$.

36

Determinare almeno una coppia di interi a, b che rispetti $1001a + 242b = 128$.

37

Trovare il più piccolo multiplo di 980 tale che, quando diviso per 143, si ottenga resto 17.

38

Capire intuitivamente perché è vero il teorema di *Bezout*.

39

Trovare, se esiste, una terna che rispetti $91x + 77y + 143z = 1$

40

Dopo gli esercizi precenti, provare a risolvere le seguenti diofantee non lineari:
-$9^a - 7^a = 2^b$
-$2ab + 9a + 10b + 9 = 0$.

41 -Difficile-

Sia n un intero positivo e p un primo. Dimostra che, se a, b, c sono interi (non necessariamente positivi) che rispettano

$$a^n + pb = b^n + pc = c^n + pa$$

allora $a = b = c$.

42 -Medio-

Determinare tutte le terne (x, y, z) di interi positivi tali che $x \leq y \leq z$ e

$$x^3(y^3 + z^3) = 2012(xyz + 2).$$

43 Dimostrativo Facile

Dimostrare il seguente fatto: se p è un primo, allora le uniche configurazioni di un p-agono regolare (con vertici colorati di bianco o di nero) che rimangono fissate a seguito di una rotazione (non identità) è 2.

44

Esistono potenze di 2 tali che, semplicemente riarrangiando le loro cifre (senza zeri iniziali) si ottiene una nuova potenza di 2?

45

Determinare la somma di tutti i possibili valori di $f(2019)$ sapendo che f è una funzione con le seguenti proprietà: $f(2) = 2$, $f(m) > f(n)$ se $m > n$, $f(mn) = f(m)f(n)$.

46

Uno dei matematici rivelò agli altri che stava studiando i polinomi, nella speranza di trovare una formula per il terzo grado. "Durante il mio lavoro, mi sono imbattuto in certi polinomi molto particolari: se chiamiamo n la somma dei coeffcienti di $p(x)$, allora $p(2017) = n!$. Qual è il più grande n minore di 10000 tale per cui esista un polinomio p a coeffcienti interi che soddisfi queste condizioni?"

47

Innanzi a noi si ergeva Lucifourier, enorme, orribile e puzzolente. "Ma quanto è alto?", chiesi a Cartesio? Ed egli paziente mi rispose: siano a, b, c, d, e, f, g, h le soluzioni reali di
$x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7) = 1$. La sua altezza è pari a $a^7 + b^7 + c^7 + d^7 + e^7 + f^7 + g^7 + h^7$. Determinare il valore.

48

Quante sono le soluzioni reali all'equazione $x^2 + 10000 * \lfloor x \rfloor = 10000x$?

49 *Difficile

Sia n un intero positivo e siano $a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1} = a_1, a_{n+2} = a_2$ termini di una successione che rispettano la seguende legge: $a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$ (per $1 \leq i \leq n$). Determinare la somma di tutti gli $n < 10000$ per i quali esiste una tale successione.

50

Andammo poi nel girone degl'ignavi, dov'erano coloro che sono troppo pigri per far di conto. La loro punizione era calcolare, senza posa, i termini d'una sequenza definita come segue: $a1 = 30$ e, per ogni $n \geq 1$, chiamasi a_{n+1} il minimo intero positivo maggiore di a_n tale che $mcm(a_1, ..., a_{n+1}) > mcm(a_1, ..., a_n)$. Tutto questo mentre un dimonio urlava loro nelle orecchie: "Lavorare, lavorare, lavorare. . . ". "Sapresti dire—mi chiese Cartesio—quanto vale il più grande elemento della sequenza minore di 2405?"